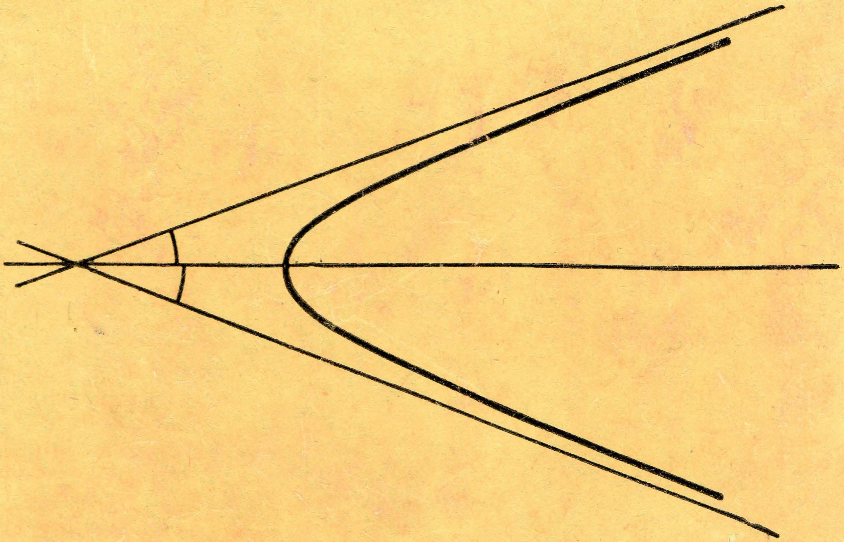
Л. С. АТАНАСЯН



Аналитическая геометрия

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Л. С. АТАНАСЯН

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Часть первая

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Издательство «Просвещение»
Москва 1967

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс аналитической геометрии, читаемый на физико-математических факультетах педагогических институтов, играет весьма важную роль в формировании учителя математики и физики. Этот курс, наряду с курсом математического анализа, вооружает учителя математики аппаратом математического исследования. Глубокое изучение аналитической геометрии необходимо не только для расширения математического кругозора учителя. Знание теоретического материала, умение решать задачи необходимо для сознательного усвоения многих других специальных дисциплин, в первую очередь курсов математического анализа, физики, особенно механики. Трудно назвать такую специальную дисциплину, изучаемую студентом в пединституте, в которой не использовались бы те или иные положения аналитической геометрии.

Настоящий учебник по аналитической геометрии написан в полном соответствии с действующей программой курса для студентов физико-математических факультетов по специальности «Математика» и охватывает всю программу. Книга предназначена для студентов как дневных, так и вечерних и заочных отделений. Однако при ее написании в большей степени, чем в других учебниках, учтены специфические условия, в которых находятся студенты заочных и вечерних отделений. Книга может быть использована также студентами-физиками и лицами, изучающими аналитическую геометрию самостоятельно.

В настоящей первой части изложена аналитическая геометрия на плоскости. В этой части семь глав. Первая глава посвящена элементам векторной алгебры. Здесь рассматриваются аффинные операции над векторами — сложение, вычитание, умножение на число, вводится понятие координат векторов. Во второй главе определяются координаты точек на плоскости и рассматриваются простейшие задачи аналитической геометрии в координатах. Третья глава посвящена понятию уравнения геометрического места точек на плоскости. В четвертой главе излагается теория прямой линии на плоскости. В пятой и седьмой главах излагается теория кривых второго порядка, в пятой главе изучаются кривые второго порядка по каноническим уравнениям, а в седьмой главе дана общая теория этих кривых. Шестая глава носит вспомогательный характер, там излагается вопрос о преобразовании координат точек на плоскости.

Во второй части книги будет изложена аналитическая геометрия в пространстве.

При написании этой книги, в отличие от многих учебников по аналитической геометрии, автор руководствовался следующими принципами.

а) Учебник содержит минимальный теоретический материал, необходимый для усвоения всей программы. Если отдельные вопросы программы позволяют различное толкование, то автор в этих случаях выбирает наиболее «экономное».

б) При прохождении курса аналитической геометрии существенное значение имеет приобретение навыков в решении задач. Изучение теоретического материала должно сопровождаться решением большого количества разнообразных задач. Это условие является необходимым для сознательного усвоения курса и успешной сдачи зачетов и экзаменов.

Известно, что количество часов, отводимое студентам-заочникам на экзаменационных сессиях для изучения курса аналитической геометрии и особенно для решения задач, совершенно недостаточно. Студенту-заочнику в межсессионный период необходимо самостоятельно изучить значительную часть теоретического материала и приобрести навыки в решении задач. При этом самостоятельно овладеть теоретической частью курса зачастую бывает легче, чем научиться решать задачи.

На первых порах учащиеся испытывают большие трудности при подборе необходимого минимума задач; большие затруднения вызывает и методика их решения. Следует также учесть, что существующие задачники по аналитической геометрии ([16], [18], [20][1] и др.), написанные для студентов технических вузов и университетов, содержат мало задач, имеющих профессиональную направленность и способствующих подготовке учителя математики. Между тем курс аналитической геометрии имеет непосредственное отношение к профессиональной подготовке учителя и к его работе в школе.

В связи с этим все теоретические вопросы, изложенные в учебнике, иллюстрированы многочисленными примерами и задачами. Некоторые задачи приведены с подробными решениями. Кроме того, в конце каждого параграфа дано большое число примеров и задач для самостоятельного решения. Всего в первой части свыше 400 таких упражнений. В конце книги даны ответы и краткие указания к задачам. Существенно отметить, что при изучении аналитической геометрии по данному учебнику студенту-заочнику не потребуется привлечение какого-либо задачника. В учебнике отобран минимум задач и упражнений, который необходимо решить в межсессионный период.

в) В книге обращено большое внимание приложению аналитической геометрии к решению задач элементарной геометрии. В ряде случаев отдельные параграфы посвящены этому вопросу. Нам кажется, что этот принцип является весьма существенным при написании учебника для студентов педагогических институтов.

По нашему мнению, эти принципы соответствуют специфике заочного обучения, и учебник будет доступен среднему студенту-заочнику, обучающемуся на первом курсе.

При написании учебника использована учебная литература по аналитической геометрии, список которой помещен на страницах 297—298. Широко использован задачник-практикум автора по аналитической геометрии [21]. Многие из задач, помещенные там, вошли в настоящий учебник.

---

[1] Здесь и в дальнейшем цифры в прямых скобках относятся к списку литературы, помещенному в конце книги.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

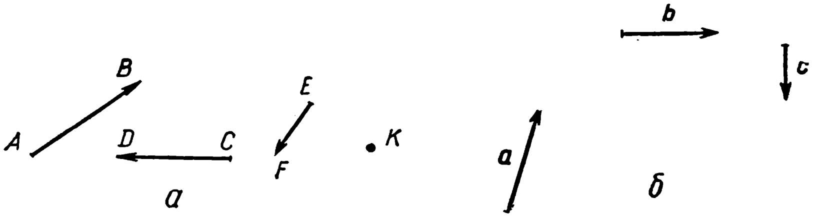
§ 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА; РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

1. Понятие вектора. В элементарной геометрии, как известно, отрезком AB называется совокупность всех точек прямой, лежащих между A и B. Точки A и B называются концами отрезка. При этом, очевидно, порядок, в котором берутся концы отрезка, несуществен. Однако при применении геометрии к изучению физики, особенно механики, часто приходится рассматривать направленные отрезки, т. е. отрезки, для которых указаны начальная и конечная точки. Если AB и BA геометрически один и тот же отрезок, то, рассматривая их как направленные отрезки, мы должны считать, что они задают различные объекты. Направленный отрезок называется вектором.

Итак, *вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается первой, какая — второй. Первая точка направленного отрезка называется началом вектора, а вторая точка — концом.*

Направление вектора на чертеже отмечается стрелкой, обращенной острием к концу вектора.

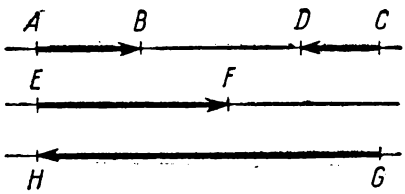
В тексте вектор записывается двумя заглавными буквами латинского алфавита с общей чертой наверху, при этом первая из них обозначает начало, вторая — конец вектора. Например, $\overline{AB}$,



Черт. 1

$\overline{CD}$, $\overline{EF}$ — векторы, изображенные на чертеже 1, *а*, причем A, C и E — соответственно начала, а B, D и F — концы данных векторов. В некоторых случаях вектор обозначается также одной строчной буквой жирного шрифта, например, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... (черт. 1, *б*).

2. Нуль-вектор. При определении вектора мы предполагали, что начало вектора не совпадает с его концом. Однако в целях общности будем рассматривать и такие «векторы», у которых начало совпадает с концом. Они называются нулевыми векторами или нуль-векторами и обозначаются символом **0**. На чертеже нуль-вектор изображается одной точкой. Например, на чертеже 1, *а* нуль вектором будет точка K. Этот вектор может быть обозначен также через $\overline{KK}$.



Черт. 2

3. Коллинеарные векторы. *Два вектора* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *называются коллинеарными, если они лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых. Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.*

На чертеже 2 векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ попарно коллинеарны. На чертеже 4 векторы $\overline{NP}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, а $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны.

Если ненулевые векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, то они могут иметь одно и то же направление или противоположные направления. В первом случае их называют сонаправленными, во втором случае — противоположно направленными. На чертеже 2 векторы $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$ сонаправлены, а $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ или $\overline{AB}$ и $\overline{GH}$ — противоположно направлены.

4. Модуль вектора. Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие длины или модуля вектора.

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка, изображающего данный вектор. Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается символом $|\overline{AB}|$ или просто AB (без черты наверху!). Если вектор обозначен одной буквой, например $\boldsymbol{a}$, то его длина обозначается так: $|\boldsymbol{a}|$. Очевидно, длина нулевого вектора равна нулю. Обратно, если $|\boldsymbol{a}| = 0$, то $\boldsymbol{a}$ — нуль-вектор. *Вектор называется единичным, если его модуль равен единице.*

5. Равенство векторов. В элементарной геометрии два отрезка называются равными, если у них длины равны. Однако это определение нецелесообразно распространять на направленные отрезки, так как в этом случае естественно также учитывать и направления отрезков. Например, если векторами изображаются силы в механике, то, очевидно, равными силами следует называть не те силы, у которых только величины равны, а те, у которых как величины, так и направления совпадают. В самом деле, эффект силы зависит не только от величины, но и от направления. Введем следующее определение.

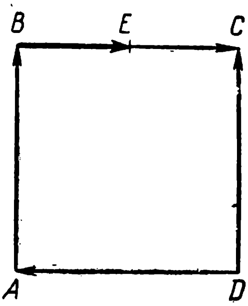
Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *называются* ***равными***, *если выполнены следующие условия*:

а) *модули векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *равны*;

б) *векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны и сонаправлены.*

Все нулевые векторы считаются равными друг другу.

Важно отметить, что если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то векторы не равны. На чертеже 3 изображен квадрат $ABCD$. Вектор $\overline{AB}$ равен вектору $\overline{DC}$, так как выполнены все условия равенства. Вектор $\overline{BC}$ не равен вектору $\overline{DA}$. В самом деле, для этих векторов выполнено условие а), но неполностью выполнено условие б), так как они имеют противоположные направления. Для векторов $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$ (E — середина стороны BC) выполнено условие б), но не выполнено условие а), поэтому $\overline{BE}$ не равен вектору $\overline{AD}$. Вектор $\overline{AB}$ не равен вектору $\overline{DA}$, так как для них выполнено первое условие, но не выполнено второе.

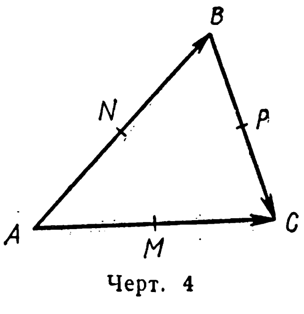


Черт. 3

Равенство векторов обозначается так же, как и равенство чисел. Например, предложение «вектор $\boldsymbol{a}$ равен вектору $\boldsymbol{b}$» символически можно записать так: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Аналогично, предложение «вектор $\overline{AB}$ не равен вектору $\overline{CD}$» можно записать так: $\overline{AB} \neq \overline{CD}$.

П р и м е р 1. Пусть ABC — произвольный треугольник, а M, N и P — соответственно середины сторон AC, AB и BC (черт. 4). Указать, какие из следующих пар векторов равны и какие только коллинеарны: а) $\overline{AN}$ и $\overline{MP}$; б) $\overline{NP}$ и $\overline{CA}$; в) $\overline{BM}$ и $\overline{PC}$; г) $\overline{PC}$ и $\overline{BC}$; д) $\overline{NB}$ и $\overline{MP}$.

Р е ш е н и е. а) Вектор $\overline{AN}$ равен вектору $\overline{MP}$, так как они удовлетворяют всем условиям равенства. В самом деле, $AN = MP$ в силу того, что MP — средняя линия треугольника ABC. Векторы $\overline{AN}$ и $\overline{MP}$ коллинеарны благодаря тому, что средняя линия MP треугольника ABC параллельна стороне AB. Из чертежа 4 видно, что рассматриваемые векторы сонаправлены.



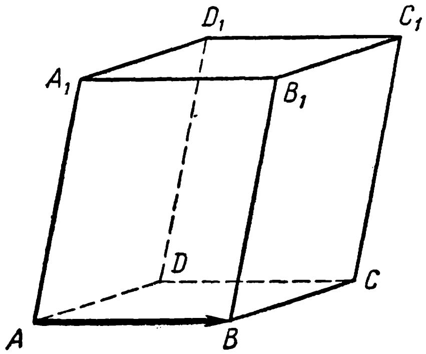
Черт. 4

б) Векторы $\overline{NP}$ и $\overline{CA}$ коллинеарны, так как NP — средняя линия треугольника ABC. Но $\overline{NP} \neq \overline{CA}$ хотя бы потому, что $NP \neq CA$. Таким образом, условие а) равенства векторов не выполняется. Из чертежа 4 видно, что второе условие также не выполняется полностью.

в) Векторы $\overline{BM}$ и $\overline{PC}$ не коллинеарны, так как прямые BM и PC пересекаются в точке B. Отсюда следует, что $\overline{BM} \neq \overline{PC}$ (не выполняется условие б).

г) Легко убедиться в том, что векторы $\overline{PC}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны, но не равны.

д) Вектор $\overline{NB}$ равен вектору $\overline{MP}$, так как выполнены все условия равенства векторов.



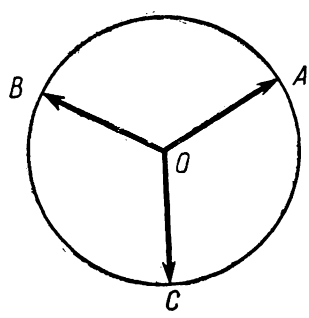
Черт. 5

Пример 2. В пространстве дан параллелепипед $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ (черт. 5). Указать все векторы, построенные на ребрах данного параллелепипеда и равные вектору $\overline{AB}$.

Решение. Из определения равенства векторов следует, что равные векторы лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых. Таким образом, векторы, равные $\overline{AB}$, могут лежать только на следующих ребрах: AB, A_1B_1, D_1C_1, DC. Легко видеть, что имеют место следующие равенства: $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$, $\overline{D_1C_1} = \overline{AB}$, $\overline{DC} = \overline{AB}$, $\overline{AB} = \overline{AB}$. Все другие векторы, построенные на ребрах данного параллелепипеда, не равны вектору $\overline{AB}$. В частности, $\overline{B_1A_1} \neq \overline{AB}$, $\overline{C_1D_1} \neq \overline{AB}$ и т. д.

Пример 3. На чертеже 6 изображены три вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, имеющие начало в центре O окружности, а концы расположенными на этой окружности. Равны ли попарно эти векторы?

Решение. Очевидно, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ попарно не равны, так как прямые, на которых они расположены, попарно пересекаются в точке O. Однако об этих векторах можно сказать, что их длины (или модули) равны. Таким образом, $\overline{OA} \neq \overline{OB}$, но $|\overline{OA}| = |\overline{OB}|$. Точно так же, $\overline{OA} \neq \overline{OC}$ и $\overline{OB} \neq \overline{OC}$, но $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}|$.



Черт. 6

Имеется много общих свойств между понятиями равенства чисел и равенства векторов. В частности, справедливо следующее предложение.

Т е о р е м а [1.1][1]. *Понятие равенства векторов удовлетворяет следующим условиям:*

а) каждый вектор равен самому себе (у с л о в и е р е ф л е к с и в н о с т и);

б) *если вектор* $\boldsymbol{a}$ *равен вектору* $\boldsymbol{b}$, *то вектор* $\boldsymbol{b}$ *равен вектору* $\boldsymbol{a}$ (у с л о в и е с и м м е т р и ч н о с т и);

в) *если вектор* $\boldsymbol{a}$ *равен вектору* $\boldsymbol{b}$, *а* $\boldsymbol{b}$ *равен вектору* $\boldsymbol{c}$, *то* $\boldsymbol{a}$ *равен* $\boldsymbol{c}$ (у с л о в и е т р а н з и т и в н о с т и).

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

В заключение отметим, что понятие сонаправленности, которое фигурирует в определении равенства векторов, носит наглядный, интуитивный характер. Можно дать другое определение равенства векторов, не пользуясь понятием сонаправленности. Второе определение более строгое, но значительно менее наглядное: *два вектора* $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *называются равными, если середины отрезков* AD и BC *совпадают.* Это определение пригодно также и в тех случаях, когда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на одной прямой, или когда они нулевые. Мы советуем читателю при доказательстве теоремы [1.1] воспользоваться этим определением.

С алгебраической точки зрения удобнее считать, что все векторы, равные одному и тому же вектору, определяют один алгебраический объект — с в о б о д н ы й в е к т о р. Таким образом, *свободный вектор* $\boldsymbol{a}$ *есть совокупность* в с е х *векторов, равных данному геометрическому вектору* $\overline{AB}$. В дальнейшем, если нет специальных оговорок, все рассматриваемые векторы по существу будем считать свободными.

Вопросы и задачи

1. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то следует ли отсюда, что они сонаправлены? Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, то следует ли отсюда, что они коллинеарны?

2. В чем разница между вектором и отрезком?

3. Могут ли у двух равных векторов начала совпадать, а концы нет?

4. Следует ли из соотношения $\overline{AB} = \overline{CD}$ равенство $AB = CD$?

5. Следует ли из соотношения $AB = CD$ равенство $\overline{AB} = \overline{CD}$?

6. Равны ли векторы $\overline{AC_1}$ и $\overline{BD_1}$, изображенные на чертеже 5? Объясните результат.

7. Начертите на бумаге вектор $\overline{AB}$ и возьмите точку O вне прямой AB. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте вектор $\boldsymbol{a}$: а) равный вектору $\overline{AB}$ с началом в точке O; б) равный вектору $\overline{AB}$ с концом в точке O.

[1] Здесь запись [1. 1] означает, что данная теорема является первой теоремой первого параграфа. В дальнейшем теоремы будем нумеровать аналогичным образом.

8. Могут ли два вектора, лежащие на взаимно перпендикулярных прямых, быть: а) коллинеарными? б) равными?

9. Справедливо ли предложение: если $\overline{AB}$ коллинеарен $\overline{CD}$, то $\overline{AB}$ коллинеарен $\overline{DC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарен $\overline{CD}$?

10. Может ли нуль-вектор быть равен какому-нибудь ненулевому вектору?

11. Начертите параллелограмм $ABCD$ и обозначьте через O точку пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, а какие коллинеарны, но не равны: а) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; в) $\overline{BC}$ и $\overline{CB}$; г) $\overline{AO}$ и $\overline{BC}$; д) $\overline{OA}$ и $\overline{CO}$.

12. Будут ли выполнены свойства рефлексивности, транзитивности и симметричности для понятия равенства векторов, если оно введено так:

а) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

б) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они образуют угол $\varphi = 120°$.

в) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо перпендикулярны.

г) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{b}|$.

д) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо образуют угол 30°.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

1. **Перенос вектора в данную точку.** Пусть даны вектор $\boldsymbol{a} = \overline{EF}$ и произвольная точка A пространства. Построим вектор $\boldsymbol{a}'$, равный вектору $\boldsymbol{a}$ так, чтобы начало этого вектора совпало с точкой A. Для этой цели достаточно провести через точку A прямую l, параллельную прямой EF, и отложить на этой прямой от точки A отрезок AB так, чтобы $AB = EF$. При этом точку B на прямой l следует выбрать так, чтобы векторы $\overline{EF}$ и $\overline{AB}$ были сонаправлены. Очевидно, $\overline{AB}$ есть искомый вектор $\boldsymbol{a}'$[1]. Легко видеть, что, каков бы ни был данный вектор $\boldsymbol{a}$ и какова бы ни была точка A, существует один и только один вектор $\boldsymbol{a}'$, равный вектору $\boldsymbol{a}$ с началом в точке A. Мы будем говорить, что *вектор $\boldsymbol{a}'$ получен из $\boldsymbol{a}$ путем переноса в точку A или путем отложения от точки A*. Нетрудно убедиться в справедливости следующих предложений:

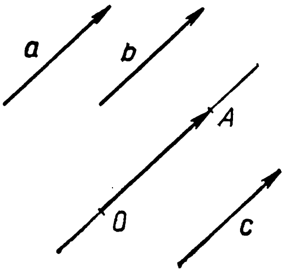
а) Если несколько равных векторов отложить от одной и той же точки, то их концы совпадут (черт. 7, *а*).

б) Если несколько попарно коллинеарных векторов перенести в одну и ту же точку O, то их концы будут лежать на одной прямой, проходящей через точку O и параллельной данным векторам[2] (черт. 7, *б*).

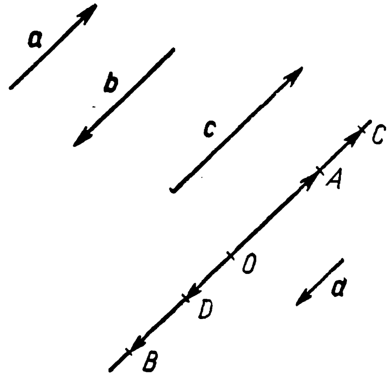
---

[1] См. задачу 7.

[2] Это свойство объясняет термин «коллинеарность», что означает «солинейность», т. е. принадлежность одной и той же прямой.

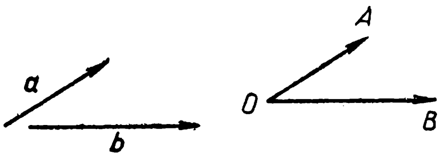


Черт. 7 *а*



Черт. 7 *б*

в) Если два неколлинеарных вектора перенести в точку O, то их концы вместе с точкой O не будут лежать на одной прямой (черт. 7, *в*).

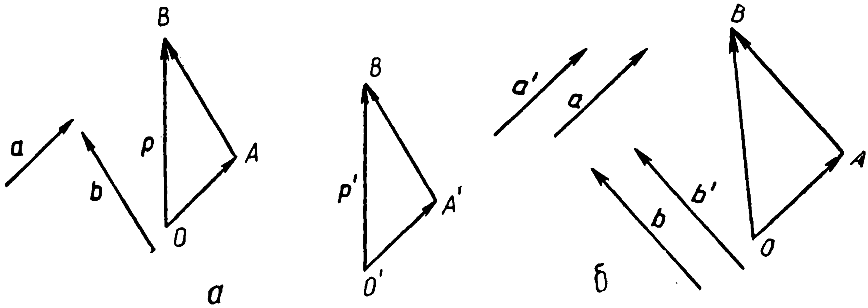


Черт. 7 *в*

2. Сумма двух векторов. Теперь мы введем операцию сложения двух векторов, играющую важную роль в векторной алгебре.

С у м м о й двух произвольных векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется третий вектор* $\mathbf{p}$, *который получается следующим образом. От произвольной точки O откладывается вектор* $\mathbf{a}$, *от его конца A откладывается вектор* $\mathbf{b}$, *получившийся в результате этого построения вектор* $\overline{OB}$, *имеющий начало в начале вектора* $\mathbf{a}$, *а конец — в конце вектора* $\mathbf{b}$, *и есть вектор* $\mathbf{p}$ (черт. 8).

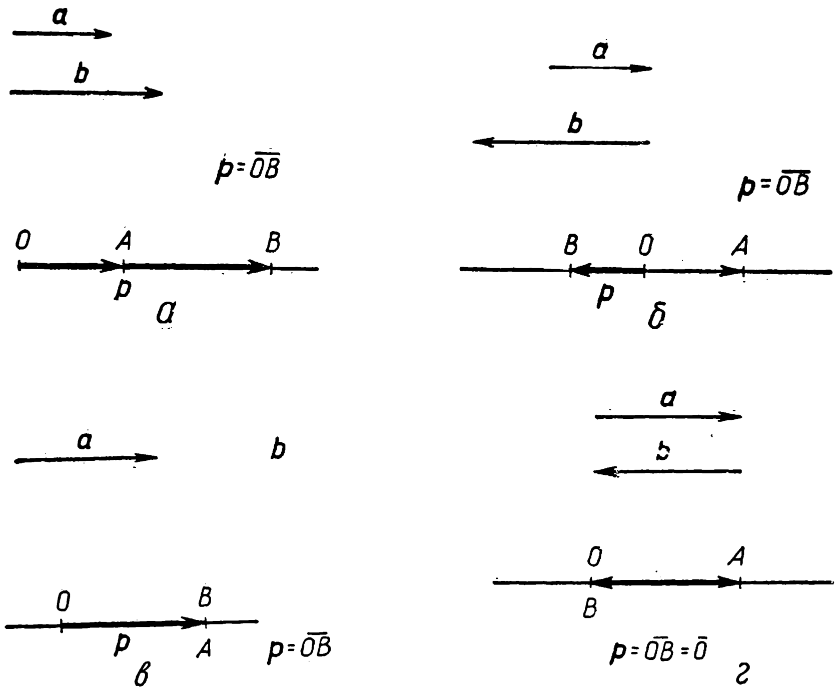
Сумму двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем записывать так: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{p}$. Правило для получения суммы, описанное выше, называется п р а в и л о м т р е у г о л ь н и к а. Это название объясняется



Черт. 8

тем, что при построении суммы двух векторов приходится строить треугольник (см. черт. 8, *а*).

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются с л а г а е м ы м и. Отметим, что указанный нами способ позволяет построить сумму л ю б ы х д в у х в е к т о р о в. На чертеже 8 изображено построение суммы для двух неколлинеарных векторов, а на чертеже 9 для коллинеарных векторов. На чертеже 9, *а* построена сумма сонаправлен-



Черт. 9

ных векторов, на чертеже 9, *б* — противоположно направленных векторов, а на чертеже 9, *в* — сумма векторов, из которых один нулевой. Интересно также рассмотреть случай, когда слагаемые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по модулю равны, но противоположно направлены (черт. 9, *г*). В этом случае, очевидно, *сумма векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *равна нуль-вектору*.

Докажем, что *сумма двух векторов не зависит от выбора исходной точки O*. В самом деле, если за исходную точку построения взять другую точку O', то, как видно из чертежа 8, построение по указанному выше правилу дает вектор $\boldsymbol{p}'$, равный вектору $\boldsymbol{p}$. В самом деле, у треугольников OAB и $O'A'B'$ как стороны OA, $O'A'$, так и стороны AB и $A'B'$ соответственно параллельны и равны.

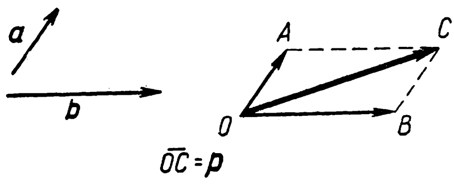
Отсюда следует, что стороны OB и $O'B'$ параллельны и равны. Кроме того, векторы $\overline{OB}$ и $\overline{O'B'}$ сонаправлены, поэтому $\overline{OB} = \overline{O'B'}$, т. е. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$. Мы рассмотрели случай, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Читатель без труда распространит эти рассуждения на случай коллинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Легко видеть также, что *если* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ *и* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$, *то* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$. В самом деле, пусть O — произвольная точка плоскости. Перенесем вектор $\boldsymbol{a}$ в точку O и обозначим его конец через A; затем перенесем вектор $\boldsymbol{b}$ в точку A и его конец обозначим через B. Тогда, очевидно, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overline{OB}$. Если, пользуясь той же точкой O, построим сумму $\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$, то из равенств $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ следует, что мы придем к тому же вектору $\overline{OB}$ (черт. 8, *б*). Таким образом, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$.

Из этих рассуждений следует, что *понятие суммы двух векторов по существу вводится для свободных векторов.*

Из правила треугольника для сложения двух векторов вытекает простое и очень полезное для решения задач правило: *каковы бы ни были три точки A, B и C, имеет место соотношение*: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (черт. 4). При этом мы не исключаем из рассмотрения случаи, когда две из данных точек или даже все три совпадают.

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для получения их суммы можно пользоваться и другим способом (п р а в и л о п а р а л л е л о г р а м м а). Этот способ чаще всего применяется в физике для сложения скоростей и сил. Перенесем данные неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в о д н у и т у ж е т о ч к у O пространства и обозначим концы полученных векторов соответственно через A и B (черт. 10). Построим на отрезках OA и OB параллелограмм и обозначим через C четвертую его вершину. Тогда $\overline{OC} = \boldsymbol{p}$. В самом деле, из правила треугольника следует, что $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.



Черт. 10

Итак, правило параллелограмма гласит: *если слагаемые векторы приведены к общему началу, то вектор-сумма, выходящий из того же начала, изображается диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах.*

3. Основные свойства сложения векторов.

Т е о р е м а [2.1]. *Понятие суммы векторов удовлетворяет следующим условиям*:

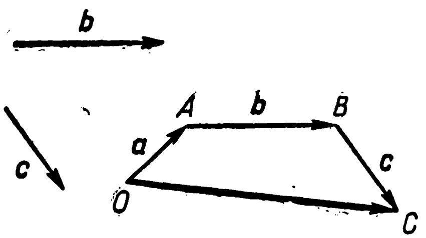
а) *для любых трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеет место соотношение* $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (а с с о ц и а т и в н ы й з а к о н);

б) *для любых двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место соотношение* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, *т. е. сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых* (коммутативный закон);

в) *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$;

г) *для каждого вектора* $\boldsymbol{a}$ *существует противоположный вектор* $\boldsymbol{a}'$, *т. е. вектор, удовлетворяющий условию*: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = 0$. *Все векторы, противоположные данному, равны между собой.*

Доказательство. а) Пусть O — начало, а A — конец вектора $\boldsymbol{a}$. Перенесем вектор $\boldsymbol{b}$ в точку A и от его конца B отложим вектор $\boldsymbol{c}$, конец которого обозначим через C (черт. 11). Из нашего построения следует, что



Черт. 11

$$\overline{OA} = \boldsymbol{a},\ \overline{AB} = \boldsymbol{b},\ \overline{BC} = \boldsymbol{c}. \quad (1)$$

Из правила треугольника имеем: $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$ и $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, поэтому $\overline{OC} = (\overline{OA} + \overline{AB}) + \overline{BC}$. Подставив сюда значения слагаемых из (1), получаем: $\overline{OC} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

С другой стороны, $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ и $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, поэтому $\overline{OC} = \overline{OA} + (\overline{AB} + \overline{BC})$. Подставив сюда значения слагаемых из (1), получаем: $\overline{OC} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

Мы пришли к выводу, что векторы $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ равны одному и тому же вектору $\overline{OC}$, поэтому они равны между собой.

б) Если слагаемые векторы не коллинеарны, то это свойство непосредственно следует из правила параллелограмма сложения двух векторов. В самом деле, когда мы складываем векторы, пользуясь правилом параллелограмма, мы не учитываем порядок, в котором берутся слагаемые. Независимо от того, какой из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ считать первым, мы строим параллелограмм (черт. 10) и диагональ $\overline{OC}$ этого параллелограмма дает нам сумму $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, или $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то это правило неприменимо, поэтому для данного случая мы предлагаем следующее, на первый взгляд формальное, но достаточно строгое доказательство. Пусть один из векторов-слагаемых, скажем $\boldsymbol{b}$, ненулевой. Построим параллелограмм $ABCD$ так, чтобы его диагональ изображалась вектором $\boldsymbol{b}$ (черт. 12). Пусть $\overline{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{d}$. Теперь, применяя доказанное уже свойство а), а также свойство б) для неколлинеарных векторов, получаем:

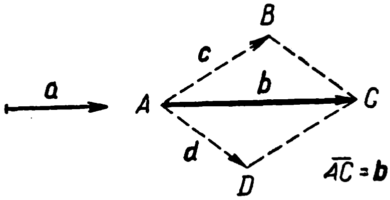
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) =$$
$$= (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a};\ \text{итак, } \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Предлагаем читателю внимательно разобраться, откуда следует каждое из записанных тут равенств.

в) Это свойство непосредственно следует из правила треугольника сложения векторов.

г) Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$ — данный вектор. Из правила треугольника следует, что $\overline{OA} + \overline{AO} = \overline{OO} = \mathbf{0}$. Отсюда вытекает, что $\overline{AO}$ есть вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$. Все векторы, противоположные вектору $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$, равны вектору $\overline{AO}$, так как если каждый из них перенести в точку A, то концы их должны совпадать с точкой O, в силу того что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$. Теорема доказана полностью.

Вектор, противоположный данному вектору $\boldsymbol{a}$, обозначается через $-\boldsymbol{a}$[1]. Из предыдущего доказательства следует, что если $\boldsymbol{a} \neq 0$, то вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, имеет тот же модуль, что и $\boldsymbol{a}$, коллинеарен с $\boldsymbol{a}$, но имеет противоположное направление. Если же $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, то $-\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Кроме того, $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$.



Черт. 12

Рассмотрим примеры построения сумм векторов.

Пример 1. Пусть $ABCD$ — квадрат, а E — середина стороны BC (черт. 3). Найти суммы: а) $\overline{AB} + \overline{EC}$; б) $\overline{AB} + \overline{DA}$; в) $\overline{AC} + \overline{DA}$; г) $\overline{ED} + \overline{CB}$; д) $\overline{AB} + \overline{CD}$.

Решение: а) Так как E — середина отрезка BC, то $\overline{BE} = \overline{EC}$, поэтому $\overline{AB} + \overline{EC} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$.

б) $\overline{AB} + \overline{DA} = \overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB}$.

в) $\overline{AC} + \overline{DA} = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DC}$.

г) Так как $\overline{CB} = \overline{DA}$, то $\overline{ED} + \overline{CB} = \overline{ED} + \overline{DA} = \overline{EA}$.

д) Так как $\overline{CD} = \overline{BA}$, то $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BA} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — противоположные векторы.

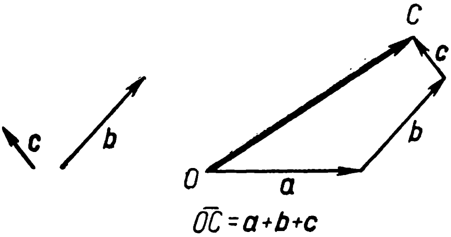
4. Сложение нескольких векторов. Суммой трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ мы будем считать вектор $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$. На основании ассоциативного закона (теорема [2.1]) сложения векторов $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Поэтому при записи суммы трех векторов мы можем опускать скобки и записать ее в виде $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, не указывая при этом, считаем ли мы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Больше того, из теоремы [2. 1] следует, что *сумма трех векторов не зависит от порядка слагаемых*. В самом деле, до-

[1] Ниже будет показано, что на вектор $-\boldsymbol{a}$ нельзя смотреть как на «отрицательный» вектор. Вообще, понятия положительных и отрицательных чисел не распространяются на векторы. Символ $-\boldsymbol{a}$ просто означает, что $-\boldsymbol{a}$ есть вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$.

кажем, например, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$. Здесь мы применили коммутативный закон для слагаемых $\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

Пользуясь доказательством теоремы [2. 1], можно указать следующий способ построения суммы трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Пусть O — начало вектора $\boldsymbol{a}$. Перенесем вектор $\boldsymbol{b}$ в конечную точку вектора $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{c}$ — в конечную точку вектора $\boldsymbol{b}$. Если C — конечная точка вектора $\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overline{OC}$ (черт. 13).

Точно так же можно определить сумму четырех и более векторов. Например, суммой четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ называется вектор $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$. По аналогии с предыдущим можно доказать, что сумма четырех и более векторов также не зависит от порядка слагаемых. Обобщая правило, данное для построения суммы трех векторов, можно указать следующее общее правило сложения нескольких векторов. *Чтобы построить сумму векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, *необходимо вектор* $\boldsymbol{a}_2$ *перенести в конечную точку вектора* $\boldsymbol{a}_1$, *затем вектор* $\boldsymbol{a}_3$ *перенести в конечную точку вектора* $\boldsymbol{a}_2$ *и т. д. Суммой данных векторов будет вектор, начало которого совпадает с началом* $\boldsymbol{a}_1$, *а конец — с концом* $\boldsymbol{a}_n$.



Черт. 13

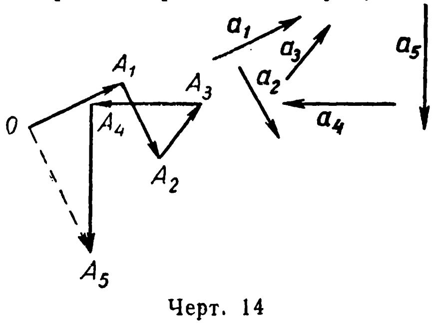
Сумма векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ обозначается через $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n$. На чертеже 14 дано построение суммы векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ и $\boldsymbol{a}_5$: $\overline{OA_5}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$. Указанное выше правило построения суммы нескольких векторов называется п р а в и л о м м н о г о у г о л ь н и к а.

Пример 2. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а E и F — соответственно середины сторон AB и AD. Построить на чертеже следующие суммы: а) $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD}$; б) $\overline{AB}+\overline{FD}+\overline{AF}$; в) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{DA}$.

Решение. а) Из правила параллелограмма следует, что $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$, поэтому $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD}=(\overline{AB}+\overline{AD})+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD}$.

б) Так как $\overline{FD}+\overline{AF}=\overline{AF}+\overline{FD}=\overline{AD}$, то $\overline{AB}+\overline{FD}+\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

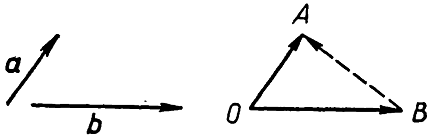
в) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{DA}=\overline{AB}+\overline{AF}+\overline{BC}+\overline{DA}=\overline{AB}+$



Черт. 14

$+\overline{AF}$, так как $\overline{BC}+\overline{DA}=0$. Таким образом, рассматриваемая сумма есть вектор $\overline{AK}$, где K — середина стороны BC.

5. Вычитание векторов. Вычитание вводится как операция, обратная сложению. *Разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{q}$, что $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.* Разность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Таким образом, выражение $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ означает, что $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$. Вектор $\boldsymbol{a}$ называется у м е н ь ш а е м ы м, а вектор $\boldsymbol{b}$ — в ы ч и т а е м ы м. Для обоснования понятия разности существенно доказать следующее предложение.



Черт. 15

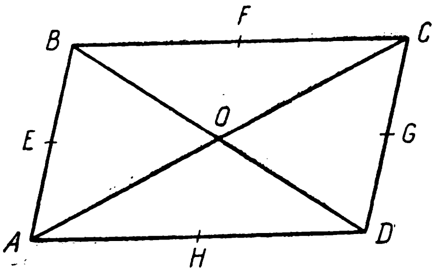
Т е о р е м а [2.2]. *Каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, всегда существует и единственным образом определяется разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$*[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку O и перенесем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в эту точку. Если $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ (см. черт. 15), то вектор $\overline{BA}$ есть искомая разность, так как $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$ или $\boldsymbol{b}+\overline{BA}=\boldsymbol{a}$. Наше построение выполнимо при любых векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ всегда существует.

Теперь докажем, что разность определяется единственным образом. Пусть $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{a}$. К обеим частям этих равенств прибавим вектор $-\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{q}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{q}'+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, поэтому $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}'$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. а) Для построения разности двух векторов необходимо эти векторы перенести в некоторую точку пространства. Тогда вектор, идущий от конца вычитаемого к концу уменьшаемого векторов, есть искомый вектор (черт. 15).

б) Для двух любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеем: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, т. е. разность двух векторов равна сумме уменьшаемого вектора и вектора, противоположного вычитаемому.



Черт. 16

П р и м е р 3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, F и H — середины сторон BC и AD, а O — точка пересечения диагоналей (черт. 16). Построить на чертеже векторы а) $\overline{AB}-\overline{AD}$; б) $\overline{AB}-\overline{CB}$; в) $\overline{AH}-\overline{BF}$; г) $\overline{BC}-\overline{FC}$; д) $\overline{OA}-\overline{OC}$.

---
[1] Под «единственностью» разности мы понимаем следующее: если $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}'$.

Р е ш е н и е. а) $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$. Это непосредственно следует из правила вычитания векторов.

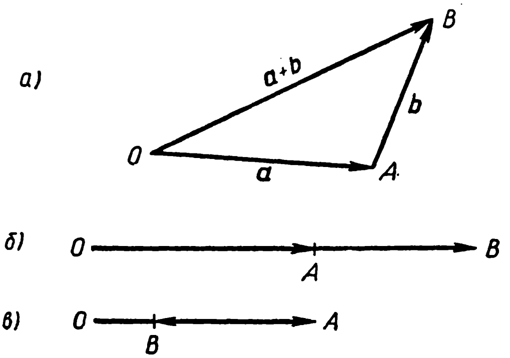
б) $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AB} + (-\overline{CB}) = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

в) $\overline{AH} - \overline{BF} = \mathbf{0}$, так как $\overline{AH} = \overline{BF}$.

г) $\overline{BC} - \overline{FC} = \overline{BC} + (-\overline{FC}) = \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{BF}$.

д) $\overline{OA} - \overline{OC} = \overline{CA}$.

6. Модули сумм и разностей векторов. Следует предостеречь читателя от распространенной ошибки. Нередко начинающий изучать векторную алгебру считает, что при сложении векторов их модули складываются. На самом же деле модуль суммы двух векторов, вообще говоря, н е р а в е н сумме модулей слагаемых. Имеет место следующая теорема:



Черт. 17

Т е о р е м а [2. 3]. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

Знак равенства имеет место только в случае, если данные векторы сонаправлены или если хотя бы один из них равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$ (черт. 17, *а*), тогда $\overline{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Сначала докажем теорему для случая, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. В силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ точки O, A и B не лежат на одной прямой, поэтому $OA + AB > OB$ («сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны»). Таким образом, $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ равен $\mathbf{0}$, то, очевидно, $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. В самом деле, если, например, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, то $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} + \mathbf{0}| = |\boldsymbol{a}| + |\mathbf{0}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Остается рассмотреть случай, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не нулевые, но коллинеарные. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, то точка O не будет лежать между A и B (черт. 17, *б*), поэтому $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют противоположные направления, то точки O и B будут лежать по одну и ту же сторону от точки A (черт. 17, *в*), поэтому $OB < OA + AB$, т. е. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Таким образом, приходим к выводу:

а) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны или коллинеарны, но имеют противоположные направления, то

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|;$$

б) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены или хотя бы один из них — нулевой вектор, то

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

Аналогично может быть доказана теорема:

Теорема [2. 4]. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

Знак равенства имеет место только в случае, если данные векторы противоположно направлены или если хотя бы один из векторов равен нулю.

Предоставляем читателю самостоятельно (по аналогии с предыдущим) провести доказательство этой теоремы.

Вопросы и упражнения

13. Какому условию должны удовлетворять векторы для того, чтобы их концы лежали на окружности, если они перенесены в одну и ту же точку?

14. Применимо ли правило треугольника для случая, когда один из векторов нулевой?

15. На бумаге начертите несколько векторов и постройте их сумму по правилу многоугольника. Практически убедитесь в том, что сумма не зависит от порядка слагаемых.

16. Верно ли соотношение $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}$ при произвольном расположении точек A, B и C.

17. Что называется вектором, противоположным данному? Докажите, что если $\boldsymbol{a}$ — вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b}$ — вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$.

18. Пользуясь теоремой [2.1], докажите, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$.

19. Докажите, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}$.

20. Доказать, что а) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$; б) $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$; в) $\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

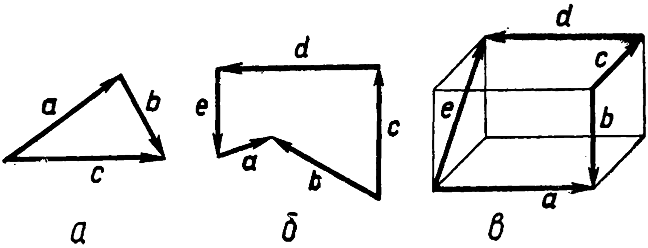
21. Может ли модуль разности двух векторов быть больше как модуля вычитаемого, так и модуля уменьшаемого векторов?

22. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а E и F — соответственно середины параллельных сторон BC и AD. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overline{AB}+\overline{DC}$; б) $\overline{AE}+\overline{DF}$; в) $\overline{AO}-\overline{AB}$; г) $\overline{OC}+\overline{CD}+\overline{OB}$; д) $\overline{ED}+\overline{FA}+\overline{FO}$; е) $\overline{AB}+\overline{BE}-\overline{OE}+\overline{CD}$.

23. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, то при каких условиях векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ коллинеарны?

24. Изображая векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ с помощью диагоналей параллелограмма, найти условия, при которых $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.



Черт. 18

25. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображенные на чертежах 18, *а*, *б*, *в*.

26. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, O — его центр. Зная $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, выразить $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{ED}$, $\overline{EC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО; ДЕЛЕНИЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Умножение вектора на число. *Произведением ненулевого вектора* $\boldsymbol{a}$ *на действительное число* $\alpha \neq 0$ *называется вектор* $\boldsymbol{p}$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

а) $|\boldsymbol{p}| = |\alpha|\,|\boldsymbol{a}|$, *где* $|\alpha|$ — *модуль числа* α;

б) *вектор* $\boldsymbol{p}$ *коллинеарен с вектором* $\boldsymbol{a}$;

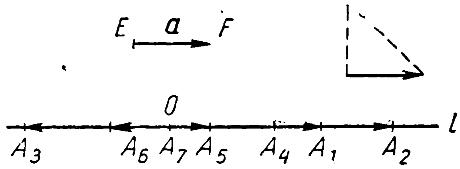
в) *если* $\alpha > 0$, *то* $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{a}$ *сонаправлены*, *если же* $\alpha < 0$, *то* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{a}$ *противоположно направлены.*

Произведение нулевого вектора на произвольное число или произвольного вектора на число 0 *равно нуль-вектору.*

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число α условимся обозначать так: $\alpha\,\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{a}\,\alpha$. Легко видеть, что, каковы бы ни были α и $\boldsymbol{a}$, их произведение есть вполне определенный вектор. Прежде чем перейти к изучению свойств введенной операции, рассмотрим примеры построения произведения векторов на числа.

Пример 1. На чертеже дан ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$. Построить векторы $\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_2 = 3a$, $\boldsymbol{p}_3 = -2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_4 = \sqrt{2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_5 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_6 = -0{,}75 \cdot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_7 = 0 \cdot \boldsymbol{a}$.

Решение. Так как все векторы, которые следует построить, коллинеарны вектору $\boldsymbol{a} = \overline{EF}$, то для их построения проведем прямую l, параллельную $\boldsymbol{a}$, и на этой прямой возьмем произвольную точку O, от которой и будем откладывать искомые векторы (черт. 19). Построим вектор $\boldsymbol{p}_1$. Для этой цели заметим, что $|\boldsymbol{p}_1| = |2|\,|\boldsymbol{a}| = 2\,|\boldsymbol{a}|$, т. е. длина вектора $\boldsymbol{p}_1$ в два раза больше длины вектора $\boldsymbol{a}$. С другой стороны, так как $2 > 0$, то $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{a}$ сонаправлены. Возьмем на прямой l точку A_1 так, чтобы $OA_1 = 2EF$ и A_1 лежала от точки O в направлении вектора $\boldsymbol{a}$. Очевидно, $\boldsymbol{p}_1 = \overline{OA}_1$. Аналогично построим вектор $\boldsymbol{p}_2 = 3\boldsymbol{a} = \overline{OA}_2$. Для построения вектора $\boldsymbol{p}_3$ возьмем на l точку A_3 так, чтобы $OA_3 = 2\,EF$ и A_3 лежала от точки O в направлении, противоположном направлению вектора $\boldsymbol{a}$.



Черт. 19

Аналогично можно построить остальные векторы: $\boldsymbol{p}_4 = \overline{OA}_4, \boldsymbol{p}_5 = \overline{OA}_5$, $\boldsymbol{p}_6 = \overline{OA}_6$, $\boldsymbol{p}_7 = \overline{OA}_7$. Для отыскания точки A_4 достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным $|\boldsymbol{a}|$. Гипотенуза этого треугольника, очевидно, равна $\sqrt{2} \cdot |\boldsymbol{a}|$ (черт. 19). Так как $\boldsymbol{p}_7 = \boldsymbol{0}$, то A_7 совпадает с точкой O.

П р и м е р 2. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить вектор

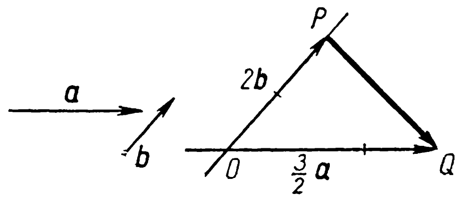
$$\frac{3}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}.$$

Р е ш е н и е. Сначала построим векторы $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$, а потом найдем их разность. При этом целесообразно векторы строить так, чтобы они были приложены к одной и той же точке. На чертеже 20 выполнено построение $\overline{PQ} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

Докажем следующее вспомогательное предложение, необходимое для дальнейшего изложения.

Л е м м а [3.1]. *Для того чтобы вектор $\boldsymbol{a}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\boldsymbol{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\boldsymbol{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\boldsymbol{b}$. Возможны следующие три случая: 1) вектор $\boldsymbol{a}$ сонаправлен с вектором $\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}$ противоположно направлен с вектором $\boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор. Покажем, что в каждом из этих случаев существует число α, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. В самом деле, в первом случае $\boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$, т. е. $\alpha = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$. Во втором случае $\boldsymbol{a} = -\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$, поэтому



Черт. 20

$\alpha = -\frac{|a|}{|b|}$. В третьем случае $a = 0 \cdot b$ и $\alpha = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность условия непосредственно следует из определения произведения вектора на число.

2. Основные свойства произведения вектора на число. В следующей теореме сформулированы основные свойства произведения вектора на число.

Теорема [3.2]. *Для произвольных чисел* α, β *и векторов* a, b *имеют место следующие свойства*:

а) $1 \cdot a = a$; $(-1)a = -a$, где $-a$ вектор, противоположный a;

б) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

в) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

г) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Свойство а) непосредственно следует из данного выше определения, поэтому рассмотрим свойства б), в) и г). Если хотя бы одно из чисел α, β равно нулю или хотя бы один из векторов a, b равен нулю, то справедливость этих свойств очевидна, поэтому доказательство проведем для случая, когда $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Доказательство свойства б). Пусть $\alpha(\beta a) = p_1$ и $(\alpha\beta)a = p_2$. Докажем, что $p_1 = p_2$. Для этого необходимо убедиться в том, что векторы p_1 и p_2 имеют равные модули, коллинеарны и сонаправлены. Вычислим модули этих векторов $|p_1| = |\alpha|\,|\beta a| = |\alpha|\,(|\beta|\,|a|) = |\alpha|\,|\beta|\,|a|$, $|p_2| = |\alpha\beta|\,|a| = (|\alpha|\,|\beta|)\,|a| = |\alpha|\,|\beta|\,|a|$. Таким образом, $|p_1| = |p_2|$. Векторы p_1 и p_2 по определению коллинеарны вектору a, поэтому они коллинеарны между собой. Остается доказать, что p_1 и p_2 сонаправлены. Возможны четыре случая: 1) $\alpha > 0$, $\beta > 0$; 2) $\alpha > 0$, $\beta < 0$; 3) $\alpha < 0$, $\beta > 0$; 4) $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае a сонаправлен с βa и βa сонаправлен с $p_1 = \alpha(\beta a)$. С другой стороны, $\alpha\beta > 0$, поэтому a сонаправлен с $p_2 = (\alpha\beta)a$. Таким образом оба вектора p_1 и p_2 сонаправлены с a, поэтому сонаправлены между собой и поэтому $p_1 = p_2$.

2) $\alpha > 0$, $\beta < 0$. В этом случае вектор βa имеет направление, противоположное направлению вектора a, но $p_1 = \alpha(\beta a)$ сонаправлен с βa (так как $\alpha > 0$), поэтому p_1 и a имеют противоположные направления. С другой стороны, так как $\alpha\beta < 0$, то p_2 и a имеют противоположные направления, поэтому p_1 и p_2 сонаправлены. И в этом случае $p_1 = p_2$.

Случаи 3) и 4) предлагаем читателю разобрать самостоятельно и убедиться в том, что в каждом из этих случаев p_1 и p_2 сонаправлены, поэтому $p_1 = p_2$.

Доказательство свойства в). Пусть $\boldsymbol{p}_1 = (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}_2 = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a}$. Возможны следующие случаи:

1) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ или $\alpha < 0$, $\beta < 0$;
2) $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta > 0$ или $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 0$;
3) $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta < 0$ или $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 0$;
4) $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta = 0$ или $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 0$.

Докажем, что в каждом из этих случаев $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$.

1) Так как $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| = \alpha + \beta$, то $|\boldsymbol{p}_1| = |\alpha + \beta|\,|\boldsymbol{a}| = (|\alpha| + |\beta|)\,|\boldsymbol{a}| = |\alpha|\,|\boldsymbol{a}| + |\beta|\,|\boldsymbol{a}| = \alpha\,|\boldsymbol{a}| + \beta\,|\boldsymbol{a}|$. Существенно отметить, что мы здесь воспользовались распределительным свойством произведения чисел, а не векторов ($|\alpha|$, $|\beta|$, $|\boldsymbol{a}|$ — числа!). Так как векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{a}$ сонаправлены, то согласно теореме [2.3] $|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}| = |\alpha\boldsymbol{a}| + |\beta\boldsymbol{a}|$, поэтому $|\boldsymbol{p}_2| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}| = |\alpha\boldsymbol{a}| + |\beta\boldsymbol{a}| = \alpha\,|\boldsymbol{a}| + \beta\,|\boldsymbol{a}|$. Мы пришли к выводу, что $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2|$.

Вектор $\boldsymbol{p}_1$ сонаправлен с $\boldsymbol{a}$, так как $\alpha + \beta > 0$. Вектор $\boldsymbol{p}_2$ также сонаправлен с $\boldsymbol{a}$ в силу того, что $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{a}$ сонаправлены с $\boldsymbol{a}$. Отсюда вытекает, что $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ сонаправлены, следовательно, $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$.

В этом доказательстве по существу ничего не изменится, если предположить, что $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, поэтому этот случай мы опускаем.

2) Предположим, что $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\alpha + \beta > 0$. В данном случае $|\boldsymbol{p}_1| = |\alpha + \beta|\,|\boldsymbol{a}| = (\alpha + \beta)\,|\boldsymbol{a}| = \alpha\,|\boldsymbol{a}| + \beta\,|\boldsymbol{a}|$. Подсчитаем $|\boldsymbol{p}_2| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}|$. Прежде всего заметим, что $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{a}$ коллинеарны и имеют противоположные направления, так как $\alpha + \beta > 0$ и $\beta < 0$. Тогда в силу теоремы [2.4] имеем: $|\alpha\boldsymbol{a}| = |(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}) - (\beta\boldsymbol{a})| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}| + |\beta\boldsymbol{a}|$ или $\alpha\,|\boldsymbol{a}| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}| - \beta\,|\boldsymbol{a}|$, $\alpha\,|\boldsymbol{a}| + \beta\,|\boldsymbol{a}| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}|$. Отсюда следует, что $|\boldsymbol{p}_2| = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}| = \alpha\,|\boldsymbol{a}| + \beta\,|\boldsymbol{a}|$, т. е. $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2|$. Вектор $\boldsymbol{p}_1$ сонаправлен с вектором $\boldsymbol{a}$, так как $\alpha + \beta > 0$. Вектор $\boldsymbol{p}_2$ сонаправлен с $\alpha\boldsymbol{a}$ и, следовательно, с $\boldsymbol{a}$. Поэтому $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ сонаправлены и $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$.

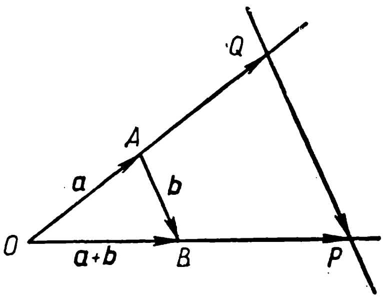
Случай $\alpha < 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta > 0$ сводится к рассмотренному выше. В самом деле, так как $\beta > 0$, $\alpha < 0$ и $\beta + \alpha > 0$, то $(\beta + \alpha)\,\boldsymbol{a} = \beta\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}$ или $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

3) Рассмотрим случай: $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta < 0$. Введем следующие обозначения: $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}$. Так как $\alpha' + \beta' = -(\alpha + \beta) > 0$ и α' и β' имеют разные знаки, то согласно предыдущему имеем: $(\alpha' + \beta')\,\boldsymbol{a}' = \alpha'\boldsymbol{a}' + \beta'\boldsymbol{a}'$ или $(-1)(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a}' = (-1)\,\alpha\boldsymbol{a}' + (-1)\,\beta\boldsymbol{a}'$. В силу доказанного выше свойства б) отсюда получаем: $(\alpha + \beta)\,[(-1)\,\boldsymbol{a}'] = \alpha\,[(-1)\,\boldsymbol{a}'] + \beta\,[(-1)\,\boldsymbol{a}']$. Но из свойства а) следует, что $(-1)\,\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$, поэтому $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

4) Рассмотрим случай: $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta = 0$. В этом случае, очевидно, $\boldsymbol{p}_1 = (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. С другой стороны $\alpha = -\beta$, поэтому $\alpha\boldsymbol{a} = (-\beta)\,\boldsymbol{a} = (-1)(\beta\boldsymbol{a}) = -(\beta\boldsymbol{a})$. Мы пришли к выводу, что $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{a}$ — противоположные векторы, следовательно, $\boldsymbol{p}_2 = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Итак, $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$.

Доказательство свойства г). Пусть $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{p}_1$ и $\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}_2$. Докажем, что $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2$. Возможны два случая: 1) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны; 2) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Сначала предположим, что $\alpha>0$. Пользуясь правилом треугольника, построим сумму $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Пусть $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{b}$, тогда $\overline{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (черт. 21). Пусть, далее, $\overline{OP}=\boldsymbol{p}_1$. Так как $\alpha>0$, то точка P лежит на луче OB. Проведем в плоскости OAB через точку P прямую, параллельную AB, и обозначим через Q точку пересечения этой прямой с прямой OA. Так как треугольники OAB и OQP подобны, то $\alpha=\frac{OP}{OB}=\frac{OQ}{OA}=\frac{QP}{AB}$. Отсюда непосредственно следует, что $\overline{OQ}=\alpha\boldsymbol{a}$ и $\overline{QP}=\alpha\boldsymbol{b}$. Но $\overline{OP}=\overline{OQ}+\overline{QP}$, поэтому $\boldsymbol{p}_1=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}_2$. Случай, когда $\alpha<0$, может быть рассмотрен аналогично.



Черт. 21

2) Так как $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то из леммы [3.1] следует, что существует некоторое число λ, удовлетворяющее условию: $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, поэтому $\boldsymbol{p}_1=\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha[(\lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})]=\alpha[(\lambda+1)\boldsymbol{b}]=[\alpha(\lambda+1)]\boldsymbol{b}$. Здесь мы воспользовались уже доказанными свойствами б) и в). Точно так же $\boldsymbol{p}_2=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}=\alpha(\lambda\boldsymbol{b})+\alpha\boldsymbol{b}=(\alpha\lambda)\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{b}=(\alpha\lambda+\alpha)\boldsymbol{b}=[\alpha(\lambda+1)]\boldsymbol{b}$. Поэтому $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2$. Теорема доказана полностью[1].

Рассмотрим следующие примеры, иллюстрирующие на чертеже справедливость данной теоремы.

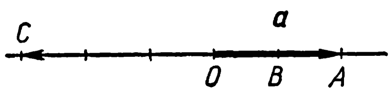
Пример 3. На чертеже даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Построением убедиться в том, что а) $(-3)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{a}$; б) $(5-3)\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}$; в) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

Решение. а) Если $\overline{OA}$ — данный вектор $\boldsymbol{a}$ и B — середина отрезка OA, то $\overline{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$. Возьмем на прямой OA точку C так, чтобы $OC=3OB$ и чтобы O лежала между A и C (черт. 22, а). Очевидно, $\overline{OC}=(-3)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)$. С другой стороны, $OC=\frac{3}{2}OA$ и $\overline{OC}$ и $\overline{OA}$ имеют разные направления, поэтому $\overline{OC}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$.

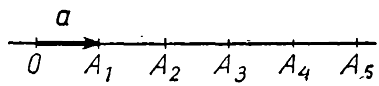
[1] Мы не считаем обязательным для студента-заочника разбор доказательства всех свойств. Необходимо детально разобрать один из случаев б), в) или г). В остальных случаях можно ограничиться выяснением идеи доказательства.

б) Пусть $\overline{OA}_1 = \boldsymbol{a}$. Построим на луче OA_1 последовательность точек A_2, A_3, A_4 и A_5 так, как показано на чертеже 22, *б*: $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_5}$. Из чертежа видно, что $\overline{OA}_5 = 5\boldsymbol{a}$, $\overline{OA}_3 = 3\boldsymbol{a}$, поэтому $5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{a} = \overline{OA}_5 - \overline{OA}_3 = \overline{A_3A_5} = 2\boldsymbol{a} = (5-3)\,\boldsymbol{a}$.

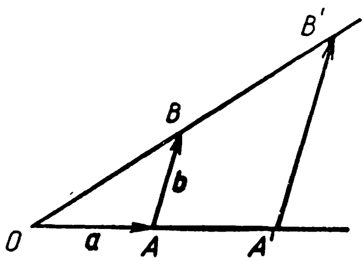
в) Пусть $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, тогда $\overline{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (черт. 22, *в*). Построим треугольник $OA'B'$, гомотетичный треугольнику OAB, с коэффициентом $k = 2$. Очевидно, $\overline{OA'} = 2\boldsymbol{a}$, $\overline{A'B'} = 2\boldsymbol{b}$, $\overline{OB'} = 2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, поэтому $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = 2\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.



Черт. 22 *а*



Черт. 22 *б*



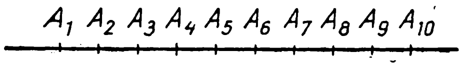
Черт. 22 *в*

3. Деление коллинеарных векторов. В заключение этого параграфа введем еще одну операцию, обратную произведению вектора на число. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и если $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то из леммы [3.1] следует, что существует число α, удовлетворяющее условию: $\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{b}$. Покажем, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ даны, то число α определяется единственным образом. В самом деле, пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} = \alpha'\boldsymbol{b}$. Из этих соотношений следует, что $\alpha\boldsymbol{b} - \alpha'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ или согласно теореме [3. 2] $(\alpha - \alpha')\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Так как $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то $\alpha - \alpha' = 0$ или $\alpha = \alpha'$. *Число* α, *определяемое из соотношения* $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$, *при* $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ *называется отношением коллинеарных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *и обозначается так*: $\alpha = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Таким образом, соотношение $\alpha = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ означает, что $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Замечания. 1°. Если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то соотношение $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ либо не существует (если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$), либо неопределенное (если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$). Поэтому в векторной алгебре *не вводится операция деления вектора на нуль-вектор*.

2°. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то отношение $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ не существует, так как $\alpha = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ означает, что $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$, а отсюда следует коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Поэтому в векторной алгебре *не вводится также операция деления неколлинеарных векторов.*

Пример 4. На чертеже 23 изображена последовательность следующих друг за другом точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$, причем $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_9A_{10}$. Определить отношения: $\overline{A_1A_2} : \overline{A_8A_7}$; $\overline{A_1A_5} : \overline{A_5A_3}$; $\overline{A_3A_{10}} : \overline{A_5A_7}$; $\overline{A_8A_4} : \overline{A_9A_3}$; $\overline{A_6A_8} : \overline{A_{10}A_1}$.



Черт. 23

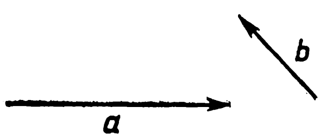
Решение. $\overline{A_1A_2} : \overline{A_8A_7} = -1$, так как $A_1A_2 = A_8A_7 = 1$, и векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_8A_7}$ имеют противоположные направления. Аналогично этому получаем:

$$\overline{A_1A_5} : \overline{A_5A_3} = -\frac{4}{2} = -2; \qquad \overline{A_3A_{10}} : \overline{A_5A_7} = \frac{7}{2};$$

$$\overline{A_8A_4} : \overline{A_9A_3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \qquad \overline{A_6A_8} : \overline{A_{10}A_1} = -\frac{2}{9}.$$

4. Некоторые свойства векторов, отличные от свойств чисел. Введенные нами операции позволяют складывать, вычитать векторы, а также умножать векторы на числа. Таким образом, с формальной алгебраической точки зрения алгебра векторов имеет очень много общего с алгеброй чисел. Однако нельзя думать, что эти две алгебры тождественны. Вспомним хотя бы то, что отношение двух чисел $\frac{\alpha}{\beta}$, если $\beta \neq 0$, всегда существует, в то время как отношение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (если даже $\boldsymbol{b} \neq 0$) не всегда существует. Отсюда, в частности, следует, что если числовое уравнение $\alpha + x\,\beta = 0$ при $\beta \neq 0$ всегда имеет решение, то аналогичное векторное уравнение $\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, при $\boldsymbol{b} \neq 0$ (x — неизвестное число) далеко не всегда имеет решение.

Или другой пример: известно, что множество действительных чисел упорядочено, т. е. для любых двух неравных действительных чисел можно указать, какое из них больше другого. Это обстоятельство позволяет, в частности, ввести отрицательные числа, т. е. числа, меньшие нуля. В отличие от этого для векторов понятия «больше» или «меньше» не вводится, так как векторы характеризуются не только длиной, но и направлением. В частности, в векторной алгебре не существует понятие «отрицательного» вектора. Здесь можно сравнивать лишь длины векторов, а не сами векторы. Можно говорить, что вектор $\boldsymbol{a}$ по модулю больше вектора $\boldsymbol{b}$ (черт. 24), но нельзя говорить, что $\boldsymbol{a}$

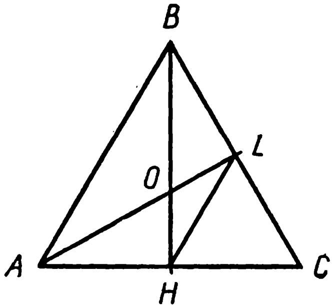


Черт. 24

больше $\boldsymbol{b}$. В дальнейшем, когда будут введены произведения векторов, мы увидим, что отличие векторной алгебры от алгебры чисел сказывается еще больше.

Пример 5. Пусть ABC — равносторонний треугольник, O — центр этого треугольника, а H и L — середины сторон AC и CB, а O — точка пересечения AL и BH (черт. 25). Имеет ли смысл каждое из выражений: $\overline{OH}:\overline{OB}$; $\overline{OC}:\overline{OB}$; $\overline{BH}:\overline{OH}$; $\overline{AL}:\overline{OA}$; $\overline{LO}:\overline{AB}$; $\overline{HL}:\overline{BA}$. В тех случаях, когда отношения существуют, определить их.

Решение. Пары векторов $\overline{OH}$ и $\overline{OB}$; $\overline{BH}$ и $\overline{OH}$; $\overline{AL}$ и $\overline{OA}$; $\overline{HL}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, поэтому их отношения существуют. Пары векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OB}$; $\overline{LO}$ и $\overline{AB}$ не коллинеарны, поэтому их отношения не существуют.



Черт. 25

Для определения отношений коллинеарных векторов $\overline{OH}$ и $\overline{OB}$; $\overline{BH}$ и $\overline{OH}$ воспользуемся тем обстоятельством, что $BO = 2OH$. Отсюда следует, что $\overline{OH}:\overline{OB} = -\frac{1}{2}$; $\overline{BH}:\overline{OH} = +3$. Точно так же определяем остальные соотношения $\overline{AL}:\overline{OA} = -\frac{3}{2}$; $\overline{HL}:\overline{BA} = -\frac{1}{2}$.

5. В заключение решим несколько задач, где применяются все векторные операции, рассмотренные выше.

Задача 1. Пусть ABC — произвольный треугольник, а E и F — середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ через $\boldsymbol{a} = \overline{AE}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{AF}$.

Решение. Так как точка E — середина стороны AB, то $\overline{AB} = 2\overline{AE} = 2\boldsymbol{a}$ (черт. 26). Далее,

$$\overline{BC} = 2\overline{BF} = 2(\overline{AF} - \overline{AB}) = 2(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a}.$$

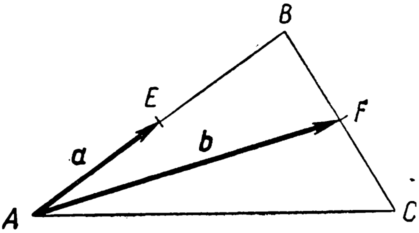
Из правила треугольника следует, что

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

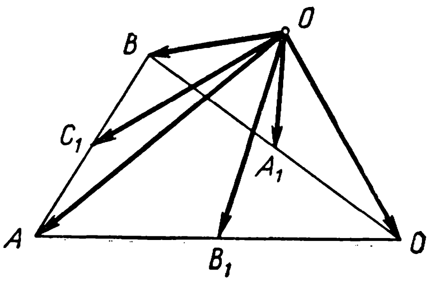
Таким образом, $\overline{AB} = 2\boldsymbol{a}$, $\overline{BC} = 2(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$, $\overline{AC} = 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$.

Легко проверить справедливость полученных результатов. В самом деле, $\overline{AB} + \overline{BC} = 2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} = \overline{AC}$.

Задача 2. В плоскости треугольника ABC взята произвольная точка O (черт. 27). A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Показать, что равнодействующая сил $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ равна равнодействующей сил $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ и $\overline{OC_1}$.



Черт. 26



Черт. 27

Решение. Если C_1 — середина отрезка AB, а O — произвольная точка, то $\overline{C_1A} = \overline{OA} - \overline{OC_1}$; $\overline{C_1B} = \overline{OB} - \overline{OC_1}$. Так как $\overline{C_1A} + \overline{C_1B} = \mathbf{0}$, то $\overline{OA} - \overline{OC_1} + \overline{OB} - \overline{OC_1} = \mathbf{0}$ или

$$2\overline{OC_1} = \overline{OA} + \overline{OB}. \qquad (1)$$

По аналогии с этим получаем:

$$2\overline{OA_1} = \overline{OB} + \overline{OC}, \qquad (2)$$

$$2\overline{OB_1} = \overline{OA} + \overline{OC}. \qquad (3)$$

Складывая соотношения (1), (2) и (3), будем иметь: $2\overline{OC_1} + 2\overline{OA_1} + 2\overline{OB_1} = 2\overline{OA} + 2\overline{OB} + 2\overline{OC}$ или $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

Задача 3. Определить векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из следующей системы уравнений:

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы.

Решение. Имеем два линейных векторных уравнения с двумя векторными неизвестными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Так как свойства суммы, разности и умножения вектора на число формально совпадают с аналогичными свойствами числовых операций, то для решения векторных уравнений можно пользоваться теми же приемами, что и при решении линейных уравнений в алгебре.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$(\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b},$$
$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) + (2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b},$$

отсюда

$$\boldsymbol{y} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

Подставив значение $\boldsymbol{y}$ во второе уравнение данной системы, получаем: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{b} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{4}{3}\boldsymbol{b}$. Таким образом, $\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{y} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что полученные значения x и y удовлетворяют данной системе векторных уравнений. Очевидно, полученное решение единственное.

Вопросы и упражнения

27. Почему в определении умножения вектора на число требуется, чтобы число было действительным? Можно ли применить то же определение в предположении, что числа комплексные?

28. Начертите произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и постройте следующие векторы:

$$2{,}5 \cdot \boldsymbol{a};\ -\boldsymbol{a};\ \sqrt{3}\boldsymbol{a};\ \frac{1}{3}\boldsymbol{a};\ -\frac{3}{5}\boldsymbol{a};\ \frac{3}{4}\boldsymbol{a};\ -\sqrt{2}\boldsymbol{a}.$$

29. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить каждый из следующих векторов:

$$4\boldsymbol{a};\ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a});\ 2\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b};\ 3\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}.$$

30. Каково необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов? Пользуясь этим условием, выясните, коллинеарны ли следующие пары векторов:

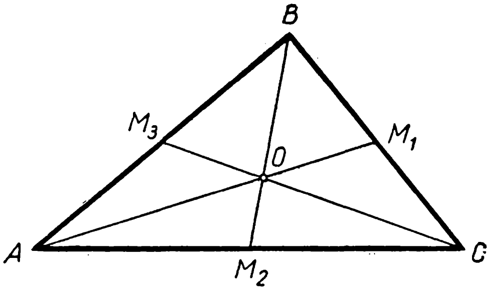
а) $\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a} - 3\sqrt{2}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{p}_2 = 2\sqrt{2}\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b};$

б) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}.$

31. Пусть OAB — треугольник, $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{OB}$. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы: $\overline{OM}_1$, $\overline{AM}_2$ и $\overline{BM}_3$, где M_1, M_2 и M_3 — середины сторон AB, BO и OA треугольника OAB.

32. Для каких векторов вводится операция деления векторов? Имеет ли смысл каждое из выражений $\overline{AB} : \overline{HL}$; $\overline{AL} : \overline{BH}$; $\overline{OL} : \overline{OA}$; $\overline{OL} : \overline{LC}$ (черт. 25)?

33. На чертеже 28 изображен произвольный треугольник ABC с медианами AM_1, BM_2 и CM_3; O — точка пересечения медиан. Имеет ли смысл каждое из выражений: $\overline{AM}_3 : \overline{AB}$; $\overline{AO} : \overline{OM}_2$; $\overline{M_3O} : \overline{CO}$; $\overline{AM}_1 : \overline{M_1O}$; $\overline{OA} : \overline{OM}_2$; $\overline{OA} : \overline{OM}_1$? В тех случаях, когда отношения существуют, определить их.



Черт. 28

34. Пусть $\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, а x — неизвестное число. При каком условии, накладываемом на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, это уравнение имеет решение?

35. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей. Полагая $\overline{AO} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BO} = \boldsymbol{b}$, выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

36. В тетраэдре $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AE}{EB} = 3$. Полагая $\boldsymbol{a} = \overline{AE}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{AD}$, выразить через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{ED}$ и $\overline{EC}$.

37. Отрезок AB разделен точками $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ на n равных частей. Зная $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, выразить через них векторы $\overline{OC}_1, \overline{OC}_2, \ldots, \overline{OC}_{n-1}$. Здесь O — произвольная точка плоскости.

38. Определить векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} &= 4\boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} &= 11\boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} &= 11\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

39. Упростить выражения:

а) $3\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} - (3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b})$;

б) $\cos\alpha\cos\beta\,\boldsymbol{a} - \sin\alpha\sin\beta\,\boldsymbol{a}$;

в) $(\alpha - \beta)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\alpha + \beta)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

§ 4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ

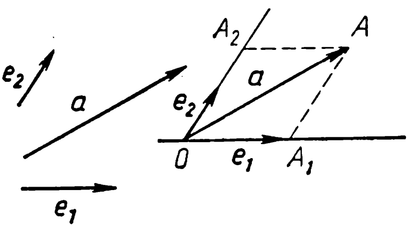
1. База плоскости. В предыдущих параграфах мы векторы задавали только графически. Здесь рассмотрим аналитический способ задания векторов. При этом будем рассматривать только такие векторы, которые параллельны одной плоскости (систему *компланарных* векторов).

Возьмем на плоскости два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ и назовем систему $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ *базой* (или *базисом*) *плоскости*. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ назовем *первым вектором*, а $\boldsymbol{e}_2$ — *вторым вектором* базы. На векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ накладывается только одно ограничение — требуется, чтобы они были неколлинеарны; в остальном они произвольны. Важно отметить, что существен порядок, в котором заданы векторы базы. Системы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1$ являются *разными базами*.

База $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ называется *прямоугольной декартовой*, если векторы базы взаимно перпендикулярны и их модули равны, т. е. $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$ и $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}|_2$. В дальнейшем изложении векторы прямоугольной декартовой базы будем обозначать через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Произвольную базу $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, в отличие от прямоугольной декартовой, будем называть *общей* или *аффинной*.

2. Определение координат вектора. Пусть на плоскости дана аффинная база $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Возьмем *произвольный* вектор $\boldsymbol{a}$ этой же плоскости и все три вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{a}$ перенесем в одну и ту же точку O плоскости (черт. 29). Проведем через конец A вектора $\boldsymbol{a}$ прямые, параллельные векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения этих прямых с прямыми, на которых лежат векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Очевидно, $\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2$. С другой стороны, как векторы $\overline{OA}_1$ и $\boldsymbol{e}_1$, так и векторы $\overline{OA}_2$ и $\boldsymbol{e}_2$ коллинеарны и $\boldsymbol{e}_1 \neq 0$, $\boldsymbol{e}_2 \neq 0$, поэтому существуют отношения $\overline{OA}_1 : \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{OA}_2 : \boldsymbol{e}_2$. Если ввести обозначения: $\alpha = \overline{OA} : \boldsymbol{e}_1$ и $\beta = \overline{OA}_2 : \boldsymbol{e}_2$, то $\overline{OA}_1 = \alpha \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{OA}_2 = \beta \boldsymbol{e}_2$. Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получаем:

$$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2. \quad (1)$$



Черт. 29

Соотношение (1) называется *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ *по векторам базы* $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Существенно подчеркнуть, что разложение (1) возможно для любого вектора $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}_1$ или $\boldsymbol{e}_2$, то соотношение (1) несколько упрощается, так как, например, при коллинеарности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_1$ $\alpha = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{e}_1}$, поэтому $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_1$ или $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2$. Если, наконец, $\boldsymbol{a} = 0$, то $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2$.

Покажем, что если задана база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ коэффициенты α, β в соотношении (1) определяются однозначно. В самом деле, пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет разложение (1), и, кроме того, разложение

$$\boldsymbol{a} = \alpha' \boldsymbol{e}_1 + \beta' \boldsymbol{e}_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 = \alpha' \boldsymbol{e}_1 + \beta' \boldsymbol{e}_2$ или

$$(\alpha - \alpha') \boldsymbol{e}_1 = (\beta' - \beta) \boldsymbol{e}_2. \quad (3)$$

Отсюда следует, что $\alpha - \alpha' = 0$ и $\beta' - \beta = 0$, т. е. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. В самом деле, если, например, $\alpha - \alpha' \neq 0$, то, разделив соотношение (3) на $\alpha - \alpha'$, получаем: $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} \boldsymbol{e}_2$. Это означает, что $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ коллинеарны, что противоречиво. Мы пришли к следующей теореме:

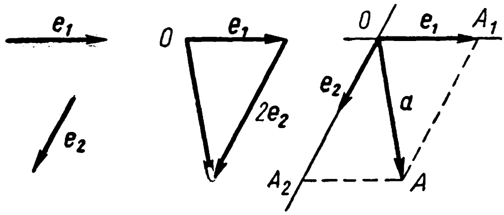
Теорема [4. 1]. *Если дана база* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, *то любой вектор* $\boldsymbol{a}$ *плоскости может быть разложен по векторам* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, *причем коэффициенты* α, β *в разложении* (1) *определяются единственным образом и не зависят от способа разложения.*

Коэффициенты α, β *в соотношении* (1) *называются координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ *в базе* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. При этом α называется первой координатой вектора $\boldsymbol{a}$, а β — второй. Приняты следующие обозначения для координат: $\boldsymbol{a}\{\alpha, \beta\}_{e_1, e_2}$.

Если выбранная база прямоугольная декартова, то координаты вектора называются прямоугольными декартовыми; в общем случае они называются общими или аффинными.

3. Построение вектора по координатам. Учащемуся необходимо с первых же шагов знакомства с понятием координат овладеть способами построения вектора по координатам.

Пусть на плоскости дана база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Для построения вектора $\boldsymbol{a}\{\alpha, \beta\}_{e_1, e_2}$ можно пользоваться двумя способами:



Черт. 30

а) выразить данный вектор $\boldsymbol{a}$ через векторы базы $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$ и, построив векторы $\alpha\boldsymbol{e}_1$, $\beta\boldsymbol{e}_2$, построить вектор $\boldsymbol{a}$, пользуясь правилом сложения векторов;

б) через произвольную точку O плоскости провести две прямые, параллельные соответственно векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. От точки O на построенных прямых отложить направленные отрезки OA_1 и OA_2, длины которых соответственно равны α и β. При этом за единицу измерения на первой прямой принимается отрезок OE_1, а на второй прямой — отрезок OE_2, где E_1 и E_2 — концы векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, приложенных к точке O. Далее, на отрезках OA_1 и OA_2 построить параллелограмм OA_1AA_2. Вектор $\overline{OA}$, направленный по диагонали параллелограмма, и будет искомым.

На чертеже 30 показано построение вектора $\boldsymbol{a}\{1, 2\}$. Левый чертеж соответствует первому способу построения, а правый — второму.

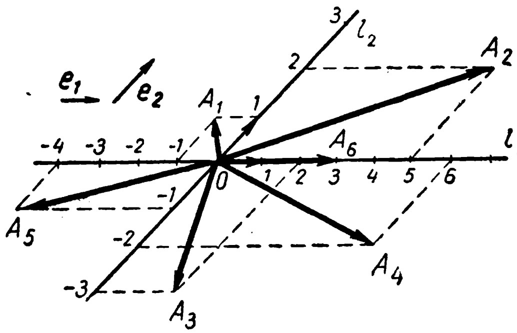
Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. На плоскости дана база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Построить следующие векторы: $\boldsymbol{a}_1\{-1, 1\}$; $\boldsymbol{a}_2\{5, 2\}$; $\boldsymbol{a}_3\{2, -3\}$; $\boldsymbol{a}_4\{6, -2\}$; $\boldsymbol{a}_5\{-4, -1\}$; $\boldsymbol{a}_6\{3, 0\}$.

Решение. Для построения данных векторов воспользуемся вторым способом. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — данная база. Возьмем произвольную точку O и через эту точку проведем две прямые l_1 и l_2, параллельные векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Принимая точку O за начало, построим систему векторов $\boldsymbol{e}_1$, $2\boldsymbol{e}_1$, $3\boldsymbol{e}_1$, ..., $-\boldsymbol{e}_1$, $-2\boldsymbol{e}_1$, $-3\boldsymbol{e}_1$, ..., концы которых лежат на прямой l_1, и другую систему векторов $\boldsymbol{e}_2$, $2\boldsymbol{e}_2$, $3\boldsymbol{e}_2$, ..., $-\boldsymbol{e}_2$, $-2\boldsymbol{e}_2$, $-3\boldsymbol{e}_2$, ..., концы которых лежат на прямой l_2. Таким образом, на прямых l_1 и l_2 получаем последовательность точек, отмеченных на чертеже 31, *а* цифрами 1, 2, 3, ..., —1, —2, —3, ... Отметим, что масштабы единиц на прямых l_1 и l_2, вообще говоря, различны, т. е. в общем случае $|\boldsymbol{e}_1| \neq |\boldsymbol{e}_2|$.

Пользуясь полученными на чертеже 31, *а* точками, строим данные векторы $\overline{OA}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\overline{OA}_2 = \boldsymbol{a}_2$, $\overline{OA}_3 = \boldsymbol{a}_3$, $\overline{OA}_4 = \boldsymbol{a}_4$, $\overline{OA}_5 = \boldsymbol{a}_5$ и $\overline{OA}_6 = \boldsymbol{a}_6$.

В следующем примере рассмотрим построение вектора в прямоугольной декартовой базе.



Черт. 31 *а*

Пример 2. На плоскости дана прямоугольная декартова база $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Построить в этой базе векторы $\boldsymbol{b}_1\,\{-2,\ 1\}$; $\boldsymbol{b}_2\,\{0,\ 3\}$; $\boldsymbol{b}_3\left\{\frac{1}{2};\ \frac{5}{3}\right\}$; $\boldsymbol{b}_4\,\{-3,\ 0\}$; $\boldsymbol{b}_5\,\{-2,\ -3\}$; $\boldsymbol{b}_6\,\{3,\ -2\}$.

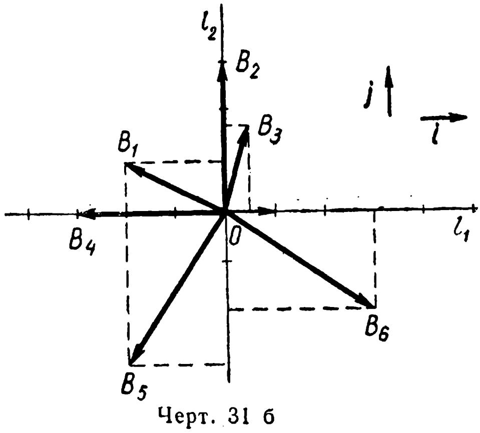
Решение. В данном случае поступим так же, как и в предыдущем примере. Здесь прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны и масштабы единиц на этих прямых, в отличие от общего случая, равны. На чертеже 31, *б* дано построение векторов: $\boldsymbol{b}_1 = \overline{OB}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \overline{OB}_2$, $\boldsymbol{b}_3 = \overline{OB}_3$, $\boldsymbol{b}_4 = \overline{OB}_4$, $\boldsymbol{b}_5 = \overline{OB}_5$, $\boldsymbol{b}_6 = \overline{OB}_6$.

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно составить и решить ряд аналогичных примеров, с тем чтобы приобрести твердые навыки в построении векторов по координатам.

Пример 3. Определить координаты векторов $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в базе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Решение. Вектор $\boldsymbol{0}$ может быть представлен следующим образом: $\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2$. Отсюда следует, что нулевой вектор в любой базе имеет координаты $\{0,\ 0\}$. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{e}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2$, поэтому $\boldsymbol{e}_1\{1,\ 0\}_{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2}$. Точно так же получаем: $\boldsymbol{e}_2\{0,\ 1\}_{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2}$.

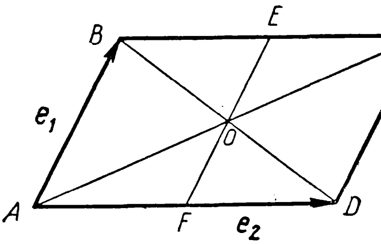
4. Определение координат данных векторов. Пусть на плоскости заданы векторы и некоторая база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Требуется определить координаты данных векторов. Для решения задачи, очевидно, необходимо определить коэффициенты разложения данных векторов по векто-



Черт. 31 б

рам базы. При этом известно, что эти коэффициенты не зависят от способа разложения, поэтому для решения поставленной задачи достаточно к а к и м - л и б о способом данные векторы разложить по $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. При решении конкретной задачи способ разложения выбирают исходя из условий задачи.

П р и м е р 4. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, E и F — середины противоположных сторон BC и AD, а O — точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overline{AD}=\boldsymbol{e}_2$ за векторы базы, определить координаты следующих векторов:



Черт. 32

а) $\overline{AC}$; б) $\overline{OD}$; в) $\overline{FC}$; г) $\overline{BC}$; д) $\overline{EO}$; е) $\overline{BD}$; ж) $\overline{EA}$.

Р е ш е н и е. На чертеже 32 изображен данный параллелограмм с указанными на нем точками.

а) $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$; отсюда следует, что $\overline{AC}\{1,\ 1\}$;

б) $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}(\overline{AD}-\overline{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$; отсюда следует, что $\overline{OD}\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$;

в) $\overline{FC}=\overline{AC}-\overline{AF}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$; отсюда следует, что $\overline{FC}\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$.

Аналогично можно показать, что $\overline{BC}\{0,\ 1\}$, $\overline{EO}\left\{-\frac{1}{2},\ 0\right\}$, $\overline{BD}\{-1,\ 1\}$, $\overline{EA}\left\{-1,\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Координаты вектора существенно зависят от выбора базы. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 5. В условиях примера 4 определить координаты векторов а) $\overline{AC}$; б) $\overline{OD}$; в) $\overline{FC}$ в базе $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$.

Р е ш е н и е. а) $\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=2\overline{AO}=-2\overline{OA}=-2\boldsymbol{a}$, поэтому $\overline{AC}\{-2,\ 0\}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$;

б) $\overline{OD}=\overline{BO}=-\overline{OB}=-\boldsymbol{b}$, поэтому $\overline{OD}\{0,\ -1\}$;

в) $\overline{FC}=\overline{FO}+\overline{OC}=-\overline{OF}+\overline{AO}=-\overline{OF}-\overline{OA}$; но $\overline{OF}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OD}\right)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, поэтому получаем: $\overline{FC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=$

$$=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.\ \text{Итак,}\ \overline{FC}\left\{-\frac{3}{2},\ +\frac{1}{2}\right\}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}.$$

Сравнивая полученные координаты с координатами тех же векторов в предыдущем примере, мы видим, что один и тот же вектор в разных базах имеет различные координаты.

5. Линейная комбинация векторов. Пусть на плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. *Линейной комбинацией этих векторов называется всякий вектор вида:* $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — *произвольные числа.* Очевидно, из данных векторов можно составить различные линейные комбинации. Например, если даны три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$, то $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \sqrt{3}\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ являются линейными комбинациями этих векторов.

Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такая линейная комбинация называется т р и в и а л ь н о й, в противном случае она называется н е т р и в и а л ь н о й. Легко видеть, что тривиальная линейная комбинация любого числа векторов есть нуль-вектор. Заметим, что, в частности, сумма двух векторов $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, разность $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + (-1)\,\boldsymbol{a}_2$, произведение вектора на число $(\alpha\boldsymbol{a})$ есть линейные комбинации данных векторов.

6. Теорема о координатах линейной комбинации векторов. Даны несколько векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ своими координатами в базе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и, кроме того, дана некоторая линейная комбинация этих векторов: $\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$ (т. е. известны коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$). Определить координаты вектора $\boldsymbol{p}$ в той же базе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Так как идея решения задачи не зависит от числа k данных векторов, то для упрощения выкладок предположим, что $k = 3$. Допустим, что нам даны три вектора $\boldsymbol{a}_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\boldsymbol{a}_3\{\alpha_3, \beta_3\}$ и требуется определить координаты вектора $\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$. Для решения задачи достаточно разложить вектор $\boldsymbol{p}$ каким-либо способом по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Так как α_1, β_1 являются координатами вектора $\boldsymbol{a}_1$, то $\boldsymbol{a}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2$. Точно так же $\boldsymbol{a}_2 = \alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}_3 = \alpha_3\boldsymbol{e}_1 + \beta_3\boldsymbol{e}_2$. Подставив эти значения в выражение вектора $\boldsymbol{p}$, получаем:

$$\boldsymbol{p} = \lambda_1(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2) + \lambda_2(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2) + \lambda_3(\alpha_3\boldsymbol{e}_1 + \beta_3\boldsymbol{e}_2) =$$
$$= (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3)\boldsymbol{e}_2.$$

Обозначив через x и y координаты $\boldsymbol{p}$, будем иметь:

$$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3, \quad y = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3.$$

Мы пришли к выводу, что каждая координата линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат этих векторов. Этот вывод распространяется на линейную комбинацию, состоящую из любого числа векторов. Таким образом, мы доказали следующую т е о р е м у о к о о р д и н а т а х л и н е й н о й к о м б и н а ц и и в е к т о р о в.

Теорема [4. 2]. *Каждая координата линейной комбинации нескольких векторов равна той же линейной комбинации соответствующих координат составляющих векторов.*

Другими словами, если $\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$ и

$$\boldsymbol{p}\{x,\ y\}_{e_1, e_2},\ \boldsymbol{a}_1\{\alpha_1,\ \beta_1\}_{e_1e_2},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k\{\alpha_k,\ \beta_k\}_{e_1e_2},$$

то

$$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_k\alpha_k,$$
$$y = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_k\beta_k.$$

Пример 6. Пусть в данной системе даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_3\ \{-3, 2\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$.

Решение. Пусть $\{x, y\}$ — координаты вектора $\boldsymbol{p}$. По теореме [4. 2] координата x равна той же линейной комбинации первых координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$, т. е. следует взять линейную комбинацию $\boldsymbol{p} = 2\,\boldsymbol{a}_1 - 3\,\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ и формально вместо векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ подставить их первые координаты:

$$x = 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + (-3) = -7.$$

Аналогично определяем вторую координату вектора $\boldsymbol{p}$:

$$y = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2 = 1.\ \text{Итак,}\ \boldsymbol{p}\{-7, 1\}.$$

Пример 7. На плоскости даны два вектора $\boldsymbol{u}\{2, 1\}$, $\boldsymbol{v}\{1, 0\}$. Найти коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}\{9, 1\}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{u} + \beta\,\boldsymbol{v}$. Определим коэффициенты α и β. Для этой цели воспользуемся теоремой о координатах линейной комбинации векторов. По этой теореме каждая координата вектора $\boldsymbol{a}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, поэтому

$$9 = \alpha\cdot 2 + \beta\cdot 1,$$
$$1 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0.$$

Отсюда получаем: $\alpha = 1$, $\beta = 7$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}$ имеет вид: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 7\boldsymbol{v}$.

Проверка. Если $\boldsymbol{a}\{x, y\}$, то по теореме о координатах линейной комбинации векторов $x = 2 + 7\cdot 1 = 9$, $y = 1 + 7\cdot 0 = 1$. Задача решена правильно.

Пример 8. В некоторой системе координат даны векторы $\boldsymbol{a}\{1, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 6\}$ и $\boldsymbol{c}\{0, -1\}$. Выяснить, существует ли треугольник ABC, стороны AB, BC, CA которого соответственно параллельны векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и для которого $AB = |\boldsymbol{a}|$, $BC = |\boldsymbol{b}|$, $CA = |\boldsymbol{c}|$.

Решение. Из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ можно составить треугольник, удовлетворяющий условиям задачи в том и только в том случае, если имеет место одно из следующих условий $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0$. Из данных задачи следует, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, т. е. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0$. Итак, треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи, существует.

7. Координаты суммы, разности и произведения вектора на число. Выше было отмечено, что векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} = \alpha\,\boldsymbol{a}$ являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому к этим векторам также применима теорема [4.2]. Итак,

Теорема [4.3]. а) *Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.*

б) *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого векторов.*

в) *При умножении вектора на число, каждая его координата умножается на то же число.*

Пример 9. Пусть в данной системе $\boldsymbol{a}\{2, -3\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, -5\}$. Определить координаты векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\sqrt{2}\,\boldsymbol{b}$.

Решение. Из сформулированной теоремы непосредственно следует, что $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\{1, -8\}$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\ \{3, 2\}$, $\sqrt{2}\,\boldsymbol{b}\{-\sqrt{2}, -5\sqrt{2}\}$.

8. Условие коллинеарности двух векторов. Выведем необходимые и достаточные условия коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами. Пусть в некоторой системе даны два вектора своими координатами $\boldsymbol{a}\ \{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\boldsymbol{b}\ \{\alpha_2, \beta_2\}$, причем $\boldsymbol{b} \neq 0$. Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ (лемма [3.1]). Отсюда на основании теоремы [4.3] заключаем, что $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$. Обратно, пусть $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$. Умножив обе части первого соотношения на $\boldsymbol{e}_1$, второго соотношения на $\boldsymbol{e}_2$, получаем: $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 = \lambda\alpha_2\boldsymbol{e}_1$, $\beta_1\boldsymbol{e}_2 = \lambda\beta_2\boldsymbol{e}_2$. Отсюда следует, что $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2 = \lambda\,(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2)$, т. е. $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$. Из леммы [3. 1] следует, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Итак, мы получили следующее предложение.

Теорема [4.4]. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_1, \beta_2,\} \neq 0$, заданные в аффинной базе, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора $\boldsymbol{a}$ были пропорциональны координатам вектора $\boldsymbol{b}$.*

Можно дать несколько иную формулировку этой теоремы:

Теорема [4.5]. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}\ \{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2\}$, заданные в аффинной базе, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы определитель второго порядка, составленный из координат этих векторов, был равен нулю, т. е.*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Доказательство необходимости. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ и, следовательно, $\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Если же $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$, поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство достаточности. Пусть имеет место соотношение (4), которое можно записать так:

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0. \tag{5}$$

Если $\alpha_2 = 0$ и $\beta_2 = 0$, то $\boldsymbol{b}$ — нулевой вектор. По определению, он коллинеарен любому вектору, в частности вектору $\boldsymbol{a}$. Допустим, что $\alpha_2 \neq 0$. Разделив (5) на α_2, получаем: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2 - \beta_1 = 0$. Если ввести обозначение $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda$, то предыдущее соотношение запишется так: $\lambda\beta_2 - \beta_1 = 0$. Итак, $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta = \lambda\beta_2$, т. е. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ согласно [4.4] коллинеарны.

Пример 10. Выяснить, какие из следующих пар векторов коллинеарны:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}_1\{2,\ 3\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{-\sqrt{2},\ 3\}$, $\boldsymbol{b}_2\{2\sqrt{2},\ -6\}$;
в) $\boldsymbol{a}_3\{0,\ 5\}$, $\boldsymbol{b}_3\{0,\ 7\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\{0,\ 4\}$, $\boldsymbol{b}_4\{5,\ 0\}$.

Решение. Векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Можно в этом убедиться также, используя теорему [4.5]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_2$ коллинеарны, так как $\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 3 \\ 2\sqrt{2} & -6 \end{vmatrix} = 0$. Аналогично убеждаемся в том, что $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_3$ коллинеарны, а $\boldsymbol{a}_4$ и $\boldsymbol{b}_4$ не коллинеарны.

Пример 11. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{1,\ 5\}$, $\boldsymbol{b}\{3,\ -1\}$ и $\boldsymbol{c}\{0,\ 1\}$. При каком значении коэффициента α векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ коллинеарны.

Решение. Сначала определим координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Очевидно, $\boldsymbol{p}\{1 + 3\alpha,\ 5 - \alpha\}$, $\boldsymbol{q}\{1,\ 4\}$. Эти векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} 1+3\alpha & 5-\alpha \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ или $13\alpha - 1 = 0$, $\alpha = \frac{1}{13}$.

Проверка. При $\alpha = \frac{1}{13}$ имеем: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{13}\boldsymbol{b} = \frac{13\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{13}$. Отсюда, пользуясь теоремой о координатах линейной комбинации векторов, получаем координаты вектора $\boldsymbol{p}\left\{\frac{16}{13},\ \frac{64}{13}\right\}$. Мы видим, что координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ пропорциональны, поэтому $\boldsymbol{p}$ коллинеарен $\boldsymbol{q}$.

9. Угловой коэффициент вектора. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ в аффинной базе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет координаты $\{\alpha,\ \beta\}$. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_2$ не коллинеарны, т. е. если $\alpha \neq 0$, то число $k = \frac{\beta}{\alpha}$ называется угловым к о э ф ф и ц и е н т о м вектора $\boldsymbol{a}$. Вектор, коллинеарный $\boldsymbol{e}_2$, не имеет углового коэффициента. Если база прямоугольная декартова, то угловой коэффициент, очевидно, равен $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{a}$. Значение введенного нами понятия углового коэффициента становится ясным из следующей теоремы:

Т е о р е м а [4.6]. *Для того чтобы два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, не коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_2$, были коллинеарны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2\}$, то из [4.5] следует, что $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, или $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$. Так как $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то это соотношение можем разделить на $\alpha_1\alpha_2$: $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}$, или $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$, т. е. $k_1 = k_2$.

Обратно, пусть $k_1 = k_2$ или $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$. Умножив на $\alpha_1\alpha_2$, получаем: $\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1 = 0$, или $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Из [4.5] следует, что векторы коллинеарны.

Теорема [4.6] показывает, что угловой коэффициент вектора характеризует н а п р а в л е н и е вектора; точнее, все векторы, параллельные одной и той же прямой, имеют равные угловые коэффициенты.

П р и м е р 12. Определить угловые коэффициенты векторов $\boldsymbol{a}_1\{-3, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$, $\boldsymbol{a}_3\{6, -2\}$, $\boldsymbol{a}_4\{1, +5\}$, $\boldsymbol{a}_5\{1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_6\{2, -\sqrt{6}\}$. По угловым коэффициентам выяснить, какие из этих векторов коллинеарны.

Р е ш е н и е. Если обозначим через $k_1, k_2, \ldots, k_6$ угловые коэффициенты соответствующих векторов, то по определению $k_1 = -\frac{1}{3}$, $k_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $k_3 = -\frac{1}{3}$, $k_4 = 5$, $k_5 = 0$, $k_6 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$. Отсюда видно, что $\boldsymbol{a}_1$ коллинеарен $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарен $\boldsymbol{a}_6$.

Вопросы и упражнения

40. Найти координаты точек: а) лежащих на оси абсцисс и имеющих абсциссы: $x_1 = 2$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 5$; б) лежащих на оси ординат и имеющих ординаты: $y_1 = -3$, $y_2 = \sqrt{2}$, $y_3 = 1$.

41. Пусть в базе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ векторы имеют координаты $\boldsymbol{a}\{2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{-3, 1\}$. а) Определить их координаты в базе $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1$; б) определить их координаты в базе $-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$; в) определить их координаты в базе $-\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1$.

42. Пусть $\boldsymbol{a}\{1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{-3, -1\}$, $\boldsymbol{c}\{5, -1\}$. Определить координаты векторов $-\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$, $-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

43. При определении координат было подчеркнуто, что векторы базы не коллинеарны. Где было использовано это ограничение?

44. Взяв на плоскости общую базу, построить следующие векторы:

$$\boldsymbol{a}_1\{2, -1\},\ \boldsymbol{a}_2\{\sqrt{2}, 1\},\ \boldsymbol{a}_3\{3, 4\},\ \boldsymbol{a}_4\{2, 0\},\ \boldsymbol{a}_5\{-2, -1\},$$
$$\boldsymbol{a}_6\{\sqrt{3}, 0\},\ \boldsymbol{a}_7\{0, 1\},\ \boldsymbol{a}_8\{1, 1\},\ \boldsymbol{a}_9\{1, -1\},\ \boldsymbol{a}_{10}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}.$$

45. Взяв на плоскости прямоугольную декартову базу, построить векторы предыдущего примера.

46. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия $MN \parallel AC$; BK и MN пересекаются в точке O. а) Найти координаты векторов $\overline{CM}$, $\overline{OB}$, $\overline{KM}$, $\overline{CB}$, $\overline{NC}$ и $\overline{AN}$, принимая векторы $\overline{OC}$ и $\overline{OM}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$; б) найти координаты тех же векторов $\overline{CM}$, $\overline{OB}$, $\overline{KM}$, $\overline{CB}$, $\overline{NC}$ и $\overline{AN}$, принимая векторы $\overline{KC}$ и $\overline{KN}$ за векторы базы.

47. В равнобочной трапеции $ABCD$ угол A равен $\frac{\pi}{3}$. Полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$, разложить по $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали.

48. Что называется линейной комбинацией векторов? Может ли нетривиальная линейная комбинация векторов равняться нулю?

49. Сформулируйте теорему о линейной комбинации векторов и докажите ее для линейной комбинации четырех векторов.

50. Справедлива ли теорема о координатах линейной комбинации векторов, если векторы заданы в прямоугольной декартовой базе?

51. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, -3\}$, $\boldsymbol{b}\{-3, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{2, -5\}$. Определить координаты векторов: $\boldsymbol{p} = \sqrt{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$.

52. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{3, -1\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 0\}$ и $\boldsymbol{d}\{-1, -1\}$.

Определить координаты векторов:

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\quad \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}}{3},\quad \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{d},\quad \frac{\boldsymbol{c}-\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{4}.$$

53. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}\{3, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-2, 1\}$ и $\boldsymbol{c}\{7, -4\}$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих векторов, принимая в качестве векторов базы два других.

54. Даны векторы $\boldsymbol{u}\{3, -1\}$, $\boldsymbol{v}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{w}\{-1, 7\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

55. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -3\}$ и $\boldsymbol{c}\{-1, 3\}$. При каком значении коэффициента α векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}$ коллинеарны?

56. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, -3\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$. При каких значениях коэффициента α будут коллинеарны следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$;

б) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;

в) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}$?

57. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{-1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{3, -5\}$, $\boldsymbol{c}\{4, -3\}$. Существует ли треугольник ABC, стороны AB, BC, CA которого соответственно параллельны векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и для которого $AB = |\boldsymbol{a}|$, $BC = |\boldsymbol{b}|$, $AC = |\boldsymbol{c}|$?

58. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 0\}$, $\boldsymbol{c}\left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$, $\boldsymbol{d}\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$.

Существует ли трапеция $ABCD$, стороны которой соответственно параллельны данным векторам и для которой $AB = |\boldsymbol{a}|$, $BC = |\boldsymbol{b}|$, $CD = |\boldsymbol{c}|$, $DA = |\boldsymbol{d}|$?

59. Выяснить, какие из следующих пар векторов коллинеарны:

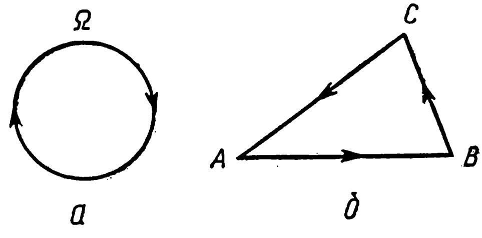
а) $\boldsymbol{a}_1\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}_1\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}_2\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, 3\}$, $\boldsymbol{b}_3\{0, \sqrt{3}\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\left\{\frac{1}{3}, -\sqrt{3}\right\}$, $\boldsymbol{b}_4\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right\}$; д) $\boldsymbol{a}_5\left\{\frac{1}{3}, -\sqrt{3}\right\}$, $\boldsymbol{b}_5\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right\}$; е) $\boldsymbol{a}_6\{1, 1\}$, $\boldsymbol{b}_6\{0, -5\}$.

60. Определить угловые коэффициенты следующих векторов: $\boldsymbol{a}_1\{1, 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1, -3\}$, $\boldsymbol{a}_3\{2, -\sqrt{2}\}$, $\boldsymbol{a}_4\{5, 0\}$.

61. Что можно сказать о векторах, угловые коэффициенты которых равны нулю?

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ВЕКТОРА И УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ ПО КООРДИНАТАМ

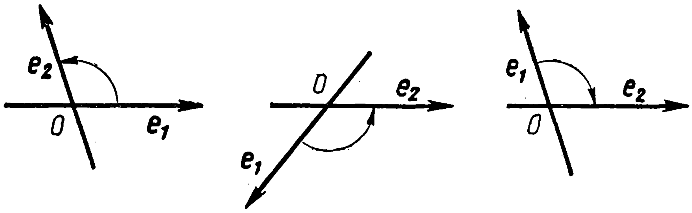
1. Ориентированная плоскость. Плоскость называется *ориентированной*, если в ней указано некоторое направление обхода в качестве положительного. Для того чтобы выбрать ориентацию на плоскости, достаточно, например, взять ориентированную окружность, т. е. окружность с фиксированным направлением обхода, или ориентированный треугольник, т. е. треугольник с указанным порядком расположения вершин. Напри-



Черт. 33

мер, на чертеже 33, *а* положительное направление задано при помощи ориентированной окружности $\circlearrowright$; оно совпадает с направлением движения часовой стрелки, а на чертеже 33, *б* положительное направление задано ориентированным треугольником ABC — оно противоположно движению часовой стрелки.

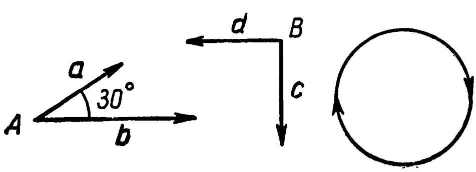
Пусть на плоскости дана база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Перенесем векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в некоторую точку O плоскости и возьмем за положительное направление обхода то направление, по которому следует повернуть вектор $\boldsymbol{e}_1$ до совпадения с направлением вектора $\boldsymbol{e}_2$ по кратчайшему пути (черт. 34). Очевидно, положительное направление обхода,



Черт. 34

определяемое таким образом, не зависит от выбора точки O. *В дальнейшем плоскость с заданной базой будем считать ориентированной вышеуказанным способом.*

2. Угол между двумя векторами на ориентированной плоскости. Пусть на ориентированной плоскости задан угол при помощи двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, приложенных в некоторой точке A и заданных в определенном порядке ($\boldsymbol{a}$ — первый вектор, $\boldsymbol{b}$ — второй). *Мерой угла, образованного векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *называется число, которым измеряется угол, на который следует повернуть вектор* $\boldsymbol{a}$ *до совпадения с направлением вектора* $\boldsymbol{b}$. При этом мера угла считается положительной, если поворот совершается в положительном направлении; в противном случае она считается отрицательной. Например, мера угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на чертеже 35 равна $+30^\circ$ или -330°. Мера того же угла равна $30^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ или $-330^\circ \mp k \cdot 360^\circ$, где k — целое положительное число. Мера угла, образованного векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, равна 90° или -270° (черт. 35). Мера того же угла равна $90^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ или $270^\circ \mp k \cdot 360^\circ$. Таким образом, задание угла не однозначно определяет его меру. Однако эта неопределенность в дальнейших рассуждениях не сказывается, так как в аналитической геометрии нас интересует, как правило, не



Черт. 35

мера угла, а какая-либо тригонометрическая функция этой меры.

Меру угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в дальнейшем будем обозначать символом $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ или $\angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

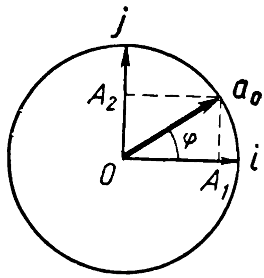
Из указанного способа измерения углов следуют равенства:

а) $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = -(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$; б) $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) + (\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}}) = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}})$;

в) если $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены;

г) если $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \pi$ или $-\pi$, то $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ противоположно направлены.

Мы не будем доказывать эти свойства. Рекомендуем на чертеже, рассматривая различные случаи расположения векторов, убедиться в справедливости всех этих свойств.



Черт. 36

3. Геометрический смысл координат единичного вектора в прямоугольной декартовой базе. Пусть $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор, заданный своими координатами $\{\alpha, \beta\}$ в прямоугольной декартовой базе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{a}_0 = \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j}.$$

Если мы перенесем векторы $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ в точку O плоскости, то концы этих векторов будут лежать на окружности с центром в точке O и радиусом единица (черт. 36). Если A_1 и A_2 — проекции конца вектора $\boldsymbol{a}_0$ на прямые, на которых лежат векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, то, как было отмечено в § 4, $\alpha = \frac{\overline{OA_1}}{\boldsymbol{i}}$, $\beta = \frac{\overline{OA_2}}{\boldsymbol{j}}$. С другой стороны, если $\varphi = \angle (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0)$, то по определению тригонометрических функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ имеем: $\cos\varphi = \frac{\overline{OA_1}}{\boldsymbol{i}} = \alpha$, $\sin\varphi = \frac{\overline{OA_2}}{\boldsymbol{j}} = \beta$. Итак, мы приходим к следующему важному выводу:

Теорема [5. 1]. *Координаты единичного вектора $\boldsymbol{a}_0$ в прямоугольной декартовой базе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ равны соответственно* $\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})$, $\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})$.

4. Вычисление длины вектора по координатам.

Задача 1. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ своими координатами x, y в прямоугольной декартовой базе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Определить модуль этого вектора.

Решение. Если $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$. Из теоремы [5. 1] следует, что $\boldsymbol{a}_0 = \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{i} + \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{j}$, поэтому

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{i} + |\boldsymbol{a}|\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{j}.$$

Таким образом,

$$x = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0}); \quad y = |\boldsymbol{a}| \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0}).$$

Из этих двух соотношений, исключив угол $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})$, получаем:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема [5.2]. *Модуль вектора в прямоугольной декартовой базе равен корню квадратному из суммы квадратов координат вектора.*

Пример 1. В прямоугольной декартовой базе даны векторы $\boldsymbol{a}\{-3, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 0\}$, $\boldsymbol{c}\{3, \sqrt{7}\}$, $\boldsymbol{d}\{1, -2\}$. Определить модули этих векторов.

Решение. По предыдущей теореме $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{9+16} = 5$; $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{4+0} = 2$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{9+7} = 4$, $|\boldsymbol{d}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Пример 2. Пусть $|\boldsymbol{a}| = 6$, а первая координата $x = 2\sqrt{5}$. Определить вторую координату вектора $\boldsymbol{a}$.

Решение. $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $36 = 20 + y^2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Таким образом, существуют два вектора, удовлетворяющие данным условиям: $\boldsymbol{a}_1\{2\sqrt{5}, 4\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2\sqrt{5}, -4\}$.

5. Вычисление угла между двумя векторами по координатам.

Задача 2. Даны ненулевые векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ своими координатами в прямоугольной декартовой базе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$: $\boldsymbol{a}_1\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{x_2, y_2\}$. Определить $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$, $\sin(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$.

Решение. Если $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, то

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \frac{x_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{i} + \frac{y_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{j}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{x_2}{|\boldsymbol{a}_2|}\boldsymbol{i} + \frac{y_2}{|\boldsymbol{a}_2|}\boldsymbol{j}. \tag{2}$$

Очевидно, $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = (\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2})$, поэтому задача сводится к нахождению $\cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2})$ и $\sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2})$.

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}) = \cos\left[(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}}) + (\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2})\right] = \cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}})\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) - \\ - \sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}})\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1})\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) + \\ + \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1})\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}), \tag{3}$$

так как $\cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1})$, а $\sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}}) = -\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1})$. (4)

Из теоремы [5.1], учитывая соотношения (1) и (2), получаем:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1}) = \frac{x_1}{|\boldsymbol{a}_1|}, \qquad \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_1}) = \frac{y_1}{|\boldsymbol{a}_1|},$$
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) = \frac{x_2}{|\boldsymbol{a}_2|}, \qquad \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) = \frac{y_2}{|\boldsymbol{a}_2|}. \tag{5}$$

Подставив эти значения в соотношение (3), получаем:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}) = \frac{x_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\frac{x_2}{|\boldsymbol{a}_2|} + \frac{y_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\frac{y_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}.$$

Учитывая, что $|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = (\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2})$, окончательно получаем:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, получаем условие перпендикулярности двух векторов, заданных координатами в прямоугольной декартовой базе. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы* $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = 0$. Из (6) получаем:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{7}$$

Для определения $\sin(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ поступаем аналогичным образом:

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}) = \sin\left[(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}}) + (\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2})\right] = \sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}})\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}) + \cos(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{i}})\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2}).$$

Учитывая соотношения (4) и (5), получаем:

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}) = \frac{-y_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\frac{x_2}{|\boldsymbol{a}_2|} + \frac{x_1}{|\boldsymbol{a}_1|}\frac{y_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}.$$

В силу того что $|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = (\widehat{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2})$, окончательно получаем:

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \tag{8}$$

Из формул (6) и (8) получаем формулу для вычислeния $\operatorname{tg}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\sin(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})}{\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y_2}. \tag{9}$$

Пример 3. Определить угол между векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, заданными в прямоугольной декартовой базе: а) $\boldsymbol{a}_1\{2, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2\{1, 1\}$; б) $\boldsymbol{a}_1\{2, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2\{3, 0\}$; в) $\boldsymbol{a}_1\{\sqrt{3}, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{1, \sqrt{3}\}$.

Решение.

а) $\cos\varphi_1 = \dfrac{2+0}{2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin\varphi_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда следует, что $\varphi_1 = 45°$.

б) $\cos\varphi_2 = \dfrac{2\cdot 3 + 2\cdot 0}{\sqrt{8}\,\sqrt{9}} = \dfrac{6}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \sin\varphi_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{8}\,\sqrt{9}} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что $\varphi_2 = -45°$.

в) $\cos\varphi_3 = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \sin\varphi_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{2\cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда следует, что $\varphi_3 = 30°$.

Пример 4. Перпендикулярны ли следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1, -3\}$ и $\boldsymbol{a}_2\left\{1, \dfrac{1}{3}\right\}$; б) $\boldsymbol{a}_1\{2, 3\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{-6, 4\}$;

в) $\boldsymbol{a}_1\{1, 0\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{1, 2\}$; г) $\boldsymbol{a}_1\{1, 1\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{-1, 2\}$?

Решение. Применяя формулу (7), мы приходим к выводу, что в случаях а) и б) данные векторы перпендикулярны, а в случаях в) и г) не перпендикулярны.

6. В заключение этого параграфа решим следующую задачу, необходимую для дальнейшего изложения:

Задача 3. Дан ненулевой вектор $\boldsymbol{a}\{x, y\}$ в прямоугольной декартовой базе. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a}'$, полученного из $\boldsymbol{a}$ путем поворота на $+90°$.

Решение. Выше было показано, что если вектор $\boldsymbol{a}$ в прямоугольной декартовой системе имеет координаты x, y, то $x = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}})$, $y = |\boldsymbol{a}|\sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}})$. Обозначим через x_1, y_1 координаты вектора $\boldsymbol{a}'$. Из тех же формул следует, что $x_1 = |\boldsymbol{a}'|\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}')$, $y_1 = |\boldsymbol{a}'|\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}')$.

Но $|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|$, $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}'}) = (\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) + (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'}) = (\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) + 90°$.

Учитывая эти соотношения, получаем:

$$x_1 = |\boldsymbol{a}| \cos\left[(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) + 90^\circ\right] = -|\boldsymbol{a}| \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) = -y,$$

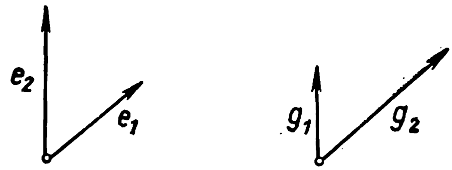
$$y_1 = |\boldsymbol{a}| \sin\left[(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) + 90^\circ\right] = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) = x.$$

Мы получили следующую теорему:

Теорема [5.3]. *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *в прямоугольной декартовой базе имеет координаты* $\{x, y\}$, *то вектор* $\boldsymbol{a}'$, *полученный из* $\boldsymbol{a}$ *путем поворота на* $+90^\circ$, *имеет координаты* $\{-y, x\}$.

Вопросы и упражнения

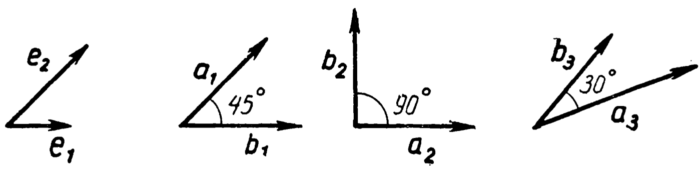
62. Дайте определение ориентированной плоскости. Определяют ли базы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2$ одну и ту же ориентацию?



Черт. 37

63. На чертеже 37 даны две базы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$. а) Совпадают ли ориентации, определяемые этими двумя базами? б) Совпадают ли ориентации, определяемые базами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{g}_1$, $-\boldsymbol{g}_2$?

64. На плоскости ориентация определена базой $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (черт. 38). Определить знаки углов $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1})$, $(\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2})$, $(\widehat{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2})$, $(\widehat{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3})$, изображенных на том же чертеже.



Черт. 38

65. На плоскости ориентация определена равносторонним треугольником ABC. Определить углы: а) $(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}})$; б) $(\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}})$; в) $(\widehat{\overline{BA}, \overline{CA}})$; г) $(\widehat{\overline{BA}, \overline{AC}})$; д) $(\widehat{\overline{CB}, \overline{AB}})$.

66. Каков геометрический смысл координат единичного вектора в прямоугольной декартовой базе?

67. Вектор $\boldsymbol{a}$ имеет длину, равную 10, и составляет с вектором $\boldsymbol{i}$ угол $+30^\circ$, т. е. $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}}) = +30^\circ$. Определить координаты этого вектора.

68. Определить модули следующих векторов, заданных в прямоугольной декартовой базе:

$$\boldsymbol{a}\{-4,\ -3\},\ \boldsymbol{b}\{6,\ -8\},\ \boldsymbol{c}\{-3,\ 4\},\ \boldsymbol{d}\{-5,\ 12\},\ \boldsymbol{e}\{1,\ 2\}.$$

69. Определить, какие из следующих пар векторов взаимно перпендикулярны:

$\boldsymbol{a}_1\{2,\ 5\}$ и $\boldsymbol{b}_1\{-10,\ 4\}$; $\boldsymbol{a}_2\{1,\ 2\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{1,\ -3\}$; $\boldsymbol{a}_3\{3,\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}_3\{2,\ -6\}$.

70. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{2,\ 5\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1,\ -2\}$, $\boldsymbol{a}_3\{5,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\{0,\ 1\}$, $\boldsymbol{a}_5\{2,\ -\sqrt{5}\}$. Определить координаты векторов, полученных из данных путем поворота на $+90°$.

71. Вычислить угол между следующими парами векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2,\ 2\}$; б) $\boldsymbol{b}_1\{1,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}_2\{-1,\ \sqrt{3}\}$;

в) $\boldsymbol{c}_1\{-\sqrt{3},\ 3\}$, $\boldsymbol{c}_2\{0,\ 1\}$; г) $\boldsymbol{d}_1\{2,\ 0\}$, $\boldsymbol{d}_2\{1,\ -\sqrt{3}\}$.

72. Вектор в прямоугольной декартовой базе имеет координаты x, y. Определить координаты вектора, полученного из данного путем поворота на $-90°$.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изложенная нами теория может быть с успехом применена для доказательства ряда теорем и решения задач из курса элементарной геометрии. В настоящем параграфе мы приведем некоторые примеры приложения векторной алгебры к решению элементарно-геометрических задач. Если читатель пожелает более подробно рассмотреть этот вопрос, то мы можем ему рекомендовать воспользоваться следующими пособиями: [6], [12], [15], [21], [19][1].

1. Свойства параллелограмма. В качестве приложения векторной алгебры к доказательству геометрических теорем рассмотрим хорошо известные учащемуся из курса средней школы свойства параллелограмма. Как известно, параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

а) Теорема [6.1]. *Противоположные стороны параллелограмма равны между собой.*

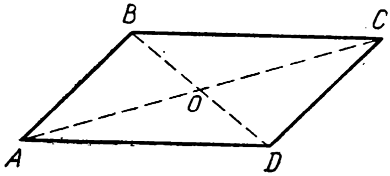
Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$ (черт. 39). Отсюда следует, что пары векторов $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ и $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ коллинеарны. Из леммы [3. 1] следует, что существуют числа α и β, удовлетворяющие условиям: $\overline{DC}=\alpha\overline{AB}$ и $\overline{BC}=\beta\overline{AD}$. Но $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\overline{AA}=\mathbf{0}$, поэтому $\overline{AB}+\beta\overline{AD}-\alpha\overline{AB}-\overline{AD}=\mathbf{0}$ или $(1-\alpha)\overline{AB}+(\beta-1)\overline{AD}=\mathbf{0}$. Так как

[1] См. сноску на странице 4.

векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не коллинеарны, то $1-\alpha=0$ и $\beta-1=0$ (см. доказательство теоремы [4. 1] на стр. 31). Итак, $\overline{DC}=\overline{AB}$ и $\overline{BC}=\overline{AD}$. Отсюда следует, что $DC=AB$ и $BC=AD$.

б) Теорема [6.2]. *Диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам.*

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (черт. 39): $\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{BA}$, $\overline{OC}=$ $=\overline{OD}+\overline{DC}$; $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}+\overline{BA}+\overline{DC}$. Но $\overline{BA}+\overline{DC}=\mathbf{0}$, поэтому $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$. Отсюда следует, что $\overline{OA}+\overline{OC}=\mathbf{0}$ и $\overline{OB}+\overline{OD}=\mathbf{0}$. В самом деле, если $\overline{OA}+\overline{OC}\neq\mathbf{0}$, то и $\overline{OB}+$ $+\overline{OD}\neq\mathbf{0}$. Но $\overline{OA}+\overline{OC}$ параллелен диагонали AC, а $\overline{OB}+$ $+\overline{OD}$ — диагонали BD. Это противоречит условию равенства векторов. Итак, $\overline{OA}=-\overline{OC}$ и $\overline{OB}=-\overline{OD}$. Теорема доказана.



Черт. 39

в) Теорема [6.3]. *Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то четырехугольник является параллелограммом.*

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB \parallel CD$ и $AB=CD$ (черт. 39). Тогда $\overline{AB}=\overline{DC}$ и, следовательно, $\overline{AB}+\overline{CD}=\mathbf{0}$. С другой стороны, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+$ $+\overline{DA}=\mathbf{0}$. Отсюда и из предыдущего соотношения получаем: $\overline{BC}+\overline{DA}=\mathbf{0}$, или $\overline{BC}=\overline{AD}$. Итак, стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ параллельны, т. е. четырехугольник есть параллелограмм.

2. Некоторые свойства треугольников.

а) Теорема [6.4] (о средней линии треугольника). *Доказать, что средняя линия треугольника равна половине основания и параллельна ей.*

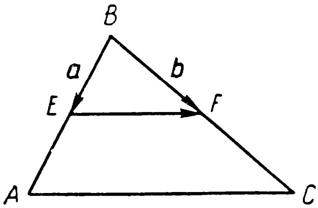
Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник, E — середина AB и F — середина BC (черт. 40). Положив $\overline{BE}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{BF}=\boldsymbol{b}$, выразим векторы $\overline{EF}$ и $\overline{AC}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Из треугольников BEF и BAC получаем: $\overline{EF}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overline{AC}=$ $=\overline{BC}-\overline{BA}=2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. Отсюда $\overline{AC}=2\overline{EF}$.

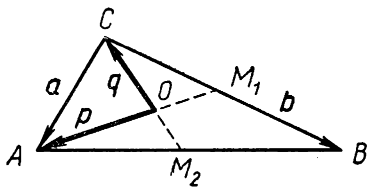
Задача решена, так как из полученного соотношения непосредственно следует, что $AC=2EF$ и $AC \parallel EF$.

б) Теорема [6. 5] (о медианах треугольника). *Доказать, что все три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана в этой точке делится в отношении* $2:1$.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, а AM_1 и CM_2 — две медианы, пересекающиеся в точке O. Пусть, далее, $\overline{OA}=\boldsymbol{p}$, $\overline{OC}=\boldsymbol{q}$; $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$, $\frac{\overline{OM_1}}{\boldsymbol{p}}=\lambda$, $\frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{q}}=\mu$ (черт. 41).



Черт. 40

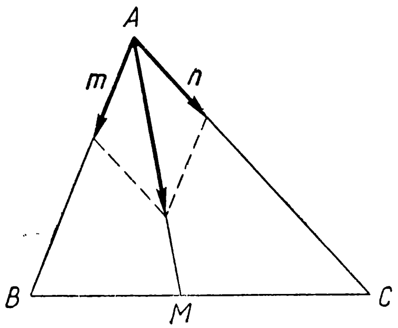


Черт. 41

Из треугольников OAC, OCM_1 и OAM_2 получаем: $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}$; $\lambda\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{b}}{2}$; $\boldsymbol{p}-\mu\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$. Подставив из первых двух соотношений значения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в третье, будем иметь: $\boldsymbol{p}-\mu\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}-\lambda\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ или $\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\boldsymbol{q}$. Отсюда, учитывая, что $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ неколлинеарные векторы, получаем: $\lambda+\frac{1}{2}=0$ и $\mu+\frac{1}{2}=0$ или $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, $AO=2OM_1$ и $CO=2OM_2$. Мы пришли к выводу, что каждая из двух медиан треугольника ABC в точке их пересечения O делится в отношении $2:1$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

в) Теорема [6.6] (о биссектрисе треугольника). *Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону внутренним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.*



Черт. 42

Доказательство. Если $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль сторон AB и AC, то вектор $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ будет направлен вдоль биссектрисы AM (черт. 42). Так как $\overline{AB}\parallel\boldsymbol{m}$, $\overline{AC}\parallel\boldsymbol{n}$ и $\overline{AM}\parallel(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, то $\overline{AB}=c\boldsymbol{m}$, $\overline{AC}=b\boldsymbol{n}$ и $\overline{AM}=\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$. В этих соотношениях c и b — соответственно длины сторон AB и AC и λ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Определим отношение $x = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}$. Имеем: $\overline{BM} = x\overline{MC}$,

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = \lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) - c\boldsymbol{m} = (\lambda - c)\boldsymbol{m} + \lambda\boldsymbol{n},$$

$$\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = b\boldsymbol{n} - \lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) = -\lambda\boldsymbol{m} + (b-\lambda)\boldsymbol{n}.$$

Таким образом,

$$(\lambda - c)\boldsymbol{m} + \lambda\boldsymbol{n} = -\lambda x\boldsymbol{m} + x(b-\lambda)\boldsymbol{n}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ не коллинеарны, то

$$\lambda - c = -\lambda x; \quad \lambda = x(b-\lambda).$$

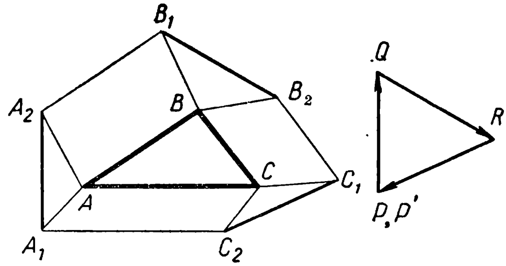
Отсюда

$$\lambda(1+x) = c, \quad \lambda(1+x) = xb.$$

Следовательно, $c = xb$ и $x = \frac{c}{b}$. Теорема доказана.

3. Приложение векторной алгебры к решению задач.

Задача 1. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Доказать, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.



Черт. 43

Решение. На чертеже 43 изображен треугольник ABC с построенными на сторонах параллелограммами. Для решения задачи достаточно показать, что

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0. \qquad (1)$$

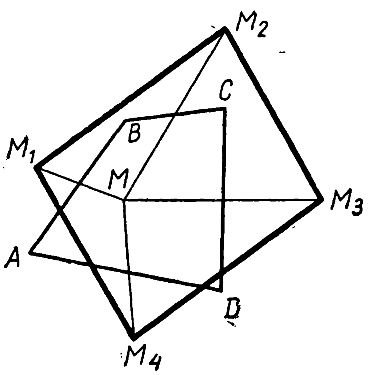
В самом деле, если равенство (1) имеет место, то, взяв произвольную точку P плоскости и построив ломаную $PQRP'$ так, чтобы $\overline{PQ} = \overline{A_1A_2}$; $\overline{QR} = \overline{B_1B_2}$ и $\overline{RP'} = \overline{C_1C_2}$, получим, что точка P' совпадает с точкой P, т. е. ломаная $PQRP'$ образует $\triangle PQR$, стороны которого соответственно равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

Для доказательства соотношения (1) рассмотрим треугольники AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 и выразим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ и $\overline{C_1C_2}$ через другие стороны соответственных треугольников. Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{AA_2} - \overline{AA_1}, \quad \overline{B_1B_2} = \overline{BB_2} - \overline{BB_1},$$
$$\overline{C_1C_2} = \overline{CC_2} - \overline{CC_1}.$$

Из этих соотношений, учитывая, что $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{BB} = \overline{CC_1}$ и $\overline{CC_2} = \overline{AA_1}$, получаем: $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0$. Задача решена.

Задача 2. Дан четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка M, лежащая в плоскости этого четырехугольника. Доказать, что точки, симметричные с M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$, являются вершинами параллелограмма.



Черт. 44

Решение. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$ (см. черт. 44). Так как отрезки MM_1 и AB в точке пересечения делятся пополам, то четырехугольник AM_1BM — параллелограмм, поэтому

$$\overline{MM_1} = \overline{MA} + \overline{MB};$$

точно так же получаем:

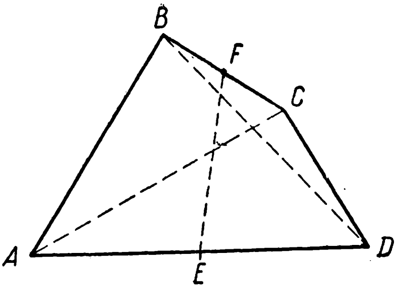
$$\overline{MM_2} = \overline{MB} + \overline{MC},$$
$$\overline{MM_3} = \overline{MC} + \overline{MD},$$
$$\overline{MM_4} = \overline{MA} + \overline{MD}.$$

Отсюда получаем: $\overline{M_2M_3} = \overline{MM_3} - \overline{MM_2} = \overline{MD} - \overline{MB} = \overline{BD}$. $\overline{M_1M_4} = \overline{MM_4} - \overline{MM_1} = \overline{MD} - \overline{MB} = \overline{BD}$.

Точно так же можно показать, что $\overline{M_1M_2} = \overline{M_4M_3} = \overline{AC}$. Из полученных соотношений следует, что $M_2M_3 \parallel M_1M_4$ и $M_1M_2 \parallel M_4M_3$. Кроме того, очевидно, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной прямой, так как в противном случае векторы $\overline{M_1M_4}$ и $\overline{M_1M_2}$ должны быть коллинеарны, что невозможно в силу того, что $\overline{M_1M_4} = \overline{BD}$ и $\overline{M_1M_2} = \overline{AC}$. Задача решена.

Задача 3. Если дан произвольный четырехугольник, то всегда существует треугольник, две стороны которого соответственно параллельны диагоналям данного четырехугольника и равны их половинам, а третья сторона параллельна и равна средней линии данного четырехугольника.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник; AC и BD — диагонали, а EF — одна из средних линий (черт. 45). $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$, $\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{DA}$, $\overline{FE} = \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{CD} + \frac{\overline{DA}}{2}$. Из первых двух соотношений следует, что $\frac{\overline{BD}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} = \frac{\overline{BC} + \overline{DA}}{2} + \overline{CD}$. Таким образом, $\frac{\overline{BD}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} = \overline{FE}$. Задача решена[1].



Черт. 45

Задачи и теоремы

73. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

74. Доказать, что если $ABCD$ — пространственный четырехугольник (т. е. вершины A, B, C и D не обязательно лежат в одной плоскости), то $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{EF}$, где AB и DC — противоположные стороны, а E и F — соответственно середины сторон AD и BC[2].

75. Дан произвольный треугольник ABC. Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам исходного треугольника.

76. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$; из его медиан — треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.

77. Доказать, что биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника делит противоположную сторону внешним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

78. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AM = k \cdot AD$. Прямая BM пересекает диагональ AC в точке P. Определить отношение $AP : AC$.

79. Построены точки A_1, B_1 и C_1, симметричные с произвольной точкой M относительно середин сторон треугольника ABC. Доказать, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны и равны сторонам треугольника ABC.

---

[1] См. решение примера 8, § 4.

[2] Эта задача по существу является обобщением предыдущей.

80. Средняя линия четырехугольника делит его на два четырехугольника. Доказать, что середины диагоналей этих двух четырехугольников являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой, представляя собой вырожденный параллелограмм.

81. Доказать, что два отрезка, соединяющие соответственно середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, в точке пересечения делятся пополам.

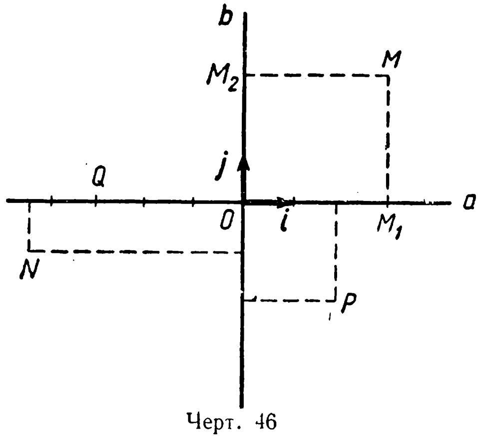
82. В плоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон; 2) середины двух других противоположных сторон; 3) середины диагоналей.

Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке P и каждый из них точкой P делится пополам.

ГЛАВА II
КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

§ 7. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ И АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

1. Прямоугольные декартовы координаты точек на плоскости. Мы приступаем к введению одного из основных понятий аналитической геометрии — координат точек на плоскости. Оно по существу вводится в средней школе при изучении графиков различных функций.



Черт. 46

Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и на каждой из прямых единичный вектор, исходящий из точки O. Обозначим вектор, расположенный на прямой a, через $\boldsymbol{i}$, а вектор, расположенный на прямой b, через $\boldsymbol{j}$. Построенный геометрический объект, состоящий из двух взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O и векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, назовем *прямоугольной декартовой системой координат* (черт. 46). Точка O называется *началом координат*, а прямые a и b вместе с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — *осями координат*, причем a называется *первой координатной осью* или *осью абсцисс*, а b — *второй координатной осью* или *осью ординат*. Векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ называются *координатными*. Ось абсцисс обычно обозначается через Ox, а ось ординат — через Oy. Систему координат обозначают через $O\boldsymbol{ij}$ или Oxy.

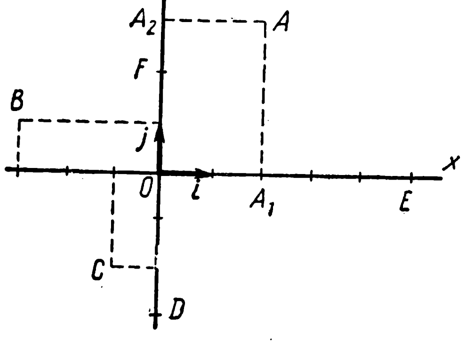
Легко видеть, что задание системы координат позволяет определять положение любой точки на плоскости при помощи двух чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка плоскости.

Проведем через нее две прямые, соответственно параллельные координатным осям, и обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения этих прямых с осями координат (см. черт. 46). Число $x = \frac{\overline{OM_1}}{i}$ называется **первой координатой** или **абсциссой**, а число $y = \frac{\overline{OM_2}}{j}$ — **второй координатой** или **ординатой** точки M. Если точка M не лежит на координатных осях, то M_1 и M_2 не совпадают с точкой O, поэтому координаты точки M отличны от нуля. Если же M лежит на одной из осей, скажем, на оси Ox, то M_2 совпадает с O, поэтому

$$y = \frac{\overline{OM_2}}{j} = 0.$$

Если точка M имеет координаты x, y, то это обычно записывают так: $M(x, y)$. Например, точки, изображенные на чертеже 46, имеют координаты: $M\left(3, 2\frac{1}{2}\right)$, $N\left(-4\frac{1}{2}, -1\right)$, $P(2,-2)$, $Q(-3,0)$, $M_1(3,0)$, $O(0,0)$, $M_2\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$. Легко видеть, что любая точка на плоскости имеет две координаты, если, конечно, выбрана система координат. Обратно, при данной системе координат любые два действительных числа, взятых в определенном порядке, определяют некоторую точку на плоскости. Таким образом, задание системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел, взятых в определенном порядке.

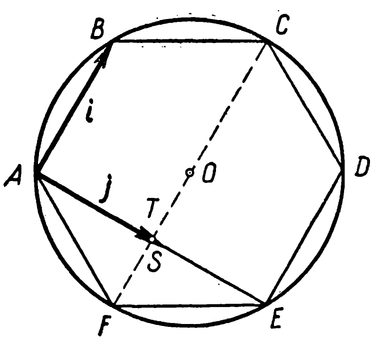
Для построения точки по данным координатам, не равным нулю, достаточно на каждой координатной оси отложить от начала координат отрезок, равный соответствующей координате, и через концы построенных отрезков провести прямые, параллельные координатным осям. Точка пересечения этих прямых будет искомой точкой. При этом необходимо учесть следующее: если координата точки положительна, то отрезок, соответствующий этой координате, откладывается от начала координат в **сторону вектора** оси, т. е. в положительном направлении оси. Если же координата точки отрицательна, то отрезок откладывается в **сторону, противоположную направлению вектора** оси, т. е. в отрицательном направлении оси. Например, построим точки с координатами: $A(2, 3)$, $B(-3, 1)$, $C(-1, -2)$. Для



Черт. 47

построения точки A отложим на оси Ox в положительном направлении отрезок $OA_1=2$ и на оси Oy также в положительном направлении отрезок $OA_2=3$ (черт. 47). Далее, через A_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, а через A_2 — прямую, параллельную Ox. Точка пересечения этих прямых есть искомая точка A. Аналогично строятся точки B и C. При этом необходимо учесть, что отрезок, соответствующий отрицательной координате, следует откладывать на соответствующей оси в отрицательном направлении (см. черт. 47).

Если у точки абсцисса равна нулю, то она лежит на оси ординат, а если ордината равна нулю, то — на оси абсцисс. Поэтому для построения точки, у которой одна из координат равна нулю, достаточно отложить от начала координат на соответствующей оси отрезок, равный ненулевой координате. Например, для построения точки D (0,—3) достаточно на оси Oy от начала координат в отрицательном направлении отложить отрезок, равный 3. Аналогично строятся точки E (5, 0), F (0, 2) (черт. 47). Если, наконец, у точки обе координаты равны нулю, то она совпадает с началом координат.



Черт. 48

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно составить и решить ряд примеров на построение точек по координатам с тем, чтобы приобрести твердые навыки в построении точек по координатам.

Теперь рассмотрим обратную задачу, т. е. предположим, что на чертеже изображены точки, удовлетворяющие определенным геометрическим условиям, и найдем их координаты в заданной системе. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин и центра O, принимая за начало координат точку A, а за координатные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — соответственно векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AS}$, где S — такая точка отрезка AE, что $AS = AB$ (черт. 48).

Решение. Система координат прямоугольная декартова, так как $AB \perp AE$ и $AB = AS$. Примем $AB = AS$ за единицу измерения.

Пусть T — точка пересечения диагоналей FC и AE. Так как AE — сторона вписанного в окружность треугольника, то $AE = \sqrt{3}$. Точки A и E симметричны относительно диаметра FC и $AE \perp FC$, поэтому $AT = TE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника ATF

получаем: $TF = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}$, поэтому $CT = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Полученные соотношения позволяют определить координаты всех вершин шестиугольника.

1) $A\,(0, 0)$, так как A — начало координат.

2) $B\,(1, 0)$, так как B является концом первого координатного вектора.

3) $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что координаты этой точки определяются отрезками $TC = \frac{3}{2}$ и $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

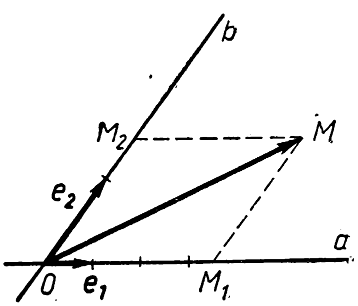
4) $D(1, \sqrt{3})$ в силу того, что ее координаты определяются отрезками $DE = AB = 1$, $AE = \sqrt{3}$.

5) $E(0, \sqrt{3})$, так как E лежит на оси Oy и отстоит от начала координат на расстоянии $AE = \sqrt{3}$.

6) $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что координаты этой точки определяются направленными отрезками $TF = -\frac{1}{2}$, $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

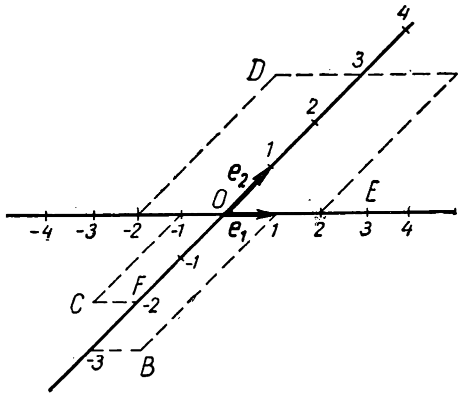
7) $O\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что ее координаты определяются отрезками $TO = \frac{1}{2}$ и $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Аффинные координаты точек на плоскости. В прямоугольной декартовой системе координат оси взаимно перпендикулярны, а координатные векторы единичные. Если отказаться от этих двух требований, а во всем остальном поступать так, как в предыдущем пункте, то получим более общий способ аналитического задания точек. Возьмем на плоскости две различные прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и на каждой из прямых ненулевой вектор, исходящий из точки O. Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$ вектор прямой a, а через $\boldsymbol{e}_2$ — вектор прямой b. Построенные нами геометрические объекты (т. е. прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$) назовем *аффинной системой координат* (черт. 49). Терминология и обозначения для аффинной системы координат те же, что и в случае прямоугольной декартовой системы.



Черт. 49

Покажем, что задание аффинной системы позволяет определять положение любой точки на плоскости при помощи двух чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка плоскости. Проведем через нее две прямые, соответственно параллельные координатным осям, и обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения этих прямых с осями координат (см. черт. 49). Число $x = \frac{\overline{OM_1}}{e_1}$ называется первой координатой или абсциссой точки M, а число $y = \frac{\overline{OM_2}}{e_2}$ — второй координатой или ординатой точки M. Запись $M(x, y)_{Oe_1e_2}$ означает, что точка M в системе Oe_1e_2 имеет координаты x и y. Так же, как и в случае прямоугольной декартовой системы, задание аффинной системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел, взятых в определенном порядке.



Черт. 50

Для построения точек по данным координатам целесообразно на координатных осях предварительно построить «координатную шкалу». Для этой цели, принимая точку O за начало, построим систему векторов $\boldsymbol{e}_1$, $2\boldsymbol{e}_1$, $3\boldsymbol{e}_1, \ldots, -\boldsymbol{e}_1, -2\boldsymbol{e}_1, -3\boldsymbol{e}_1, \ldots$, концы которых лежат на оси Ox, и другую систему векторов $\boldsymbol{e}_2$, $2\boldsymbol{e}_2, \ldots, -\boldsymbol{e}_2$, $-2\boldsymbol{e}_2, \ldots$, концы которых лежат на оси Oy. Таким образом, на осях координат получаем последовательность точек, отмеченных на чертеже 50 цифрами 1, 2, 3, . . . , —1, —2, —3, . . . Пользуясь «координатной шкалой», легко построить любую точку, заданную своими координатами. Например, для построения точки A (2, 3) необходимо через точку 2 оси Ox провести прямую, параллельную оси Oy, а через точку 3 оси Oy — прямую, параллельную оси Ox. Точка пересечения этих прямых есть A. Точно так же на чертеже 50 построены точки

$$B(1, -3),\ C(-1, -2),\ D(-2, 3),\ E(3, 0) \text{ и } F(0, -2).$$

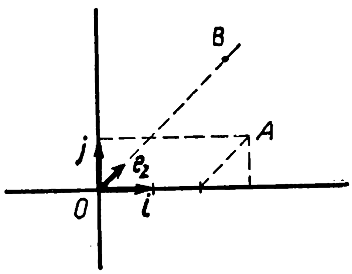
Рассмотрим обратную задачу.

З а д а ч а 2. На плоскости дан параллелограмм $ABCD$. Принимая точку A за начало аффинной системы и полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$, определить координаты всех вершин и центра O параллелограмма (черт. 39).

Р е ш е н и е. Так как A — начало координат, а B и D являются концами координатных векторов, то $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $D(0, 1)$.

Очевидно также, что C (1, 1), так как прямые, проведенные через C параллельно координатным осям, совпадают с прямыми CD и CB. Наконец, для определения координат центра O проведем через эту точку прямые, параллельные координатным осям. Эти прямые, очевидно, пройдут через середины отрезков AB и AD, поэтому $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

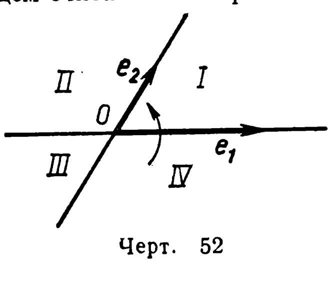
Заметим, что координаты точки существенно зависят от выбора системы координат. Одна и та же точка в различных системах имеет, вообще говоря, различные координаты. Например, на чертеже 51 точка A в системе Oij имеет координаты (3, 1), а в системе Oie_2 координаты (2, 2). Точка B на том же чертеже в системе Oij имеет координаты $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, а в системе Oie_2 — (0,5).



Черт. 51

Мы ввели в рассмотрение прямоугольные декартовы и аффинные системы координат. Очевидно, прямоугольная система есть частный случай аффинной, поэтому все теоремы и предложения, доказанные для аффинной системы, справедливы и для прямоугольной декартовой. Обратное утверждение, конечно, не справедливо. Поэтому в дальнейшем изложении во всех случаях, когда это возможно, будем пользоваться аффинными системами. В прямоугольной декартовой системе будем рассматривать только такие вопросы, изложение которых существенно упрощается при введении этих систем. Итак, *во всем дальнейшем изложении, если нет специальных оговорок, мы предполагаем, что система координат аффинная.*

3. Координатные углы. Координатные оси Ox и Oy делят всю плоскость на четыре угла, называемые координатными углами. В § 5 было отмечено, что если Oe_1e_2 — данная система координат, то положительным направлением обхода плоскости будем считать то направление, по которому следует повернуть вектор e_1 до совпадения с направлением вектора e_2 по кратчайшему пути (см. черт. 34). Введем следующую нумерацию координатных углов. Первым назовем угол, образованный лучами, на которых расположены векторы e_1 и e_2 (предполагается, что e_1 и e_2 приложены к точке O). Остальные три угла нуме-



Черт. 52

руются последовательно, в положительном направлении, как показано на чертеже 52.

Если точка $M(x, y)$ не лежит на координатных осях, то по знакам чисел x и y можно определить, в каком из координатных углов она лежит. В самом деле,

если $x > 0$, $y > 0$, то точка лежит в первом угле;
если $x < 0$, $y > 0$, то точка лежит во втором угле;
если $x < 0$, $y < 0$, то точка лежит в третьем угле;
если $x > 0$, $y < 0$, то точка лежит в четвертом угле.

Очевидно, имеют место и обратные утверждения.

Эти критерии позволяют без помощи чертежа, по координатам точек, определить их положение по отношению к системе. Например, если $A(2, 5)$, $B\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $C(-2, 1)$, $D(2, -5)$, $E(1, 3)$, $F(-1, -1)$, $G(2, 0)$, то, очевидно, A и E принадлежат первому координатному углу, B и F — третьему, C — второму, а D — четвертому. Точка G лежит на оси x, так как ее вторая координата равна нулю.

4. Радиус-вектор точки. Пусть $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ — данная система координат, а M — произвольная точка плоскости. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M (черт. 49). Если точка M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ имеет координаты x и y, то по определению $x = \frac{\overline{OM_1}}{\boldsymbol{e}_1}$, $y = \frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{e}_2}$, или $\overline{OM_1} = x\boldsymbol{e}_1$, $\overline{OM_2} = y\boldsymbol{e}_2$. Но так как по правилу параллелограмма $\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$, то

$$\overline{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2. \qquad (1)$$

Это соотношение имеет место также и в том случае, когда M лежит на одной из координатных осей. В самом деле, если, например, M лежит на оси Ox ($y = 0$), то M совпадает с M_1, поэтому $\overline{OM} = x\boldsymbol{e}_1$ или $\overline{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2$, т. е. мы снова пришли к соотношению (1). Соотношение (1) показывает, что *координаты точки M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ соответственно равны координатам радиус-вектора точки M* в базе $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

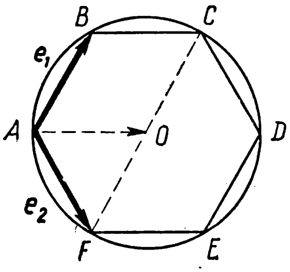
Это утверждение, по существу являющееся очевидным, играет существенную роль во всем дальнейшем изложении. Обращаем внимание студента-заочника на следующее: так как предыдущее утверждение высказано по отношению к аффинной системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, то оно справедливо также и для ее частного случая — прямоугольной декартовой системы, т. е. *координаты точки M в прямоугольной декартовой системе $O\boldsymbol{ij}$ соответственно равны координатам радиус-вектора этой точки в базе $\boldsymbol{ij}$.*

Задача 3. На плоскости дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая точку A за начало координат и полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AF} = \boldsymbol{e}_2$, определить координаты всех вершин и центра O шестиугольника (черт. 53).

Р е ш е н и е. Так как начало координат совпадает с точкой A, а точки B и F являются концами координатных векторов, то A (0, 0), B (1, 0), F (0, 1). Для определения координат остальных точек выразим их радиус-векторы через $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1$, так как $\overline{FO} = \overline{OC} = \overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$. Отсюда следует, что точка C имеет координаты (2, 1);

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \text{ т. е. } D\ (2,\ 2);$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = (2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \text{ т. е. } E\ (1,\ 2);$$



Черт. 53

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

т. е. O (1, 1).

Выше было отмечено, что координаты точек существенно зависят от выбора системы координат. Чтобы в этом убедиться, решим следующую задачу:

З а д а ч а 4. Решить предыдущую задачу, принимая точку A за начало координат и полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AO} = \boldsymbol{e}_2$.

Р е ш е н и е. Очевидно, точки A, B и O имеют координаты: A (0, 0), B (1, 0), O (0, 1).

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AO} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \text{ т. е. } C\ (1,\ 1);$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = 2\overline{AO} = 2\boldsymbol{e}_2, \text{ т. е. } D\ (0,\ 2);$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1, \text{ т. е. } E\ (-1,\ 2);$$

$$\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF} = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1, \text{ т. е. } F\ (-1,\ 1).$$

Вопросы и задачи

83. Что называется системой координат на плоскости? В чем отличие аффинной системы координат от прямоугольной декартовой?

84. Взяв прямоугольную декартову систему координат, построить следующие точки:

$$A\,(2,\ 1),\ B\left(\frac{1}{2},\ -1\right),\ C\,(1,\ -4),\ D\,(\sqrt{2},\ -2),\ E\,(0,\ 1),$$

$$F\,(-3,\ -2),\ G\,(-3,\ 0),\ L\,(-3,\ 3).$$

85. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки, абсциссы которых равны соответственно -3, -1, -2, -5, а ординаты определяются из условия $y = 2x^2 - 10$.

86. Решить задачу **84** в предположении, что система аффинная.

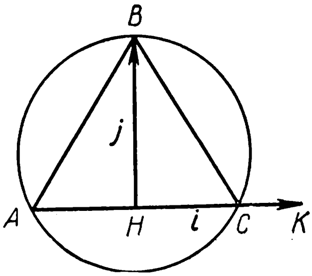
87. Изменяются ли координаты точек плоскости, если систему Oe_1e_2 заменить системой Oe_1e_3, где $e_3 = -e_2$?

88. Существуют ли такие точки плоскости, у которых соответствующие координаты совпадают в двух системах Oe_1e_2 и Oe_1e_3, где $e_3 = -e_2$?

89. Существует ли на плоскости точка M (x, y), совпадающая с точкой N (y, x)? Определить геометрическое место таких точек.

90. Начертить на плоскости две различные прямоугольные декартовы системы координат, в которых данная точка M имеет координаты (2, 1).

91. Начертить на плоскости две различные аффинные системы координат, в которых точка M имеет координаты (1, 1).



Черт. 54

92. Пусть ABC — равносторонний треугольник, BH — высота, а K — точка, лежащая на стороне AC и удовлетворяющая условию: $HB = HK$. Определить координаты вершин треугольника в прямоугольной декартовой системе $H\boldsymbol{ij}$, где $\boldsymbol{i} = \overline{HK}$, $\boldsymbol{j} = \overline{HB}$ (черт. 54).

93. Решить предыдущую задачу, принимая A за начало аффинной системы координат и полагая $\overline{AH} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_2$ (черт. 54).

94. В равнобочной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 10$, высота равна 2, а угол при основании равен 30°. На плоскости взята прямоугольная система координат, начало которой O совпадает с серединой отрезка AD, а направление осей Ox и Oy — соответственно с направлением векторов $\overline{OD}$ и $\overline{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей трапеции.

Определить координаты всех вершин трапеции, точки M и точки N пересечения непараллельных сторон.

95. Решить предыдущую задачу в предположении, что начало координат находится в точке A, а координатными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$.

96. Можно ли восстановить аффинную систему координат, если дано начало координат, направления координатных осей и известно, что данная точка M имеет в искомой системе координаты (1, 3)?

97. В прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$ даны точки A (1, 2), B (—1, —3), C (0, 5), D (5, 0), E (1, 1). Определить координаты этих точек в системе $A\boldsymbol{ij}$.

98. В прямоугольной декартовой системе дана точка M (2, 5). Определите координаты точки M', симметричной с M: а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy; в) относительно начала координат.

99. Объяснить принцип нумерации координатных углов. Не прибегая к чертежу, выяснить, в каких координатных углах лежат точки A, B, C, D, E, F, G, L, заданные в задаче 84.

100. В каком из координатных углов лежит середина отрезка AB: A (0, 1), B (3, 0)?

101. Что называется радиус-вектором точки? Меняются ли радиус-векторы точек, если: а) изменить направления координатных осей, оставив начало без изменения; б) изменить начало координат, оставив направления осей без изменения.

102. Могут ли две различные точки в одной и той же системе координат иметь равные радиус-векторы.

103. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, —3), B (8, 0), C (4, 8) и D (—3, 5). Пользуясь радиус-векторами данных точек, доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Система координат аффинная.

§ 8. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В КООРДИНАТАХ

В настоящем параграфе рассмотрим ряд задач аналитической геометрии, имеющих важное практическое значение.

1. Определение координат вектора по координатам концов.

З а д а ч а 1. Даны две точки A и B своими координатами в аффинной системе: A (x_1, y_1), B (x_2, y_2). Определить координаты вектора $\overline{AB}$.

Р е ш е н и е. Если O — начало аффинной системы координат, то $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Но $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ есть радиус-векторы точек A и B, поэтому их координаты нам известны: $\overline{OA}$ $\{x_1, y_1\}$ и $\overline{OB}$ $\{x_2, y_2\}$. Таким образом, $\overline{AB}$ как разность векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ имеет координаты: $\overline{AB}$ $\{x_2 - x_1, \; y_2 - y_1\}$. Итак,

Т е о р е м а [8. 1] *Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора.*

П р и м е р 1. Даны точки A (2, —5), B (1, 1), C ($\sqrt{2}$, 5), D(3, —1). Определить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ и $\overline{CB}$.

Р е ш е н и е. Так как B (1, 1) и A (2, —5), то, вычитая из координат конца вектора $\overline{AB}$ соответствующие координаты начала, получаем координаты этого вектора: $\overline{AB}$ $\{-1, 6\}$. Аналогично получаем координаты остальных векторов: $\overline{AC}$ $\{\sqrt{2}-2, \; 10\}$, $\overline{DB}$ $\{-2, \; 2\}$, $\overline{CB}$ $\{1-\sqrt{2}, \; -4\}$.

П р и м е р 2. Вектор $\boldsymbol{a}$ $\{1, -3\}$ имеет начало в точке M (10, —3). Найти координаты его конца.

Р е ш е н и е. Если N (x, y) есть конец вектора $\boldsymbol{a}$, то $x - 10 = 1$ и $y + 3 = -3$. Отсюда $x = 11$, $y = -6$, т. е. N (11, —6).

П р и м е р 3. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, —3), B (8, 0), C (4, 8) и $D(-3, 5)$. Показать, что $ABCD$ есть параллелограмм. Система координат аффинная.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что $\overline{AB} = \overline{DC}$. Вычислив координаты $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, убеждаемся в справедливости указанного равенства: $\overline{AB}$ $\{7, 3\}$; $\overline{DC}$ $\{7, 3\}$.

2. Деление отрезка в данном отношении. Из элементарной геометрии известно, что если M есть точка прямой AB, то число $\lambda = \frac{AM}{MB}$ называется отношением, в котором эта точка делит отрезок AB. Если M лежит между A и B, то говорят, что она делит AB внутренним образом, если же M лежит вне отрезка AB, то M делит отрезок внешним образом. В целях уточнения этого понятия введем следующее определение: *Будем говорить, что точка M, лежащая на прямой AB, делит направленный отрезок AB в отношении λ, если* $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$.

Существенно заметить, что в числитель этого отношения входит вектор, начало которого совпадает с началом отрезка AB, а в знаменатель — вектор, конец которого есть конец этого отрезка. Отметим некоторые свойства этого понятия:

а) Какова бы ни была точка M прямой AB, отличная от B, всегда существует отношение, в котором M делит отрезок AB.

б) Если M лежит между A и B, то отношение λ, в котором M делит отрезок AB, положительно, если M не лежит между A и B, то оно отрицательно. Если M совпадает с A, то $\lambda = 0$.

в) Каково бы ни было число λ, отличное от -1, всегда на прямой AB существует одна и только одна точка M, делящая направленный отрезок AB в отношении λ.

Первые два свойства очевидны, поэтому докажем только свойство в). Пусть λ — произвольное (положительное или отрицательное!) число, отличное от -1. Найдем на прямой AB точку M, удовлетворяющую условию: $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$. Из этого соотношения следует: $\overline{AM} + \lambda\overline{AM} = \lambda(\overline{AM} + \overline{MB}) = \lambda\overline{AB}$ или $(1 + \lambda)\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$. Так как $1 + \lambda \neq 0$, то

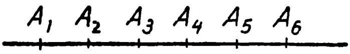
$$\overline{AM} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AB}. \tag{1}$$

Очевидно, существует одна и только одна точка M, удовлетворяющая этому соотношению.

Заметим, что на прямой не существует точки, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = -1$. В самом деле, если $\lambda = -1$, то $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -1$ или $\overline{AM} = -\overline{MB}$, $\overline{AM} + \overline{MB} = 0$, $\overline{AB} = 0$, т. е. AB есть нулевой отрезок. Этот случай, очевидно, мы с самого начала исключили из рассмотрения.

Соотношение (1) позволяет строить точки, делящие отрезок в данном отношении.

Пример 4. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Определить отношения, в которых точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 делят отрезок A_3A_5 (черт. 55).



Черт. 55

Решение. Обозначим через λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 и λ_6 отношения, в которых точки A_1, A_2, A_3, A_4 и A_6 делят отрезок A_3A_5. Из чертежа 55 видно, что

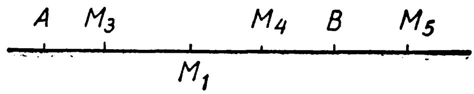
$$\lambda_1 = \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_1A_5}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{A_3A_2}}{\overline{A_2A_5}} = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{\overline{A_3A_3}}{\overline{A_3A_5}} = 0,$$

$$\lambda_4 = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_4A_5}} = 1, \quad \lambda_6 = \frac{\overline{A_3A_6}}{\overline{A_6A_5}} = -\frac{3}{1} = -3.$$

Пример 5. Построить точки, каждая из которых делит отрезок AB в отношении $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = -5$.

Решение. Пусть M_1 — точка, делящая AB в отношении $\lambda_1 = 1$. Из соотношения (1) следует, что $\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Поэтому M_1 есть середина отрезка AB (черт. 56). Аналогично если M_2 — точка, делящая AB в отношении $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, то $\overline{AM_2} =$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\overline{AB} = -\frac{1}{3}\overline{AB}.$$ Для определения точки M_2 следует одну треть отрезка AB отложить от точки A в сторону, противоположную точке B. Конец полученного отрезка будет точкой M_2. На чертеже 56 построены точки M_3, M_4 и M_5, делящие отрезок AB в отношениях $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = -5$.



Черт. 56

3. Определение координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.

Задача 2. Пусть в некоторой аффинной системе даны две различные точки своими координатами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Определить координаты точки M, которая делит отрезок в отношении $\lambda \neq -1$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}$ — соответственно радиус-векторы точек A, B и M. Так как $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, то $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$. Далее,

$\overline{AM} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\overline{MB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})$. Из этого векторного соотношения после элементарных преобразований получаем:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Пользуясь теоремой о координатах линейной комбинаций векторов, отсюда будем иметь:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, если точка M делит отрезок AB пополам, то $\lambda = 1$, поэтому из соотношений (3) имеем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4}$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема [8. 2]. *Координаты точки, делящей отрезок $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ в отношении λ, определяются из соотношений* (3).

Координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат концов отрезка.

Пример 6. Определить координаты точек, делящих отрезок $A(1, -5)$, $B(-2, 3)$ в отношении: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 1$.

Решение. Для получения координат точек, делящих отрезок AB в данном отношении, воспользуемся формулами (3):

$$x_1 = \frac{1 + 2\cdot(-2)}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1, \qquad y_1 = \frac{-5 + (+2)\,3}{1+2} = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{1 + (-2)(-2)}{1+(-2)} = \frac{5}{-1} = -5, \qquad y_2 = \frac{-5 + (-2)\cdot 3}{1+(-2)} = 11,$$

$$x_3 = \frac{1 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = 0, \qquad y_3 = \frac{-5 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-7}{3},$$

$$x_4 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad y_4 = \frac{-5+3}{2} = -1.$$

Пример 7. Дана точка $M(3, -2)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Найти координаты точки, симметричной точке M:

а) относительно оси абсцисс;
б) относительно оси ординат;
в) относительно начала координат;
г) относительно биссектрис всех координатных углов.

Решение. Если точка A имеет координаты (x, y), то точка A', симметричная ей относительно оси абсцисс, имеет координаты $(x, -y)$. В самом деле, середина M отрезка AA' лежит на оси Ox, так как ее координаты равны: $x_M = \frac{x+x}{2} = x$, $y_M = \frac{y-y}{2} = 0$. Кроме того, отрезок AA' перпендикулярен оси Ox, так как вектор $\overline{AA'}\ \{0, -2y\}$ параллелен оси Oy.

Точно так же можно показать, что точка A'', симметричная A относительно оси ординат, имеет координаты $(-x, y)$.

Определим координаты точки $A^*(x^*, y^*)$, симметричной A относительно начала координат. Для этой цели достаточно потребовать, чтобы середина отрезка AA^* совпадала с началом координат, т. е. $\frac{x+x^*}{2} = 0$, $\frac{y+y^*}{2} = 0$. Отсюда получаем: $x^* = -x$ и $y^* = -y$. Таким образом, точка A^* имеет координаты $(-x, -y)$.

Переходим к определению координат точек, симметричных A относительно биссектрис координатных углов. Пусть l_1 — биссектриса первого и третьего, а l_2 — второго и четвертого координатных углов. Пусть, далее, $A_1\ (x_1, y_1)$ симметрична с A относительно l_1. Это означает, что отрезок AA_1 параллелен l_2 и, кроме того, середина этого отрезка лежит на l_1. Так как l_2 имеет направление вектора $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, то первое условие сводится к коллинеарности векторов $\overline{AA_1}$ и $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad y_1 - y = -x_1 + x.$$

Второе условие сводится к тому, что координаты середины отрезка AA_1, т. е. $\frac{x+x_1}{2}$, $\frac{y+y_1}{2}$, равны друг другу: $x + x_1 = y + y_1$.

Решив совместно полученные два уравнения, определяем x_1 и y_1: $x_1 = y$, $y_1 = x$. Таким образом, A_1 имеет координаты (y, x).

Точно так же определяем координаты точки A_2, симметричной с A относительно l_2: $A_2\ (-y, -x)$.

Для данного примера будем иметь:

$$M'\ (3, 2),\ M''\ (-3, -2),\ M^*\ (-3, 2),$$
$$M_1\ (-2, 3),\ M_2\ (+2, -3).$$

Задача 3. Доказать, что точка пересечения M медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ имеет координаты:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \tag{5}$$

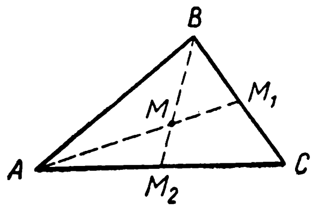
Система координат аффинная.

Решение. Если M_1 — основание медианы, проведенной через вершину A, а M — точка пересечения медиан, то, как известно из элементарной геометрии, $\frac{AM}{MM_1} = 2$, поэтому, зная координаты точек A и M_1, легко получить координаты точки M (черт. 57). Точка M_1.— середина отрезка BC, поэтому

$$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

$$x_M = \frac{x_1 + 2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y_M = \frac{y_1 + 2\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$



Черт. 57

Задача 4. В точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ сосредоточены массы m_1 и m_2. Доказать, что координаты центра тяжести системы двух материальных точек A и B определяются соотношениями:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}. \tag{6}$$

Решение. Центр тяжести двух материальных точек A и B находится в точке C, расположенной на отрезке AB и делящей этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам, сосредоточенным в точках A и B. Таким образом, C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$. Если x, y — координаты точки C, то

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

Пример 8. Даны координаты середин сторон AB, BC и CA треугольника ABC: $M(1, 3)$, $N(5, -2)$, $P(-2, -5)$. Определить координаты всех вершин треугольника.

Решение. Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 1, \quad \frac{y_1+y_2}{2} = 3, \quad \frac{x_2+x_3}{2} = 5,$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=-2, \quad \frac{x_3+x_1}{2}=-2, \quad \frac{y_3+y_1}{2}=-5.$$

Или

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=2, & y_1+y_2&=6,\\ x_2+x_3&=10, & y_2+y_3&=-4,\\ x_3+x_1&=-4; & y_3+y_1&=-10. \end{aligned}$$

Решив эти системы уравнений, получаем:

$$x_1=-6,\ x_2=8,\ x_3=2,\ y_1=0,\ y_2=6,\ y_3=-10.$$

Итак, A (—6, 0), B (8, 6), C (2, —10).

4. Условие коллинеарности трех точек.

З а д а ч а 5. Пусть в аффинной системе Oe_1e_2 даны три точки A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) и C (x_3, y_3). Найти необходимое и достаточное условия коллинеарности этих точек.

Р е ш е н и е. Три точки называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой. Для того чтобы точки A, B и C были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ были коллинеарны. Отсюда легко получить искомое условие. Так как $\overline{AB}$ $\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}$, $\overline{AC}$ $\{x_3-x_1,\ y_3-y_1\}$, то условие коллинеарности этих векторов согласно теореме [4. 5] запишется так:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Это соотношение можно записать в более удобном для запоминания виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться в равенстве определителей, входящих в уравнения (7) и (8). Таким образом, мы доказали теорему:

Т е о р е м а [8. 3]. *Для того чтобы три точки* A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) *и* C (x_3, y_3), *данные в аффинной системе, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (7) *или эквивалентное ему условие* (8).

П р и м е р 9. Даны тройки точек: а) (2, 1), (—1, 0), (5, 2); б) (0, 1), (0, 0), (3, 4); в) (3, 5), (3, —1), (3, 7).

Выяснить, какие из этих троек точек коллинеарны.

Р е ш е н и е. Проверяем условие (8) для каждой тройки точек:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ Точки коллинеарны.

б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ Точки не коллинеарны.

в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$, так как первый и третий столбцы определителя пропорциональны. Точки коллинеарны.

5. Определение расстояния между двумя точками.

Задача 6. В прямоугольной декартовой системе даны две точки A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2). Определить расстояние между этими точками.

Решение. Расстояние ρ между точками A и B равно модулю вектора $\overline{AB}$, поэтому, определив координаты вектора $\overline{AB}$ и пользуясь теоремой [5. 2], легко получить искомую формулу для определения расстояния между двумя точками $\overline{AB}\ \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$:

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{9}$$

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [8. 4]. *Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат данных точек.*

Пример 10. Даны вершины треугольника в прямоугольной декартовой системе A (2, 1), B (—2, —2) и C (10, —7). Определить длины его сторон.

Решение. Длины сторон треугольника ABC определяются по формуле (9):

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(-2-10)^2 + (-2+7)^2} = 13,$$

$$CA = \sqrt{(10-2)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}.$$

Пример 11. Определить радиус окружности, которая проходит через точку A (5, 2) и имеет центр в точке B (1, —1).

Решение. Радиус окружности равен расстоянию между данными точками, поэтому

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = 5.$$

Пример 12. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC: A (4, 1), B (7, 5), C (—4, 7). Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

Решение. Для определения длины биссектрисы AD достаточно знать координаты точки D. Так как AD — биссектриса, то D делит отрезок BC на две части, пропорциональные прилежащим сторонам AB и AC. Отсюда легко определить отношение λ, в котором точка D делит отрезок BC, а зная λ — координаты точки D. Таким образом, намечается следующий план решения задачи:

1) Определяем длины сторон AB и AC, а затем $\lambda = \frac{BD}{DC}$.

2) Определяем координаты точки D.

3) Определяем длину биссектрисы AD.

Переходим к решению задачи.

1) $AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5,$

$AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$

Таким образом, $\lambda = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$.

2) Если обозначить через (x, y) координаты точки D, то

$$x = \frac{7 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{5 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{3}.$$

3) $AD = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{4+196}}{3} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$

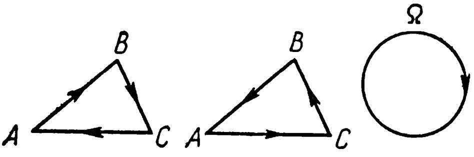
Пример 13. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку B $(-10, 4)$ и касающейся оси Ox в точке A $(-6, 0)$. Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Пусть r — радиус окружности, а x, y — координаты центра C. Так как окружность касается оси Ox в точке A $(-6, 0)$, то $x = -6$, $|y| = r$. Точки B и C лежат по одну и ту же сторону от оси Ox, поэтому $y > 0$ и $y = r$. Для определения r воспользуемся условием:

$$BC = \sqrt{(6-10)^2 + (4-r)^2} = \sqrt{r^2 - 8r + 32} = r.$$

Отсюда получаем: $r = 4$ и C $(-6, 4)$.

6. Вычисление площади ориентированного треугольника. Треугольник ABC называется ориентированным, если указан порядок расположения вершин. Очевидно, треугольник ABC можно ориентировать двумя способами, указывая обход от вершины A к вершине B, затем C и, наоборот, от A к C и B (черт. 58). В первом случае

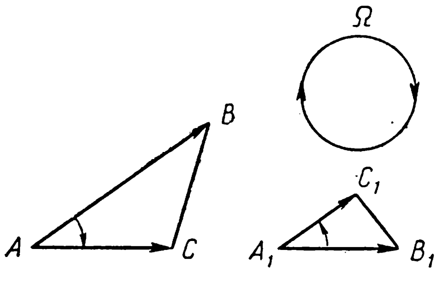


Черт. 58

ориентированный треугольник будем обозначать через ABC, а во втором случае ACB.

Назовем п л о щ а д ь ю *ориентированного треугольника, заданного на ориентированной плоскости, число, абсолютная величина которого равна площади данного треугольника и которое положительно, если ориентация треугольника совпадает с положительной ориентацией плоскости, и отрицательно — в противном случае.* На чертеже 58 ориентация плоскости задана окружностью Ω, поэтому площадь ориентированного треугольника ABC положительна, а треугольника ACB-отрицательна.

Из курса элементарной геометрии известно, что площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$.



Черт. 59

Если плоскость не ориентирована, то для любого треугольника $\sin \angle BAC > 0$, поэтому всегда $S > 0$. Если эту формулу записать в таком виде:

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin (\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}})$, и предположить, что ориентированный треугольник ABC задан на ориентированной плоскости, то, очевидно, $\sin (\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) > 0$ в случае, когда ориентация треугольника совпадает с положительной ориентацией плоскости и $\sin (\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) < 0$ в противном случае. На чертеже 59 $\sin (\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) > 0$, a $\sin (\widehat{\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}}) < 0$. Таким образом, площадь ориентированного треугольника ABC на ориентированной плоскости может быть вычислена по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin (\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}). \tag{10}$$

Пользуясь этим соотношением, легко получить формулу для вычисления площади ориентированного треугольника по координатам вершин, если предположить, что плоскость ориентирована координатной базой (см. § 5, п. 1).

З а д а ч а 7. В прямоугольной декартовой системе дан ориентированный треугольник ABC: A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3). Вычислить площадь этого треугольника.

Р е ш е н и е. Для вычисления площади треугольника ABC воспользуемся формулой (10). Заметим, что $\overline{AB}\,\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, $\overline{AC}\,\{x_3 - x_1, y_3 - y_1\}$, поэтому согласно формуле (8), § 5 имеем:

$$\sin(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}.$$

В знаменателе имеем длины отрезков AB и AC, поэтому, подставив это значение в формулу (10), будем иметь:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Эту формулу можно записать в более удобном для запоминания виде:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться в равенстве определителей, находящихся в правой части равенств (11) и (12).

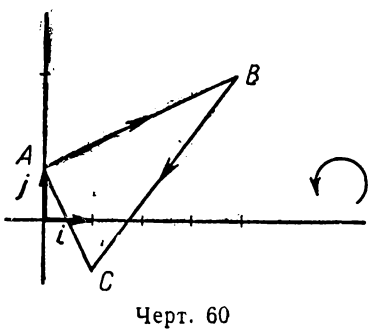
Мы доказали следующую теорему:

Теорема [8. 5]. *Если ориентирсванный треугольник ABC задан в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), то площадь этого треугольника вычисляем формулой* (11) *или* (12). *Для того чтобы ориентация треугольника совпала с положительной ориентацией, определяемой координатной системой, необходимо и достаточно, чтобы $S > 0$.*

Пример 14. Вычислить площадь ориентированного треугольника ABC: а) A (0, 1), B (4, 3), C (1, —1); б) A (0, 0), B (1, 0), C (0, 1). Система координат прямоугольная декартова.

Решение.

$$\text{а) } S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4 \cdot 2 + 1 - 3) = -5.$$



Черт. 60

Таким образом, ориентация треугольника не совпадает с ориентацией плоскости (черт. 60).

$$\text{б) } S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае ориентация треугольника совпадает с ориентацией плоскости.

Вопросы и упражнения

104. Даны точки A (2, 5), B (1, —1), C (2, —2), D (1, 7). Определить координаты векторов: $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

105. Вектор $\boldsymbol{a}$ {3, 4} имеет начало в точке M (—2, 3). Найти координаты его конца.

106. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, 1), B (2, 3), C (5, 0), D (7, —5). Показать, что $ABCD$ — трапеция. Система координат аффинная.

107. Построить точки, делящие данный отрезок AB в отношении: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4 = \frac{1}{5}$, $\lambda_5 = \frac{4}{5}$.

108. Пусть точка M лежит между точками A и B и $AM = 4MB$. Определить отношение, в котором: а) M делит отрезок AB; б) B делит отрезок MA; в) B делит отрезок AM; г) A делит отрезок BM.

109. Если M делит отрезок AB в отношении λ, то в каком отношении делит M отрезок BA?

110. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC: A (2, 5), B (0, 1), C (3, —1). Определить координаты вершин треугольника $A'B'C'$, симметричного треугольнику ABC относительно оси Ox.

111. Определить координаты точек, делящих отрезок A (2, 3), B (—1, 2) в отношении:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \ \lambda_4 = 3.$$

112. Две вершины треугольника ABC имеют координаты A (3, 6), B (—3, 5). Определить координаты вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на осях координат. Система координат аффинная.

113. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек A_2 (2, 5) и A_5 (—1, 7) в аффинной системе координат, определить отношения, в которых точки A_1, A_3, A_4 и A_6 делят отрезок A_2A_5, а также координаты этих точек.

114. Определить координаты точки пересечения медиан треугольника, если его вершины имеют координаты:

а) A (3, 1), B (—1, 4), C (1, 1);

б) A (—2, 3), B (5, —2), C (—3, —1).

115. В точке A (2, 5) помещен груз в 60 *г*, а в точке B (—3, 0) — груз в 40 *г*. Определить координаты центра тяжести этой системы.

116. Используя соотношения (6) и применяя метод математической индукции, доказать, что координаты центра тяжести n материальных точек A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2), . . . , A_n (x_n, y_n), в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, определяются соотношениями

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

117. Даны координаты середин сторон AB, BC и CA треугольника ABC: $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $N(5, 1)$, $P\left(4, -\frac{5}{2}\right)$. Определить координаты всех вершин треугольника.

118. Можно ли по формуле (9) вычислить расстояние между двумя точками в аффинной системе? Объясните ответ.

119. В прямоугольной декартовой системе координат определить расстояние между точками $A_1(2, -1)$ и $A_2(1, 2)$; $B_1(1, 5)$ и $B_2(1, 1)$; $C_1(-3, 1)$ и $C_2(1, -2)$; $D_1(-1, 2)$ и $D_2(3, 0)$.

120. Определить радиус окружности, которая проходит через точку $(-2, 1)$ и имеет центр в точке $(2, -3)$.

121. Определить координаты точек, расположенных на окружности радиуса $r = 3$ с центром в начале координат и имеющих ординаты: 2, -1, 3, $\sqrt{2}$.

122. Определить длину медианы AM треугольника ABC, заданного в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин: $A(5, -4)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 1)$.

123. Пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, вычислением убедиться в том, что треугольник ABC, заданный в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин $A(1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(-6, 7)$, прямоугольный.

124. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-8, 4)$ и касающейся осей координат прямоугольной декартовой системы.

125. Пользуясь формулой (11) или (12), показать, что если A, B, C — произвольные точки, не лежащие на одной прямой, то $S_{ABC} = -S_{ACB}$, здесь S_{ABC} — площадь ориентированного треугольника ABC, а S_{ACB} — площадь ориентированного треугольника ACB.

126. Вычислить площадь ориентированного треугольника в каждом из следующих случаев (система координат прямоугольная декартова).

а) $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$;

б) $A(-2, 4)$, $B(0, -3)$, $C(1, 7)$;

в) $A(5, 4)$, $B(11, 0)$, $C(0, 3)$.

127. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(9, 7)$. Вычислить периметр и площадь ориентированного треугольника ABC.

128. Выяснить, какие из данных троек точек коллинеарны.

а) $(1, 1)$, $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

б) $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 5)$;

в) $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$;

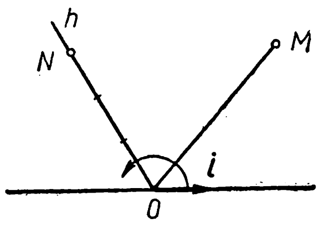
г) $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(4, -4)$;

д) $(-\sqrt{2}-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(-3, \sqrt{2})$.

§ 9. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

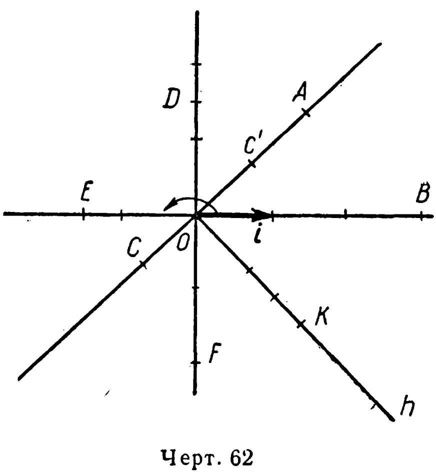
В аналитической геометрии наряду с аффинными и прямоугольными декартовыми координатами рассматриваются и другие системы координат. Одной из наиболее распространенных является полярная система.

1. Определение полярных координат. Возьмем на ориентированной плоскости точку O и некоторую ось, проходящую через эту точку. Ось может быть задана, например, единичным вектором $\boldsymbol{i}$ (черт. 61). Точку O, вектор $\boldsymbol{i}$ и положительное направление обхода плоскости будем называть полярной системой координат. Точка O называется полюсом, а взятая ось $\boldsymbol{i}$ — полярной осью. Покажем, что *если дана полярная система координат, то каждая точка плоскости может быть задана при помощи двух чисел.* Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от полюса O. Положение этой точки может быть однозначно определено заданием длины отрезка OM и угла $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{i}, \overline{OM}})$.



Черт. 61

В самом деле, задание угла φ определяет положение луча OM на плоскости, а расстояние $r = OM$ — положение точки M на этом луче. Например, если $r = 3$, а $\varphi = +\frac{2\pi}{3}$, то точка N, соответствующая этим числам, лежит на луче h, составляющем с осью $\boldsymbol{i}$ угол $\frac{2\pi}{3}$, и отстоит от O на расстоянии $r = 3$ (черт. 61). Сама точка O характеризуется условием: $r = 0$. Для этой точки угол φ неопределен. Числа r и φ называются полярными координатами точки. При этом r называется полярным радиусом или первой полярной координатой, а φ — полярным углом или второй полярной координатой. Если r и φ — полярные координаты точки M в системе $O\boldsymbol{i}$, то это обстоятельство обычно записывают так: $M(r, \varphi)_{O,\boldsymbol{i}}$. Например, точки A, B, C, D, E и F на чертеже 62 имеют полярные координаты:



Черт. 62

$$A\left(2, \frac{\pi}{4}\right), \quad B(3, 0),$$

$$C\left(1, \frac{5\pi}{4}\right), \; D\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad E\left(\frac{3}{2}, \pi\right), \; F\left(2, \frac{3\pi}{2}\right).$$

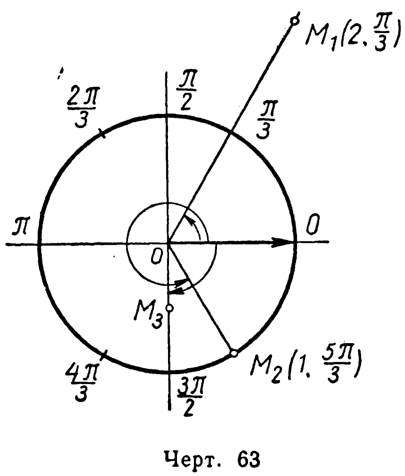
Заметим, что полярный угол точки имеет бесчисленное множество значений: если φ — какое-нибудь одно значение этой координаты, то $\varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число, являются значениями этой координаты.

Для построения точки по полярным координатам необходимо сначала, пользуясь полярным углом, отложить луч h, на котором лежит искомая точка, а затем на этом луче от полюса отложить отрезок, длина которого равна полярному радиусу. При этом необходимо учесть следующее: если полярный угол положителен, то луч h откладывается от полярной оси в положительном направлении обхода плоскости, если же этот угол отрицателен, то в отрицательном направлении. Например, для построения точки $K\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$ на луче h, который составляет с осью $\boldsymbol{i}$ угол $-\frac{\pi}{4}$, откладываем от точки O отрезок $OK = 2$ (черт. 62).

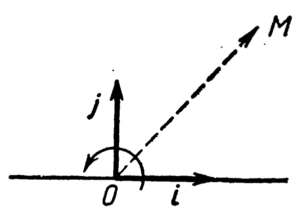
Для построения точек полезно иметь на чертеже вспомогательную окружность с центром в точке O радиуса единицы. При этом предварительно окружность снабжают шкалой, т. е. на ней отмечают точки, имеющие определенные полярные углы: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ и т. д. На чертеже 63 построены точки $M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно составить и решить ряд аналогичных примеров с тем, чтобы приобрести твердые навыки в построении точек по полярным координатам.

2. Связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами точек. Пусть $O\boldsymbol{i}$ — данная полярная система координат, $O\boldsymbol{ij}$ — прямоугольная декартова система, причем вектор $\boldsymbol{j}$ получен из вектора $\boldsymbol{i}$ поворотом на 90° в положительном



Черт. 63



Черт. 64

направлении данной полярной системы (черт. 64). Установим связь между прямоугольными декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть r, φ и x, y — соответственно полярные и прямоугольные декартовы координаты точки M. Из теоремы [5.1] следует, что вектор $\overline{OM}$ имеет координаты $OM \cos \varphi$, $OM \sin \varphi$, где $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{i}, \overline{OM}})$. Учитывая, что $OM = r$ и φ — полярный угол точки M и принимая во внимание, что x, y есть координаты вектора $\overline{OM}$, получаем:

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi. \tag{1}$$

Отсюда можно выразить r и φ через x и y:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.\text{[1]} \tag{2}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема [9. 1]. *Если $O\boldsymbol{i}$ — полярная система, а $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ — прямоугольная декартова система, причем $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}}) = +90°$, то полярные и прямоугольные декартовы координаты одной и той же точки связаны соотношениями* (1) и (2).

Пример 1. Пусть $O\boldsymbol{i}$ — данная полярная система координат, $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ — прямоугольная декартова система, причем вектор $\boldsymbol{j}$ получен из вектора $\boldsymbol{i}$ поворотом на $+90°$. Относительно полярной системы координат даны точки:

$$A\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \quad B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad C\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right).$$

Определить их прямоугольные декартовы координаты.

Решение. Для определения прямоугольных декартовых координат точки M (ρ, φ) воспользуемся формулами (1).

Для точки A имеем: $x = 2 \cos \frac{\pi}{3}$, $y = 2 \sin \frac{\pi}{3}$. Таким образом, $A(1, \sqrt{3})$. Аналогично получаем прямоугольные декартовы координаты остальных точек: $B(-1, 1)$, $C(0,5)$, $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Задача 1. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими полярными координатами.

---

[1] Из второй формулы (2) по заданным x и y угол φ не определяется однозначно. Поэтому при определении φ следует учесть, что

$$\begin{array}{lll} \text{при } y \geqslant 0, & x > 0 & 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ \text{при } x \leqslant 0, & y > 0 & \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \pi; \\ \text{при } y \leqslant 0, & x < 0 & \pi \leqslant \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\ \text{при } y < 0, & x \geqslant 0 & \frac{3\pi}{2} \leqslant \varphi < 2\pi. \end{array}$$

Решение. Пусть Oi — полярная система координат, а $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ — точки, расстояние между которыми необходимо вычислить. Построим вспомогательную прямоугольную декартову систему координат Oij так, чтобы вектор j был получен из вектора i поворотом последнего на угол $+90°$. В построенной системе взятые точки будут иметь координаты:

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \text{где } x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1,$$
$$y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1,\ x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2,\ y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

Отсюда получаем:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$$
$$= \sqrt{(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (3)$$

Пример 2. Вычислить расстояния между точками:

$$A\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \text{ и } B\left(1, \frac{7\pi}{12}\right);\ C\left(3, \frac{12\pi}{13}\right) \text{ и } D\left(4, \frac{11\pi}{26}\right).$$

Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$AB = \sqrt{4 + 1 - 2 \cdot 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} =$$
$$= \sqrt{5 - 4 \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3};$$
$$CD = \sqrt{9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{12\pi}{13} - \frac{11\pi}{26}\right)} =$$
$$= \sqrt{25 - 24 \cos \frac{\pi}{2}} = 5.$$

Пример 3. Пусть Oij — данная прямоугольная декартова система, а Oi — полярная система, причем положительное направление обхода выбрано так, что $(\widehat{i, j}) = +90°$. Определить полярные координаты точек $A(0, 5)$, $B(4, 4)$, $C(-3, -3)$, $D(\sqrt{3}, 1)$.

Решение. Для определения полярных координат точек воспользуемся соотношениями (2).
$r_A = \sqrt{0 + 25} = 5$. Так как $x = 0$, $y = 5 > 0$, точка лежит на положительном луче оси y, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r_B = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2};\quad \varphi_B = \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1;\quad \varphi_B = \frac{\pi}{4};$$
$$B\left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$r_C = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2};\quad \varphi_C = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} 1.$$

В данном случае точка C расположена в третьей четверти, поэтому $\varphi_C = \frac{5\pi}{4}$, $C\left(3\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$.

$$r_D = \sqrt{3+1} = 2,\quad \varphi_D = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi_D = \frac{\pi}{6};\ D\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Обобщенные полярные координаты. При решении некоторых задач, например при задании линий уравнением в полярных координатах, вводят в рассмотрение так называемые обобщенные полярные координаты точки.

Из определения полярных координат вытекает, что каждая точка плоскости имеет свои полярные координаты, причем полярные координаты любой точки являются действительными числами $(r,\ \varphi)$, из которых второе может быть любым числом, а первое — не отрицательно. Отсюда следует, что не всякая пара действительных чисел является полярными координатами точки. Например, на плоскости не существует точки с полярными координатами $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$. Это обстоятельство создает определенные трудности в тех случаях, когда рассматриваются уравнения линий в полярных координатах. Для устранения этого неудобства обобщим понятие полярных координат так, чтобы любая пара действительных чисел определяла на плоскости некоторую точку.

Пусть $(r,\ \varphi)$ — произвольная пара действительных чисел. Если $r \geqslant 0$, то этой парой определяется точка с полярными координатами $r,\ \varphi$ так, как было указано выше в п. 1. Если же $r < 0$, то будем считать, что этой парой определяется точка M, которая симметрична точке $M'(|r|,\ \varphi)$ относительно полюса O. Например, пара $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ определяет точку C, симметричную C', имеющей полярные координаты $\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ (черт. 62). Такие координаты точки называются обобщенными полярными координатами.

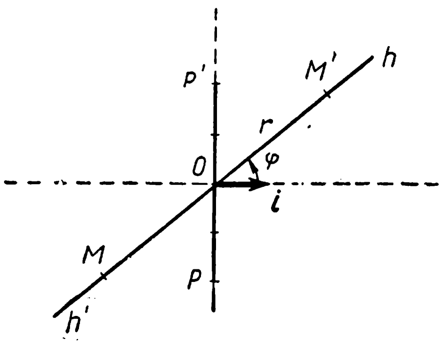
Итак, для построения точки по обобщенным полярным координатам $(r,\ \varphi)$ необходимо поступить следующим образом: Если $r \geqslant 0$, то точку строят так, как показано в п. 1 настоящего параграфа. Если $r < 0$, то необходимо построить точку M' с полярными координатами $(|r|,\ \varphi)$ и взять точку M, симметричную M' относительно полюса O (черт. 65). Например, для построения точки $P\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$ необходимо построить точку $P'\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ и взять точку P, симметричную P' относительно полюса (черт. 65).

На чертеже 62 построены точки, имеющие обобщенные координаты:

$$A\left(-2, -\frac{3\pi}{4}\right), \quad B(3, 0), \quad C\left(-1, \frac{\pi}{4}\right), \quad D\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{2}\right),$$
$$E\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad F\left(-2, \frac{\pi}{2}\right), \quad K\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

Легко видеть, что каждая точка плоскости имеет бесчисленное множество обобщенных (так же, как и необобщенных) полярных координат. Например, точка A на чертеже 62 имеет координаты:

$$\left(2, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{9\pi}{4}\right), \left(2, \frac{17\pi}{4}\right), \ldots, \left(-2, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{4}\right), \ldots.$$



Черт. 65

Но любая пара чисел, взятых в определенном порядке, определяет единственную точку с данными полярными координатами. Например, координаты $(-3, \pi)$ определяют единственную точку B, изображенную на чертеже 62.

В заключение заметим, что формулы (1), определяющие декартовы координаты через полярные, справедливы также и в том случае, когда ρ и φ являются обобщенными полярными координатами. В самом деле, пусть (ρ^*, φ^*) — обобщенные координаты точки M. Если $\rho^* > 0$, то они являются обычными полярными координатами точки, поэтому соотношения (1) справедливы. Если $\rho^* < 0$, то, очевидно, обычные полярные координаты точки M будут числа $(-\rho^*, \varphi^* + \pi)$, поэтому

$$x = -\rho^* \cos(\varphi^* + \pi), \quad y = -\rho^* \sin(\varphi^* + \pi)$$

или

$$x = \rho^* \cos\varphi^*, \quad y = \rho^* \sin\varphi^*.$$

Вопросы и упражнения

129. Что называется полярной системой координат? Как изменятся полярные координаты точки M (ρ, φ), если оставить без изменения полюс O, полярную ось Oi, но изменить на обратное положительное направление обхода.

130. Начертить на плоскости полярную систему координат и построить точки:

$$A_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right), \quad A_2\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), \quad A_3\left(4, \frac{2\pi}{3}\right), \quad A_4\left(2, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$A_5\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3}\right), \quad A_6\left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right), \quad A_7(2, -\pi),$$

$$A_8(3, 0), \quad A_9\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad A_{10}(5, -\pi).$$

131. Дан квадрат, сторона которого равна 3. Приняв за полюс какую-нибудь вершину квадрата, а за полярную ось — одну из сторон, проходящую через нее, определить полярные координаты всех вершин и точки пересечения диагоналей.

132. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс какую-нибудь его вершину, а за полярную ось одну из сторон, через нее проходящую, определить полярные координаты всех вершин.

133. Найти полярные координаты точек, симметричных с точками $M_1\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$:

а) относительно полюса;

б) относительно полярной оси.

134. Пусть Oij — данная прямоугольная декартова система, а Oi — полярная система, причем положительное направление обхода выбрано так, что $\measuredangle\,(i, j) = +90^\circ$.

Определить полярные координаты следующих точек:

$$M_1\,(0, 6),\ M_2\,(-2, 0),\ M_3\,(-1, 1),$$

$$M_4\,(\sqrt{3}, 1),\ M_5\,(0, -3),\ M_6\,(1, -\sqrt{3}).$$

135. Вывести формулу для вычисления площади треугольника, одна из вершин которого совпадает с полюсом, а две другие даны своими полярными координатами $A\ (\rho_1, \varphi_1)$, $B\ (\rho_2, \varphi_2)$.

Пользуясь этой формулой, вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$ и $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

136. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

137. Как расположены точки на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

а) $\rho = 3$; б) $\rho = 5$; в) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; д) $\rho\cos\varphi = 5$; е) $\rho\sin\varphi = 3$?

138. Что называется обобщенными полярными координатами точки? Может ли одна и та же точка иметь различные обобщенные координаты?

139. Построить точки, заданные в обобщенных полярных координатах:

$$A_1\left(-3, \frac{\pi}{2}\right), \quad A_2\left(5, -\frac{5\pi}{6}\right), \quad A_3\left(3,5; -\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$A_4(-1, 0), \quad A_5\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right).$$

140. Выясните, как расположены относительно полярной системы координат следующие пары точек: а) M (ρ, φ) и M' $(-\rho, \varphi)$; б) M (ρ, φ) и M' $(-\rho, -\varphi)$; в) M (ρ, φ) и M' $(\rho, -\varphi)$.

141. Какие из точек $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right)$, $D\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$ совпадают.

142. Определить обобщенные полярные координаты точек, симметричных с точками $A\left(5, -\frac{\pi}{3}\right)$, $B(-2, -\pi)$, $C\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(-1, \frac{3\pi}{4}\right)$:

а) относительно полярной оси;

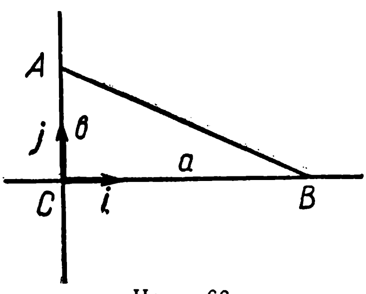
б) относительно полюса.

§ 10. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изложенная в этой главе теория может быть с успехом применена для доказательства теорем и решения задач из курса элементарной геометрии. В этом параграфе мы приведем некоторые примеры приложения метода координат к решению элементарногеометрических задач.

1. Некоторые метрические свойства треугольников.

Теорема Пифагора [10.1]. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

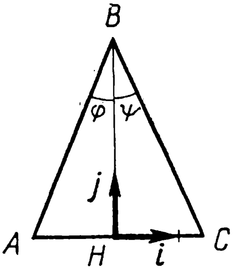


Черт. 66

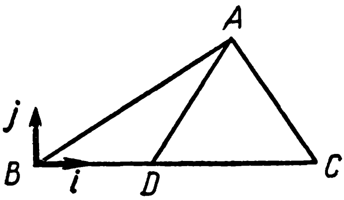
Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в точке C. Точку C примем за начало прямоугольной декартовой системы координат, а оси направим вдоль катетов треугольника (см. черт. 66). Если $CB = a$, $CA = b$, то вершины треугольника, очевидно, будут иметь координаты A $(0, b)$, B $(a, 0)$, C $(0, 0)$. Вычислим квадраты сторон треугольника, воспользовавшись формулой (9), § 8: $AB^2 = a^2 + b^2$, $AC^2 = b^2$, $BC^2 = a^2$, отсюда $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Теорема [10. 2]. *В равнобедренном треугольнике высота является одновременно медианой и биссектрисой.*

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($BA = BC$) и BH — высота этого треугольника. Прямоугольную декартову систему возьмем так, как на чертеже 67, и



Черт. 67



Черт. 68

обозначим координаты вершин: A $(\alpha, 0)$, B $(0, \beta)$, C $(\gamma, 0)$. Так как $BA = BC$, то $BA^2 = BC^2$, $\alpha^2 + \beta^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Отсюда $\alpha^2 = \gamma^2$ и $\alpha = \pm\gamma$. Но $\alpha \neq \gamma$, так как точки A и C не совпадают, поэтому $\alpha = -\gamma$. Отсюда следует, что H есть середина отрезка AC, так как координаты середины отрезка равны полусуммам координат концов: $x_H = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, $y_H = \frac{0 + 0}{2} = 0$. Таким образом, BH является медианой треугольника.

Теперь докажем, что $\varphi = \psi$, где

$$\varphi = \angle ABH, \quad \psi = \angle CBH. \quad \overline{BA}\{\alpha, -\beta\}, \ \overline{BH}\{0, -\beta\}, \ \overline{BC}\{\gamma, -\beta\},$$

$$\cos\varphi = \frac{\beta^2}{BA \cdot BH}, \quad \cos\psi = \frac{\beta^2}{BH \cdot BC}, \quad \cos\varphi = \cos\psi \text{ или } \varphi = \psi.$$

Теорема Стюарта [10. 3]. *Если даны треугольник ABC и на его основании точка D, лежащая между точками B и C* (черт. 68), *то справедливо равенство*

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD \qquad (1)$$

Доказательство. Систему прямоугольных декартовых координат возьмем так, как на чертеже 68. Введем обозначения для координат точек A, C и D: A (α, β), C $(\gamma, 0)$, D $(\delta, 0)$. При данном выборе системы координат $BD = \delta$, $BC = \gamma$.

Теперь вычислим все величины, которые входят в соотношение (1):

$$AB^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad BC = \gamma,$$
$$AC^2 = (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2, \qquad BD = \delta,$$
$$AD^2 = (\alpha - \delta)^2 + \beta^2, \qquad DC = \gamma - \delta.$$

Подставив эти значения в левую часть соотношения (1), получаем:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma - \delta) + [(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2]\delta - [(\alpha - \delta)^2 + \beta^2]\gamma =$$
$$= \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \beta^2\gamma - \beta^2\delta + \alpha^2\delta + \gamma^2\delta + \beta^2\delta - 2\alpha\gamma\delta -$$
$$- \alpha^2\gamma - \delta^2\gamma - \beta^2\gamma + 2\alpha\delta\gamma = \gamma^2\delta - \delta^2\gamma =$$
$$= \gamma\delta(\gamma - \delta) = BC \cdot BD \cdot DC.$$

Теорема доказана.

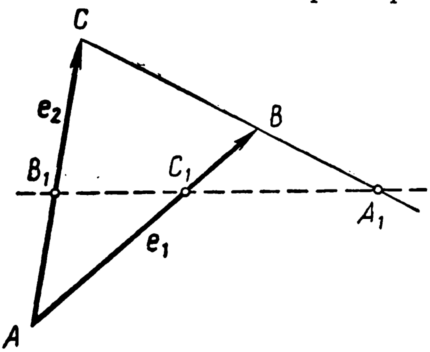
Из соотношения (1) получаем формулу для вычисления длины медианы произвольного треугольника через его стороны. В самом деле, пусть AD — медиана, т. е. $BD = DC$. Если положить $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = m$, то $BD = DC = \frac{a}{2}$. Подставив эти значения в (1), получаем: $c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - m^2 \cdot a = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Отсюда имеем следующую формулу:

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

Теорема [10. 4]. *Квадрат медианы произвольного треугольника выражается через квадраты сторон этого треугольника при помощи соотношения* (2).

Теорема Менелая [10. 5]. *Для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях), принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$



Черт. 69

Решение. Возьмем точку A за начало координат, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ за координатные векторы аффинной системы координат (черт. 69). Введем обозначения:

$$\lambda_3 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}, \quad \lambda_1 = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}$$

и определим координаты точек A_1, B_1 и C_1. В выбранной системе координат вершины треугольника ABC, очевидно, будут иметь координаты A (0, 0), B (1, 0), C (0, 1).

Если $A_1(x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$ и $C_1(x_3, y_3)$, то

$$x_1 = \frac{1+\lambda_1 0}{1+\lambda_1} = \frac{1}{1+\lambda_1}, \quad y_1 = \frac{0+\lambda_1 1}{1+\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1};$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{1+\lambda_2}; \quad x_3 = \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}, \quad y_3 = 0.$$

Для того чтобы точки A_1, B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{1+\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+\lambda_2} & 1 \\ \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{1}{1+\lambda_2}\right) = 0.$$

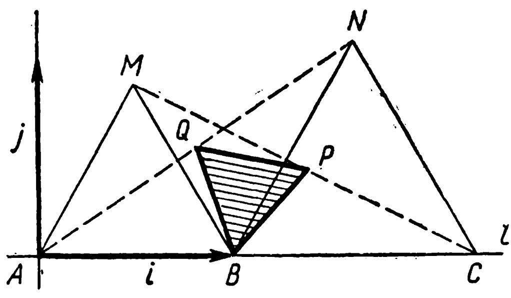
После элементарных преобразований получаем: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 1 = 0$. Таким образом,

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

2. Приложение метода координат к решению задач.

З а д а ч а 1. На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой l построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Доказать, что середина отрезка MC, середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть P — середина отрезка MC, а Q — середина отрезка AN (черт. 70). Требуется доказать, что треугольник PQB равносторонний. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, оп-



Черт. 70

ределим координаты вершин $\triangle PQB$, найдем длины его сторон и убедимся в том, что $PQ = QB = BP$.

Систему координат выберем следующим образом: начало O совместим с точкой A, за вектор $\boldsymbol{i}$ примем вектор $\overline{AB}$, а вектор $\boldsymbol{j}$ направим так, чтобы его конец и точки M и N лежали по одну сторону от прямой l. Если $BC = a$, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников в системе $O\boldsymbol{ij}$ имеют координаты:

$$A(0,\ 0),\quad B(1,\ 0),\quad C(1+a,\ 0),$$

$$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad N\left(1+\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

Определим координаты точек $P(x_1,\ y_1)$ и $Q(x_2,\ y_2)$:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}+1+a}{2} = \frac{3+2a}{4},\quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$x_2 = \frac{2+a}{4},\qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем:

$$BQ = PQ = PB = \frac{\sqrt{a^2-a+1}}{2}.$$

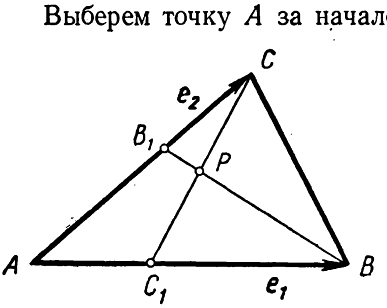
Задача 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и B_1, которые делят эти стороны в данных отношениях $\frac{AC_1}{C_1B} = \lambda$, $\frac{AB_1}{B_1C} = \mu$. В каком отношении делят друг друга отрезки BB_1 и CC_1?

Решение. Обозначим через P точку пересечения отрезков BB_1 и CC_1, а через ν_1 и ν_2 отношения

$$\frac{BP}{PB_1} = \nu_1,\qquad \frac{CP}{PC_1} = \nu_2.$$

Выберем точку A за начало координат, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ (черт. 71). В этой системе координат вершины треугольника, очевидно, будут иметь следующие координаты:

$$A\ (0,\ 0),\ B\ (1,\ 0),\ C\ (0,\ 1).$$



Черт. 71

Далее, пользуясь соотношениями $\lambda = \frac{AC_1}{C_1B}$ и $\mu = \frac{AB_1}{B_1C}$, определяем координаты точек B_1 и C_1:

$$B_1\left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right), \quad C_1\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad 0\right).$$

Определим координаты точки $P(x, y)$, учитывая, что $\frac{BP}{PB_1} = \nu_1$:

$$P\left(\frac{1}{1+\nu_1}, \quad \frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)}\right).$$

Определим координаты той же точки, учитывая, что $\frac{CP}{PC_1} = \nu_2$:

$$P\left(\frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}, \quad \frac{1}{1+\nu_2}\right).$$

Таким образом, для определения искомых величин ν_1 и ν_2 получаем соотношения:

$$\frac{1}{1+\nu_1} = \frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}, \quad \frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)} = \frac{1}{1+\nu_2}.$$

Из этих соотношений, после элементарных преобразований, получаем:

$$\nu_1 = \frac{1+\mu}{\lambda}, \quad \nu_2 = \frac{1+\lambda}{\mu}.$$

Если $\lambda = \mu = 1$, т. е. BB_1 и CC_1 являются медианами треугольника, то $\nu_1 = \nu_2 = 2$. Таким образом, мы доказали, что если P — точка пересечения любых двух медиан треугольника ABC, то этой точкой каждая медиана делится в отношении $2:1$. Отсюда непосредственно следует известная теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$.

Теоремы и задачи

143. Доказать, что в прямоугольном треугольнике каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

144. Доказать, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между двумя отрезками, на которые он рассекает гипотенузу.

145. Доказать, что разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону.

146. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и биссектриса $AD = m$. Доказать, что

$$m^2 = bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}.$$

147. Доказать, что если у трапеции диагонали равны, то трапеция равнобочная.

148. Дан треугольник и в его плоскости произвольная точка M, которая дважды последовательно отражается относительно всех вершин треугольника. Доказать, что после последнего отражения точка совпадает с точкой M.

149. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершины последнего делят стороны треугольника ABC в одном и том же отношении: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda$. Показать, что точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают.

150. Доказать, что в трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен их полуразности.

151. Показать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

152. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, будучи продолженными, пересекаются в точке O. Обозначая через S и P соответственно середины диагоналей BD и AC, показать, что площадь треугольника OSP равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

153. Внутри треугольника ABC взята точка O. Доказать, что треугольники OAB, OBC и OCA равновелики тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан.

154. Доказать, что если G — точка пересечения медиан треугольника ABC, а M — произвольная точка плоскости, то

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\,MG^2.$$

ГЛАВА III
УРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

§ 11. ПОНЯТИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК; СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Понятие уравнения геометрического места точек. В предыдущей главе мы ввели понятие координат точек и тем самым указали аналитический способ задания точек на плоскости. Однако в геометрии приходится рассматривать, помимо точек, и другие геометрические объекты, поэтому одной из основных задач этой дисциплины является определение аналитических характеристик геометрических образов, более сложных, чем точки. Конечно, каждую геометрическую фигуру можно рассматривать как совокупность точек, и в принципе ее можно задать координатами тех точек, из которых она состоит. Однако практически это не всегда возможно сделать, так как геометрическая фигура в большинстве случаев содержит бесчисленное множество точек. Поэтому для аналитического задания геометрического места поступают следующим образом. Записывают условие (т. е. уравнение), отражающее общее геометрическое свойство, присущее всем точкам данного геометрического места и только им. По полученному аналитическому условию можно определить, принадлежит ли та или иная точка плоскости рассматриваемому геометрическому месту.

Геометрические места точек не всегда удается охарактеризовать одним геометрическим свойством. В отдельных случаях приходится рассматривать несколько геометрических характеристик, определяющих точки геометрического места. Соответственно этому мы получаем несколько аналитических выражений, совокупность которых характеризует полностью точки данного геометрического места. В этом случае мы будем говорить, что геометрическое место задано уравнениями.

Таким образом, под *уравнениями геометрического места точек мы будем понимать те аналитические условия, которым удовлетворяют координаты всех точек данного геометрического места и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому геометрическому месту.*

Следует заметить, что термин «уравнение» при задании геометрических мест точек использован не в обычном алгебраическом смысле, так как геометрические места не всегда задаются аналитически в виде уравнений. Они могут быть заданы, например, и в виде неравенств (см. ниже, пример 3). Кроме того, в аналитической геометрии не ставится задача решения уравнений, как в алгебре. Здесь, как правило, интересуются исследованием уравнения геометрического места с целью выяснения его геометрических свойств.

2. Примеры составления уравнений геометрических мест. Рассмотрим несколько примеров составления уравнений геометрических мест.

Пример 1. В прямоугольной декартовой системе координат дана точка $A(2, 5)$. Найти необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты геометрического места точек M, отстоящих от точки A на расстоянии $r = 3$.

Решение. Пусть (x, y) — координаты произвольной точки M рассматриваемого геометрического места точек. Условие $MA = 3$ является необходимым и достаточным для того, чтобы M принадлежала данному геометрическому месту. Так как $MA = \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$, то уравнением данного геометрического места является соотношение $\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} = 3$ или эквивалентное соотношение $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$. После элементарных преобразований получаем:

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0. \qquad (1)$$

Очевидно, рассматриваемое геометрическое место есть окружность с центром в точке A (2,5) радиуса $r = 3$.

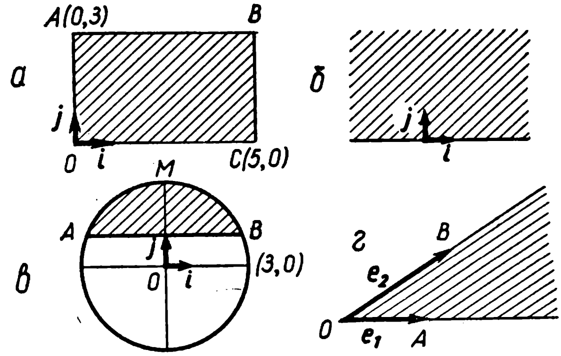
Полученное уравнение можно использовать для выяснения вопроса о том, принадлежит ли та или иная точка плоскости рассматриваемой окружности. Например, точки $B(0, 5+\sqrt{5})$ и C (2,2) принадлежат окружности, так как их координаты удовлетворяют уравнению (1), в то время как точки D (1,1), E (0,1) не принадлежат окружности.

Пример 2. В прямоугольной декартовой системе дана точка A (3, 0) и через нее проведена прямая l, параллельная оси Oy. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек прямой l.

Решение. Если точка (x, y) лежит на прямой l, то $x = 3$, так как $l \parallel Oy$. Обратно, если для некоторой точки (x, y) плоскости имеем: $x = 3$, то она, очевидно, лежит на прямой l. Таким образом, соотношение $x = 3$ есть уравнение геометрического места точек, принадлежащих прямой l.

Пример 3. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек каждой из заштрихованных фигур, изображенных на чертеже 72. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, относятся к самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на чертеже).

Решение. На чертеже 72, *а* изображен прямоугольник $OABC$, измерения которого соответственно равны 5 и 3. Очевидно, первые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OA и CB вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant 5$, вторые же координаты этих точек произвольны. Аналогично вторые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OC и AB вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant y \leqslant 3$, а первые координаты этих точек произвольны. Данный четырехугольник есть пересечение рассматриваемых двух полос. поэтому координаты точек четырехугольника удовлетворяют соотношениям $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 3$. Эти соотношения могут быть названы «уравнениями» данной фигуры.



Черт. 72

На чертеже 72, *б* изображена полуплоскость. Первые координаты всех точек этой полуплоскости произвольны, а вторые координаты не отрицательны. Таким образом, «уравнения» этой фигуры запишутся так: $y \geqslant 0$.

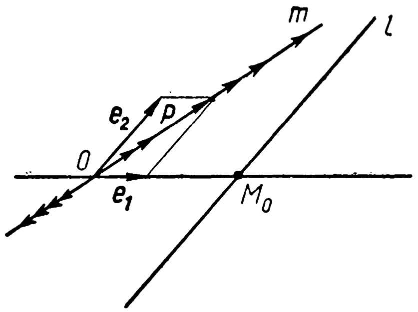
На чертеже 72, *в* изображен сегмент, который может быть рассмотрен как пересечение двух областей: круга с центром в точке O и радиуса OB и полуплоскости λ, определяемой прямой AB и точкой M. Так как $OB = 3$, то координаты точек рассматриваемого круга удовлетворяют условию: $x^2 + y^2 \leqslant 9$. С другой стороны, координаты точек полуплоскости λ удовлетворяют условию: $y \geqslant 1$ (координаты x произвольны!) Отсюда следует, что «уравнения» рассматриваемой фигуры могут быть записаны так:

$$x^2 + y^2 \leqslant 9, \ y \geqslant 1.$$

На чертеже 72, *г* изображен первый координатный угол, определяемый системой Oe_1e_2. Этот угол можно рассматривать как пересечение двух полуплоскостей: полуплоскости, определяемой осью Ox и точкой B, и полуплоскости, определяемой осью Oy и точкой A. Точки этих полуплоскостей характеризуются соответственно условиями: $x \geqslant 0$ (первая полуплоскость), $y \geqslant 0$ (вторая полуплоскость). Отсюда следует, что «уравнениями» рассматриваемой фигуры являются соотношения $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3. Исследование геометрического места точек по уравнению. Методы аналитической геометрии позволяют найти геометрические места точек, заданных определенными условиями. Для нахождения уравнений геометрического места точек выбирают систему координат, наиболее «удобно» связанную с заданными геометрическими объектами, и записывают в этой системе уравнение искомого множества точек. Далее, по уравнению исследуют искомое геометрическое место точек. Прежде чем перейти к решению задач такого рода, рассмотрим некоторые примеры исследования геометрического места точек по уравнениям.

Пример 4. Исследовать геометрические места точек, заданных уравнениями: а) $x = 3$; б) $x = y$; в) $x^2+y^2 = 9$; г) $y(y - x) = 0$.



Черт. 73

Решение. а) Точка $M_0(3,0)$ оси Ox, очевидно, принадлежит исследуемому геометрическому месту точек. Проведем через нее прямую l, параллельную оси Oy. Очевидно, первые координаты всех точек этой прямой равны 3, поэтому все они принадлежат геометрическому месту точек. Обратно, если точка N принадлежит геометрическому месту точек, то ее первая координата равна 3, поэтому она лежит на прямой l. Таким образом, исследуемое геометрическое место есть все точки прямой l (черт. 73).

б) Уравнение $x = y$ может быть записано так: $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Если ввести в рассмотрение вектор $\boldsymbol{p}\{1,1\}$ и принять во внимание, что x, y есть координаты радиус-вектора точек, то геометрический смысл предыдущего соотношения заключается в том, что радиус-векторы всех точек исследуемого геометрического места коллинеарны вектору $\boldsymbol{p}$. Обратно, всякая точка плоскости, радиус-вектор которой коллинеарен $\boldsymbol{p}$, принадлежит геометрическому месту. Отсюда следует, что геометрическое место есть прямая m, проходящая через начало координат и параллельная вектору $\boldsymbol{p}$ (черт. 73).

в) Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, то уравнение $x^2 + y^2 = 9$ может быть записано так: $|\boldsymbol{r}|^2 = 9$ или $|\boldsymbol{r}| = 3$. Этим условием, очевидно, задается окружность радиуса 3 с центром в начале координат.

г) Если координаты точки (x, y) удовлетворяют уравнению $y(y - x) = 0$, то либо $y = 0$, либо $y - x = 0$. Обратно, если координаты точки плоскости удовлетворяют одному из условий $y = 0$ или $y - x = 0$, то точка принадлежит геометрическому месту точек. Таким образом, исследуемое геометрическое место точек состоит из тех и только тех точек, координаты которых удовлетворяют условиям: $y = 0$ и $y - x = 0$. Первым условием характеризуются точки оси Ox, а вторым условием, как было выяснено выше, точки прямой m (черт. 73). Итак, исследуемое геометрическое место есть совокупность точек двух прямых.

Пример 5. Исследовать геометрические места точек, заданные уравнениями:

$$\text{а) } |x| = 1; \qquad \text{б) } |x| = |y|; \qquad \text{в) } x = |x - y|.$$

Решение. а) Для каждой точки геометрического места $x = \pm 1$. Обратно, всякая точка плоскости, первая координата которой удовлетворяет одному из этих условий, принадлежит геометрическому месту точек.

Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой пару прямых, параллельных оси Oy и проходящих через точки $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

б) Для каждой точки геометрического места $x = \pm y$. Обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют условиям $x = y$ или $x = -y$, принадлежит геометрическому месту точек. Очевидно, рассматриваемое геометрическое место точек представляет собой пару прямых, одна из которых проходит через точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, а другая через точки $(0, 0)$, $(-1, 1)$. Если система прямоугольная декартова, то эти прямые представляют собой биссектрисы координатных углов.

в) Так как $|x - y| \geqslant 0$, то $x \geqslant 0$. Отсюда следует, что все точки геометрического места расположены по ту же сторону от оси Oy, что и вектор e_1. Возводя данное соотношение в квадрат, получаем $x^2 = x^2 - 2xy + y^2$, или $y(y - 2x) = 0$. Очевидно, если координаты точки удовлетворяют исходному уравнению, то они удовлетворяют также полученному уравнению. Заметим, что обратное утверждение не всегда справедливо: например, координаты точки $M(-1, -2)$ удовлетворяют второму уравнению, но не удовлетворяют исходному. Уравнением $y(y - 2x) = 0$ задается пара прямых (см. предыдущую задачу). Для определения искомого геометрического места точек следует отбросить те точки, для которых $x < 0$.

Таким образом, мы получаем пару лучей, исходящих из начала координат и содержащих точки $(1, 0)$ и $(1, 2)$.

Геометрические места точек могут быть заданы также уравнениями в полярных координатах.

Пример 6. Исследовать геометрические места точек, заданных уравнениями в полярных координатах:

$$\text{а) } \rho = 3; \quad \text{б) } \varphi = \frac{\pi}{3}; \quad \text{в) } \rho \sin\varphi = 10.$$

Решение. а) Условие $\rho = 3$, очевидно, определяет окружность радиуса 3 с центром в полюсе.

б) Если $\varphi = \frac{\pi}{3}$, то точка лежит на луче h, исходящем из полюса и образующем с полярной осью угол $\frac{\pi}{3}$. Обратно, если точка принадлежит лучу h, то $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, искомое геометрическое место есть совокупность точек луча h.

в) Для исследования геометрического места точек в данном случае проще всего перейти к прямоугольной декартовой системе. Если начало координат поместить в полюс и вектор $\boldsymbol{j}$ взять так, чтобы $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}}) = +90°$, то, как известно (см. § 9), $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Таким образом, исследуемое геометрическое место точек в прямоугольной декартовой системе задается уравнением $y = 10$. Этим соотношением задается прямая, проходящая через точку $(0, 10)$ и параллельная оси Ox (см. пример 4).

4. Исследование геометрических мест точек. В заключение рассмотрим задачи на исследование геометрических мест точек, заданных определенными геометрическими условиями.

Задача 1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B.

Решение. Для решения данной и подобных задач сначала выбирают систему координат, наиболее «удобно» связанную с данными геометрическими объектами, и записывают уравнение геометрического места в этой системе. Затем по полученному уравнению исследуют геометрическое место точек.

Прямоугольную декартову систему координат возьмем так, чтобы ось Ox совпала с прямой AB, а начало координат поместим в середину отрезка AB. Если $AB = 2a$, то в выбранной системе $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала геометрическому месту точек, необходимо и достаточно, чтобы $AM = BM$ или в выбранной системе координат:

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению $(x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$ или $x = 0$. Этим уравнением задается ось Oy. Итак, мы доказали теорему:

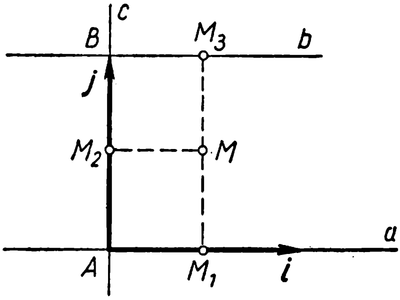
Теорема [11. 1]. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную к нему.*

Замечание. При исследовании уравнения геометрического места нам пришлось его преобразовать, возведя в квадрат. При преобразованиях такого рода необходимо быть внимательным, так как не всегда полученные уравнения эквивалентны исходным. Например, $x = y$ есть прямая m на чертеже 73. Но если возвести это уравнение в квадрат, то получим уравнение $x^2 = y^2$ или $(x - y)(x + y) = 0$. Этим уравнением задаются две прямые, проходящие через начало координат и параллельные соответственно векторам $\boldsymbol{p}\{1, 1\}$ (т. е. прямая m на черт. 73) и $\boldsymbol{p}\{1, -1\}$.

З а д а ч а 2. Даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c. Определить геометрическое место точек, равноудаленных от данных трех прямых.

Р е ш е н и е. Пусть A и B — точки пересечения прямой c соответственно с прямыми a и b. Примем точку A за начало координат, вектор $\vec{i}$ направим вдоль прямой a, а в качестве $\vec{j}$ возьмем вектор $\overline{AB}$ (черт. 74). Для того чтобы точка M принадлежала геометрическому месту точек, необходимо и достаточно, чтобы $M_1M = M_2M$ и $M_1M = M_3M$. Так как $M_1M = |y|$, $M_2M = |x|$, $M_3M = |1 - y|$, то предыдущие соотношения запишутся так:

$$|y| = |x| \text{ и } |y| = |1 - y|.$$



Черт. 74

Эти соотношения являются уравнениями искомого геометрического места точек.

Выясним, что представляет собой искомое геометрическое место точек. Отметим, что $|y| \neq 0$, так как в противном случае из второго соотношения следует, что $|y - 1| = 0$. Соотношения: $|y| = 0$ и $|y - 1| = 0$, очевидно, противоречивы.

Легко видеть также, что $y > 0$. В самом деле, если $y < 0$, то $|1 - y| = 1 - y$, $|y| = -y$ и, следовательно, $|1 - y| \neq |y|$.

Таким образом, $y > 0$ и $|y| = y$. Возможны два случая: а) $1 - y > 0$; б) $1 - y < 0$. В первом случае $y = 1 - y$, поэтому $y = \frac{1}{2}$. Во втором случае $y = -(1 - y)$, что противоречиво. Итак, соотношение $|y| = |1 - y|$ эквивалентно соотношению $y = \frac{1}{2}$.

Подставив это значение y в соотношение $|x| = |y|$, получаем: $x = \pm\frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое геометрическое место точек состоит из двух точек: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

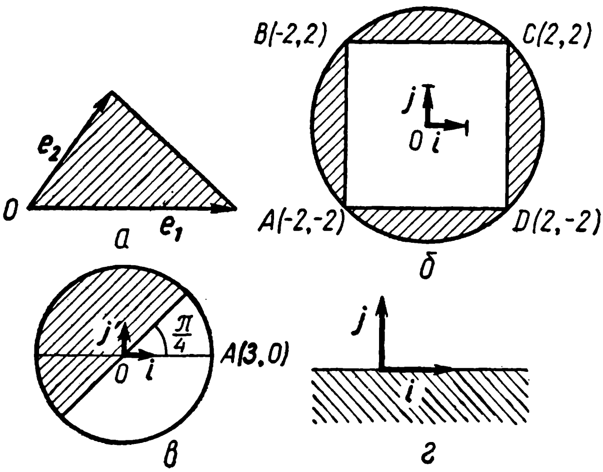
Вопросы и задачи

155. Что называется уравнением геометрического места точек? Могут ли соотношения $x > 2$, $y = 0$ служить уравнениями геометрического места точек?

156. Найти необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек, отстоящих от оси Ox прямоугольной декартовой системы на расстоянии $r = 4$.

157. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек каждой из заштрихованных фигур, изображенных на чертеже 75. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, относятся к самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на чертеже).

158. Определить геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух параллельных прямых равна данному положительному числу.



Черт. 75

159. Дан прямоугольник $ABCD$. Определить геометрическое место всех точек X, для которых $AX + CX = BX + DX$.

160. Исследовать геометрические места точек, заданные уравнениями в прямоугольной декартовой системе:

а) $x - y = 0$; г) $xy + y^2 = 0$; е) $x - 5 = 0$;
б) $x^2 + 2x - 15 = 0$; д) $x^2 - y^2 = 0$; ж) $y^2 - 2yx = 0$.
в) $y + 3 = 0$;

161. Выяснить, какие из геометрических мест точек, заданных следующими парами уравнений:

а) $x = |x - 2y|$ и $xy - y^2 = 0$;
б) $x = y$ и $x^2 = y^2$;
в) $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 3$ и $(x-a)^2 + y^2 = 9$,

совпадают.

162. Определить геометрические места точек, заданных следующими уравнениями в полярной системе координат:

а) $\rho = 4$; б) $\rho\cos\varphi = 2$; в) $\rho = 10\sin\varphi$; г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; д) $\rho\sin\varphi = 1$; е) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\sin\varphi = \cos\varphi$.

163. Найти геометрическое место середин отрезков параллельных прямых, заключенных между данными параллельными прямыми a и b.

164. Найти геометрическое место середин отрезков, заключенных между точкой A и прямой a, не проходящей через точку A.

§ 12. ОКРУЖНОСТЬ; ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА, ПРИВОДЯЩИЕ К ОКРУЖНОСТИ

Из курса элементарной геометрии известно, что окружность играет существенную роль при решении многих геометрических задач, поэтому в настоящем параграфе рассмотрим аналитическое задание окружности и покажем, как оно может быть использовано при решении задач.

1. Уравнение окружности. Окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром. Пусть в прямоугольной декартовой системе Oij точка $C(x_0, y_0)$ является центром окружности радиуса r. Для того чтобы $M(x, y)$ принадлежала окружности, необходимо и достаточно, чтобы $MC = r$ или в координатах $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$ (см. черт. 76). Так как в левой части берется только арифметическое значение корня, то предыдущее соотношение эквивалентно следующему:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

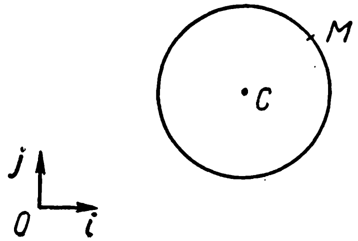
или, в развернутом виде:

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2 = 0. \quad (2)$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то $x_0 = y_0 = 0$, и уравнение принимает вид:

$$x^2+y^2 = r^2. \quad (3)$$

Теорема [12. 1]. *В прямоугольной декартовой системе окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ радиуса r имеет уравнение* (1). *Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение имеет вид* (3).



Черт. 76

Пример 1. Написать уравнение окружности:

а) с центром в точке C (2, —1) радиуса $r = 4$;

б) с центром в точке C (0, 0) радиуса $r = 3$.

Решение. а) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, или $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 9$.

Важно подчеркнуть, что уравнения (1), (2) и (3) записаны в прямоугольной декартовой системе.

2. Обратная задача. Теперь перейдем к решению обратной задачи. Предположим, что в прямоугольной декартовой системе дано некоторое уравнение. Как определить, является ли оно уравнением окружности, и если да, то как найти координаты центра и радиус этой окружности. Прежде всего заметим, что уравнение любой окружности в прямоугольной декартовой системе имеет вид (2), поэтому левая часть уравнения любой окружности является многочленом второй степени, не содержащим члена с произведением переменных xy и имеющим равные коэффициенты при x^2 и y^2. Отсюда следует, что уравнение любой окружности имеет вид:

$$A'x^2 + A'y^2 + C'x + D'y + E' = 0, \text{ где } A' \neq 0.$$

Разделив на A' и вводя обозначения: $\frac{C'}{A'} = A$, $\frac{D'}{A'} = B$, $\frac{E'}{A'} = C$, получаем:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{4}$$

Верно ли обратное утверждение, т. е. при всяких ли коэффициентах A, B и C геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (4), есть окружность? Рассмотрим эту задачу.

Задача 1. Исследовать геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (4).

Решение. Данное уравнение можно преобразовать так:

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} + C - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} = 0$$

или

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}. \tag{5}$$

Возможны следующие случаи:

а) $A^2 + B^2 - 4C > 0$. В этом случае соотношение (5), которое эквивалентно соотношению (4), может быть записано так:

$$\left[x - \left(-\frac{A}{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-\frac{B}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}\right]^2.$$

Очевидно, этим уравнением определяется окружность с центром в точке $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ и радиусом $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$.

б) $A^2+B^2-4C=0$. Соотношение (5) принимает вид:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0.$$

Этому соотношению удовлетворяют, очевидно, координаты единственной точки $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Таким образом, геометрическое место точек состоит из одной точки. Для общности можно сказать, что в данном случае рассматриваемое геометрическое место есть о к р у ж н о с т ь н у л е в о г о р а д и у с а.

в) $A^2+B^2-4C<0$. В этом случае не существует на плоскости ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (5) или (4). Искомое геометрическое место не имеет ни одной точки.

Резюмируя все сказанное, мы приходим к выводу, что характер геометрического места точек, заданного уравнением (4), определяется знаком числа $\alpha=A^2+B^2-4C$. Если $\alpha>0$, то искомое геометрическое место есть окружность, если $\alpha=0$ — одна точка, если $\alpha<0$ — геометрическое место пустое.

Заметим, что в последнем случае существуют комплексные числа, удовлетворяющие уравнению (4) или (5), поэтому говорят, что геометрическое место состоит из комплексных точек и является «мнимой окружностью». Подробнее об этом будет изложено в § 26.

Мы пришли к следующей теореме.

Т е о р е м а [12. 2]. *Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (4), есть:* а) *окружность с центром в точке* $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ *и радиусом* $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$, *если* $A^2+B^2-4C>0$;

б) *точка с координатами* $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, *если* $A^2+B^2-4C=0$;

в) *пустое множество, если* $A^2+B^2-4C<0$.

П р и м е р 2. Выяснить, какие из уравнений, приведенных ниже, определяют в прямоугольной декартовой системе окружность. В случае, когда уравнение определяет окружность, найти ее радиус и координаты центра.

а) $x^2+y^2-4x+8y+4=0$;
б) $x^2+2y^2-4x=0$;
в) $x^2+y^2-3=0$;
г) $4x^2+4y^2-4x+8y+5=0$;
д) $x^2+y^2-3x+4y+8=0$.

Р е ш е н и е. Для каждого случая определяем $\alpha=A^2+B^2-4C$.

а) $\alpha=(-4)^2+8^2-16=64$. Этим уравнением определяется окружность с центром в точке $C(2, -4)$ радиуса $r=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}=4$.

б) Уравнение не определяет окружность, так как коэффициенты при x^2 и y^2 не равны.

в) $\alpha = 0 + 0 + 4 \cdot 3 = 12 > 0$.

Уравнение определяет окружность с центром в начале координат $\left(\text{так как} -\frac{A}{2} = 0 \text{ и } -\frac{B}{2} = 0!\right)$ радиуса $r = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \sqrt{3}$.

г) В данном уравнении коэффициенты при x^2 и y^2 не равны единицам, поэтому уравнение не имеет вида (4). Однако его легко привести к этому виду, если разделить на 4:

$$x^2 + y^2 - x + 2y + \frac{5}{4} = 0,$$

$\alpha = A^2 + B^2 - 4C = 1 + 4 - 5 = 0$. Таким образом, уравнение на плоскости определяет одну-единственную точку $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению.

д) $\alpha = 9 + 16 - 32 = -7 < 0$. Геометрическое место представляет собой пустое множество, т. е. нет на плоскости ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению.

3. Задачи на геометрические места, приводящие к окружности.

Задача 2. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно.

Решение. Пусть A и B — данные точки. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало координат было в точке B, а положительное направление оси абсцисс совпало с направлением вектора $\overline{BA}$. Если $AB = a$, то точка A будет иметь координаты $(a, 0)$, а точка B координаты $(0, 0)$.

Если $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места, то $\frac{AM}{BM} = \lambda$, где AM и BM — расстояния от точки M до данных точек A и B, а λ — данное постоянное число, причем $\lambda > 0$.

Так как $AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $MB = \sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

Это соотношение является уравнением искомого геометрического места точек. Возведем обе части соотношения (6) в квадрат:

$$(x - a)^2 + y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2). \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) эквивалентны (см. задачу 161, в), поэтому (7) есть также уравнение искомого геометрического места точек. Преобразуя это уравнение, получаем:

$$x^2 (1 - \lambda^2) + y^2 (1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0. \tag{8}$$

Возможны два случая:

а) $\lambda = 1$. Уравнение (8) принимает вид: $-2\,ax + a^2 = 0$, или $x = \frac{a}{2}$.

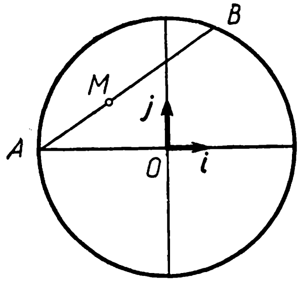
В этом случае искомое геометрическое место точек представляет собой прямую, перпендикулярную к AB и проходящую через середину AB.

б) $\lambda \neq 1$. Разделив соотношение (8) на $1 - \lambda^2$, получаем:

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{1-\lambda^2}x + \frac{a^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

Так как

$$\alpha = \frac{4a^2}{(1-\lambda^2)^2} + 0^2 - \frac{4a^2}{1-\lambda^2} = \frac{4a^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} > 0,$$



Черт. 77

то искомое геометрическое место точек представляет собой окружность с центром на прямой AB. Для построения этой окружности достаточно построить две точки ее пересечения с прямой AB.

Задача 3. Дана окружность радиуса r и на ней точка A. Найти геометрическое место точек, делящих всевозможные хорды, проведенные через A, в одном и том же отношении λ.

Решение. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы центр данной окружности совпал с началом координат, а точка A имела координаты $A\,(-r,\,0)$ (черт. 77). Пусть AB — произвольная хорда, проходящая через точку A, а M — точка геометрического места, т. е. $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$. Обозначая координаты точек B и M соответственно через $(x_1,\,y_1)$ и $(x,\,y)$, будем иметь:

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1+\lambda}.$$

Отсюда, учитывая что $\lambda \neq 0$, получаем:

$$x_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right), \quad y_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}y. \tag{9}$$

Так как точка $B(x_1,\,y_1)$ лежит на данной окружности, то $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, поэтому

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2 = r^2$$

или

$$\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}. \tag{10}$$

Мы доказали, что если M (x, y) — произвольная точка геометрического места, то ее координаты удовлетворяют уравнению (10).

Теперь возьмем произвольную точку M (x, y), координаты которой удовлетворяют уравнению (10), и покажем, что она принадлежит геометрическому месту. Уравнение (10) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2 = r^2. \tag{11}$$

Рассмотрим на плоскости точку B с координатами:

$$x_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right) = \frac{(1+\lambda)x+r}{\lambda}, \quad y_1 = \frac{(1+\lambda)y}{\lambda}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что точка B лежит на данной окружности. С другой стороны, из соотношений (12) получаем:

$$x = \frac{-r+\lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1+\lambda},$$

откуда следует, что M делит отрезок AB в отношении λ и, следовательно, M принадлежит геометрическому месту точек.

Таким образом, соотношение (10) является уравнением искомого геометрического места точек. Этим уравнением определяется окружность радиуса $\rho = \frac{r\lambda}{1+\lambda}$ с центром в точке $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$. Легко видеть, что эта окружность при любом λ проходит через точку A. Если $\lambda = 1$, то она проходит также через начало координат.

Вопросы и задачи

165. Напишите в прямоугольной декартовой системе уравнение окружности с центром в точке C и радиусом r в каждом из следующих случаев:

а) C $(2, -5)$, $r = 3$; б) C $(0, 0)$, $r = 1$; в) C $(0, -3)$, $r = 3$.

166. Лежит ли точка M $(\sqrt{21}, 3)$ на окружности $x^2 + y^2 = 30$?

167. Лежит ли точка M $(3, 5)$ на окружности $x^2 - 2x - y + y^2 = 0$?

168. Каково геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $y = \sqrt{64 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{64 - x^2}$?

169. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения геометрических мест точек:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$;
в) $x^2 + xy - 2x = 0$;
г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;

е) $x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0$;

ж) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Выяснить, какие из приведенных уравнений определяют окружность, и определить координаты центра и радиус окружности.

170. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

171. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от трех данных точек A, B и C есть величина постоянная.

172. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, имеют постоянную длину.

173. Определить геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

174. На окружности радиуса r взята точка O, вокруг которой вращается прямая, пересекающая окружность в переменной точке B. На этой прямой, по обе стороны от точки B, откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$, где A — другой конец диаметра, проходящего через точку O. Определить линии, описываемые точками M_1 и M_2 при вращении прямой OB.

175. Найти геометрическое место середин всех хорд окружности, имеющих данную длину.

§ 13. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ [1]

В этом параграфе рассмотрим некоторые важнейшие кривые, встречающиеся на практике.

1. Циклоида. *Циклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по данной прямой l.*

Приняв прямую l за ось абсцисс, а начальное положение точки M за начало координат, напишем уравнение кривой.

Сначала напишем параметрическое задание циклоиды, т. е. выразим координаты произвольной точки (x, y) кривой как функции от некоторого параметра: $x = f_1(\varphi)$, $y = f_2(\varphi)$. Далее, исключив из этих двух соотношений φ, получим уравнение кривой в прямоугольных декартовых координатах.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка циклоиды, S — центр катящейся окружности, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на ось абсцисс (черт. 78). Примем в качестве параметра угол, который образует луч SM с лучом SH, т. е. $\varphi = \angle MSH$.

Если M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс, а M_2 — основание перпендикуляра, опущенного

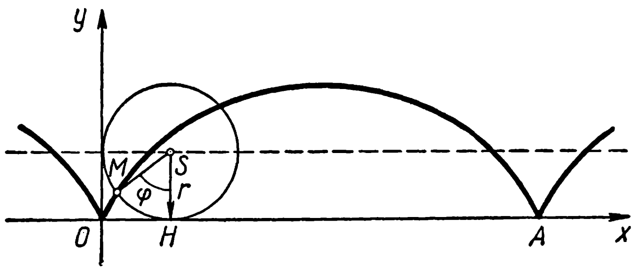
[1] Изучение всего материала этого параграфа не считается обязательным. Подробнее о свойствах замечательных кривых можно прочитать в книге [10].

из той же точки на ось ординат (точки M_1 и M_2 на черт.78 не изображены), то, очевидно,

$$x = OM_1 = OH - M_1H = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi);$$
$$y = OM_2 = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi).$$

Таким образом, циклоида имеет следующее параметрическое задание:

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin\varphi), \\ y &= r(1 - \cos\varphi). \end{aligned} \tag{1}$$



Черт. 78

Запишем уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе. Для этой цели исключим из соотношений (1) параметр φ. Из второго уравнения (1) получим:

$$\cos\varphi = \frac{r-y}{r}, \qquad \varphi = \arccos\frac{r-y}{r}.$$

Подставив это значение φ в первое уравнение (1) и учитывая, что

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{r-y}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{y(2r-y)}}{r},$$

получаем:

$$x + \sqrt{y(2r-y)} = r\arccos\frac{r-y}{r}.$$

Для построения циклоиды заметим, что она периодическая; период (б а з и с циклоиды) $OA = 2\pi r$. Поэтому при построении кривой достаточно рассмотреть только те точки, для которых $x \leqslant 2\pi r$. Кривая изображена на чертеже 78.

2. Эпициклоида. *Э п и ц и к л о и д о й называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса R.*

Примем центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а любые две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через эту точку, — за координатные оси. Если за параметр принять угол $\varphi = \angle COX$, где C — центр катящейся окружности, а X — точка на положительной полуоси Ox, то эпициклоида будет иметь следующее параметрическое задание:

$$x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi,$$

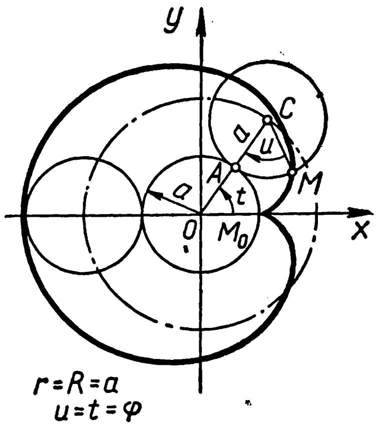
$$y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi.$$

Предлагаем студенту-заочнику по аналогии с выводом уравнения циклоиды вывести эти уравнения.

В частном случае, когда $r = R$ предыдущие уравнения принимают вид:

$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi,$$
$$y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi.$$

В этом случае кривая называется *кардиоидой*. Кардиоида изображена на чертеже 79.



Черт. 79.

3. Гипоциклоида. *Гипоциклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R.*

Примем центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а любые две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через эту точку, — за координатные оси. Если за параметр принять угол $\varphi = \angle COX$, где C — центр катящейся окружности, а X — точка положительной полуоси Ox, то гипоциклоида будет иметь следующее параметрическое задание:

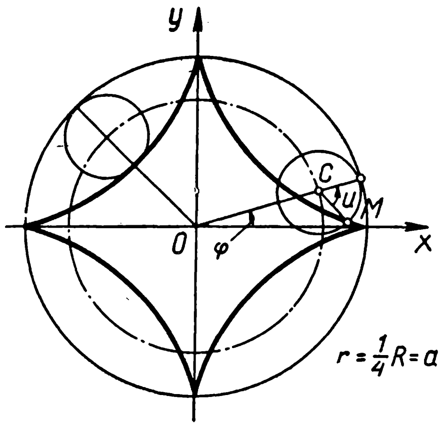
$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi,$$

$$y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi.$$

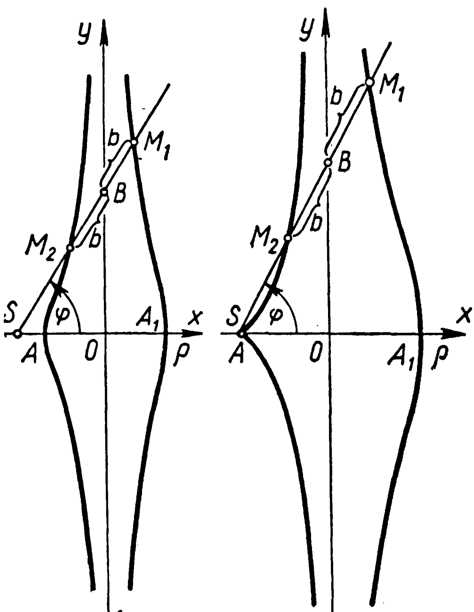
Предлагаем читателю по аналогии с предыдущим вывести эти уравнения.

В частном случае, когда $r=\frac{1}{4}R$, предыдущие уравнения принимают вид:

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi,\ y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi.$$



Черт. 80



Черт. 81

В этом случае кривая называется **а с т р о и д о й.** Астроида изображена на чертеже 80.

4. Конхоида Никомеда. Дана прямая l и точка S, отстоящая от нее на расстоянии $a \neq 0$. Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки B пересечения с прямой l откладывается в обе стороны отрезок, равный b. Геометрическое место концов этих отрезков называется к о н х о и д о й Н и к о м е д а. Приняв точку S за полюс полярной системы и направив полярную ось перпендикулярно к прямой l, напишем уравнение конхоиды Никомеда. Пусть SB — произвольная прямая, проходящая через S и пересекающая прямую l в точке B (черт. 81). Тогда точки M_1 и M_2, лежащие на этой прямой и отстоящие от точки B на расстоянии b, принадлежат искомому геометрическому месту точек. Если (ρ_1, φ) и (ρ_2, φ) — обобщенные полярные координаты точек M_1 и M_2 (см. § 9), то, очевидно,

$$\rho_1 = SM_1 = SB + BM_1 = \frac{a}{\cos\varphi} + b,$$

$$\rho_2 = SM_2 = SB - BM_2 = \frac{a}{\cos\varphi} - b.$$

Таким образом, в обобщенной полярной системе кривая задается следующим уравнением:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b. \tag{2}$$

Отметим, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(\rho - \frac{a}{\cos\varphi}\right)^2 = b^2, \tag{3}$$

поэтому уравнение (3) также является уравнением конхоиды Никомеда.

Для перехода к уравнению кривой в прямоугольной декартовой системе координат воспользуемся соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$. Подставив полученное значение для $\cos\varphi$ в соотношение (3), получаем:

$$\rho^2\left(\frac{x-a}{x}\right)^2 = b^2,$$

или

$$(x^2 + y^2)(x-a)^2 = b^2x^2.$$

Кривая для случая $a > b$ изображена на чертеже 81, *а*, а для случая $a = b$ — на чертеже 81, *б*.

Для случая $b > a$ постройте изображение кривой самостоятельно.

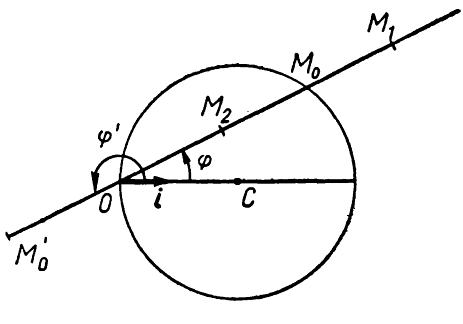
Отметим, что *конхоидой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении полярного радиуса каждой точки данной кривой на постоянный отрезок* b. Если $\rho = f(\varphi)$ есть уравнение данной кривой в полярных координатах, то $\rho = f(\varphi) \pm b$ — уравнение конхоиды. Таким образом, *конхоида Никомеда есть конхоида прямой линии.*

5. Улитка Паскаля. *Улиткой Паскаля называется конхоида окружности, если за полюс O выбрана точка на окружности.*

Пусть r — радиус данной окружности и b — постоянный отрезок, который откладывается на полярном радиусе. Примем диаметр окружности, проходящий через O, за полярную ось, а угол φ между этой осью и полярным радиусом — за полярный угол (черт. 82). Если M_0 — произвольная точка окружности, а M_1 и M_2 — точки улитки Паскаля на луче OM_0, то

$$OM_1 = OM_0 + b,$$
$$OM_2 = OM_0 - b.$$

Пусть $\varphi = \angle COM_0$, а $\varphi' = \angle COM_0'$, где M'_0 — произвольная точ-



Черт. 82

ка на продолжении луча OM_0. Очевидно, $\varphi' = \varphi + \pi$, $OM_1 = OM_0 + b = 2r\cos\varphi + b$, $-OM_2 = b - OM_0 = b - 2r\cos\varphi = b + 2r\cos\varphi$. Если ρ — обобщенный полярный радиус точки, то из полученных соотношений видно, что

$$\rho = 2r\cos\varphi + b. \tag{4}$$

Эта формула позволяет вычислить полярный радиус как точки M_1, так и точки M_2. Таким образом, соотношение (4) является уравнением улитки Паскаля в обобщенных полярных координатах.

Для того чтобы записать уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе, возьмем вектор $\boldsymbol{j}$ так, чтобы $(\widehat{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}) = +90°$, тогда:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда получаем:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставив эти значения в уравнение (4), получаем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b$$

или

$$x^2 + y^2 - 2rx = \sqrt{x^2 + y^2}\, b.$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = (x^2 + y^2)\, b^2.$$

6. Овал Кассини. *Пусть F_1 и F_2 — две фиксированные точки, b — постоянное число и $F_1F_2 = 2c$.* ***Овалом Кассини*** *называется геометрическое место точек M, для которых*

$$F_1M \cdot F_2M = b^2.$$

Приняв прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 — за начало координат, напишем уравнение кривой.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места. Так как $F_1F_2 = 2c$, то точки F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, поэтому соотношение $F_1M \cdot F_2M = b^2$ в координатах запишется так:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = b^2.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению:

$$[(x + c)^2 + y^2]\,[(x - c)^2 + y^2] = b^4.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$[(x^2 + y^2 + c^2) + 2xc]\,[(x^2 + y^2 + c^2) - 2xc] = b^4.$$

Отсюда имеем: $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = b^4$ или

$$(x^2 + y^2)^2 + 2\ (x^2 + y^2)\, c^2 + c^4 - 4\ x^2c^2 = b^4.$$

Окончательно получаем следующее уравнение овала Кассини:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\ c^2\ (x^2 - y^2) = b^4 - c^4. \qquad (5)$$

7. Лемниската Бернулли. *Овал Кассини называется л е м н и с к а т о й Б е р н у л л и, если* $b = c$. Из уравнения (5) сразу получаем уравнение кривой:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\ c^2\,(x^2 - y^2) = 0. \qquad (6)$$

Исследуем эту кривую по уравнению и построим ее.

Для этой цели перейдем к полярной системе координат. Положим $x = \rho\ \cos\varphi$, $y = \rho\ \sin\varphi$:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\ \varphi. \qquad (7)$$

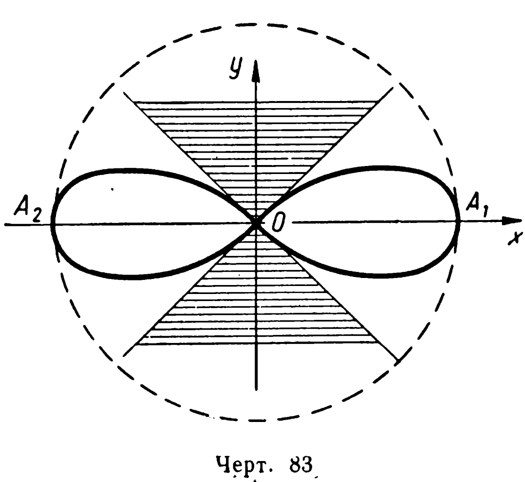
Исследуем свойства кривой по уравнениям (6) и (7).

а) Кривая симметрична как относительно начала координат, так и относительно координатных осей Ox и Oy, так как в уравнении (6) переменные x и y входят в четных степенях. Отсюда следует, что можно ограничиться рассмотрением формы кривой только в первой четверти.

б) Определим точки пересечения кривой с осями координат. Положим $x = 0$. Из соотношения (6) получаем: $y^4 + 2\ c^2y^2 = 0$, отсюда $y = 0$. Таким образом, кривая проходит через начало координат и других точек пересечения с осью Oy не имеет. Положив в (6) $y = 0$ будем иметь: $x^4 - 2\ c^2x^2 = 0$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}\,c$, $x_4 = -\sqrt{2}\,c$. Кривая пересекает ось абсцисс в точках $O\ (0,\ 0)$, $A_1\ (\sqrt{2}\,c,\ 0)$, $A_2\ (-\sqrt{2}\,c,\ 0)$.

в) Из отношения (7) следует, что $\frac{\rho^2}{2c^2} \leqslant 1$, поэтому $\rho \leqslant \sqrt{2}\,c$. Таким образом, все точки кривой принадлежат кругу с центром в начале координат радиуса $r = \sqrt{2}\ c$ (черт. 83).

г) Исследуем значение ρ при изменении полярного угла φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = 0$, то из соотношений (7) имеем: $\rho = \sqrt{2}\,c$; при увеличении φ полярный радиус монотонно убывает и при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ получаем: $\rho = 0$. При дальнейшем увели-

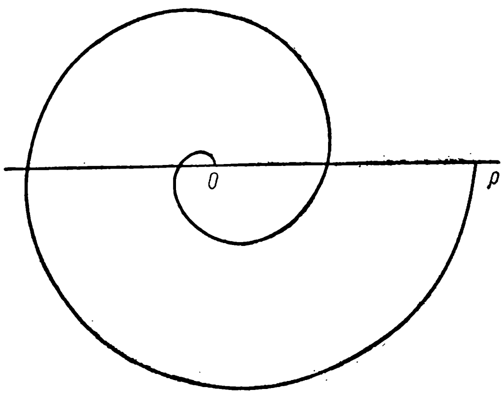


Черт. 83

чении угла φ будем иметь $\rho^2 < 0$, поэтому ρ не существует. Таким образом, все точки кривой расположены между двумя биссектрисами координатных углов. На чертеже 83 заштрихована та область, в которой нет ни одной точки кривой.

Эти выводы позволяют построить кривую по уравнению. Для более точного изображения кривой необходимо взять несколько точек кривой в первой четверти и по координатам построить их. На чертеже 83 изображена лемниската Бернулли.

8. Спираль Архимеда. *Луч l, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M, имея начальное положение в точке O, движется по лучу l равномерно со скоростью v. Траектория точки M называется спиралью Архимеда.*



Черт. 84

Примем точку O за полюс, произвольную ось, проходящую через нее, — за полярную ось, а направление движения луча l — за положительное направление обхода. Если ρ — полярный радиус точки, а φ — полярный угол, то в момент времени t имеем: $\varphi = \omega t$, а $\rho = vt$. Исключив из этих двух соотношений t, получаем уравнение спирали Архимеда в полярных координатах:

$$\rho = \frac{v}{\omega} \varphi.$$

Кривая изображена на чертеже 84.

ГЛАВА IV

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 14. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В АФФИННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В курсе элементарной геометрии не дается определения прямой, так как прямая является основным, неопределяемым геометрическим объектом. Основные свойства прямой задаются аксиомами. а остальные выводятся из аксиом логическим путем. Однако, пользуясь понятием коллинеарности векторов, можно определить геометрическое место всех точек, принадлежащих прямой. В самом деле, если M_0 — произвольная точка прямой l, а $\boldsymbol{p}$ — ненулевой вектор, параллельный ей, то, очевидно, каждая точка M прямой характеризуется условием: $\overline{M_0M}$ коллинеарен $\boldsymbol{p}$. Обратно, если вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен $\boldsymbol{p}$, то точка M принадлежит прямой l. Таким образом, *точка M принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен $\boldsymbol{p}$*. Это определение может быть использовано для того, чтобы написать уравнение геометрического места всех точек, принадлежащих прямой, или коротко уравнение прямой[1].

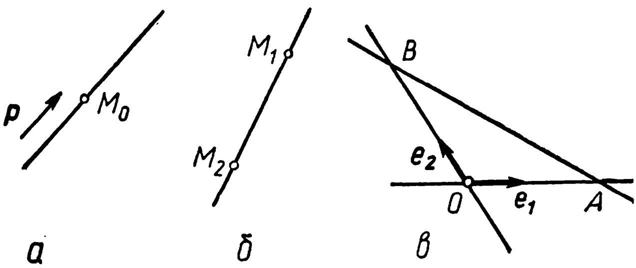
1. Различные способы задания прямой в аффинной системе координат. В аналитической геометрии пользуются следующими способами задания прямой.

а) Пусть l — данная прямая, M_0 — произвольная точка на ней, а $\boldsymbol{p}$ — некоторый ненулевой вектор, параллельный ей. Очевидно, положение прямой l на плоскости однозначно определяется, если даны точка M_0 и вектор $\boldsymbol{p}$ (черт. 85, *а*). Точка M_0 называется начальной точкой, а вектор $\boldsymbol{p}$ — направляющим вектором. Заметим, что за начальную точку можно выбрать любую точку прямой, а за направляющий вектор — любой ненулевой вектор, параллельный прямой. Если на плоскости выбрана аффинная система координат, то M_0 и $\boldsymbol{p}$ будут иметь координаты: $M_0(x_0, y_0)$, $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta\}$. Итак, числа (x_0, y_0), $\{\alpha, \beta\}$ однозначно характеризуют положение прямой на плоскости.

[1] В аналитической геометрии термин «прямая» понимается в смысле совокупности всех точек, принадлежащих некоторой прямой, «уравнение прямой» понимается в смысле уравнения геометрического места этих точек.

б) Прямая l может быть задана двумя ее точками M_1 и M_2 (черт. 85, *б*). Если в выбранной аффинной системе координат точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то числа (x_1, y_1), (x_2, y_2) однозначно характеризуют положение прямой на плоскости.

в) Если прямая l не проходит через начало аффинной системы координат и пересекает оси координат, то ее можно определить заданием длин направленных отрезков, которые она отсекает на осях координат (черт. 85, *в*). Если $a = \frac{\overline{OA}}{e_1}$, $b = \frac{\overline{OB}}{e_2}$, то числа a и b однозначно определяют положение прямой на плоскости.



Черт. 85

Такой способ задания прямой называется «заданием прямой в отрезках».

г) Если в аффинной системе Oe_1e_2 вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{\alpha, \beta\}$ и если $\alpha \neq 0$, то число $k = \frac{\beta}{\alpha}$, как было отмечено в § 4, называется угловым коэффициентом вектора $\boldsymbol{a}$. Из теоремы [4. 6] следует, что все векторы, параллельные прямой l, имеют один и тот же угловой коэффициент k. Число k называется у г л о в ы м к о э ф ф и ц и е н т о м п р я м о й l. Таким образом, угловой коэффициент прямой равен угловому коэффициенту любого его направляющего вектора. Прямые, параллельные оси Oy, не имеют углового коэффициента.

Легко видеть, что положение прямой на плоскости однозначно определяется заданием углового коэффициента k и некоторой ее точки M_0. Так как в этом случае прямая пересекает ось Oy, то за точку прямой можно взять точку пересечения данной прямой и оси y. На чертеже 86 эта точка обозначена через B. Если B имеет координаты $(0, b)$, то числа k, b однозначно определяют положение прямой на плоскости.

Итак, если на плоскости выбрана аффинная система координат, то прямая может быть задана одним из следующих четырех способов.

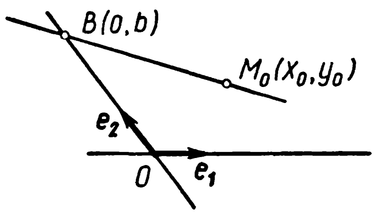
а) Начальной точкой M_0 (x_0, y_0) и направляющим вектором $\boldsymbol{p}$ (α, β).

б) Двумя различными точками M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2).

в) Длинами a, b направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.

г) Точкой M_0 (x_0, y_0) и угловым коэффициентом k; в частности, точкой B $(0, b)$ и угловым коэффициентом k.

Очевидно, все эти способы несущественно отличаются друг от друга. Основными следует считать первые два способа, так как этими способами могут быть заданы любые прямые, независимо от их расположения относительно выбранной системы координат, в то время как третий и четвертый способы могут быть использованы с указанными выше ограничениями.



Черт. 86

Пример 1. Пусть прямая l проходит через точки A $(2, 5)$, B $(-1, 1)$. Перейти к другим способам задания.

Решение. а) В качестве направляющего вектора можно рассмотреть $\overline{AB}$ $\{-3, -4\}$. Поэтому прямая l может быть задана точкой A $(2, 5)$ и вектором $\overline{AB}$ $\{-3, -4\}$.

в) Определим точки пересечения прямой с осями координат: P $(a, 0)$ и Q $(0, b)$. Так как A, B, P коллинеарны, то из п. 4, § 8, следует, что

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad a \cdot 4 + 7 = 0, \quad a = -\frac{7}{4}.$$

Аналогично точки A, B, Q коллинеарны, поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -3b + 7 = 0, \quad b = \frac{7}{3}.$$

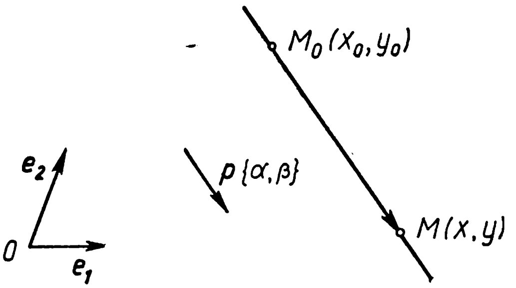
Очевидно, $a = -\frac{7}{4}$, $b = \frac{7}{3}$ являются длинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат, поэтому эти числа характеризуют положение прямой на плоскости.

г) Так как $\overline{AB}$ $\{-3, -4\}$ является направляющим вектором прямой, то угловой коэффициент этой прямой равен $\frac{4}{3}$, поэтому прямая может быть задана точкой $Q\left(0, \frac{7}{3}\right)$ и угловым коэффициентом $k = \frac{4}{3}$.

2. Уравнение прямой, заданной начальной точкой и направляющим вектором.

З а д а ч а 1. Написать уравнение прямой l, заданной в некоторой аффинной системе координат, направляющим вектором $\boldsymbol{p}\,\{\alpha,\ \beta\}$ и начальной точкой $M_0\ (x_0,\ y_0)$.

Р е ш е н и е. Написать уравнение прямой—это означает написать аналитическое условие, которому удовлетворяют координаты произвольной точки прямой и не удовлетворяют координаты точки, не принадлежащей прямой. Выше было отмечено, что произвольная точка M принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{p}$ (черт. 87). Если обозначить через x, y координаты точки M, то



Черт. 87

$\overline{M_0M}\ \{x - x_0,\ y - y_0\}$ и условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\,\{\alpha,\ \beta\}$. Если ни одна из координат вектора $\boldsymbol{p}$ не равна нулю, то условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ можно записать так:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}. \quad (2)$$

Очевидно, в случае $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ уравнения (1) и (2) эквивалентны.

П р и м е р 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (1,\ -3)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\,\{2,\ -5\}$.

Р е ш е н и е. Подставив в соотношение (2) значения координат начальной точки и направляющего вектора, получаем:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5}; \quad -5x + 5 = 2y + 6 \ \text{ или } \ 5x + 2y + 1 = 0.$$

Таким образом, данная прямая задается уравнением $5x+2y+1 = 0$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что она проходит через точку $M_0\ (1,\ -3)$.

П р и м е р 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (2,\ -3)$ и параллельной оси Ox.

Решение. Так как ось Ox параллельна вектору $e_1\{1, 0\}$, то этот вектор является направляющим вектором прямой, поэтому уравнение прямой запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad y+3=0.$$

В данном случае уравнение прямой нельзя записать в виде (2), так как $\beta = 0$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Задача 2. Написать уравнение прямой l, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданные своими координатами в некоторой аффинной системе координат.

Решение. Прямую l можно задать начальной точкой $M_1(x_1, y_1)$ и направляющим вектором $\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$, поэтому мы можем сразу написать уравнение прямой в виде (1):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Это соотношение можно записать в более удобном для запоминания виде (см. п. 4, § 8):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Если $x_2 - x_1 \neq 0$ и $y_2 - y_1 \neq 0$, то соотношение (3) эквивалентно следующему:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{5}$$

Соотношения (3), (4) и (5) называются *уравнениями прямой, проходящей через две точки*. При решении задач можно пользоваться любым из этих уравнений.

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $M_1(2, -3)$ и $M_2(3, 7)$; б) $M_1(5, 1)$ и $M_2(-3, 1)$.

Решение. а) Подставив значения координат в соотношение (5), получаем:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{7+3}; \quad 10x-20 = y+3 \quad \text{или} \quad 10x-y-23=0.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что координаты точек M_1 и M_2 удовлетворяют этому уравнению.

б) В данном случае формула (5) не применима, так как $y_2 = y_1$. Подставив значения координат в соотношение (3), получаем:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } y-1=0.$$

4. Уравнение прямой в отрезках.

Задача 3. Прямая l в некоторой аффинной системе пересекает оси координат в точках A и B, отличных от начала координат (черт. 85, *в*). Известны длины отрезков, отсекаемых ею на осях аффинной системы координат $a=\frac{\overline{OA}}{e_1}$, $b=\frac{\overline{OB}}{e_2}$. Написать уравнение прямой l.

Решение. Прямая l проходит через точки A $(a, 0)$ и B $(0, b)$, поэтому для написания уравнения прямой l можно воспользоваться соотношением (3):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 \\ -a & b \end{vmatrix} = 0 \text{ или } bx-ab+ay=0.$$

Так как $ab \neq 0$, то, разделив полученное уравнение на ab, окончательно получаем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (6)$$

Это соотношение называется *уравнением прямой l в отрезках*.

Пример 5. Написать уравнение прямой, которая отсекает на осях координат отрезки, длины которых равны:

а) $a=3$, $b=5$; б) $a=-\frac{1}{3}$, $b=1$; в) $a=-\sqrt{2}, b=-\sqrt{3}$.

Решение. Подставив в соотношение (6) значения a и b, получаем:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ или $5x+3y-15=0$;

б) $\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{1}=1$ или $y-3x-1=0$;

в) $\frac{x}{-\sqrt{2}}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1$ или $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$.

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Задача 4. Написать уравнение прямой l, заданной в некоторой аффинной системе точкой M_0 (x_0, y_0) и угловым коэффициентом k.

Решение. Прямая l имеет угловой коэффициент k, поэтому вектор $\boldsymbol{p}$ $\{1, k\}$ параллелен прямой. Задача сводится к написанию уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 (x_0, y_0) и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$ $\{1, k\}$. Из соотношения (1) получаем:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (x - x_0)\, k - (y - y_0) = 0.$$

Мы получили уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0). \tag{7}$$

Если за начальную точку M_0 принять точку B $(0, b)$ пересечения прямой с осью Oy (черт. 86), то это уравнение принимает вид: $y - b = kx$ или

$$y = kx + b. \tag{8}$$

Заметим, что точка B всегда существует, так как прямая l имеет угловой коэффициент, поэтому не параллельна оси Oy.

Пример 6. Написать уравнение прямой, заданной в аффинной системе угловым коэффициентом k и начальной точкой M_0:

а) $k = -4$, $M_0\,(2, -3)$; б) $k = 3$, $M_0\,(0, 5)$; в) $k = 0$, $M_0\,(0, 0)$.

Решение. а) Подставив значения координат точки M_0 и углового коэффициента k в соотношение (7), получаем:

$$y + 3 = -4\,(x - 2) \text{ или } y = -4x + 5.$$

б) Воспользуемся соотношением (8). В данном случае $b = 5$ и

$$y = 3\,x + 5.$$

в) Воспользуемся соотношением (7). Так как $k = x_0 = y_0 = 0$, то из этого соотношения получаем: $y = 0$.

6. Параметрическое задание прямой. В заключение рассмотрим параметрическое задание прямой, т. е. выразим координаты произвольной точки прямой через произвольный параметр t. Пусть в аффинной системе координат прямая l задана начальной точкой M_0 (x_0, y_0) и направляющим вектором $\boldsymbol{p}$ $\{\alpha, \beta\}$. Точка M (x, y) принадлежит прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны, т. е. существует такое число t, что $\overline{M_0M} = t\boldsymbol{p}$. Это соотношение в координатах запишется так:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\alpha, \\ y - y_0 = t\beta, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \tag{9}$$

Эти соотношения называются параметрическим заданием прямой. Их смысл заключается в следующем: каково бы ни было действительное число t, точка с координатами (x, y), удовлетворяющая условиям (9), лежит на прямой l. Обратно, если (x, y) — точка прямой l, то всегда найдется такое t, что x и y выражаются через x_0, y_0, α, β при помощи соотношений (9).

Пример 7. Написать параметрическое задание прямой:

а) проходящей через точку M_0 (2, 3) параллельно вектору $\boldsymbol{p}$ $\{2, -3\}$;

б) проходящей через две точки M_1 $(1, -5)$, M_2 $(2, 4)$.

Р е ш е н и е. а) Подставив координаты данной точки и направляющего вектора прямой в соотношение (9), получаем:

$$x = 2 + 2t, \ y = 3 - 3t.$$

б) За направляющий вектор прямой можно взять $\overline{M_1M_2}$ $\{1, 9\}$, поэтому параметрическое задание запишется так:

$$x = 1 + t, \ y = -5 + 9t.$$

Примеры и задачи

176. Дана прямая $2x - y + 5 = 0$. Выяснить, какие из следующих точек принадлежат данной прямой:

$$(5, 15), (1, 1), (-2, 1), (3, 0),$$
$$(7, -5), (1, 7), (\frac{1}{2}, 6), (0, 3).$$

177. Определить точки, которые принадлежат прямой $3x - 2y + 1 = 0$ и имеют ординаты: $1, \frac{1}{2}, 2, -1, 3, 5, -4$.

178. Определить точки, которые принадлежат прямой $7x + 2y - 8 = 0$ и имеют абсциссы: 2, —4, 3, —1, 1, 0, 5.

179. Дана аффинная система координат. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки A (2, —1), B (3, 0);

б) проходящей через точку A (3, 5) и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$ (3, —2);

в) проходящей через точку A (3, 6) и параллельной вектору $\boldsymbol{e}_1$ $\{1, 0\}$.

180. Дана аффинная система координат. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки A (—1, 1) и B (2, 5);

б) проходящей через начало координат и точку A (2, 5);

в) проходящей через точку A (2, —6) и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$ $\{1, -1\}$;

г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

д) проходящей через точку A (3, 5) и параллельной оси Ox;

е) проходящей через точку B (—1, 2) и параллельной оси Oy;

ж) проходящей через концы координатных векторов.

181. Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой:

а) (2, 1), (—1, 4), (—7, 10); в) (1, 0), (0, 1), (—2, 3);
б) (0, 5), (7, 1), (—2, 3); г) (2, 1), (10, 3), (5, 2).

182. Дана прямая, параллельная оси Oy. Можно ли написать уравнение этой прямой: а) в отрезках; б) с угловым коэффициентом?

183. Дана аффинная система координат. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку M_0 (2, —3) и имеющей угловой коэффициент $k = -3$;

б) имеющей угловой коэффициент $k = 2$ и отсекающей на оси Oy отрезок $b = -4$;

в) имеющей угловой коэффициент $k = \sqrt{2}$ и отсекающей на оси Ox отрезок $a = 3$;

г) проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k = 9$.

184. Дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$. Написать уравнение прямой: а) являющейся биссектрисой координатного угла $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}})$; б) являющейся биссектрисой координатного угла $(\widehat{-\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}})$; в) проходящей через точку A (2, 5) и параллельной биссектрисе координатного угла $(\widehat{-\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}})$; г) проходящей через начало координат, образующей с осью Ox угол $\varphi = 30°$ и проходящей в первой и третьей четвертях.

185. Через середину отрезка (2, 5) и (4, —1) провести прямую: а) параллельную оси Ox; б) имеющую угловой коэффициент $k=2$.

186. Прямая задана параметрически:

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = 3 - t.$$

Определить: а) координаты направляющего вектора; б) координаты точек, имеющих параметры $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = \sqrt{3}$, $t_4 = 4$.

187. Принадлежат ли точки A (0, 2), B (3, 1), C (—3, 8), D (11, 5), E (—1, 4) прямой, заданной параметрически:

$$x = -1 + t, \quad y = 4 - 2t?$$

188. Написать уравнения сторон квадрата, если длины сторон его равны a, а за оси прямоугольной декартовой системы приняты его диагонали.

189. Написать уравнения всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, если длина стороны шестиугольника равна a, а система прямоугольных декартовых координат выбрана так, что начало совпадает с точкой A, точка B лежит на положительном луче оси Ox, а точка E — на положительном луче оси Oy.

190. Проверить, что четырехугольник $ABCD$, где A (—2, —2), B (—3, 1), $C\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ и D (3, 1), является трапецией и составить уравнения средней линии и диагоналей этой трапеции.

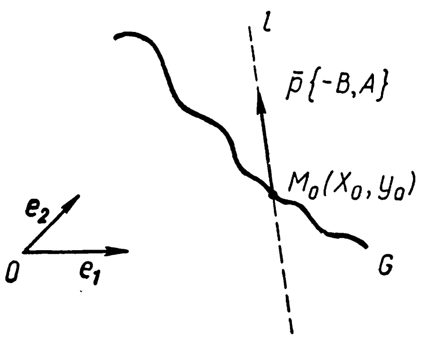
191. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей F (3, —1). Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

192. Вершины треугольника находятся в точках A (—4, —5), B (4, 1) и $C\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$. Написать:

а) уравнение биссектрисы внутреннего угла A;
б) уравнение медианы, проходящей через вершину A.

§ 15. ПРЯМАЯ КАК ЛИНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА; ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО УРАВНЕНИЮ

1. Прямая как линия первого порядка. Из рассмотренных в предыдущем параграфе способов задания прямой можно отметить следующую характерную особенность полученных уравнений: все эти уравнения являются алгебраическими уравнениями первой степени, т. е. уравнениями вида $Ax + By + C = 0$. Естественно возникает вопрос, всякое ли уравнение первой степени относительно переменных x, y определяет на плоскости прямую линию? На этот вопрос отвечает следующая основная теорема:



Черт. 88

Теорема [15. 1]. *Геометрическое место точек плоскости, координаты которых в аффинной системе координат удовлетворяют уравнению*

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, есть прямая линия, параллельная вектору $\mathbf{p}\{-B, A\}$ и проходящая через точку M_0 (x_0, y_0). Здесь x_0, y_0 — какое-либо решение уравнения (1).

Доказательство. Обозначим через G геометрическое место точек, координаты которых в данной системе удовлетворяют уравнению (1) (черт. 88). Возьмем произвольную точку M_0 (x_0, y_0) этого геометрического места. Такая точка существует, так как A и B одновременно не равны нулю. Если, например $A \neq 0$, то y_0 можно взять произвольно, а $x_0 = -\frac{B}{A} y_0 - \frac{C}{A}$. Так как $Ax_0 + By_0 + C = 0$, то $C = -Ax_0 - By_0$. Подставив это значение в уравнение (1), получаем:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, уравнение (2) эквивалентно уравнению (1), поэтому уравнение (2) есть уравнение того же геометрического места G.

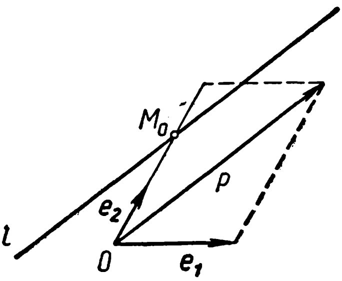
Теперь, воспользовавшись формулой (1), § 14, напишем уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0) и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$ $\{-B, \ A\}$ (см. черт. 88):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \text{ или } A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Мы получили то же уравнение (2). Если уравнения двух геометрических мест в одной и той же системе координат совпадают, то, очевидно, геометрические места совпадают. Таким образом, геометрическое место G есть прямая l. Теорема доказана.

Пример 1. Каково геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $3\ x-y+2=0$?

Решение. Согласно предыдущей теореме рассматриваемое геометрическое место точек есть прямая. Направляющий вектор $\boldsymbol{p}$ $\{\alpha, \ \beta\}$ имеет координаты $\alpha = -B = 1$, $\beta = A = 3$. Для задания прямой нужно иметь еще одну из ее точек. В качестве начальной точки можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют уравнению прямой, например M_0 (0, 2). На чертеже 89 изображена данная прямая.



Черт. 89

Доказанную теорему можно сформулировать несколько иначе, если ввести следующее определение: *алгебраической кривой первого порядка называется геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют уравнению*: $Ax+By+C=0$, *где коэффициенты* A *и* B *одновременно не равны нулю.*

Теорема [15. 1′]. *Всякая алгебраическая кривая первого порядка есть прямая линия.*

Важно отметить, что в теореме [15. 1] коэффициенты A и B уравнения (1) одновременно не равны нулю. Это условие существенно. В самом деле, если $A = B = 0$, то уравнение (1) принимает вид: $0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$. Если $C \neq 0$, то нет на плоскости ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. Если же $C = 0$, то уравнение имеет вид: $0x+0y+0=0$ и координаты любой точки плоскости удовлетворяют этому уравнению.

2. Условие совпадения двух прямых. Мы показали, что каждое уравнение вида (1) на плоскости определяет прямую. Выясним, при каком условии уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{3}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{4}$$

определяют одну и ту же прямую?

Пусть прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями (3) и (4), совпадают. Это означает, что направляющие векторы этих прямых коллинеарны. По теореме [15. 1] $\boldsymbol{p}_1\,\{-B_1, A_1\}$ — направляющий вектор прямой l_1, а $\boldsymbol{p}_2\,\{-B_2, A_2\}$ — направляющий вектор прямой l_2, поэтому $\boldsymbol{p}_2 = \lambda\boldsymbol{p}_1$. Отсюда следует, что $-B_2 = -\lambda B_1$ и $A_2 = \lambda A_1$ или

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1. \tag{5}$$

Подставив эти значения в уравнение (4), получаем:

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + C_2 = 0.$$

Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) на прямой (3):

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad C_1 = -A_1x_0 - B_1y_0. \tag{6}$$

Эта же точка принадлежит l_2, так как прямые l_1 и l_2 совпадают, поэтому $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ или

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0) + C_2 = 0, \quad C_2 = -\lambda(A_1x_0 + B_1y_0). \tag{7}$$

Сравнивая соотношения (6) и (7), получаем: $C_2 = \lambda C_1$. Мы пришли к выводу, что если прямые l_1 и l_2 совпадают, то коэффициенты в уравнениях (3) и (4) пропорциональны. Обратно, пусть коэффициенты в уравнениях (3) и (4) пропорциональны, т. е. существует такое число λ, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Уравнение (4) можно записать так:

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \tag{8}$$

Очевидно всякое решение уравнения (3) является решением (8) и наоборот, т. е. прямые l_1 и l_2 совпадают. Мы доказали следующую теорему:

Теорема [15. 2]. *Для того чтобы прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями* (3) и (4), *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты в этих уравнениях были пропорциональны, т. е. существовало такое число λ, что*

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1.$$

Если читателю известно понятие ранга матрицы, то теорему [15. 2] можно сформулировать так:

Теорема [15. 2′]. *Для того чтобы прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями* (3) *и* (4), *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$$

был равен единице.

Пример 2. Выяснить, какие из следующих пар прямых совпадают:

а) $3x - y + 1 = 0$ и $3x - 2y + 1 = 0$;
б) $x - y = 0$ и $x - y + 1 = 0$;
в) $\sqrt{2}x - 3y + 1 = 0$ и $2x - 3\sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$;
г) $-x + y + 5 = 0$ и $x - y + 5 = 0$;
д) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 0$ и $4x + 9y = 0$.

Решение. а) Прямые не совпадают, так как числа 3, —1, 1 и 3, —2, 1 не пропорциональны.

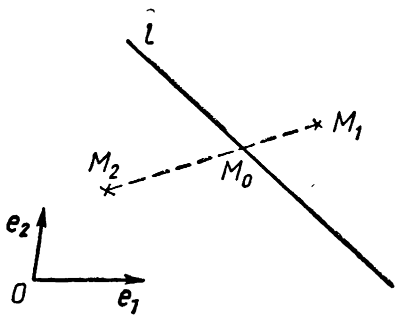
б) Прямые не совпадают. В самом деле, числа 1, —1, 0 не пропорциональны числам 1, —1, 1.

в) Прямые совпадают, так как коэффициенты в уравнениях прямых пропорциональны: $\lambda = \sqrt{2}$.

г) Прямые не совпадают.

д) Прямые совпадают и $\lambda = 6$.

3. Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$. Пусть на плоскости в некоторой аффинной системе координат дана прямая $Ax + By + C = 0$. Если точка M_0 (x_0, y_0) не лежит на прямой, то $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, таким образом для любой точки (x, y) плоскости, не лежащей на данной прямой, число $\delta = Ax + By + C$ отлично от нуля. Определим геометрическое место точек плоскости, для которых $\delta = Ax + By + C > 0$. Для этой цели предварительно докажем следующую теорему:



Черт. 90

Теорема [15. 3]. *Для того чтобы точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), заданные в аффинной системе, лежали по разные стороны от прямой l: $Ax + By + C = 0$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C$ и $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$ имели разные знаки.*

Доказательство. Пусть точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2) лежат по разные стороны от прямой l. Тогда на отрезке M_1M_2 есть точка M_0 (x_0, y_0), принадлежащая прямой l (черт. 90). Если λ — отношение, в котором M_0 делит отрезок M_1M_2, то, очевидно, $\lambda > 0$ и

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой l, то

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0,$$

отсюда получаем:

$$Ax_1+By_1+C+\lambda(Ax_2+By_2+C)=0 \text{ или } \delta_1+\lambda\delta_2=0,$$

$\lambda=-\frac{\delta_1}{\delta_2}$. Так как $\lambda>0$, то δ_1 и δ_2 имеют разные знаки.

Обратно, предположим, что δ_1 и δ_2 имеют разные знаки, и докажем, что точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат по разные стороны от прямой l. Точка (x_0, y_0), где

$$x_0=\frac{x_1-\frac{\delta_1}{\delta_2}x_2}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}}, \quad y_0=\frac{y_1-\frac{\delta_1}{\delta_2}y_2}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}},$$

лежит между M_1 и M_2, так как $\lambda=-\frac{\delta_1}{\delta_2}>0$. С другой стороны, $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой l. В самом деле,

$$Ax_0+By_0+C=A\frac{x_1-\frac{\delta_1}{\delta_2}x_2}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}}+B\frac{y_1-\frac{\delta_1}{\delta_2}y_2}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}}+C=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}}\left[Ax_1+By_1+C-\frac{\delta_1}{\delta_2}(Ax_2+By_2+C)\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\delta_1}{\delta_2}}[\delta_1-\delta_1]=0.$$

Мы доказали, что M_1 и M_2 лежат по разные стороны от прямой l. Теорема доказана полностью.

Теперь вернемся к поставленной выше задаче.

Задача 1. В аффинной системе координат дана прямая уравнением: $Ax+By+C=0$. Определить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$Ax+By+C>0. \tag{9}$$

Решение. Возьмем точку $M_1(x_1, y_1)$ так, чтобы $\delta=Ax_1+By_1+C>0$. Такая точка, очевидно, существует. В самом деле, пусть $A\neq0$. Тогда можно положить $x_1=A-\frac{C}{A}$, $y_1=0$. При этом $\delta=A\left(A-\frac{C}{A}\right)+C=A^2>0$. Точка M_1 не лежит на прямой l. Из предыдущей теоремы следует, что всякая точка M, для которой $\delta=Ax+By+C>0$, лежит по ту же сторону от прямой l, что и точка M_1. Обратно, если для некоторой точки (x, y) имеем: $\delta=Ax+By+C>0$, то она лежит по ту же сторону от l, что и точка M_1. Таким образом, *геометрическое место точек плос-*

кости, координаты которых удовлетворяют неравенству (9), *есть одна из полуплоскостей, определяемых прямой* l.

Отсюда непосредственно следует, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$Ax + By + C < 0, \qquad (10)$$

есть другая полуплоскость.

Если $C \neq 0$, то прямая l не проходит через начало координат, поэтому *для всех точек полуплоскости, в которой лежит начало координат, знак трехчлена* $\delta = Ax + By + C$ *совпадает со знаком числа* C.

Пример 3. Выяснить, как расположены следующие пары точек относительно прямой: $3x - 4y + 1 = 0$.

а) $A(3, 5)$, $B(1, 0)$; б) $C(4, 0)$, $D(10, 1)$; в) $E(-1, 0)$, $F(2, -\sqrt{2})$; г) какие из данных точек лежат по ту же сторону от прямой, что и начало координат?

Решение. а) $\delta_A = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 1 = -10$, $\delta_B = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 1 = 4$. Таким образом, δ_A и δ_B имеют разные знаки, поэтому точки лежат по разные стороны от прямой.

б) $\delta_c = 3 \cdot 4 + 1 = 13$, $\delta_D = 30 - 4 + 1 = 27$. Точки лежат по одну и ту же сторону от прямой.

в) $\delta_E = 3(-1) - 4 \cdot 0 + 1 = -2$, $\delta_F = 3 \cdot 2 + 4\sqrt{2} + 1 = 7 + 4\sqrt{2}$. Точки лежат по разные стороны от прямой.

г) Так как для начала координат $\delta_0 = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 > 0$, то все точки плоскости, для которых $\delta > 0$, лежат по ту же сторону от прямой, что и начало координат. В данном случае такими точками будут B, C, D и F.

4. Расположение прямой относительно системы координат. В некоторой аффинной системе координат дана прямая $Ax + By + C = 0$. Выясним, как она расположена относительно системы координат.

а) Условие, при котором прямая проходит через начало координат. Если прямая (1) проходит через начало координат, то $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0$; отсюда $C = 0$. Обратно, если в уравнении (1) $C = 0$, то начало координат принадлежит прямой. В самом деле, уравнению $Ax + By = 0$ удовлетворяют координаты точки $O(0, 0)$. Итак, *прямая* (1) *проходит через начало координат тогда и только тогда, когда* $C = 0$. *Общий вид уравнения прямой, проходящей через начало координат*:

$$Ax + By = 0.$$

б) Условие, при котором прямая параллельна первому координатному вектору. Прямая (1) имеет направляющий вектор $\boldsymbol{p}\{-B, A\}$, поэтому условие параллельности прямой (1) первому координатному вектору сводится к условию коллинеарности векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{e}_1$: $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, или

$A = 0$. Итак, *прямая* (1) *параллельна первому координатному вектору тогда и только тогда, когда* $A = 0$. *Общий вид уравнения прямой, параллельной первому координатному вектору*:

$$By + C = 0.$$

Так как $B \neq 0$, то это уравнение можно разделить на B:

$$y + \frac{C}{B} = 0 \text{ или } y = a, \text{ где } a = -\frac{C}{B}.$$

Если $a \neq 0$, то прямая не проходит через начало координат и, следовательно, параллельна оси Ox. Если $a = 0$, то прямая совпадает с осью Ox. Итак, *прямая* (1) *параллельна оси* Ox *тогда и только тогда, когда* $A = 0$ *и* $C \neq 0$. *Прямая совпадает с осью* Ox *тогда и только тогда, когда* $A = C = 0$.

в) Условие, при котором прямая параллельна второму координатному вектору. Аналогично предыдущему можно доказать следующие предложения.

Прямая (1) *параллельна второму координатному вектору тогда и только тогда, когда* $B = 0$. *Если при этом* $C \neq 0$, *то прямая параллельна оси* Oy, *если же* $C = 0$, *то она совпадает с этой осью.*

Пример 4. Исследовать, как расположены относительно системы координат следующие прямые:

а) $3x - y = 0$; г) $y - 5 = 0$;
б) $3x + 2y + 1 = 0$; д) $x - 3y = 0$;
в) $4x + 1 = 0$; е) $5x = 0$.

Решение. а) Так как в уравнении отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат.

б) Прямая не проходит через начало координат и пересекает координатные оси, так как все коэффициенты в уравнении прямой отличны от нуля.

в) Прямая параллельна оси Oy, так как $B = 0$ и $C = 1 \neq 0$.

г) Прямая параллельна оси Ox, так как $A = 0$ и $C = -5 \neq 0$.

д) Прямая проходит через начало координат.

е) Прямая совпадает с осью Oy, так как $B = C = 0$.

5. Построение прямой по уравнению. Для построения прямой по уравнению достаточно получить два элемента, определяющих ее. Этими элементами могут быть: а) направляющий вектор и начальная точка; б) две точки, принадлежащие прямой, в) длины отрезков, отсекаемых ею на осях координат, если прямая не проходит через начало координат и пересекает оси.

Пусть прямая дана уравнением (1). Направляющий вектор прямой, как следует из теоремы [15, 1], имеет координаты $\{-B, A\}$. Для определения начальной точки достаточно подобрать два числа так, чтобы было удовлетворено уравнение (1). Таким образом, если прямая дана уравнением (1), то направляющий вектор и точка прямой определяются очень легко.

Если прямая не проходит через начало координат и пересекает оси, то ее легко строить, если определить отрезки, отсекаемые ею на осях координат.

Задача 2. В аффинной системе дана прямая (1), не проходящая через начало координат и пересекающая оси. Определить длины отрезков, которые она отсекает на осях координат.

Решение. Так как прямая (1) не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям, то $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Напишем уравнение этой же прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (11)$$

Уравнения (1) и (11) определяют одну и ту же прямую, поэтому согласно теореме [15. 2] их коэффициенты пропорциональны: $A = \frac{1}{a}\lambda$, $B = \frac{1}{b}\lambda$, $C = -1\lambda$. Отсюда легко выразить a и b через A, B и C:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{B}{A}.$$

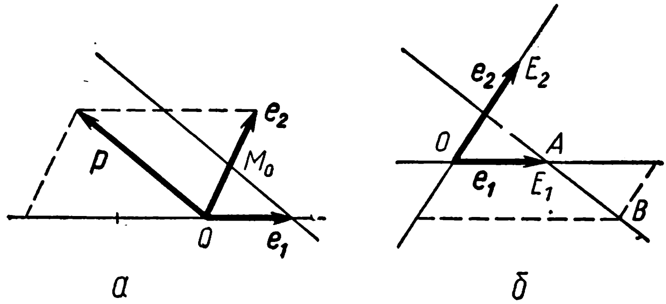
Рассмотрим некоторые примеры построения прямой по уравнению.

Пример 5. Построить следующие прямые, заданные в аффинной системе координат:

а) $x + 2y - 1 = 0$; в) $y - 1 = 0$;
б) $2x - 3y = 0$; г) $x + 2 = 0$.

Решение. а) Первый способ. Найдем направляющий вектор $\boldsymbol{p}\,\{-2, 1\}$ и произвольную точку $M_0\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Построив вектор $\boldsymbol{p}$ и точку M_0, проводим через M_0 прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{p}$ (черт. 91, a).

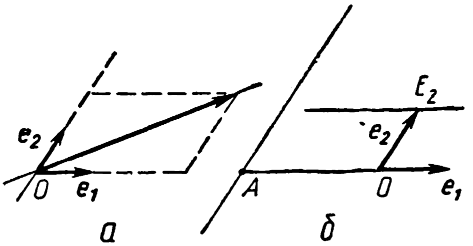
Второй способ. Возьмем на прямой две произвольные



Черт. 91

точки, скажем, A (1, 0) и $B\left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Построив эти точки, проведем через них прямую (черт. 91, *б*).

Третий способ. Уравнение данной прямой может быть записано так: $\frac{x}{1}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$. Отсюда видно, что прямая отсекает на осях координат отрезки $a=1$, $b=\frac{1}{2}$. Построив эти отрезки, проводим через их концы искомую прямую.



Черт. 92

Существенно подчеркнуть, что на осях координат отрезки строятся в соответствующих единицах, т. е. на оси Ox в качестве единицы измерения следует взять отрезок OE_1, а на оси Oy — отрезок OE_2, где E_1 и E_2 — концы векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, приложенных к точке O.

б) Прямая параллельна вектору $\{3, 2\}$ и проходит через начало координат. Построив вектор, проводим через начало координат прямую, параллельную этому вектору (черт. 92, *а*).

в) Прямая параллельна оси Ox, поэтому для ее построения достаточно построить одну из ее точек. В качестве такой точки можно взять конец вектора e_2: E_2 (0, 1) (см. черт. 92, *б*).

г) Прямая параллельна оси Oy и проходит через точку A (—2,0).

Вопросы и примеры

193. Что называется линией первого порядка? Зависит ли это понятие от выбора системы координат?

194. Каково условие совпадения двух прямых? Выяснить, какие из следующих пар прямых совпадают:

а) $x-5y+15=0$ и $x+5y+15=0$;

б) $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y-5=0$ и $2x-\sqrt{6}y-5\sqrt{2}=0$;

в) $\frac{3}{5}x-\frac{5}{3}y=0$ и $9x-25y=0$;

г) $x-1=0$ и $y-5=0$;

д) $6x=0$ и $5x=0$.

195. Пользуясь теоремой [15. 3], доказать следующее предложение: если прямая не проходит через вершины треугольника $A_1A_2A_3$ и пересекает одну из его сторон, то она пересекает другую сторону и не пересекает третью.

196. Какие из сторон треугольника OAB пересекает прямая $y - x = 1$: O (0, 0), A (2, 4), B (4, 0)?

197. Пересекает ли прямая $x = -1$ стороны четырехугольника $OABC$: O (0, 0), A (—1, 3), B (6, 4) и C (4, 0)?

198. Определить длины направленных отрезков, которые отсекает прямая $3x - 4y + 10 = 0$ на осях координат.

199. На плоскости даны две пересекающиеся прямые

$$2x - y - 2 = 0, \quad 2x - 5y + 6 = 0.$$

Написать условия, которым удовлетворяют координаты внутренних точек того угла, в котором находится начало координат.

200. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

а) $2x - 3y = 0$; г) $3y + 1 = 0$;
б) $3x - y + 1 = 0$; д) $x + 2y = 0$;
в) $5x - 1 = 0$; е) $6x = 0$.

201. Взять на плоскости аффинную систему координат и построить прямые:

а) $y = 3x + 1$; б) $x - 4y + 1 = 0$; в) $x - 3y = 0$; г) $5y + 1 = 0$;

д) $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = 4 - 2t; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = -4t; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5. \end{cases}$

202. Взять на плоскости прямоугольную декартову систему координат и построить следующие прямые:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2x$; в) $x + y = 0$;
г) $x - y = 0$; д) $y - 3 = 0$; е) $x + 1 = 0$.

203. Можно ли подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $\lambda x + \mu y - 3 = 0$ совпадали?

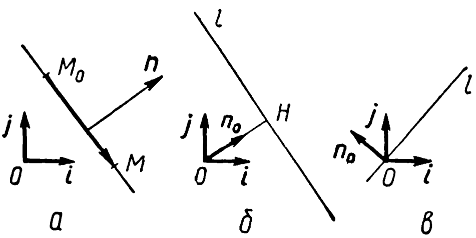
§ 16. НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРЯМОЙ

Теория прямой, изложенная в предыдущих двух параграфах, справедлива как в аффинной, так и в прямоугольной декартовой системе. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые метрические вопросы этой теории, т. е. вопросы, в которые входят понятия длины отрезка и величины угла. Эти вопросы особенно просто решаются в прямоугольных декартовых системах координат, поэтому в данном параграфе всюду будем предполагать, что система координат прямоугольная декартова.

1. Способы задания прямой в прямоугольной декартовой системе. а) Пусть l — данная прямая, M_0 — произвольная точка на ней, а $\boldsymbol{n}$ — некоторый ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой. Очевидно, положение прямой l на плоскости вполне определяется, если даны точка M_0 и вектор $\boldsymbol{n}$ (черт. 93, *а*). Точка M_0 называется *начальной точкой*, а вектор $\boldsymbol{n}$ — *нор-*

мальным вектором прямой. Если на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат, то M_0 и $\boldsymbol{n}$ будут иметь координаты: M_0 (x_0, y_0) и $\{\alpha, \beta\}$. Числа (x_0, y_0), $\{\alpha, \beta\}$ однозначно характеризуют положение прямой на плоскости.

б) Пусть $O\boldsymbol{ij}$ — прямоугольная декартова система координат, а l — некоторая прямая. Опустим из точки O перпендикуляр на прямую l и обозначим через H — основание перпендикуляра, опущенного из O на l. Обозначим через $\boldsymbol{n}_0$ единичный вектор, перпендикулярный прямой l, а через ρ — длину отрезка OH. Если $OH = \rho \neq 0$, то вектор $\overline{OH}$ ненулевой. В этом случае $\boldsymbol{n}_0$ возьмем так, чтобы $\overline{OH}$ и $\boldsymbol{n}_0$ были сонаправлены (черт. 93, *б*). Если $OH = \rho = 0$, то направление $\boldsymbol{n}_0$ возьмем произвольно (черт. 93, *в*). Очевидно, вектор $\boldsymbol{n}_0$ и число ρ однозначно определяют положение прямой на плоскости. В системе $O\boldsymbol{ij}$ вектор $\boldsymbol{n}_0$ имеет координаты $\boldsymbol{n}_0\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$, где $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_0})$. Таким обазом, положение прямой однозначно характеризуется числами $\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ и ρ.



Черт. 93

2. Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором.

Задача 1. Написать уравнение прямой, заданной в некоторой прямоугольной декартовой системе координат нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ $\{\alpha, \beta\}$ и начальной точкой M_0 (x_0, y_0).

Решение. Произвольная точка M (x, y) плоскости принадлежит прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$. Так как $\overline{M_0M}$ имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0\}$, то условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ запишется так:

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через M_0 (x_0, y_0) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ $\{\alpha, \beta\}$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 $(1, -3)$ и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ $\{5, -2\}$.

Решение. Подставив в уравнение (1) значения координат начальной точки и нормального вектора, получаем:

$$5(x - 1) - 2(y + 3) = 0, \qquad 5x - 2y - 11 = 0.$$

Проверка. Прямая $5x - 2y - 11 = 0$ проходит через данную точку M_0 $(1, -3)$, так как координаты этой точки удовлетворяют уравнению: $5 \cdot 1 - 2(-3) - 11 = 0$. Прямая имеет направляющий вектор $\boldsymbol{p}$ $\{2, 5\}$, который перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$ $\{5, -2\}$, так как $2 \cdot 5 + 5(-2) = 0$. Задача решена правильно.

П р и м е р 2. В прямоугольной декартовой системе дан треугольник ABC: A (2, 5), B (—3, 1), C (0, 3). Написать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

Р е ш е н и е. Высота треугольника, опущенная из вершины A, есть прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная вектору $\overline{BC}$. Вектор $\overline{BC}$ имеет координаты $\{3, 2\}$, поэтому уравнение прямой запишется так: $3(x-2)+2(y-5)=0$ или $3x+2y-16=0$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что задача решена правильно.

3. Нормальное уравнение прямой.

З а д а ч а 2. Написать уравнение прямой l, заданной в прямоугольной декартовой системе единичным нормальным вектором $\boldsymbol{n}_0$ $\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ и расстоянием ρ от начала координат до прямой. Если $\rho \neq 0$, то предполагается, что вектор $\boldsymbol{n}_0$ направлен от начала координат к прямой l.

Р е ш е н и е. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (черт. 93, *б*). Очевидно, $\overline{OH}$ — радиус-вектор этой точки. Так как $\overline{OH} = \rho\,\boldsymbol{n}_0$, то $\overline{OH}\{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\}$. Таким образом, задача сводится к предыдущей: написать уравнение прямой, проходящей через точку H $(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$ и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}_0$ $\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$. Подставив координаты вектора $\boldsymbol{n}_0$ и точки H в (1), получаем:

$$\cos\varphi\,(x-\rho\cos\varphi)+\sin\varphi\,(y-\rho\sin\varphi)=0.$$

Так как $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, то это соотношение сводится к следующему:

$$\cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y-\rho=0. \qquad (2)$$

Это уравнение называется *н о р м а л ь н ы м у р а в н е н и е м* прямой l. Оно существенно отличается от других уравнений тем, что все коэффициенты имеют геометрический смысл: коэффициенты при x и y есть $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, где φ — угол, образованный единичным нормальным вектором с осью Ox, свободный член есть расстояние от начала координат до прямой, взятое со знаком минус.

З а д а ч а 3. Дано уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе:

$$Ax+By+C=0. \qquad (3)$$

Написать нормальное уравнение этой прямой.

Р е ш е н и е. Пусть $\cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y-\rho=0$ есть нормальное уравнение прямой (3). Тогда согласно теореме [15. 2]:

$$A=\lambda\cos\varphi,\ B=\lambda\sin\varphi,\ C=-\lambda\rho. \qquad (4)$$

Отсюда получаем:

$$A^2+B^2=\lambda^2;\ \lambda=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{A^2+B^2},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Если $C > 0$, то из $C = -\lambda\rho$ следует, что $\lambda < 0$, следовательно, $\varepsilon = -1$. Если $C < 0$, то $\lambda > 0$, поэтому $\varepsilon = +1$. Если же $C = 0$, то ε можно выбрать произвольно. Подставив значение λ в соотношения (4), получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\varphi = \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \rho = \frac{-\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Из уравнения (2), учитывая эти соотношения, получаем:

$$\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \qquad (5)$$

Т е о р е м а [16. 1]. *Если прямая в прямоугольной декартовой системе координат дана уравнением* (3), *то нормальное уравнение этой прямой имеет вид* (5), *где* $\varepsilon = -1$, *если* $C > 0$, $\varepsilon = +1$, *если* $C < 0$ *и* $\varepsilon = \pm 1$, *если* $C = 0$.

П р и м е р 3. Написать нормальное уравнение прямой, заданной в прямоугольной декартовой системе уравнением:

$$3x + 4y - 8 = 0.$$

Р е ш е н и е. Так как $C = -8 < 0$, то $\varepsilon = +1$, поэтому из (5) получаем:

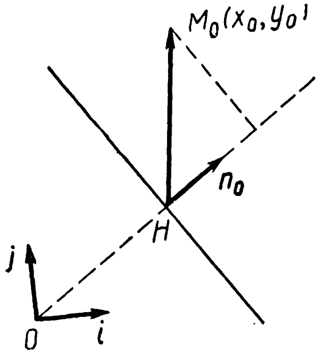
$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0.$$

4. Вычисление расстояния от точки до прямой.

З а д а ч а 4. В прямоугольной декартовой системе координат дана прямая l нормальным уравнением (2) и точка $M_0(x_0, y_0)$, не лежащая на этой прямой. Вычислить расстояние d от точки до прямой.

Р е ш е н и е. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат, на прямую l (черт. 94). Если $\alpha = (\widehat{\overline{HM_0}, \boldsymbol{n}_0})$, где $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой, то, очевидно,

$$d = |HM_0 \cos\alpha|. \qquad (6)$$



Черт. 94

При этом если M_0 и O лежат по разные стороны от прямой l, то $\cos\alpha > 0$ и $d = HM_0\cos\alpha$, если же M_0 и O лежат по одну и ту же сторону от l, то $\cos\alpha < 0$, поэтому $d = -HM_0\cos\alpha$.

Вычислим $\cos\alpha$. Так как $\boldsymbol{n}_0\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$,

$$H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

$$\overline{HM_0}\{x_0 - \rho\cos\varphi, y_0 - \rho\sin\varphi\},$$

то

$$\cos\alpha = \frac{(x_0 - \rho\cos\varphi)\cos\varphi + (y_0 - \rho\sin\varphi)\sin\varphi}{1\cdot HM_0} = \frac{x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \rho}{HM_0}.$$

Подставив это значение в соотношение (6), получаем:

$$d = |x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - \rho|. \tag{7}$$

Мы пришли к следующей интересной теореме:

Теорема [16. 2]. *Если прямая l в прямоугольной декартовой системе дана нормальным уравнением, то расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой l равно модулю левой части уравнения прямой, куда вместо переменных x и y подставлены координаты точки (x_0, y_0).*

Задача 5. В прямоугольной декартовой системе дана прямая уравнением (3). Вычислить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой.

Решение. Нормальное уравнение прямой (3) имеет вид (5), поэтому

$$d = \left|\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 + \frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Так как $\varepsilon = \pm 1$, то под знаком модуля ε можно опустить, поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{8}$$

Пример 4. Определить расстояние от точки M_0 (5, —3) до прямой $x - 3y + 5 = 0$.

Решение. По формуле (8) получаем:

$$d = \frac{|5 - 3\cdot(-3) + 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{\sqrt{10}}.$$

Пример 5. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$y - 2 = 0, \quad 4x - 2y - 24 = 0, \quad 4x - 11y + 30 = 0.$$

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, стороны AB, BC и CA которого заданы уравнениями:

$$(AB) \quad y - 2 = 0, \tag{9}$$
$$(BC) \quad 4x - 2y - 24 = 0, \tag{10}$$
$$(CA) \quad 4x - 11y + 30 = 0. \tag{11}$$

Если H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC, то AH_1 — высота треугольника.

Длина отрезка AH_1 равна расстоянию от точки A до прямой BC. Уравнение прямой BC дано, поэтому для определения длины AH_1 достаточно найти координаты вершины A. Отсюда вытекает следующий план решения задачи.

а) Определяем координаты вершин треугольника, решая совместно уравнения (9), (10); (10) (11) и (11), (9).

б) Определяем расстояние от каждой вершины до противоположной стороны.

Решая систему:

$$\begin{aligned} y-2 &= 0, \\ 4x-11y+30 &= 0, \end{aligned}$$

получаем координаты вершины A (—2, 2).

Аналогично определяем координаты остальных вершин: B (7, 2), C (9, 6). Если AH_1, BH_2, CH_3 — длины высот треугольника, проведенных через вершины A, B и C, то

$$AH_1 = \frac{|4(-2)-2\cdot 2-24|}{\sqrt{16+4}} = \frac{36}{\sqrt{20}} = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

$$BH_2 = \frac{|4\cdot 7-11\cdot 2+30|}{\sqrt{16+121}} = \frac{36}{\sqrt{137}} = \frac{36\sqrt{137}}{137},$$

$$CH_3 = \frac{|6-2|}{1} = 4.$$

Пример 6. Даны две прямые $\sqrt{3}\,y - x = 12$ и $3\,x + 4\,y = 15$. Написать уравнения биссектрис углов, образованных данными прямыми.

Решение. Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от данных прямых. Если $(X,\ Y)$ — произвольная точка, лежащая на одной из биссектрис, то

$$\frac{|\sqrt{3}\,Y-X-12|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|3X+4Y-15|}{\sqrt{9+16}}.$$

Обратно, если координаты точки $(X,\ Y)$ удовлетворяют этому уравнению, то она равноудалена от данных прямых и, следовательно, лежит на одной из биссектрис. Таким образом, предыдущее соотношение есть уравнение двух биссектрис углов, образованных данными прямыми.

Оно эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$\frac{\sqrt{3}\,Y-X-12}{2} = \frac{3X+4Y-15}{5},$$

$$\frac{\sqrt{3}\,Y-X-12}{2} = -\frac{3X+4Y-15}{5},$$

или

$$\begin{aligned} 11X+(8-5\sqrt{3})Y+30 &= 0, \\ -X-(8+5\sqrt{3})Y+90 &= 0. \end{aligned}$$

5. Вычисление угла между двумя прямыми.

Задача 6. В прямоугольной декартовой системе даны две прямые своими уравнениями:

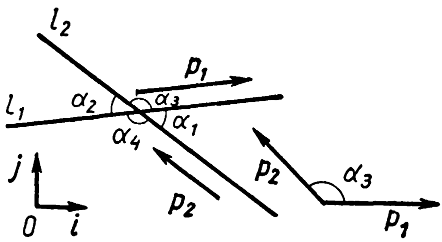
$$(l_1) \qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{12}$$
$$(l_2) \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{13}$$

Вычислить угол между ними.

Решение. Если две прямые пересекаются, то они образуют четыре угла α_1, α_2, α_3 и α_4 (черт. 95). Однако $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$ и $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$, поэтому достаточно вычислить один из этих углов; этот угол определяет все остальные углы. Если взять направляющие векторы данных прямых $\boldsymbol{p}_1\{-B_1, A_1\}$ и $\boldsymbol{p}_2\{-B_2, A_2\}$, то, очевидно, угол между ними равен одному из углов между прямыми. На чертеже 95 угол между $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ равен α_3. Если $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2})$, то, как известно,

$$\cos\alpha = \frac{B_1B_2 + A_1A_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_1^2}}.$$

Мы пришли к теореме:



Черт. 95

Теорема [16. 3]. *Если две прямые в прямоугольной декартовой системе координат даны уравнениями* (12) и (13), *то* $\cos\alpha$, *где* α — *один из углов между ними, определяется формулой*:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{14}$$

Отсюда, как частный случай, получаем:

Теорема [16. 4]. *Две прямые, данные в прямоугольной декартовой системе уравнениями* (12) *и* (13), *перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Пример 7. Определить углы между прямыми в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\sqrt{3}\,x + y - 3 = 0,$$
$$x + \sqrt{3}\,y + 5 = 0.$$

Решение. Подставив значения коэффициентов в соотношение (14), получаем:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $\alpha = 30°$. Таким образом, прямые пересекаются и составляют углы: $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 180° - 30° = 120°$.

Примеры и задачи

204. В прямоугольной декартовой системе написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (2, 5) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ {1, —4};

б) проходящей через точку A (—1, 0) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ {—2, —1};

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ {—2, 1};

г) проходящей через точку M_0 (1, 1) и перпендикулярной оси Ox.

205. Дана прямоугольная декартова система $O\boldsymbol{ij}$. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (2, 5) и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку A (—1, —7) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ {1, —3};

в) являющейся биссектрисой координатного угла ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$);

г) проходящей через начало координат, образующей с осью Ox угол $\varphi = 30°$ и проходящей в первой и третьей четвертях;

д) проходящей через точку A (2, 5) и параллельной биссектрисе координатного угла (—$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$);

е) проходящей через точку A (—3, 1) и перпендикулярной прямой $x - 3y + 1 = 0$.

206. Дана прямоугольная декартова система $O\boldsymbol{ij}$. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (2, —2) и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку A (2, —5) и перпендикулярной оси Oy;

в) проходящей через точку A (—1, —5) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ {2, 1};

г) проходящей через точку A (5, 10) и перпендикулярной прямой $x - y + 1 = 0$;

д) проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

207. В прямоугольной декартовой системе координат дана прямая $2x - 5y + 3 = 0$. Определить для этой прямой направляющий вектор $\boldsymbol{p}$, нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях координат. Построить данную прямую и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$.

208. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки A (2, —3) и B (3, —5). Через середину отрезка AB провести прямую, перпендикулярную AB.

209. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты вершин треугольника ABC: A (1, 5), B (—1, 2), C (3, 2). Составить уравнения:

а) высот треугольника;

б) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

210. Даны две вершины треугольника A $(-1, 5)$ и B $(3, 2)$ и точка H $(5, -3)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

211. Написать уравнения сторон квадрата, если сторона его равна a, а за оси прямоугольной декартовой системы координат приняты его диагонали.

212. Привести уравнения следующих прямых к нормальному виду:

а) $3x - 4y + 1 = 0$; в) $\sqrt{11}x + 5y - 3 = 0$;
б) $2x + \sqrt{5}y = 0$; г) $x + y - 15 = 0$.

213. Даны две прямые своими уравнениями:

$$3x + 4y - 18 = 0 \text{ и } 3x + 4y - 43 = 0.$$

Убедиться в том, что они параллельны, и определить расстояние между ними.

214. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

215. К окружности, имеющей центр в точке $(1, -2)$ и радиус, равный 5, провести касательные, параллельные прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

216. Через точку P $(1, 1)$ провести касательные к окружности, имеющей центр в точке C $(1, -3)$ и радиус, равный $2\sqrt{2}$.

217. Даны две окружности:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0 \quad \text{и} \quad 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

а) Составить уравнение линии центров и уравнение прямой, соединяющей точки пересечения данных окружностей. Показать, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

б) Определить координаты точки пересечения линии центров с прямой, соединяющей точки пересечения окружностей.

218. Даны две прямые $\sqrt{3}y - x = 12$ и $3x + 4y = 15$. Найти угол между данными прямыми.

219. Составить уравнения прямых, отстоящих от прямой $4x - 3y - 7 = 0$ на расстоянии, равном 3.

220. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых:

а) $2x - 5y + 6 = 0$, $2x - 5y - 8 = 0$;
б) $3x + 5y + 8 = 0$, $3x + 5y + 2 = 0$.

221. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x - y + 7 = 0$ и $3x - 6y - 8 = 0$, в котором лежит точка M $(1, 2)$.

222. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла C (4, —1).

223. Из точки M (1, —2) под углом α к прямой $x + y - 1 = 0$ направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Определить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

224. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

§ 17. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ; ПУЧОК ПРЯМЫХ

1. Взаимное расположение двух прямых. Пусть в аффинной системе координат даны две прямые:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

Выясним, каково их взаимное расположение. По теореме [15. 2] прямые (1) и (2) совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в уравнениях (1) и (2) пропорциональны. Исключая этот случай из рассмотрения, мы будем предполагать, что прямые (1) и (2) не совпадают, поэтому коэффициенты в уравнениях (1) и (2) не пропорциональны.

Рассмотрим направляющие векторы этих прямых: $\boldsymbol{p}_1\{-B_1, A_1\}$ и $\boldsymbol{p}_2\{-B_2, A_2\}$. Возможны два случая.

а) Векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны. В этом случае, очевидно, прямые пересекаются. Обратно, если прямые (1) и (2) пересекаются, то векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны. Условие неколлинеарности векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ или } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому мы приходим к следующей теореме:

Теорема [17. 1]. *Для того чтобы прямые* (1) *и* (2), *заданные в аффинной системе, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для определения координат точки пересечения этих прямых, очевидно, необходимо совместно решить систему (1), (2).

б) Векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны. В этом случае прямые параллельны, так как по предположению они не совпадают. Обратно, если прямые (1) и (2) параллельны, то векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны. Условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому мы приходим к следующей теореме.

Теорема [17. 2]. *Для того чтобы две различные прямые, заданные в аффинной системе уравнениями* (1) *и* (2), *были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

Теоремы [15. 2], [17. 1] и [17. 2] позволяют полностью ответить на вопрос о взаимном расположении двух прямых, заданных уравнениями (1) и (2) в аффинной системе координат.

Теорема [17. 3]. а) *Прямые* (1) *и* (2) *пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах в уравнениях* (1) *и* (2) *не пропорциональны, т. е.* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

б) *Прямые* (1) *и* (2) *совпадают тогда и только тогда, когда коэффициенты в уравнениях* (1) *и* (2) *пропорциональны, т. е. существует такое число* λ, *что* $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.

в) *прямые* (1) *и* (2) *параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, но все коэффициенты, включая свободные члены, не пропорциональны, т. е. существует такое число* λ, *что* $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 \neq \lambda C_1$.

Если пользоваться понятием ранга матрицы, то теорему [17. 3] можно сформулировать следующим образом:

Теорема [17. 3′]. *Пусть даны две прямые в аффинной системе координат уравнениями* (1) *и* (2). *Обозначим через* r *и* R *соответственно ранги матриц*

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix} \right\| \text{ и } \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right\|.$$

а) *Для того чтобы прямые* (1) *и* (2) *пересекались, необходимо и достаточно, чтобы* $r = 2$.

б) *Для того чтобы прямые совпадали, необходимо и достаточно, чтобы* $R = 1$.

в) *Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы* $r = 1$, $R = 2$.

Пример 1. Определить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $x + y - 3 = 0$, $2x + y - 1 = 0$; б) $x - 3 = 0$, $x + y - 5 = 0$; в) $x + 4y - 1 = 0$, $2x + 8y - 2 = 0$;

г) $x = 5$, $y = -7$; д) $x = 3$, $x = 7$; е) $2x + y - 1 = 0$, $x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$. Прямые пересекаются.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; прямые пересекаются.

в) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$; прямые совпадают, так как все коэффициенты пропорциональны.

г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; прямые пересекаются.

д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; прямые параллельны, так как все коэффициенты, включая свободные члены, не пропорциональны.

е) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$; прямые параллельны, так как все коэффициенты, включая свободные члены, не пропорциональны.

Заметим, что вопрос об изучении взаимного расположения двух прямых, заданных уравнениями (1) и (2), — это с точки зрения алгебры вопрос об исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Выше по существу было проведено это исследование, пользуясь геометрическими соображениями. Случай пересечения двух прямых с алгебраической точки зрения соответствует случаю, когда система уравнений имеет единственное решение. Случай совпадения соответствует случаю, когда система имеет бесчисленное множество решений, наконец, случай параллельности прямых соответствует случаю, когда система уравнений вовсе не имеет решений, т. е. несовместна. Это прекрасный пример того, как геометрические соображения помогают решать чисто алгебраическую задачу.

2. Пучок прямых. *Пучком пересекающихся прямых называется совокупность всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку M_0. Точка M_0 называется центром пучка.*

Пучком параллельных прямых называется совокупность всех прямых плоскости, параллельных некоторому ненулевому вектору $\boldsymbol{p}$. Направление вектора $\boldsymbol{p}$ называется направлением пучка.

Пучок пересекающихся прямых может быть задан либо координатами центра пучка (x_0, y_0), либо двумя пересекающимися прямыми, принадлежащими пучку. В самом деле, две пересекающиеся прямые определяют точку пересечения, т. е. центр пучка.

Пучок параллельных прямых может быть задан либо ненулевым вектором, имеющим направление пучка, либо какой-либо прямой, принадлежащей пучку.

3. Уравнение пучка пересекающихся прямых.

Теорема [17. 4]. *Если в аффинной системе координат задан пучок Ω с центром в точке (x_0, y_0), то уравнение*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

где α и β принимают всевозможные значения, не равные нулю одновременно, определяет данный пучок.

Смысл теоремы заключается в следующем: каковы бы ни были числа α, β, не равные одновременно нулю, уравнением (3) определяется некоторая прямая пучка Ω. Обратно, какова бы ни была прямая l пучка Ω, всегда найдутся такие коэффициенты α, β, что (3) является уравнением прямой l. Поэтому соотношение (3) называется уравнением пучка Ω.

Доказательство. Пусть α, β — произвольные числа, не равные одновременно нулю. Тогда уравнение (3) определяет прямую, проходящую через точку (x_0, y_0) и параллельную вектору $\{\alpha, \beta\}$, т. е. некоторую прямую пучка Ω.

Обратно, пусть l — некоторая прямая пучка Ω, направляющий вектор которой имеет координаты $\{\alpha, \beta\}$. Тогда, так как l проходит через точку (x_0, y_0), то уравнение этой прямой запишется в виде соотношения (3). Теорема доказана.

В уравнении (3) x_0 и y_0 — постоянные числа, а α, β — параметры (т. е. величины, которые могут принимать различные, в данном случае всевозможные, не равные нулю значения). Обратим внимание на то, что параметры α, β и $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, где $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же прямую пучка, поэтому прямая пучка по существу определяется отношением параметров $\alpha : \beta$.

Теорема [17. 5]. *Если в аффинной системе координат пучок пересекающихся прямых Ω задан двумя различными прямыми* (1) *и* (2), *то уравнение*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{4}$$

где α и β принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю, определяет данный пучок.

Доказательство. Прежде всего покажем, что при любых значениях α и β, не равных одновременно нулю, соотношение (4) является уравнением прямой, т. е. коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю. В самом деле, запишем уравнение (4) в виде

$$(A_1\alpha + A_2\beta)\,x + (B_1\alpha + B_2\beta)\,y + C_1\alpha + C_2\beta = 0.$$

Если положить, что $A_1\alpha + A_2\beta = 0$ и $B_1\alpha + B_2\beta = 0$, то отсюда немедленно получаем: $\alpha = \beta = 0$, так как $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$ (прямые (1) и (2) пересекаются!).

Прямая (4) при любых значениях α и β проходит через точку пересечения прямых (1) и (2). В самом деле, если x_0, y_0 — координаты точки пересечения прямых (1) и (2), то $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, поэтому при любых значениях α и β $\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$. Отсюда следует, что при любых значениях α и β прямая (4) принадлежит пучку Ω.

Обратно, пусть l — некоторая прямая пучка Ω. Покажем, что α и β можно подобрать так, чтобы соотношение (4) было уравнением прямой l. В самом деле, прямая l определяется центром пучка (x_0, y_0) и другой точкой (x_1, y_1). Прямая (4), как было показано выше, всегда проходит через точку (x_0, y_0). Подберем α и β так, чтобы x_1, y_1 удовлетворяли уравнению (4): $\alpha (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$. Числа $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$ и $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ не могут одновременно равняться нулю, так как точка (x_1, y_1) не совпадает с точкой (x_0, y_0). Если, например, $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0$, то α можно выбрать произвольно, а β определить равенством:

$$\beta = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}\alpha.$$

При выбранных значениях α и β прямая, заданная уравнением (4), очевидно, проходит через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), т. е. совпадает с l. Теорема доказана полностью.

Пример 2. Написать уравнение пучка с центром в точке M_0 (5, —2).

Решение. Подставив значения координат точки M_0 в соотношение (3), получаем:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \beta (x-5) - \alpha (y+2) = 0.$$

Пример 3. Написать уравнение пучка, определяемого пересекающимися прямыми:

$$x - 2y + 1 = 0, \quad x + y - 5 = 0.$$

Решение. Подставив в соотношение (4) значения коэффициентов уравнений прямых, получаем: $\alpha(x - 2y + 1) + \beta (x + y - 5) = 0$ или $(\alpha + \beta) x + (\beta - 2\alpha) y + (\alpha - 5\beta) = 0$.

Пример 4. В пучке $\alpha(x - 3y + 1) + \beta (x - y + 1) = 0$ найти прямую, которая проходит через точку A (5, 1).

Решение. Искомая прямая проходит через точку A (5, 1), поэтому координаты точки A должны удовлетворять ее уравнению. Подставив в уравнение пучка вместо x и y координаты точки A, получаем: $\alpha (5 - 3 \cdot 1 + 1) + \beta (5 - 1 + 1) = 0$, или $3\alpha + 5\beta = 0$. Этому соотношению, очевидно, удовлетворяют значения: $\alpha = -5$, $\beta = 3$. Подставив эти значения в уравнение пучка, получаем:

$$-5 (x - 3y + 1) + 3 (x - y + 1) = 0, \text{ или } -2x + 12y - 2 = 0.$$

Пример 5. В прямоугольной декартовой системе даны две прямые $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$. Через точку пересечения этих прямых провести прямую, перпендикулярную к прямой $x + y = 0$.

Решение. Напишем уравнение пучка, определяемого данными прямыми: $\alpha(3x - y) + \beta(x + 4y - 2) = 0$. Запишем условие перпендикулярности этой прямой и прямой $x + y = 0$: $1(3\alpha + \beta) + 1(4\beta - \alpha) = 0$, или $2\alpha + 5\beta = 0$. Этому соотношению удовлетворяют значения: $\alpha = -5$, $\beta = 2$. Подставив эти значения в уравнение пучка, после элементарных преобразований получаем уравнение искомой прямой: $13x - 13y + 4 = 0$.

Проверка. а) Прямая $13x - 13y + 4 = 0$ проходит через точку пересечения данных двух прямых, так как их точка пересечения имеет координаты $\left(\frac{2}{13}, \frac{6}{13}\right)$, удовлетворяющие полученному уравнению.

б) Прямые $13x - 13y + 4 = 0$ и $x + y = 0$ перпендикулярны, так как $13 \cdot 1 - 13 \cdot 1 = 0$.

4. Уравнение пучка параллельных прямых. По аналогии с предыдущим можно вывести уравнение пучка параллельных прямых.

Теорема [17. 6]. *Если в аффинной системе координат задан пучок параллельных прямых, определяемый ненулевым вектором* $\boldsymbol{p}\,\{a,\ b\}$, *то уравнение*

$$bx - ay + \alpha = 0, \tag{5}$$

где α *принимает всевозможные значения, определяет данный пучок.*

Доказательство. Согласно теореме [15. 1] прямая (5) при любом α параллельна вектору $\boldsymbol{p}\,\{a,\ b\}$, поэтому принадлежит данному пучку.

Обратно, пусть l — произвольная прямая данного пучка. Покажем, что α можно подобрать так, чтобы соотношение (5) было уравнением прямой l. Пусть l проходит через точку (x_0, y_0). Подберем α так, чтобы числа x_0, y_0 удовлетворяли уравнению (5): $bx_0 - ay_0 + \alpha = 0$; отсюда $\alpha = ay_0 - bx_0$. Подставив это значение в уравнение (5), получаем:

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку x_0, y_0 и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\,\{a,\ b\}$, т. е. уравнение прямой l. Теорема доказана.

Теорема [17. 7]. *Если в аффинной системе координат даны параллельные прямые* (1) *и* (2), *то пучок параллельных прямых, определяемый этими прямыми, задается уравнением*:

$$\alpha\,(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{6}$$

где α *и* β *принимают всевозможные значения, не обращающие одновременно в нуль выражения* $a(\alpha, \beta) = \alpha A_1 + \beta A_2$ *и* $b(\alpha, \beta) = \alpha B_1 + \beta B_2$.

Доказательство. Запишем уравнение (6) в виде

$$(A_1\alpha + A_2\beta)\, x + (B_1\alpha + B_2\beta)\, y + C_1\alpha + C_2\beta = 0, \quad (7)$$
$$a(\alpha, \beta)\, x + b(\alpha, \beta)\, y + C_1\alpha + C_2\beta = 0.$$

По условию теоремы $a(\alpha, \beta)$ и $b(\alpha, \beta)$ одновременно не обращаются в нуль, поэтому при любых α, β, удовлетворяющих условию теоремы, уравнение (6) определяет прямую. Так как прямые (1) и (2) параллельны, то $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, поэтому уравнение (7) принимает вид:

$$A_1(\alpha + \lambda\beta)\, x + B_1(\alpha + \lambda\beta)\, y + C_1\alpha + C_2\beta = 0. \quad (8)$$

Очевидно, при любых значениях α и β эта прямая параллельна прямой (1), т. е. принадлежит данному пучку.

Обратно, пусть l — некоторая прямая данного пучка. Покажем, что α и β можно подобрать так, чтобы соотношение (6) было уравнением прямой l. В самом деле, прямая l определяется направляющим вектором $\{-B_1, A_1\}$ и некоторой точкой (x_0, y_0). Подберем α и β так, чтобы x_0, y_0 удовлетворяли уравнению (6):

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ не могут одновременно равняться нулю, так как прямые (1) и (2) не пересекаются. Если, например, $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 \neq 0$, то α можно выбрать произвольно, а β определить равенством

$$\beta = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}\alpha.$$

Покажем, что выбранные значения α и β не обращают одновременно в нуль выражения $a(\alpha, \beta)$ и $b(\alpha, \beta)$. Пусть, напротив, $a(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta) = 0$. Таким образом, α и β удовлетворяют следующим трем соотношениям:

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0, \quad (9)$$
$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad (10)$$
$$\alpha B_1 + \beta B_2 = 0. \quad (11)$$

Из соотношения (9), учитывая (10) и (11), получаем:

$$\alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (10), (11) и (12) следует, что прямые (1) и (2) совпадают. Это противоречит условию теоремы.

При выбранных значениях α и β прямая, заданная уравнением (6), проходит через точку (x_0, y_0) и параллельна вектору $\{-B_1, A_1\}$, т. е. совпадает с прямой l. Теорема доказана полностью.

5. Условие принадлежности трех прямых одному пучку. В заключение этого параграфа докажем теорему, которая часто применяется при решении задач.

Теорема [17. 8]. *Для того чтобы три прямые, заданные в аффинной системе уравнениями:*

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad (13)$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \qquad (14)$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0, \qquad (15)$$

принадлежали одному пучку пересекающихся или параллельных прямых, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

был равен нулю[1].

Пусть прямые (13), (14) и (15) принадлежат пучку пересекающихся прямых. Если (x_0, y_0) — центр пучка, то

$$\begin{aligned} A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 &= 0, & & C_1 = A_1(-x_0) + B_1(-y_0), \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 &= 0, & \text{или } & C_2 = A_2(-x_0) + B_2(-y_0), \\ A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 &= 0, & & C_3 = A_3(-x_0) + B_3(-y_0). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что элементы третьего столбца определителя (16) линейно выражаются через элементы первых двух столбцов, поэтому определитель равен нулю.

Пусть прямые (13), (14) и (15) принадлежат пучку параллельных прямых. Так как прямые (13) и (14) параллельны или совпадают, то $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$

Точно так же приходим к выводу, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Из полученных соотношений следует, что первые два столбца определителя (16) пропорциональны, поэтому определитель равен нулю.

Теперь предположим, что определитель (16) равен нулю, и докажем, что прямые (13), (14) и (15) принадлежат одному пучку. Рассмотрим прямые (13) и (14). Если они совпадают, то наше утверждение очевидно, так как при любом расположении прямой (15) все три прямые будут принадлежать одному пучку.

Пусть прямые (13) и (14) пересекаются, тогда $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и точка пересечения прямых имеет координаты:

$$x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

[1] Мы не исключаем из рассмотрения случай, когда какие-либо две из прямых (13), (14), (15) или даже все три прямые совпадают.

Выясним, лежит ли эта точка на прямой (15)?

$$A_3\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - B_3\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 = 0;$$

$$A_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Мы пришли к выводу, что точка пересечения прямых (13) и (14) лежит на прямой (15), т. е. все три прямые принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Рассмотрим, наконец, случай, когда прямые (13) и (14) параллельны. В этом случае $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что A_1 и A_2 пропорциональны B_1, B_2. Если, например, $A_1 \neq 0$, то $B_1 = \lambda A_1$ и $B_2 = \lambda A_2$. Подставив эти выражения в определитель (16) и учитывая, что он равен нулю, получаем:

$$\begin{vmatrix} A_1 & \lambda A_1 & C_1 \\ A_2 & \lambda A_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по элементам третьей строки, получаем:

$$A_3\begin{vmatrix} \lambda A_1 & C_1 \\ \lambda A_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Прямые (13) и (14) не совпадают, поэтому $\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Из предыдущего соотношения следует, что $\lambda A_3 = B_3$. Отсюда следует, что прямая (15) параллельна прямым (13) и (14) или совпадает с одной из них.

Пример 6. Доказать, что прямые $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ пересекаются в одной точке.

Решение. Определитель (16) для данных прямых имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 2\cdot 2 = 0.$$

Из предыдущей теоремы следует, что прямые принадлежат одному пучку. Так как прямые $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ пересекаются, то все три прямые принадлежат пучку пересекающихся прямых, т. е. проходят через одну точку.

Вопросы, примеры и задачи

225. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и в случае пересечения определить координаты общей точки:

а) $x+y-3=0$ и $2x-4y-6=0$;
б) $x+2y+1=0$ и $x+2y+3=0$;
в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x-3y+\sqrt{3}=0$ и $x-2\sqrt{3}y+2=0$.

226. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $y=3$ и $x+y=0$;
б) $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$;
в) $x=0$ и $x+3=0$;
г) $\sqrt{5}x-3y+1=0$ и $\frac{5}{3}x-\sqrt{5}y+\frac{\sqrt{5}}{3}=0$.

227. При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями:

$$3tx-8y+1=0 \quad \text{и} \quad (1+t)x-2ty=0,$$

параллельны?

228. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты λ и μ для того, чтобы прямые

$$\lambda x+\mu y+1=0,\ 2x-3y+5=0 \text{ и } x-1=0$$

имели общую точку?

229. Через точку (1, 6) провести прямую так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между двумя параллельными прямыми $x-5y+23=0$, $x-5y+11=0$, лежала на прямой $2x-y-2=0$.

230. Провести прямую так, чтобы точка A (1, 2) была серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

231. Что называется пучком пересекающихся прямых? Как задается такой пучок?

Запишите уравнение пучка, определяемого прямыми $y=0$, $x=1$.

232. Что называется пучком параллельных прямых? Как задается такой пучок? Запишите уравнение пучка, определяемого прямой $x=2$.

233. Каково условие принадлежности трех прямых к одному пучку:

а) пересекающихся прямых,
б) параллельных прямых?

234. В пучке $2x-y+1+\lambda(3x-2y+5)=0$ найти прямую, параллельную прямой $5x-3y+1=0$.

235. В пучке $\lambda(3x-4y+1)+x-y=0$ найти прямую, проходящую через начало координат.

236. В пучке $\lambda(x-2y+1)+\mu(x-3y)=0$ найти прямую, параллельную оси Ox.

237. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x+2y-1=0,\ 5x+4y-17=0,\ x-4y+11=0.$$

а) Составить уравнения высот треугольника.

б) Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника, параллельно противоположным сторонам.

238. Через точку пересечения прямых $6x-2y+5=0$ и $2x+y-4=0$ провести прямую:

а) параллельную оси Ox;

б) параллельную оси Oy;

в) проходящую через начало координат.

239. Определить общую прямую следующих двух пучков:

$$(2+3\lambda)x-(4-7\lambda)y+\lambda=0,$$
$$(3-2\mu)x+(4-7\mu)y+5=0.$$

240. Выяснить, какие из следующих троек прямых принадлежат одному пучку.

а) $2x-y=0,\quad x+y-3=0,\quad x-2y+3=0;$

б) $x+y-1=0,\quad x+2y+2=0,\quad x-y=0;$

в) $x-\sqrt{3}y+\sqrt{2}=0,\ \sqrt{3}x-3y+1=0,\ \sqrt{2}x-\sqrt{6}y+5=0.$

§ 18. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЯМОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изложенная в этой главе теория прямой линии может быть с успехом применена для доказательства теорем и решения задач из курса элементарной геометрии. В этом параграфе мы приведем некоторые примеры приложения теории прямой линии к решению элементарно-геометрических задач.

1. Доказательство некоторых теорем.

Теорема [18. 1]. *Доказать, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Можно наметить следующий план доказательства теоремы.

1. Выбор системы координат.

2. Определение координат вершин треугольника в выбранной системе.

3. Составление уравнений медиан.

4. Доказательство того, что три медианы принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Пусть ABC — произвольный треугольник. Точку A примем за начало аффинной системы координат, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — за координатные векторы. В этой системе вершины треугольника, очевидно, будут иметь координаты: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Легко определить координаты этих точек:

$$A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B_1\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad C_1\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Таким образом, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 задаются уравнениями:

$$(AA_1) \qquad \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x - y = 0,$$

$$(BB_1) \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x + 2y - 1 = 0,$$

$$(CC_1) \qquad \begin{vmatrix} x & y-1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 2x + y - 1 = 0.$$

Эти прямые принадлежат одному пучку, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Любые две медианы пересекаются в одной точке, в чем легко убедиться, если рассмотреть их уравнения, поэтому прямые принадлежат пучку пересекающихся прямых. Теорема доказана.

Теорема [18. 2]. *Доказать, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться планом, намеченным выше при доказательстве теоремы [18. 1].

Пусть ABC — произвольный треугольник. Прямоугольную декартову систему возьмем так, чтобы начало совпало с точкой A и $\mathbf{i} = \overline{AB}$. В этой системе вершины A и B имеют координаты: $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$. Обозначим координаты вершины C через (α, β) и запишем уравнения высот треугольника ABC.

Высота AH_1 есть прямая, проходящая через точку $A\,(0, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{BC}\,\{\alpha - 1, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением:

$$(\alpha - 1)\,x + \beta y = 0.$$

Высота BH_2 есть прямая, проходящая через точку $B(1, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AC}\,\{\alpha, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением:

$$\alpha\,(x - 1) + \beta y = 0.$$

Высота CH_3 есть прямая, проходящая через точку $C\,(\alpha, \beta)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AB}\,\{1, 0\}$, поэтому она определяется уравнением

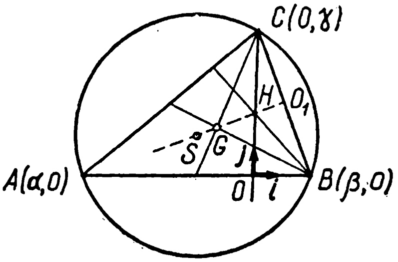
$$x - \alpha = 0.$$

Эти прямые принадлежат одному пучку, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & 0 \\ \alpha-1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Любые две высоты пересекаются, поэтому все три высоты принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Теорема [18. 3]. *Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести G треугольника лежат на одной прямой* (*прямая Эйлера*).



Черт. 96

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, S — центр описанной окружности, G — центр тяжести, а H — ортоцентр (черт. 96). Если O — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB, то прямоугольную декартову систему координат возьмем так, чтобы прямые OA и OC совпали с осями координат и точка O была началом координат (см. черт. 96). В этой системе абсцисса точки C и ординаты точек A и B равны нулю. Пусть $A\,(\alpha, 0)$, $B\,(\beta, 0)$, $C\,(0, \gamma)$. Определим координаты точек G, S и H.

Точка G является точкой пересечения медиан, поэтому ее координаты равны: $x_G = \frac{\alpha+\beta}{3}$, $y_G = \frac{\gamma}{3}$ (см. § 8, задачу 3).

Координаты точки H можно определить как координаты точки пересечения высот (прямых) CO и AO_1. Прямая CO имеет уравнение $x = 0$, а прямая AO_1 может быть рассмотрена как прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная вектору $\overline{CB}$: $\beta\,(x-\alpha) - \gamma\,(y-0) = 0$ или $\beta x - \gamma y - \alpha\beta = 0$. Решив совместно уравнения прямых CO и AO_1, получаем координаты точки H: $H\left(0, -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$.

Координаты точки S можно определить как координаты точки пересечения серединных перпендикуляров. Прямая, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная ей, имеет уравнение $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Прямая, проходящая через середину отрезка AC и перпендикулярная ей, имеет уравнение

$$\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)-\gamma\left(y-\frac{\gamma}{2}\right)=0, \text{ или } \alpha x-\gamma y=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\gamma^2}{2}.$$

Решив совместно эти уравнения, получаем координаты точки S:

$$S\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\gamma^2+\alpha\beta}{2\gamma}\right).$$

Теперь легко убедиться в том, что точки G, H и S лежат на одной прямой. Для этого достаточно проверить условие коллинеарности этих точек:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha+\beta}{3} & \frac{\gamma}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{\gamma} & 1 \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\gamma^2+\alpha\beta}{2\gamma} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{3}\left(-\frac{\alpha\beta}{\gamma}-\frac{\gamma^2+\alpha\beta}{2\gamma}\right)+$$

$$+\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)=0.$$

2. Решение некоторых задач.

Задача 1. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

Решение. Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе точки A и B имеют координаты $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$. Для того чтобы точка $M\ (x,\ y)$ принадлежала данному геометрическому месту, необходимо и достаточно, чтобы $AM = BM$ или в координатах

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

Это и есть уравнение данного геометрического места точек. Оно эквивалентно уравнению

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

или

$$-2xx_1-2yy_1=-2xx_2-2yy_2-x_1^2-y_1^2+x_2^2+y_2^2.$$

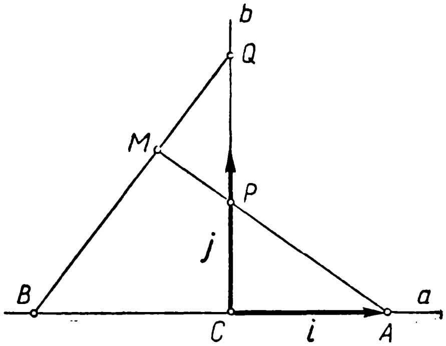
Окончательно получаем следующее уравнение:

$$x\,(x_2-x_1)+y\,(y_2-y_1)+\frac{x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2}{2}=0. \qquad (1)$$

Так как точки A и B различны, то коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю, поэтому соотношение (1) определяет прямую. Она перпендикулярна вектору $\boldsymbol{p}\ \{x_2-x_1,\ \ y_2-y_1\}$, т. е. вектору $\overline{AB}$, так как система координат прямоугольная декартова. Кроме того, прямая проходит через середину отрезка AB в силу того, что координаты точки $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ удовлетворяют уравнению (1). Задача решена.

Задача 2. Даны две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке C, и две точки A и B на прямой a. На прямой b берутся точки P и Q так, что $\frac{CP}{CQ} = k$. Доказать, что геометрическое место точек пересечений прямых AP и BQ есть прямая.

Решение. Возьмем точку C за начало прямоугольной декартовой системы координат, а прямые a и b — за координатные оси (черт. 97). Если $\mathbf{i} = \overline{CA}$, то точка A будет иметь координаты (1,0). Пусть B $(\alpha, 0)$. Если λ и λ' — ординаты точек Q и P, то из условий задачи следует, что $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{k}$, поэтому $\lambda' = k\lambda$. Таким образом, точки P и Q будут иметь координаты: $P(0, k\lambda)$, $Q(0, \lambda)$. При изменении точек P и Q координата λ, очевидно, меняется.



Черт. 97

Если M (x, y) — произвольная точка искомого геометрического места, то, выразив x и y через координаты точек A, B и переменную величину λ, получим параметрическое задание искомого геометрического места (λ — параметр). Исключив λ, получим уравнение геометрического места в прямоугольных декартовых координатах.

Для осуществления этого плана найдем уравнения прямых AP и BQ. Имеем:

$$A\ (1,0),\ P\ (0,\ k\lambda),\ B\ (\alpha,\ 0),\ Q\ (0,\ \lambda).$$

Уравнения искомых прямых имеют вид:

$$(AP) \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & k\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } k\lambda x + y - k\lambda = 0; \qquad (2)$$

$$(BQ) \qquad \begin{vmatrix} x-\alpha & y \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda x + \alpha y - \alpha\lambda = 0. \qquad (3)$$

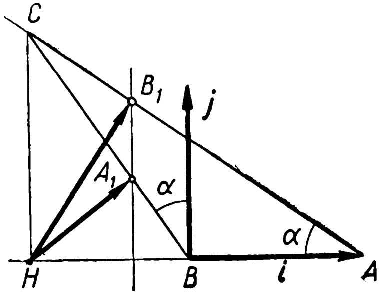
Для определения координат точки пересечения $M(x, y)$ следует совместно решить систему (2), (3):

$$x = \frac{\alpha(k-1)}{k\alpha - 1}, \quad y = \frac{k\lambda(\alpha-1)}{k\alpha - 1}.$$

Так как выражение x не содержит λ, то $x = \frac{\alpha(k-1)}{k\alpha - 1}$ есть уравнение искомого геометрического места. Этим уравнением задается прямая, параллельная прямой b.

Задача 3. В треугольнике ABC разность углов B и A равна 90°. Из основания H высоты CH опущены на стороны AC и BC перпендикуляры, которые пересекают эти стороны соответственно в точках B_1 и A_1. Доказать, что прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны.

Решение. В этой задаче выбор системы координат существен, так как при неудачном ее выборе решение задачи значительно осложняется.



Черт. 98

Так как $\angle B - \angle A = 90°$, то желательно использовать перпендикуляр к BA, восставленный в точке B (черт. 98). Этот перпендикуляр образует с лучом BC угол $\alpha = \angle A$. Примем точку B за начало прямоугольной декартовой системы координат и векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ возьмем так, как указано на чертеже 98. В этой системе точки A и B будут иметь координаты A (1, 0), B (0, 0).

Дальнейший план решения задачи таков:

1. Записав уравнения прямых AC и BC, определяем координаты точки C как точки пересечения этих прямых.

2. Определяем координаты точки H.

3. Определяем координаты точек B_1 и A_1 и по этим координатам обнаруживаем, что $AB \perp A_1B_1$.

Переходим к решению задачи.

1. Пусть $y = kx + b$ и $y = k'x + b'$ — уравнения прямых AC и BC. Так как прямые проходят соответственно через точки A (1, 0) и B (0, 0), то $b = -k$ и $b' = 0$, поэтому предыдущие уравнения имеют вид:

$$y = kx - k, \quad y = k'x.$$

Из геометрических соображений следует, что $k = \operatorname{tg}(180° - A) = -\operatorname{tg} A$, $k' = \operatorname{tg}(90° + A) = -\operatorname{ctg} A$, отсюда $kk' = 1$. Таким образом, получаем следующие уравнения прямых AC и BC:

$$(AC) \qquad y = kx - k, \qquad (4)$$

$$(BC) \qquad y = \frac{1}{k}x. \qquad (5)$$

Так как прямые (4) и (5) пересекаются, то их угловые коэффициенты не равны, т. е. $k \neq \frac{1}{k}$ или $k^2 - 1 \neq 0$. Это означает, что

$\angle A \neq 45°$. Если $\angle A = 45°$, то $\angle B = 180° - 45° = 135°$, поэтому прямые AC и BC параллельны.

Решив совместно уравнения (4) и (5), получаем координаты их точки пересечения $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}, \frac{k}{k^2-1}\right)$.

2. Точки C и H лежат на одной прямой, параллельной оси ординат, и H лежит на оси абсцисс, поэтому

$$H\left(\frac{k^2}{k^2-1}, 0\right).$$

3. Запишем уравнения прямых HB_1 и HA_1. Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых HA_1 и HB_1, то в силу условий $HA_1 \perp BC$ и $HB_1 \perp AC$ получаем: $k_1 \cdot \frac{1}{k} = -1$ и $k_2 k = -1$. Отсюда $k_1 = -k$, $k_2 = -\frac{1}{k}$. Имея координаты точки H и угловые коэффициенты k_1 и k_2, легко записать уравнения прямых HA_1 и HB_1:

$$(HA_1) \qquad y = -k\left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right), \tag{6}$$

$$(HB_1) \qquad y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right). \tag{7}$$

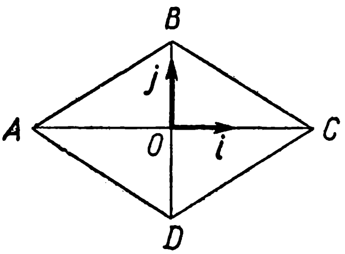
Имея уравнения (4) — (7), можно определить координаты точек $A_1(x_1, y_1)$ и $B_1(x_2, y_2)$. Мы должны доказать, что $A_1B_1 \perp AB$ или A_1B_1 параллельно оси Oy. Для этой цели достаточно показать, что $x_1 = x_2$.

Из уравнений (5) и (6) получаем: $x_1 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$.

Из уравнений (4) и (7) получаем: $x_2 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$. Задача решена.

Задача 4. Вычислить расстояние между противоположными сторонами ромба, если длины его диагоналей равны a и b.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, а O — точка пересечения диагоналей (черт. 99). Примем точку O за начало прямоугольной декартовой системы координат, а оси направим вдоль диагоналей так, чтобы точки C и B лежали на положительных лучах координатных осей. В этой системе вершины ромба будут иметь координаты: $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $D\left(0, -\frac{b}{2}\right)$. Задача сводится к определению расстояния от точки A до пря-



Черт. 99

мой BC. Уравнение прямой BC легче всего записать в отрезках: $\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}=1$ или $2bx+2ay-ab=0$. Расстояние от точки A до этой прямой равно

$$d=\frac{\left|-2b\frac{a}{2}-ab\right|}{\sqrt{4b^2+4a^2}}=\frac{2ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Теоремы и задачи

241. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

242. Доказать, что во всяком треугольнике перпендикуляры, восставленные в серединах сторон, пересекаются в одной точке.

243. Пусть a и b — две произвольные прямые на плоскости. A, B, C — точки на прямой a, а D, E и F — точки на прямой b. Доказать, что точки пересечения прямых: 1) AD и CE; 2) BD и CF; 3) BE и AF — лежат на одной прямой (теорема Паппа).

244. В плоскости треугольника ABC дана точка M. Построены точки A_1, B_1, C_1, симметричные с точкой M относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

245. Пусть C_1, A_1 и B_1 — три точки соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 принадлежали одному пучку (т. е. пересекались в одной точке или были параллельны друг другу), необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}=-1$ (теорема Чевы).

246. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная.

247. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, две вершины которых зафиксированы, а третьи вершины лежат на данной прямой l.

248. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Найти геометрическое место четвертых вершин квадратов, две вершины которых лежат на прямой a, а третьи вершины — на прямой b.

249. Стороны остроугольного треугольника ABC равны: $AB = 5$, $AC = 7$ и высота $BB_1 = 4$. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

250. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний любой внутренней точки от трех его сторон есть величина постоянная.

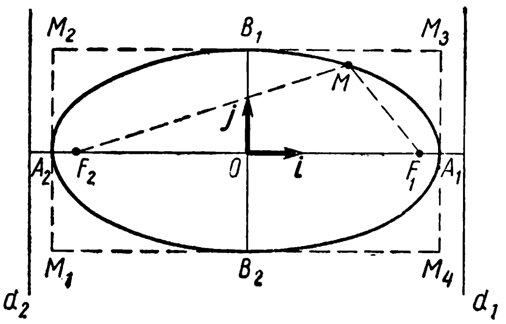
ГЛАВА V

ИЗУЧЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

§ 19. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ЭЛЛИПСА

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная, большая, чем расстояние между F_1 и F_2.

Точки F_1 и F_2 называются ф о к у с а м и эллипса. Обозначим через $2a$ сумму расстояний любой точки эллипса до фокусов, а через $2c$ расстояние между фокусами; по определению $a > c$. Если точки F_1 и F_2 совпадают, то в этом случае, очевидно, эллипс есть окружность радиуса a. Таким образом, окружность есть частный случай эллипса. В этом параграфе выведем уравнение эллипса и изучим форму эллипса по уравнению.



Черт. 100

1. Вывод уравнения эллипса. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало совпало с серединой отрезка F_1F_2, а ось абсцисс с прямой F_1F_2, при этом направление этой оси выберем от точки O к F_1 (черт. 100). Так как $F_1F_2 = 2c$, то в выбранной системе фокусы будут иметь координаты F_1 $(c, 0)$, F_2 $(-c, 0)$. Для произвольной точки M (x, y) эллипса имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad MF_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Обратно, если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют уравнению (1), то точка принадлежит эллипсу. Таким образом, соотношение (1) является **уравнением эллипса** в выбранной системе.

Для того чтобы упростить это уравнение, запишем его в виде $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и обе части возведем в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

или $a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-xc$, $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a-\frac{c}{a}x$. Возведем еще раз это соотношение в квадрат:

$$(x-c)^2+y^2 = a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2 \text{ или } x^2+y^2+c^2 = a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Если ввести обозначение

$$b^2 = a^2-c^2, \tag{2}$$

то из предыдущего соотношения получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Из соотношений (1) мы получили соотношение (3), поэтому если точка лежит на эллипсе, т. е. если ее координаты удовлетворяют уравнению (1), то ее координаты удовлетворяют также уравнению (3). Но обратное утверждение не очевидно. Однако оно справедливо, т. е. если координаты точки удовлетворяют уравнению (3), то точка лежит на эллипсе. В самом деле, пусть координаты произвольной точки плоскости $M(x, y)$ удовлетворяют соотношению (3). Вычислим расстояния $\rho_1 = MF_1$ и $\rho_2 = MF_2$.

$$\rho_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2xc+c^2+b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2} = \sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}.$$

Если $x \leqslant 0$, то $a-\frac{c}{a}x > 0$. Если же $x > 0$, то из соотношения (3) следует, что $x \leqslant a$, поэтому $a-\frac{c}{a}x \geqslant a-\frac{c}{a}a = a-c > 0$. Для любого x имеем: $a-\frac{c}{a}x > 0$ и

$$\rho_1 = a-\frac{c}{a}x. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\rho_2 = a+\frac{c}{a}x. \tag{5}$$

Таким образом, если координаты точки M удовлетворяют уравнению (3), то $MF_1 + MF_2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right) + \left(a + \frac{c}{a}x\right) = 2a$, т. е. точка принадлежит эллипсу. По существу мы доказали, что уравнения (1) и (3) эквивалентны и уравнение (3) является уравнением эллипса. Уравнение (3) называется *каноническим* уравнением эллипса, а выбранная нами система координат — *канонической системой*.

Заметим, что если F_1 и F_2 совпадают, то $c = 0$ и из (2) следует, что $a^2 = b^2$, поэтому уравнение (3) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$. Мы получили уравнение окружности. Мы снова пришли к выводу, что если фокусы эллипса совпадают, то эллипс является окружностью. В общем случае, когда $c \neq 0$, как следует из (2), $b < a$ и уравнение (3) не задает окружность (см. теорему [12. 1]), поэтому возникает необходимость изучения свойств эллипса по уравнению.

2. Общая схема изучения свойств кривой второго порядка по уравнению. Если кривая в некоторой прямоугольной декартовой системе дана уравнением

$$F(x, \quad y) = 0, \tag{6}$$

то можно предложить следующую схему исследования кривой.

а) *Прохождение кривой через начало координат.* Если кривая проходит через начало координат, то координаты точки O (0, 0) должны удовлетворять уравнению (5), т. е. $F(0, 0) = 0$. В противном случае кривая не проходит через точку O.

б) *Определение точки пересечения кривой с осями координат.* Для определения координат точек пересечения кривой с осью абсцисс следует совместно решить уравнение (6) с уравнением оси абсцисс: $y = 0$. Абсциссы этих точек определяются из уравнения $F(x, 0) = 0$. Если это уравнение имеет действительное решение, то кривая пересекается с осью абсцисс, причем число точек пересечений равно числу различных действительных решений этого уравнения. Аналогично решается вопрос о пересечении кривой с осью ординат.

в) *Исследование кривой на симметрию относительно координатной системы.* Здесь речь идет об исследовании кривой на симметрию относительно осей координат и начала координат. Кривая называется симметричной относительно оси ω, если выполнено условие: для каждой точки M кривой, точка M', симметричная M относительно оси ω, также принадлежит кривой. Аналогично определяется симметрия кривой относительно некоторой точки.

Легко показать, что *кривая симметрична относительно оси Oy, если уравнение ее не изменится от замены x на $-x$.* В самом деле, пусть M (x^*, y^*) — точка кривой, тогда $F(x^*, y^*) = 0$. Точка M', симметричная M относительно оси Oy, имеет координаты

M' $(-x^*, y^*)$. Но так как уравнение (6) не меняется при замене x на $-x$, то координаты точки M', очевидно, удовлетворяют этому уравнению, т. е. M' снова лежит на кривой. В частности, если уравнение кривой содержит x только четной степени, то кривая симметрична относительно оси Oy.

Аналогично можно показать, что *кривая симметрична относительно оси Ox, если уравнение ее не изменится от замены y на $-y$.* В частности, если в уравнение кривой y входит только в четной степени, то кривая симметрична относительно оси Ox.

Кривая симметрична относительно начала координат, если ее уравнение не изменится от замены x на $-x$, а y на $-y$. В самом деле, пусть M (x^*, y^*) — точка кривой, тогда F $(x^*, y^*) = 0$. Точка M', симметричная M относительно начала координат, имеет координаты M' $(-x^*, -y^*)$. Но так как уравнение (6) не меняется при замене x на $-x$ и y на $-y$, то координаты точки M' удовлетворяют этому уравнению, т. е. M' снова лежит на кривой.

Заметим, что если кривая одновременно симметрична относительно координатных осей, то она симметрична также относительно начала координат; обратное утверждение не всегда справедливо.

г) Пересечение кривой с прямыми, проходящими через начало координат. Для исследования кривой (6) полезно рассмотреть точки пересечения кривой с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Для нахождения координат этих точек необходимо совместно решить уравнение (6) с уравнением произвольной прямой, проходящей через начало координат: $y = kx$, где k — угловой коэффициент прямой. Абсциссы этих точек определяются из уравнения $F(x, kx) = 0$, а ординаты — из уравнения $y = kx$. Если предыдущее уравнение имеет действительные решения, то кривая пересекается с прямой $y = kx$, причем число точек равно числу различных действительных решений этого уравнения.

д) Определение области изменения переменных, входящих в уравнение кривой. Определение области изменения переменных, входящих в уравнение кривой, дает возможность выделить ту часть плоскости, в которой расположена кривая. Если кривая задана уравнением (6), то удобно преобразовать это уравнение, выразив y как функцию от x или x как функцию от y. Тут следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. При преобразованиях уравнения кривой надо позаботиться о том, чтобы преобразованное уравнение было эквивалентно исходному. Если F $(x, y) = 0$ есть исходное уравнение, а $y = f(x)$ — преобразованное, то координаты любой точки, удовлетворяющей уравнению F $(x, y) = 0$, должны удовлетворять уравнению $y = f(x)$ и наоборот.

Допустим, что мы уравнение кривой привели к виду: $y = f(x)$. Далее следует определить область изменения x, т. е. определить те значения x, при которых переменная y существует и является действительным числом. При этом может оказаться, что область изменения x состоит из нескольких участков. Если через конечные точки этих участков, лежащих на оси абсцисс, провести прямые, параллельные оси ординат, то на плоскости выделится область, в которой расположена кривая.

После этого, по аналогии с предыдущим, следует перейти к определению области изменения переменной y. Проводя прямые, параллельные оси абсцисс, выделяем ту часть плоскости, в которой расположена кривая. Пересечения областей изменения переменных x и y дает часть плоскости, в которой расположена кривая.

е) Построение кривой по точкам. Для того чтобы иметь наглядное представление о расположении кривой на плоскости, полезно построить несколько точек кривой, подобрав координаты этих точек так, чтобы они удовлетворяли уравнению кривой.

3. Изучение свойств эллипса по уравнению. Применим предыдущую схему для изучения свойств эллипса, заданного уравнением (3).

а) Эллипс не проходит через начало канонической системы координат, так как координаты точки O (0, 0) не удовлетворяют уравнению (3).

б) Для определения координат точек пересечения эллипса (3) с осью Ox следует совместно решить уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y=0.$

Решив эту систему, получаем две точки пересечения: A_1 $(a, 0)$, A_2 $(-a, 0)$. Аналогично получаем точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0, b)$, B_2 $(0, -b)$. Таким образом, эллипс с каждой осью координат пересекается в двух точках, симметричных относительно начала координат (черт. 100).

в) Так как переменные x и y в уравнение эллипса входят только в четных степенях, то эллипс симметричен как относительно оси Ox, так и относительно Oy. Отсюда следует, что эллипс симметричен также относительно начала координат.

г) Возьмем произвольную прямую, проходящую через начало координат $y = kx$, и найдем точки пересечения этой прямой с эллипсом (3). Для этого необходимо совместно решить уравнение (3) с уравнением прямой. Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение эллипса, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}=1.$$

Отсюда определяем абсциссы точек пересечений:

$$x^2\,\frac{b^2+k^2a^2}{a^2b^2}=1,\quad x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}.$$

Подставив эти значения в уравнение прямой, получаем ординаты точек пересечений:

$$y=\pm\frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}.$$

Таким образом, каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает эллипс в двух точках, симметричных относительно начала:

$$C_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\ \frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\right),\quad C_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\ \frac{-kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\right).$$

д) Для определения области изменения переменной x решим уравнение (3) относительно x^2:

$$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

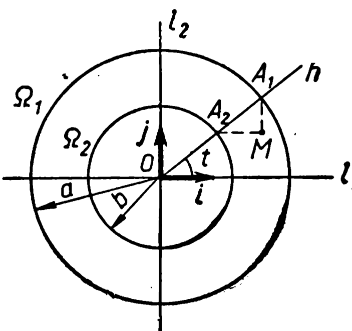
Так как $x^2 \geqslant 0$, то $1-\frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$, или $y^2 \leqslant b^2, -b \leqslant y \leqslant b$. Аналогично получаем область изменения переменной x: $-a \leqslant x \leqslant a$. Мы приходим к выводу, что область изменения переменных определяется неравенствами:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b. \tag{7}$$

Отсюда следует, что точки эллипса расположены внутри прямоугольника $M_1M_2M_3M_4$, изображенного на чертеже 100.

е) Для того чтобы иметь наглядное представление о расположении эллипса на плоскости, следует построить несколько точек эллипса. При этом можно ограничиться точками, лежащими в первой четверти, так как кривая симметрична относительно осей координат. Эллипс изображен на чертеже 100.

4. Параметрическое задание эллипса. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две концентрические окружности с центром в точке O и радиусами a и b $(a > b)$, а l_1 и l_2 — два взаимно перпендикулярных диаметра этих окружностей (черт. 101). Возьмем произвольный луч h, исходящий из точки O, и обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения этого луча с окружностями Ω_1 и Ω_2. Проведем через A_1 прямую, параллельную l_2, а через A_2 — прямую, параллельную l_1, и обозначим через M точку пересечения этих прямых. Рассмотрим геометрическое место G точек M, которое получается при вращении луча h вокруг точки O. Для этой цели введем прямоугольную декартову систему координат, взяв прямые l_1 и l_2 за оси координат. Направления осей указаны на чертеже 101. Выразим координаты точки M (x, y)



Черт. 101

через угол t, образованный лучом h с осью Ox, и через радиусы данных окружностей. Если A_1 (x_1, y_1) и A_2 (x_2, y_2), то, очевидно, $x = x_1$, $y = y_2$. Но $x_1 = a \cos t$, $y_1 = a \sin t$; $x_2 = b \cos t$, $y_2 = b \sin t$, поэтому

$$x = a \cos t, \ y = b \sin t. \tag{8}$$

Мы получили параметрическое задание геометрического места точек. Исключив параметр t, получим уравнение геометрического места в прямоугольных декартовых координатах. Для этой цели запишем предыдущие соотношения в виде:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{b}.$$

Возведем эти соотношения в квадрат и сложим:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ но так как } \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

окончательно получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Мы получили уравнение эллипса с полуосями a и b. Таким образом, все точки рассматриваемого геометрического места G принадлежат эллипсу (9). Однако отсюда еще не следует, что (9) есть уравнение геометрического места G. Для того чтобы это доказать, необходимо убедиться в том, что всякая точка эллипса (9) принадлежит геометрическому месту G. Пусть N $\{x_1, y_1\}$ — точка эллипса (9). Рассмотрим числа $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{b}$. Так как N принадлежит эллипсу, то $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1$, поэтому на числа $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{b}$ можно смотреть как на координаты некоторого единичного вектора в системе $O\boldsymbol{ij}$. Но в этом случае $\frac{x_1}{a} = \cos\varphi$, $\frac{y_1}{b} = \sin\varphi$, где φ — угол, который образует этот вектор с вектором $\boldsymbol{i}$. Таким образом, $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = b \sin\varphi$. Сравнивая эти выражения с соотношениями (8), мы приходим к выводу, что точка N принадлежит геометрическому месту G, так как при $t = \varphi$ получаем $x = x_1$, $y = y_1$. Итак, геометрическое место G совпадает с эллипсом (9). Соотношения (9) называются *параметрическим заданием эллипса*.

Задачи и примеры

251. Почему в определении эллипса требуется, чтобы $a > c$? Какую получим кривую, если а) $a = c$; б) $a < c$?

252. Составить уравнение эллипса, если $F_1F_2 = 8$, а $b = 3$.

253. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что а) $a = 5$, $b = 4$; б) $a + b = 8$, $c = 4$; в) $a = 9$, $c = 3$.

254. Написать уравнение прямой, проходящей через начало канонической системы координат и пересекающей эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ в двух точках, расстояние между которыми равно $4\sqrt{2}$.

255. Найти координаты фокусов эллипса $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$.

256. Через фокус F_1 проведена хорда эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, параллельная канонической оси Oy. Определить длину этой хорды.

257. Пусть хорда, проведенная через фокус F_1 и параллельная оси Oy, пересекает эллипс в точках M_1 и M_2. Определить расстояние точек M_1 и M_2 от фокуса F_2.

258. Найти координаты точки M, принадлежащей эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и удовлетворяющей условию $2MF_1 = MF_2$.

259. Найти координаты точек M, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и равноудаленных от фокусов.

260. Найти условие симметричности кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ относительно биссектрисы координатного угла $(\widehat{i, j})$. Симметричен ли эллипс относительно этой биссектрисы?

261. На эллипсе $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ дана точка $(3, 1)$. Найти координаты точек, симметричных с данной относительно начала координат и координатных осей, и убедиться в том, что эти точки принадлежат эллипсу.

262. Дано каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Написать параметрическое задание этого эллипса.

§ 20. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

В настоящем параграфе рассмотрим основные геометрические свойства эллипса. Предварительно введем некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

1. Определения. а) **Вершинами** эллипса называются точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат. Эллипс имеет четыре вершины, обозначенные на чертеже 100 через A_1, A_2, B_1, B_2.

б) Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **осями эллипса**. Отрезок A_1A_2 называется **большой осью**, а отрезок B_1B_2 — **малой**. Очевидно, $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$.

в) Начало O канонической системы координат называется центром эллипса. Вообще, центром кривой называется точка плоскости, относительно которой симметрична кривая. Ниже будет показано, что эллипс не имеет других центров, за исключением точки O (см. § 30).

г) Расстояние F_1F_2 между фокусами эллипса называется фокальным расстоянием. В соответствии с обозначением, введенным в предыдущем параграфе, фокальное расстояние равно $2c$.

д) Эксцентриситетом эллипса называется число ε, определяемое соотношением: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Очевидно, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Эксцентриситет равен нулю тогда и только тогда, когда эллипс является окружностью. Пусть M — точка эллипса. *Отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами точки M, при этом F_1M называется первым фокальным радиусом, а F_2M — вторым.* Если длины этих отрезков обозначим соответственно через ρ_1 и ρ_2, то из формул (4) и (5) предыдущего параграфа следует, что

$$\rho_1 = a - \varepsilon x, \tag{1}$$
$$\rho_2 = a + \varepsilon x, \tag{2}$$

где a — длина большой полуоси, ε — эксцентриситет, а x — абсцисса точки.

ж) *Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.* Директриса, расположенная по ту же сторону от малой оси, что и фокус F_1, называется первой, а другая директриса — второй. Очевидно, директрисы не пересекают эллипс, так как $\varepsilon < 1$ и $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Окружность, как частный случай эллипса, не имеет директрис, так как для нее $\varepsilon = 0$. Любой эллипс, отличный от окружности, имеет две директрисы, расположенные симметрично относительно оси Oy (черт. 100).

Пример 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) Вершины эллипса имеют координаты

$$A_1\,(5,\ 0),\ A_2\,(-5,\ 0),\ B_1\,(0,\ 3),\ B_2\,(0,\ -3).$$

б) Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а большая полуось $a = 3$.

в) Фокальное расстояние $2c = 8$, а малая полуось $b = 4$.

г) Прямые $x = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$ служат директрисами эллипса, а малая полуось равна 2.

Решение. а) Так как первая координата вершины A_1 равна 5, а вторая координата точки B_1 равна 3, то $a = 5$, $b = 3$. Отсюда следует, что эллипс имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

б) $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, но $a=3$, поэтому $c=\sqrt{3}$, $b^2=a^2-c^2=9-3=6$, $b=\sqrt{6}$. Таким образом, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

в) $c=4$, $a^2=b^2+c^2=16+16=32$; $a=4\sqrt{2}$. Мы получаем следующее каноническое уравнение: $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

г) Директриса отстоит от начала координат на расстоянии $\frac{a^2}{c}$, поэтому $\frac{a^2}{c}=\frac{8}{\sqrt{3}}$. Но $b^2=4$, поэтому

$$c^2=a^2-b^2=\frac{8}{\sqrt{3}}c-4;\quad c^2-\frac{8}{\sqrt{3}}c+4=0.$$

$$c=\frac{4}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{\frac{16}{3}-4}=\frac{4}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{3}};\ c_1=\frac{6}{\sqrt{3}},\ c_2=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$a_1^2=b^2+c_1^2=\frac{36}{3}+4=16;\ a_2^2=b^2+c_2^2=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}.$$

Существуют два эллипса, удовлетворяющие условиям задачи:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1;\quad \frac{x^2}{\frac{16}{3}}+\frac{y^2}{4}=1.$$

2. Зависимость формы эллипса от эксцентриситета. Из курса элементарной геометрии известно, что две фигуры F и F' называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одна фигура переходит в другую. Докажем теорему.

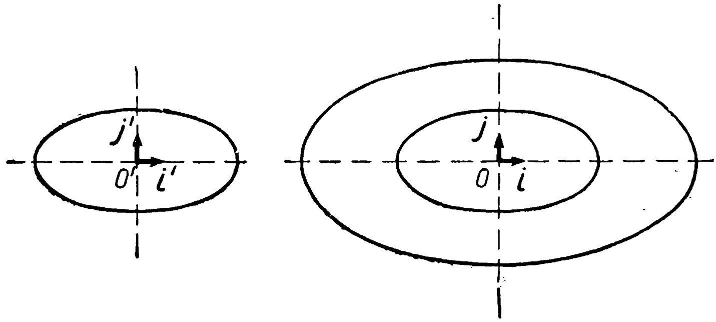
Теорема [20. 1]. *Два эллипса, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.*

Доказательство. Если эксцентриситеты эллипсов равны нулю, то эллипсы являются окружностями. В этом случае теорема, очевидно, справедлива, поэтому докажем теорему для того случая, когда $\varepsilon\neq 0$.

Пусть два эллипса, заданные каждый в своей канонической системе уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\tilde{a}^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{b}^2}=1, \tag{4}$$



Черт. 102

имеют один и тот же эксцентриситет ε. Пусть Oij и $O'i'j'$ — канонические системы данных эллипсов. Рассмотрим движение, которое переводит систему $O'i'j'$ в Oij. При этом эллипс (4) перейдет в равный ему эллипс, который в системе Oij задается уравнением (черт. 102):

$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1. \tag{4'}$$

Так как $\frac{c}{a}=\varepsilon$ и $\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}=\varepsilon$, то $\frac{\tilde{c}}{c}=\frac{\tilde{a}}{a}$. Если ввести обозначение $k=\frac{\tilde{c}}{c}=\frac{\tilde{a}}{a}$, то легко показать, что $\frac{\tilde{b}}{b}=k$. В самом деле,

$$\tilde{b}^2=\tilde{a}^2-\tilde{c}^2=k^2(a^2-c^2)=k^2b^2.$$

Отсюда, так как $\tilde{b}>0$, $b>0$, $k>0$, имеем: $\tilde{b}=kb$. Подставив значения $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в уравнение (4′), получаем:

$$\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1. \tag{5}$$

Рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k. Если точка $M(x, y)$ при этой гомотетии переходит в $M'(x', y')$, то $\overline{OM'}=k\overline{OM}$, поэтому $x'=kx$, $y'=ky$. При этой гомотетии эллипс (3) переходит в эллипс $\frac{x'^2}{k^2a^2}+\frac{y'^2}{k^2b^2}=1$, который совпадает с эллипсом (5). Так как эллипс (5) равен эллипсу (4), то эллипсы (3) и (4) подобны.

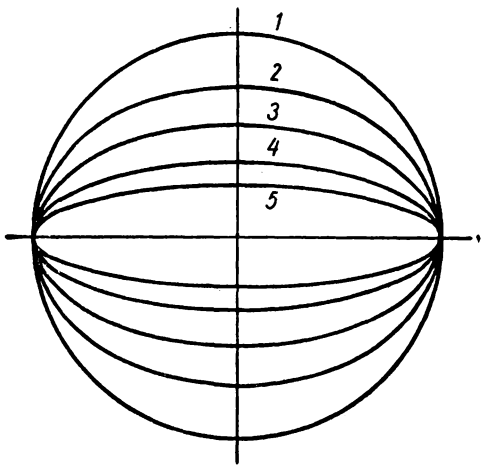
Выясним, какова зависимость формы эллипса от эксцентриситета. Для этой цели выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$c = \varepsilon a$, $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$. Отсюда, так как $b > 0$, $a > 0$, $1 - \varepsilon^2 > 0$, получаем:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \tag{6}$$

Рассмотрим систему эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось, но разные эксцентриситеты. Из соотношения (6) следует, что, чем больше ε, тем меньше b, и при ε, стремящемся к единице, число b стремится к нулю. Из этого соотношения также следует, что, чем меньше ε, тем больше b, и при ε, равном нулю, $b = a$, т. е. эллипс является окружностью. Таким образом, с увеличением эксцентриситета уменьшается «ширина» эллипса и он делается более продолговатым. На чертеже 103 изображены эллипсы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам:

$$0 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_5.$$



Черт. 103

3. Директориальное свойство эллипса.

Теорема [20. 2]. (*Директориальное свойство.*) *Эллипс есть геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F к расстояниям до одноименной директрисы d постоянно и равно эксцентриситету.*

Доказательство. Пусть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — данный эллипс, а F и d — соответственно первый фокус и первая директриса. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ эллипса и вычислим расстояния FM и MH, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису d. Согласно формуле (1) $FM = a - \varepsilon x$. С другой стороны, $MH = \frac{a}{\varepsilon} - x$ при любом расположении точки M. Таким образом,

$$\frac{FM}{MH} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Обратно, пусть для точки $M(x, y)$ плоскости $\frac{MF}{MH} = \varepsilon$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую d,

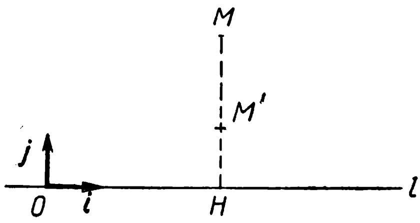
$$MF = \sqrt{(x-c)^2+y^2},\ MH = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|,$$

поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|.$$

Возведем это соотношение в квадрат:

$$(x-c)^2+y^2 = \varepsilon^2 \left(x^2 - \frac{2xa}{\varepsilon} + \frac{a^2}{\varepsilon^2} \right)$$



Черт. 104

или $x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2xa\varepsilon + a^2$. Отсюда после элементарных преобразований получаем: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Мы пришли к выводу, что каждая точка геометрического места принадлежит эллипсу.

4. Эллипс как образ окружности при сжатии. Пусть l—некоторая прямая на плоскости. *Сжатием к прямой l называется такое преобразование точек плоскости, при котором каждая точка M переходит в точку M', удовлетворяющую условию*

$$\overline{HM'} = k\overline{HM}, \tag{7}$$

где $0 < k < 1$, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l (черт. 104). Если M не лежит на l, то $M'H < MH$. Точки прямой l, как видно из соотношения (7), переходят сами в себя.

Для того чтобы записать аналитическое задание преобразования сжатия, возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой l. Если $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $H(x_1, y_1)$, то из соотношения (7) следует, что

$$x' - x_1 = k(x - x_1), \quad y' - y_1 = k(y - y_1). \tag{8}$$

Но так как точки M, M' и H лежат на прямой, параллельной оси Oy, и H лежит на оси Ox, то $y_1 = 0$, $x_1 = x = x'$. Подставив эти значения в соотношение (8), окончательно получаем:

$$x' = x, \quad y' = ky. \tag{9}$$

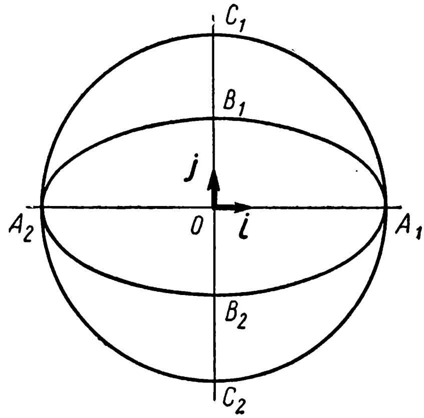
Это и есть аналитическое задание преобразования сжатия к оси Ox.

Докажем следующую теорему:

Теорема [20. 3]. *Любой эллипс, отличный от окружности, может быть рассмотрен как образ некоторой окружности при преобразовании сжатия к диаметру.*

Доказательство. Пусть $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллипс с осями A_1A_2 и B_1B_2, где A_1A_2 — большая ось (черт. 105). Построим окружность на диаметре A_1A_2 и обозначим через C_1 и C_2 точки пересечения этой окружности с канонической осью Oy (см. черт. 105). Рассмотрим преобразование сжатия к прямой A_1A_2, при котором точка C_1 переходит в B_1. Так как $OC_1=a, OB_1=b$, то $k=\frac{OB_1}{OC_1}=\frac{b}{a}$. Отсюда и из соотношений (9) следует, что рассматриваемое сжатие аналитически задается так:

$$x'=x,\ y'=\frac{b}{a}y. \qquad (10)$$



Черт. 105

Рассмотрим образ построенной нами окружности при преобразовании (10). Окружность, очевидно, имеет уравнение $x^2+y^2=a^2$. Для того чтобы получить уравнение образа этой окружности, подставим в предыдущее уравнение значения x и y из соотношений (10):

$$y=\frac{a}{b}y',\ x=x',\quad \left(\frac{a}{b}y'\right)^2+x'^2=a^2,\quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Мы получили уравнение исходного эллипса. Таким образом, этот эллипс является образом построенной нами окружности при преобразовании сжатия (10). Теорема доказана.

5. Касательная к эллипсу. Как известно, касательной к кривой в данной точке M называется предельное положение секущей MM', проходящей через точку M, при стремлении M' к точке M.

Задача 1. Дана точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая эллипсу (3). Написать уравнение касательной к ней в точке M_0.

Решение. Пусть

$$x=x_0+\alpha t,\ y=y_0+\beta t \qquad (11)$$

— параметрическое задание некоторой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Определим параметры точек пересечения этой прямой с эллипсом. Для этого достаточно подставить значения x, y в уравнение эллипса и решить полученное уравнение относительно t:

$$\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2}=1,\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{2\alpha x_0 t+\alpha^2t^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{2\beta y_0 t+\beta^2 t^2}{b^2}=1.$$

Так как точка M_0 (x_0, y_0) лежит на эллипсе, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3), поэтому предыдущее соотношение упрощается:

$$\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}+\frac{2\beta y_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0.$$

Отсюда получаем параметры точек пересечений эллипса и прямой (11).

$$t_1=0,\quad t_2=-\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}+\frac{2\beta y_0}{b^2}\right):\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right).$$

Заметим, что для любой прямой $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\neq 0$, поэтому t_2 всегда существует. Очевидно, $t_1=0$ есть параметр точки M_0. Если вторая точка пересечения стремится к M_0, то t_2 стремится к нулю, поэтому прямая (11) будет касательной тогда и только тогда, когда

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \text{ или } \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, касательная параллельна вектору $\left\{-\frac{y_0}{b^2},\ \frac{x_0}{a^2}\right\}$ и, следовательно, имеет уравнение:

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0\\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0.$$

Так как (x_0, y_0) — точка эллипса, то $-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-1$ и окончательно получаем:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{12}$$

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [20. 4]. *В каждой точке* M_0 (x_0, y_0) *эллипса* (3) *имеется касательная, определяемая уравнением* (12).

Задача 2. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ в точке $M_0\left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

Решение. Так как данная точка M_0 принадлежит эллипсу, то, подставив координаты этой точки в соотношение (12), получаем уравнение касательной: $\frac{x}{9}+\frac{y\cdot 4\sqrt{2}}{3\cdot 4}=1$ или $x+3\sqrt{2}y-9=0$.

Задача 3. Написать уравнение касательной, проходящей через точку $A(10, -8)$, к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Решение. В данном случае точка A не принадлежит эллипсу, поэтому задача решается несколько иначе.

Пусть соотношение (12) является уравнением искомой касательной. Так как точка A (10, —8) лежит на этой касательной и $a^2=25$, $b^2=16$, то

$$\frac{10x_0}{25}-\frac{8y_0}{16}=1 \quad \text{или} \quad \frac{2x_0}{5}-\frac{y_0}{2}=1. \tag{13}$$

Точка M_0 (x_0, y_0) лежит на данном эллипсе, поэтому

$$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1.$$

Решив совместно уравнения (12) и (13), получаем координаты двух точек касания:

$$M_0\left(\frac{5(1+\sqrt{7})}{4},\ -1+\sqrt{7}\right),\ N_0\left(\frac{5(1-\sqrt{7})}{4},\ -1-\sqrt{7}\right).$$

Подставив эти значения, а также значения a и b в соотношение (12), получаем уравнения двух касательных:

$$\frac{1+\sqrt{7}}{20}x+\frac{\sqrt{7}-1}{16}y=1;\quad \frac{1-\sqrt{7}}{20}x-\frac{1+\sqrt{7}}{16}y=1.$$

Задача 4. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу равно квадрату малой полуоси.

Решение. Пусть эллипс задан уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Фокусы F_1 и F_2 этого эллипса имеют координаты: $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Возьмем произвольную точку M_0 (x_0, y_0) данного эллипса и запишем уравнение касательной в этой точке:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad xx_0b^2+yy_0a^2-a^2b^2=0.$$

Расстояния этой касательной до фокусов F_1 и F_2 определяются соотношениями:

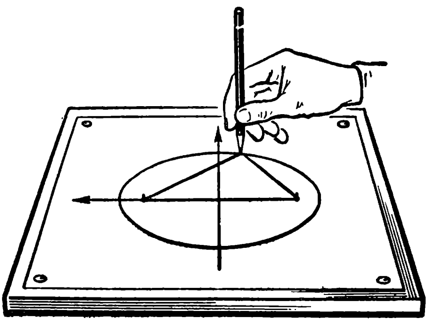
$$\rho_1=\frac{|x_0cb^2-a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4+y_0^2a^4}};\quad \rho_2=\frac{|x_0cb^2+a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4+y_0^2b^4}}.$$

Отсюда

$$\rho_1\rho_2 = \frac{|x_0cb^2 - a^2b^2|\,|x_0cb^2 + a^2b^2|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4} = \frac{|x_0^2c^2b^4 - a^4b^4|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}.$$

Учитывая, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, получаем: $y_0^2a^2 = a^2b^2 - x_0^2b^2$. Подставив это значение в предыдущее соотношение, будем иметь:

$$\rho_1\rho_2 = \frac{|x_0^2c^2b^4 - a^4b^4|}{|x_0^2b^4 + a^4b^2 - x_0^2b^2a^2|} = \left|\frac{x_0^2c^2b^4 - a^4b^4}{a^4b^2 - x_0^2b^2c^2}\right| = b^2.$$

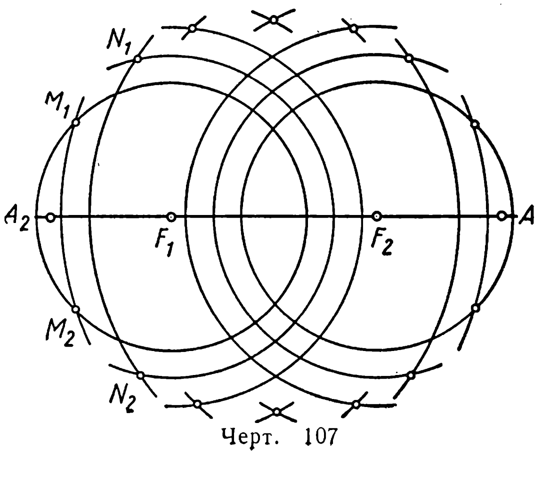


Черт. 106

6. Построение эллипса.

а) Вычерчивание эллипса, исходя из определения. Определение эллипса дает возможность указать очень простой способ его построения. Возьмем кусок нитки длиной $2a$ и концы ее закрепим на чертежной доске в фокусах эллипса. Если оттянуть нитку кончиком карандаша, как показано на чертеже 106, и передвигать карандаш, держа все время нитку натянутой, то карандаш начертит на доске эллипс с данными фокусами, длина большой оси которого равна $2a$.

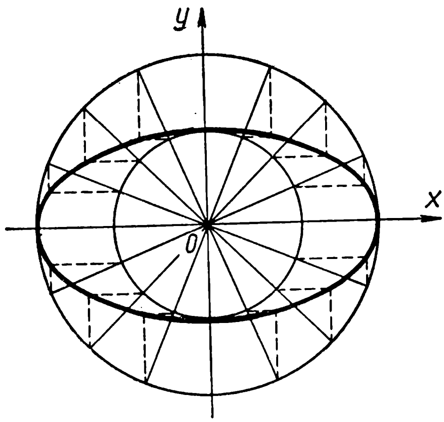
б) Построение точек эллипса при помощи циркуля по данной большой оси и фокусам. Пользуясь определением эллипса можно указать способ построения точек эллипса при помощи циркуля, если дана большая ось и фокусы. Пусть A_1A_2 — большая ось, а F_1 и F_2 — фокусы эллипса (черт. 107). Произвольным раствором циркуля начертим окружность с центром в точке F_1, а затем радиусом, дополнительным по длине к ее радиусу до A_1A_2, начертим другую окружность с



Черт. 107

центром в точке F_2. Точки пересечения этих окружностей принадлежат эллипсу. Выполнив это построение различными растворами циркуля, получаем ряд точек, принадлежащих эллипсу.

в) Построение эллипса по осям. При выводе параметрического уравнения эллипса (см. п. 4, § 19) по существу был указан способ построения точек эллипса, если даны полуоси эллипса. Начертим оси эллипса и на них как на диаметрах построим две концентрические окружности (черт. 108). Проведем ряд радиусов большой окружности. Через концы этих радиусов проведем прямые, параллельные малой оси, а через точки пересечения этих радиусов с меньшей окружностью — прямые, параллельные большой оси. Тогда точки пересечения прямых, соответствующих одному и тому же радиусу, будут точками эллипса с заданными осями (черт. 108).



Черт. 108

Вопросы, упражнения и задачи

263. Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — вершины эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Вычислить расстояния между любыми двумя вершинами.

264. Составить каноническое уравнение эллипса по следующим данным:

а) полуоси его равны 5 и 3;

б) эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$, большая полуось $a=3$;

в) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$.

265. Определить фокусы, эксцентриситет и директрисы эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

266. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

б) расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

267. Вычислить расстояние между директрисами эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$.

268. Пусть ε — эксцентриситет эллипса, а m — расстояние от фокуса до одноименной директрисы. Выразить a, b и c через ε и m.

269. Пользуясь предыдущей задачей, доказать теорему: даны точка F, прямая l, не проходящая через эту точку, и число $\varepsilon < 1$. Существует один и только один эллипс, для которого F и l являются односторонними фокусом и директрисой, а ε — эксцентриситетом.

270. Вычислить малую полуось b, если $a = 4$ и а) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$; б) $\varepsilon_2 = 0$; в) $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$.

271. Дан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Вычислить расстояния от концов большой оси до одной из директрис.

272. Доказать, что при сжатии к большой оси эллипс переходит в эллипс.

273. Эллипс с эксцентриситетом ε подвергается преобразованию сжатия к большой оси с коэффициентом k. Выразить эксцентриситет ε' образа данного эллипса через ε и k и показать, что $\varepsilon' > \varepsilon$.

274. Дан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$. Написать уравнение касательной в точке $(\sqrt{5}, 2)$.

275. Найти те касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, которые параллельны прямой $2x - y + 17 = 0$.

276. Доказать, что отрезок касательной к эллипсу в любой точке, заключенный между касательными, проведенными в вершинах, лежащих на большой оси, виден из фокусов под прямым углом.

277. Доказать, что всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки прикосновения.

§ 21. ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 *есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между* F_1 *и* F_2.

Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы, а длина отрезка F_1F_2 — фокальным расстоянием.

Обозначим через $2a$ абсолютную величину разности расстояний любой точки гиперболы до фокусов, а через $2c$ — расстояние между фокусами; по определению $c > a$. Мы предполагаем, что $a > 0$, поэтому $c > 0$ и F_1 не совпадает с F_2.

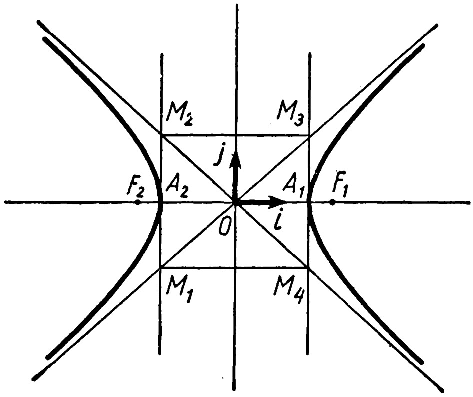
1. Вывод уравнения гиперболы. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало O совпало с серединой отрезка F_1F_2, ось абсцисс — с прямой F_2F_1 и направления осей Ox и Oy возьмем так, как показано на чертеже 109. Так как $F_1F_2 = 2c$, то в выбранной системе фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

поэтому

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \tag{1}$$

Обратно, если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют уравнению (1), то точка принадлежит гиперболе. Таким образом, соотношение (1) является **уравнением гиперболы** в выбранной системе.



Черт. 109

Для того чтобы упростить это уравнение, запишем его в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и обе части возведем в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

или

$$\mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc; \quad \mp\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Возведем еще раз это соотношение в квадрат: $(x-c)^2+y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$. После элементарных преобразований, если ввести обозначение

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{2}$$

то предыдущее уравнение можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Из соотношения (1) мы получили соотношение (3), поэтому если точка лежит на гиперболе, т. е. если ее координаты удовлетворяют уравнению (1), то ее координаты удовлетворяют уравнению (3). Однако отсюда еще не следует, что (3) есть уравнение гиперболы. Так же, как и в случае эллипса, следует показать, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3), то точка принадлежит гиперболе.

Пусть M (x, y) — точка плоскости, координаты которой удовлетворяют соотношению (3). Вычислим расстояния $\rho_1 = MF_1$ и $\rho_2 = MF_2$.

$$\rho_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2} =$$
$$= \sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x-a\right|.$$

Из соотношения (3) следует, что $|x| \geqslant a$, следовательно, если $x > 0$, то $\frac{c}{a}x - a > 0$ и $\rho_1 = \frac{c}{a}x - a$. Если $x < 0$, то $\frac{c}{a}x-a<0$, поэтому $\rho_1 = a - \frac{c}{a}x$. Итак, мы пришли к выводу, что

$$\text{если } x > 0, \text{ то } \rho_1 = \frac{c}{a}x - a, \tag{4}$$

$$\text{если } x < 0, \text{ то } \rho_1 = a - \frac{c}{a}x. \tag{4'}$$

Аналогично можно показать, что

$$\text{если } x > 0, \text{ то } \rho_2 = \frac{c}{a}x + a, \tag{5}$$

$$\text{если } x < 0, \text{ то } \rho_2 = -\frac{c}{a}x - a. \tag{5'}$$

Таким образом, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3) и $x > 0$, то

$$|MF_1 - MF_2| = \left|\left(\frac{c}{a}x - a\right) - \left(\frac{c}{a}x + a\right)\right| = 2a,$$

т. е. точка принадлежит эллипсу. Если $x < 0$, то, пользуясь соотношениями (4′) и (5′), получаем аналогичный результат. Мы доказали, что соотношение (3) является уравнением гиперболы. Оно называется *каноническим уравнением*, а выбранная нами система — *канонической системой*.

2. Изучение свойств гиперболы по каноническому уравнению. Применим общую схему изучения свойств кривой, изложенную в п. 2, § 19, к гиперболе, заданной уравнением (3). При этом во многом это исследование будет аналогичным исследованию свойств эллипса (см. п. 3, § 19).

а) Гипербола не проходит через начало канонической системы координат.

б) Гипербола пересекает ось Ox в двух точках: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Однако, в отличие от случая эллипса, она не пересекает ось Oy, так как система $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=0$ не имеет действительных решений. Точки A_1 и A_2 называются **вершинами**, а отрезок A_1A_2 — **действительной осью гиперболы**.

в) Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, так как переменные x и y входят в уравнение гиперболы только в четных степенях. Поэтому начало канонической системы координат называется **центром гиперболы**.

г) Выясним вопрос о взаимном расположении прямой, проходящей через начало координат с гиперболой. Для этой цели необходимо исследовать вопрос о существовании решений системы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=kx. \tag{6}$$

Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение гиперболы, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2x^2}{b^2}=1, \quad x^2(b^2-k^2a^2)=a^2b^2. \tag{7}$$

Нас интересуют действительные решения этого уравнения. Возможны три случая:

1) $b^2-k^2a^2>0$. Уравнение имеет два действительных решения:

$$x_1=\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}, \quad x_2=-\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}.$$

В этом случае прямая $y=kx$ пересекает гиперболу (3) в двух точках, симметричных относительно начала координат:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right), \quad M_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}, \frac{-kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right).$$

2) $b^2-k^2a^2=0$. В этом случае уравнение (7) не имеет ни действительных, ни комплексных решений. Соответственно этому система (6) несовместна. Геометрически это означает, что прямые $y=kx$ в этом случае не пересекаются с гиперболой.

3) $b^2-k^2a^2<0$. Система уравнений (6) имеет комплексные решения, поэтому и в этом случае прямая $y=kx$ не пересекает гиперболу.

Теперь выясним, как расположены прямые, соответствующие каждому из этих случаев. Так как $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный прямой с осью Ox, то:

1) $k^2a^2<b^2$, $k^2<\frac{b^2}{a^2}$, $-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}<\operatorname{tg}\alpha<\frac{b}{a}$,

2) $k^2a^2 = b^2$, $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$, $k_1 = \frac{b}{a}$, $k_2 = -\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{b}{a}$;

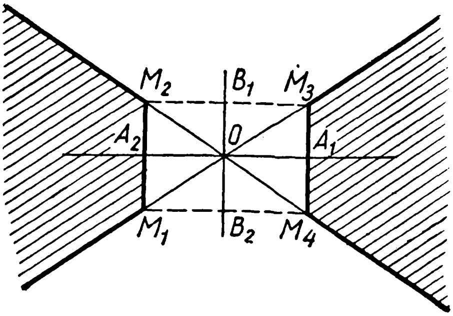
3) $k^2a^2 > b^2$, $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$, $k > \frac{b}{a}$, $k < -\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha > \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha < -\frac{b}{a}$.

Эти неравенства легко интерпретировать геометрически, если построить прямоугольник со сторонами $2\,a$ и $2\,b$ так, чтобы стороны были параллельны осям координат, а центр совпадал с началом На чертеже 109 этот прямоугольник обозначен через $M_1M_2M_3M_4$. Случаю 1) соответствуют прямые, расположенные внутри вертикальных углов M_1OM_2 и M_3OM_4. Случаю 2) соответствуют две прямые M_1M_3 и M_2M_4. Случаю 3) соответствуют прямые, расположенные внутри вертикальных углов M_2OM_3 и M_1OM_4.

Итак, только прямые, проходящие через начало координат и расположенные внутри вертикальных углов M_1OM_2 и M_3OM_4, пересекают гиперболу.

д) Предыдущее исследование в какой-то степени определяет область расположения точек гиперболы. В самом деле, для *прямых M_2M_4 и M_1M_3 и внутри вертикальных углов M_2OM_3 и M_1OM_4 нет ни одной точки гиперболы, поэтому гипербола всеми своими точками расположена внутри вертикальных углов M_1OM_2* и M_3OM_4. Для того чтобы уточнить область расположения точек, заметим, что из уравнения (3) следует: $|x| \geqslant a$ или $x \geqslant a$, $x \leqslant -a$. Таким образом, внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми M_1M_2 и M_3M_4, нет ни одной точки гиперболы. Сопоставляя эти результаты, мы приходим к выводу, что гипербола всеми своими точками расположена в области, заштрихованной на чертеже 110. Отсюда следует, что, в отличие от эллипса, гипербола состоит из двух частей (ветвей), каждая из которых симметрична другой относительно оси Oy.

3. **Асимптоты гиперболы.** *Прямые, проходящие через начало канонической системы координат и имеющие угловые коэффициенты $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$ — называются* ***асимптотами гиперболы.*** Асимптоты — это те прямые, которые соответствуют случаю 2) пункта г) предыдущего исследования. На чертежах 109 и 110 этими прямыми являются M_2M_4 и M_1M_3. Они определяют границу области, в которой расположена гипербола. Докажем следующую теорему, которая поясняет термин «асимптота».



Черт. 110

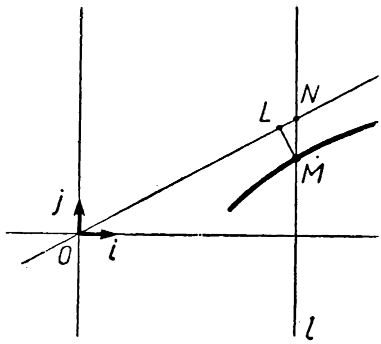
Теорема [21. 1]. *Точки гиперболы по мере удаления* *от оси Оу неограниченно (асимптотически) приближаются к соответствующим асимптотам, т. е. расстояние между точкой гиперболы и соответствующей асимптотой при увеличении х уменьшается, стремясь к нулю, но не достигая нуля.*

Доказательство. Так как гипербола симметрична относительно осей координат, то достаточно доказать теорему для точек, лежащих в первой четверти. Пусть $x = p$ — произвольная прямая l, перпендикулярная оси Ox. Обозначим через M точку пересечения этой прямой с гиперболой, а через N — с асимптотой (черт. 111). Для нахождения координат точки M следует совместно решить систему $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = p$.

$$\frac{p^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}.$$

Таким образом, точка M имеет координаты:

$$M\left(p, \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}\right).$$



Черт. 111

Если $p > a$, то эти координаты действительны.

Координаты точки N определяются из системы: $x = p$, $y = \frac{b}{a}x$; $N\left(p, \frac{b}{a}p\right)$. Так как

$$\frac{b}{a}p > \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2},$$

то точка N лежит выше точки M, поэтому

$$MN = \frac{b}{a}p - \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2} = \frac{b}{a}\frac{a^2}{p + \sqrt{p^2 - a^2}} = \frac{ab}{p + \sqrt{p^2 - a^2}}.$$

Пусть LM — расстояние от точки M до соответствующей асимптоты. Так как $LM < NM$, то

$$LM < \frac{ab}{p + \sqrt{p^2 - a^2}}. \tag{8}$$

При удалении точки M от оси ординат p растет, поэтому выражение, находящееся в первой части неравенства (8), уменьшается. При p, стремящемся к бесконечности, длина отрезка LM стремится к нулю. Теорема доказана.

Предыдущее исследование дает полное представление о форме гиперболы. Гипербола изображена на чертеже 109.

4. Эксцентриситет гиперболы. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется э к сцентриситетом гиперболы. Так как $c > a$, то эксцентриситет любой гиперболы больше единицы. По аналогии с теоремой [20. 1] может быть доказана теорема, доказательство которой представляем читателю.

Теорема [21. 2]. *Две гиперболы, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.*

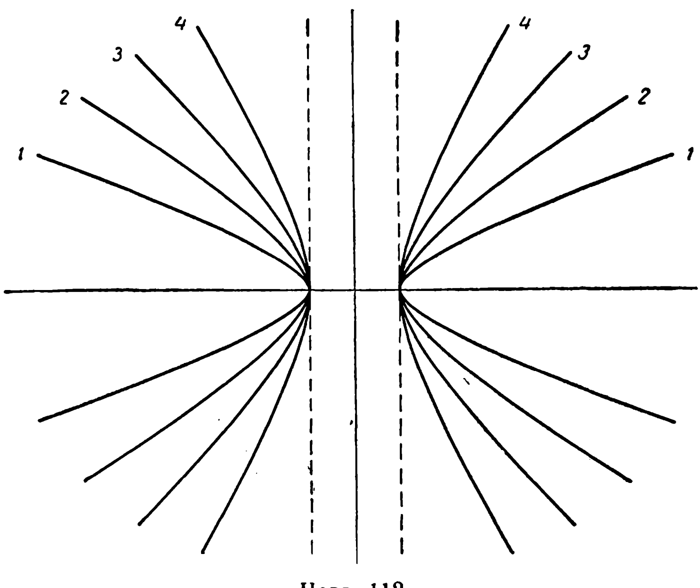
Выясним, какова зависимость формы гиперболы от эксцентриситета. Для этой цели выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$$c = \varepsilon a, \quad b^2 = c^2 - a^2 = \varepsilon^2 a^2 - a^2 = a^2 (\varepsilon^2 - 1),$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \tag{9}$$

Рассмотрим систему гипербол, имеющих одну и ту же действительную ось, но разные эксцентриситеты. Из соотношения (9) следует, что, чем больше эксцентриситет, тем больше $\frac{b}{a}$, т.е. угловой коэффициент асимптот. Из этого же соотношения следует, что, чем меньше ε, тем меньше $\frac{b}{a}$, и при ε, стремящемся к единице, отношение $\frac{b}{a}$ стремится к нулю, т. е. асимптота стремится к оси Ox.

На чертеже 112 изображены гиперболы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4$.



Черт. 112

5. Директориальное свойство гиперболы. *Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные конической оси Oy и отстоящие от этой оси на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.* Директриса, расположенная по ту же сторону от оси Oy, что и фокус F_1, называется первой, а другая директриса — второй.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие фокальных радиусов точек гиперболы, аналогичное соответствующему понятию для эллипса. Пусть M — точка гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M называются соответственно первым и вторым фокальными радиусами гиперболы. Если длины этих отрезков обозначить через ρ_1 и ρ_2, то из формул (4), (4′), (5), (5′) следует, что

$$\text{при } x > 0 \ \rho_1 = \varepsilon x - a, \ \rho_2 = \varepsilon x + a, \tag{10}$$

$$\text{при } x < 0 \ \rho_1 = a - \varepsilon x, \ \rho_2 = -\varepsilon x - a. \tag{11}$$

Теорема [21. 3]. (*Директориальное свойство.*) *Гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F к соответствующим расстояниям до одноименной директрисы d постоянно и равно эксцентриситету.*

Доказательство. Пусть $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — данная гипербола, а F и d — соответственно первый фокус и первая директриса. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ гиперболы и вычислим расстояния FM и MH, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису d. Если $x > 0$, то согласно формуле (10) $FM = \varepsilon x - a$. С другой стороны, расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы, заданной уравнением $x = \frac{a}{\varepsilon}$, равно:

$$MH = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{x\varepsilon - a}{\varepsilon} \right| = \frac{|x\varepsilon - a|}{\varepsilon}.$$

В данном случае $x \geqslant a$, $\varepsilon > 1$, поэтому $|x\varepsilon - a| = x\varepsilon - a$. Таким образом,

$$\frac{FM}{MH} = \frac{\varepsilon x - a}{\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Если $x < 0$, то согласно (11) $FM = a - \varepsilon x$, $MH = \frac{|x\varepsilon - a|}{\varepsilon}$. В этом случае $x < a$, $|x\varepsilon - a| = a - \varepsilon x$, $\frac{FM}{MH} = \varepsilon$. Мы показали, что для каждой точки M гиперболы $\frac{FM}{MH} = \varepsilon$. Обратно, пусть для точки $M(x, y)$ плоскости $\frac{MF}{MH} = \varepsilon$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую d:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2+y^2},\ MH = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \varepsilon\ \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} = |\varepsilon x - a|.$$

После возведения этого соотношения в квадрат получаем: $x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2xa\varepsilon + a^2$. Отсюда после элементарных преобразований будем иметь: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Мы пришли к выводу, что каждая точка геометрического места принадлежит гиперболе.

Пример 1. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот гиперболы: $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Решение. Для решения задачи достаточно определить полуоси a и b и фокальное расстояние $2c$, так как по этим данным легко определить все, что требуется в задаче.

Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Отсюда следует, что $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{4} = 2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Если F_1 и F_2 — фокусы гиперболы, то

$$F_1(\sqrt{13},\ 0);\ F_2(-\sqrt{13},\ 0);\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Директрисами называются прямые, определяемые в канонической системе уравнениями: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$. В данном случае

$$x = -\frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = -\frac{9\sqrt{13}}{13};\ x = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями:

$$y = \frac{b}{a}x,\quad y = -\frac{b}{a}x.$$

В данном случае $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$.

6. Касательная к гиперболе.

Задача 1. Дана точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая гиперболе (3). Написать уравнение касательной к ней в точке M_0.

Решение. Пусть

$$x = x_0 + \alpha t,\quad y = y_0 + \beta t \tag{12}$$

параметрическое задание некоторой прямой, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0). Определим параметры точек пересечения этой прямой с гиперболой. Для этого подставим значения x, y в уравнение гиперболы и решим полученное уравнение относительно t. По аналогии с выкладками п. 5, § 20, получаем:

$$\left(\frac{2xx_0}{a^2}-\frac{2\beta y_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0.$$

Так же, как и в случае эллипса, отсюда мы заключаем, что прямая будет касательной тогда и только тогда, когда

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}-\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, касательная параллельна вектору $\left\{\frac{y_0}{b^2},\ \frac{x_0}{a^2}\right\}$ и, следовательно, имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда после элементарных преобразований окончательно получаем:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{13}$$

Пример 2. Написать уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ в точке M_0 $(8,\ 5\sqrt{3})$.

Решение. Так как точка M_0 принадлежит гиперболе, то, подставив координаты точки M_0 $(8,\ 5\sqrt{3})$ и значения a и b в соотношение (13), получаем уравнение касательной:

$$\frac{x\cdot 8}{16}-\frac{y\cdot 5\sqrt{3}}{25}=1 \quad \text{или} \quad 5x-2\sqrt{3}y-10=0.$$

Задача 2. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке соприкосновения пополам.

Решение. Пусть $M_0(x_0,\ y_0)$ — произвольная точка гиперболы (3). Касательная в этой точке имеет уравнение (13). Найдем точки пересечения этой прямой с асимптотами и докажем, что середина отрезка, образованного этими точками, совпадает с точкой M_0.

Асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x, \tag{14}$$

поэтому координаты точек пересечений прямой (13) с асимптотами определяются при совместном решении уравнения (13) с каждым из уравнений (14):

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad y = \frac{b}{a}x; \tag{15}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{16}$$

Покажем, что прямые (15) всегда пересекаются. В самом деле,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{x_0}{a^2} & -\frac{y_0}{b^2} \\ \frac{b}{a} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{ab} = -\frac{1}{a}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right).$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, то

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{b^2}\right)\left(\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}\right) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) \neq 0,$$

т. е. $\Delta \neq 0$. Таким образом, для любой точки M_0 прямые (15) пересекаются. Если координаты точки пересечения прямых (15) обозначить через x_1, y_1, то из уравнений (15) легко получить

$$x_1 = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \quad y_1 = \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}.$$

Аналогично можно показать, что прямые (16) пересекаются, и определить координаты точки пересечения:

$$x_2 = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \quad y_2 = \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}.$$

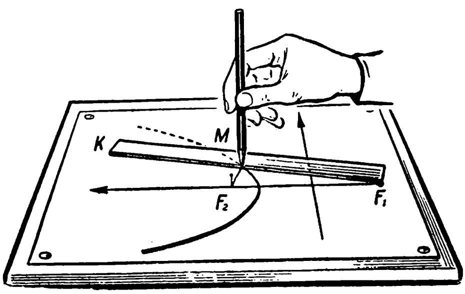
Середина отрезка (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет координаты

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2} \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}{\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)} = \frac{a}{2} \frac{\frac{2x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = x_0,$$

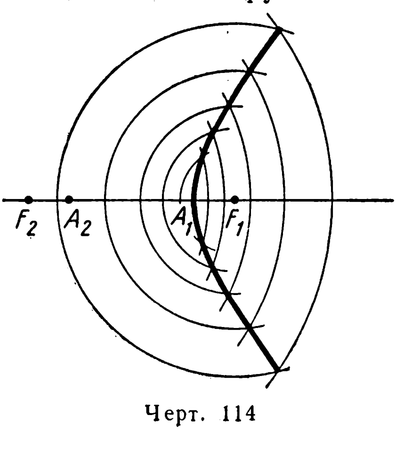
$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{b}{2}\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)}{\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)}=\frac{b}{2}\frac{\frac{2y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}}=y_0.$$

Задача решена.

7. Построение гиперболы. а) Вычерчивание гиперболы по фокусам и действительной оси. Определение гиперболы дает следующий способ ее вычерчивания при помощи линейки и нитки. Возьмем линейку длиннее действительной оси гиперболы и к одному ее концу прикрепим нить такой длины, чтобы разность между длиной линейки и длиной нити была равна длине действительной оси. Второй конец линейки закрепим в одном фокусе, так чтобы линейка могла свободно вращаться около него, а второй конец нитки закрепим в другом фокусе. Если удерживать острием карандаша нить так, чтобы она была всегда натянута и чтобы острие карандаша скользило вдоль линейки (см. черт. 113), то при вращении линейки карандаш будет перемещаться и его острие будет описывать ветвь гиперболы. В самом деле, разность между длиной линейки и длиной нитки равна $2a$. С другой стороны, длина линейки равна F_1M+MK, а длина нитки MF_2+KM, поэтому $F_1M+MK-(F_2M+MK)=2a$ или $F_1M-F_2M=2a$. Отсюда следует, что точка M описывает ветвь гиперболы. Заметим, что для точек N другой ветви $F_2N-F_1N=2a$, поэтому для ее вычерчивания следует конец линейки прикрепить к фокусу F_2, а конец нитки — к фокусу F_1.



Черт. 113



Черт. 114

б) Построение точек гиперболы при помощи циркуля по данной действительной оси и фокусам. Пусть A_1A_2 — действительная ось, а F_1 и F_2 — фокусы гиперболы (черт. 114). Произвольным раствором циркуля начертим окружность с центром в точке F_1, а затем радиусом, большим на $A_1A_2=2a$, начертим другую окружность с центром в точке F_2. Точки пересечения этих окружностей, очевидно, лежат на гиперболе. Выполнив это построение различными растворами циркуля, получаем ряд точек, принадлежащих гиперболе.

Вопросы, упражнения и задачи

278. Почему в определении гиперболы требуется, чтобы $c > a$? Какую получим кривую, если: а) $a = c$, б) $a < c$?

279. Составить каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

а) Расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

б) Вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку $(6, 2\sqrt{3})$.

в) Расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

280. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот гиперболы:

$$16x^2 - 9y^2 = 144.$$

281. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) гипербола проходит через точки $(4,0)$ и $(4\sqrt{17},4)$;

б) гипербола проходит через точку $(-5,3)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) гипербола имеет асимптоты $4y \pm 3x = 0$ и директрисы $5x \pm 16 = 0$;

г) гипербола является равнобочной и проходит через точку $(\sqrt{2}, 1)$.

282. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что:

а) расстояние фокуса от вершин равно $\sqrt{13} + 2$ и $\sqrt{13} - 2$;

б) проходит через точки $(\sqrt{2}, 1)$ и $(1,0)$;

в) расстояние между директрисами равно $\frac{2}{\sqrt{10}}$, а одна из асимптот имеет уравнение $y = 3x$;

г) один из фокусов имеет координаты $F_1(3, 0)$, а одна из асимптот уравнение $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x$.

283. Доказать, что произведение расстояний любой касательной к гиперболе от двух ее фокусов есть величина постоянная.

284. Пусть хорда, проведенная через фокус F_1 и параллельная оси Oy, пересекает гиперболу в точках M_1 и M_2. Определить расстояния точек M_1 и M_2 от фокуса F_2.

285. Пересекают ли асимптоты гиперболу? Проверить результат аналитически.

286. Существуют ли на гиперболе точки M:

а) равноотстоящие от фокусов F_1 и F_2;

б) равноотстоящие от директрис d_1 и d_2;

в) удовлетворяющие условию $2MF_1 = MF_2$?

287. Вычислить расстояние между директрисами гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

288. Пусть ε — эксцентриситет гиперболы, а m — расстояние от фокуса до одноименной директрисы. Выразить a, b и c через ε и m.

289. Написать уравнения асимптот гиперболы в канонической системе координат, если дан эксцентриситет.

290. Гипербола называется р а в н о б о ч н о й, если в каноническом уравнении $a = b$. Написать уравнения асимптот в канонической системе и найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

291. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой фокальные радиусы перпендикулярны друг другу.

292. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{18} = 1$ с прямыми: а) $x - 5y = 0$; б) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 5 = 0$.

293. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8/3} - \frac{y^2}{3} = 1$, проходящие через каждую из следующих точек:

а) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$; б) $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right)$; в) $\left(\frac{5}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

294. Написать уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{24} = 1$, параллельных прямой $x + y - 14 = 0$.

295. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра, если a и b — полуоси гиперболы.

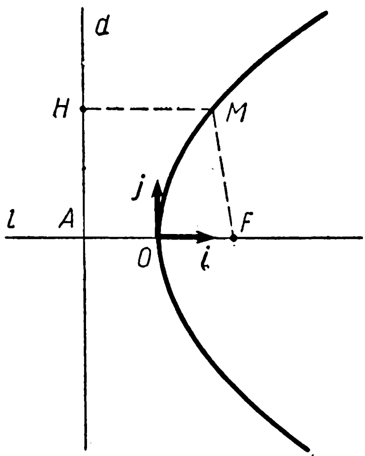
§ 22. ПАРАБОЛА

П а р а б о л о й называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через данную точку. Данная точка F называется ф о к у с о м, а прямая d — д и р е к т р и с о й. Расстояние от фокуса до директрисы называется ф о к а л ь н ы м п а р а м е т р о м параболы и обозначается через p.

1. Вывод уравнения параболы. Для вывода уравнения параболы возьмем систему координат следующим образом: проведем через фокус F прямую l, перпендикулярную директрисе d, и обозначим через A точку пересечения этой прямой с директрисой (черт. 115).

Примем за начало координат O — середину отрезка AF, а за ось Ox — прямую l, причем направление оси выберем так, чтобы точка F лежала на положительном луче этой оси. За ось Oy возьмем прямую, проходящую через O и параллельную директрисе d. Направление этой оси можно взять произвольно (черт. 115). В этой системе точка F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а прямая d — уравнение $x + \frac{p}{2} = 0$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Если H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d, то MH есть расстояние от M до прямой d, поэтому $MH = \left|x + \frac{p}{2}\right|$. С другой стороны, $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Для того чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо и достаточно, чтобы $MF = MH$ или

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (1)$$



Черт. 115

Соотношение (1) является уравнением параболы в выбранной системе. С целью упрощения этого уравнения возведем его в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ или } x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

После приведения подобных членов получаем:

$$y^2 = 2px. \quad (2)$$

Если точка лежит на параболе, т. е. если ее координаты удовлетворяют соотношению (1), то ее координаты удовлетворяют также соотношению (2). Однако отсюда еще не следует, что (2) есть уравнение параболы. Мы должны показать, что если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (2), то она принадлежит параболе, т. е. $MH = MF$.

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} =$$

$$\sqrt{x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Мы получили выражение, равное расстоянию от точки M до прямой d. Итак, мы показали, что точка M принадлежит параболе. Отсюда следует, что соотношение (2) эквивалентно соотношению (1) и является уравнением параболы. Соотношение (2) называется **каноническим уравнением параболы**, а выбранная нами система — **канонической**.

Если поменять ролями оси координат, то уравнение параболы запишется так:

$$x^2 = 2py. \tag{2'}$$

В этом случае ось Ox параллельна директрисе, а ось Oy — перпендикулярна ей и проходит через фокус.

2. Изучение свойств параболы по каноническому уравнению. Применим общую схему изучения свойств кривой, изложенную в п. 2, § 19, к параболе, заданной уравнением (2).

а) Парабола проходит через начало канонической системы координат, так как числа (0,0) удовлетворяют уравнению (2).

б) Парабола пересекает оси координат только в начале координат и других точек пересечений с осями координат не имеет. Эта точка называется **вершиной** параболы.

в) Парабола симметрична относительно оси Ox, так как переменная y в уравнении (2) входит только в четной степени. Но в отличие от случаев эллипса и гиперболы парабола не симметрична относительно канонической оси Oy. Парабола не симметрична также относительно начала координат.

г) Выясним вопрос о взаимном расположении прямой, проходящей через начало координат с параболой. Для этой цели необходимо исследовать вопрос о существовании решений системы

$$y^2 = 2px, \quad y = kx.$$

Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение параболы, получаем:

$$k^2x^2 - 2px = 0.$$

Если $k = 0$, то имеем одно решение: $x = 0$. Если $k \neq 0$, то два решения: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2p}{k^2}$. В этом случае прямая $y = kx$ пересекает параболу (2) в двух точках $M_1\ (0, 0)$ и $M_2\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$. Отсюда следует, что всякая прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая с осями координат, пересекается с параболой в двух точках — в начале координат и еще в одной точке.

д) Из уравнения (2) следует, что для любой точки параболы $x \geqslant 0$, поэтому парабола всеми своими точками расположена по одну сторону от канонической оси Oy, а именно по ту же сторону, что и фокус F.

е) Для того чтобы иметь наглядное представление о расположении параболы на плоскости, следует построить несколько точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2). При этом можно ограничиться точками, заданными в первой четверти, так как кривая симметрична относительно оси Ox. Парабола изображена на чертеже 115.

3. Эксцентриситет параболы. При рассмотрении директориальных свойств эллипса и гиперболы (теоремы [20.2] и (21.3]) мы по существу выяснили геометрический смысл эксцентриситетов этих кривых. Эксцентриситет эллипса или гиперболы есть то постоянное число, которому равно отношение расстояний от каждой точки кривой до фокуса к соответствующим расстояниям до одноименной директрисы. Из определения параболы видно, что ее точки обладают аналогичным свойством, т. е. отношение расстояний от каждой точки параболы до фокуса к соответствующим расстояниям до директрисы постоянно и равно единице. Поэтому *число единица называется эксцентриситетом любой параболы.*

Это определение вполне согласуется со следующей теоремой, аналогичной теоремам [20.1] и [21.2].

Теорема [22.1]. *Любые две параболы подобны.*

Доказательство. Пусть

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

$$y'^2 = 2\tilde{p}x' \tag{4}$$

— две параболы, заданные соответственно в канонических системах $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$. Рассмотрим движение, которое переводит систему $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ в $O\boldsymbol{ij}$. При этом парабола (4) перейдет в равную ей параболу, которая в системе $O\boldsymbol{ij}$ задается уравнением

$$y^2 = 2\tilde{p}x. \tag{5}$$

Рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $k = \frac{\tilde{p}}{p}$ (см. п. 2, § 20). При этой гомотетии каждая точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x', y')$, где $x' = \frac{\tilde{p}}{p}x$, $y' = \frac{\tilde{p}}{p}y$. Найдем образ параболы (3) при этой гомотетии. Для этой цели определим x и y из предыдущих соотношений и подставим в (3):

$$x = \frac{px'}{\tilde{p}}, \quad y = \frac{py'}{\tilde{p}}; \quad \left(\frac{py'}{\tilde{p}}\right)^2 = 2p\frac{px'}{\tilde{p}}.$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем: $y'^2 = 2\tilde{p}x'$, т. е. кривую (5). Таким образом, парабола (3) гомотетична параболе (5). Так как парабола (5) равна параболе (4), то параболы (3) и (4) подобны. Теорема доказана.

4. Касательная к параболе.

Задача 1. Дана точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая параболе (2). Написать уравнение касательной к ней в точке M_0.

Р е ш е н и е. Пусть

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t \qquad (6)$$

— параметрическое задание некоторой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Определим параметры точек пересечения этой прямой с параболой. Для этого подставим значения x, y в уравнение параболы и решим полученное уравнение относительно t. По аналогии с выкладками п. 5, § 20, получаем:

$$\beta^2 t^2 + 2(y_0\beta - p\alpha)\, t = 0.$$

Так же, как и в п. 5, § 20, отсюда мы заключаем, что прямая будет касательной тогда и только тогда, когда $y_0\beta - p\alpha = 0$ или $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ y_0 & p \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, касательная параллельна вектору $\{y_0, p\}$ и, следовательно, имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ y_0 & p \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем:

$$yy_0 = p(x + x_0). \qquad (7)$$

П р и м е р 1. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 9x$ в точке $M_0(1, -3)$.

Р е ш е н и е. Так как точка $M_0(1, -3)$ принадлежит параболе, то, подставив координаты точки M_0 и значение $p = \frac{9}{2}$ в соотношение (7), получаем уравнение касательной: $y(-3) = \frac{9}{2}(x + 1)$. Отсюда после элементарных преобразований получаем: $3x + 2y + 3 = 0$.

З а д а ч а 3. Доказать, что всякая касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, проходящим через точку касания параллельно оси параболы.

Р е ш е н и е. Определим единичные векторы $\boldsymbol{t}_1$ и $\boldsymbol{f}_1$, направленные вдоль касательной и фокального радиуса точки M_1. Так как вектор $\{y_1, p\}$ параллелен касательной, то

$$\boldsymbol{t}_1\left\{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad \frac{p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}\right\}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\overline{M_1F}}{|\overline{M_1F}|}, \quad |\overline{M_1F}| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $\overline{M_1F}\left\{\frac{p}{2}-x_1,\ -y_1\right\}$, получим:

$$f_1\left\{\frac{p-2x_1}{p+2x_1},\ \frac{-2y_1}{p+2x_1}\right\}.$$

Рассмотрим вектор $t_2 = i - f_1$. Этот вектор направлен вдоль одной из биссектрис угла, образованного фокальным радиусом точки касания и лучом, проходящим через точку касания параллельно оси параболы. Вектор t_2 имеет координаты:

$$t_2\left\{1-\frac{p-2x_1}{p+2x_1},\ \frac{2y_1}{p+2x_1}\right\} \quad \text{или} \quad t_2\left\{\frac{4x_1}{p+2x_1},\ \frac{2y_1}{p+2x_1}\right\}.$$

Покажем, что векторы t_2 и t_1 коллинеарны. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+p^2}} & \frac{p}{\sqrt{y_1^2+p^2}} \\ \frac{4x_1}{p+2x_1} & \frac{2y_1}{p+2x_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{(p+2x_1)\sqrt{y_1^2+p^2}}(y_1^2-2px_1) = 0,$$

так как M_1 лежит на параболе. Задача решена.

На этом свойстве параболы основано важное свойство вогнутых параболических зеркал — прожекторов, применяемых в технике. Поверхность параболического зеркала образована вращением дуги параболы вокруг оси. Если источник света поместить в фокусе поверхности, т. е. в общем фокусе всех образующих парабол, то лучи, отражаясь от внутренней зеркальной поверхности, пойдут параллельно оси.

Задача 3. Если три прямые l_1, l_2, и l_3, попарно пересекающиеся в точках A_1, A_2 и A_3, касаются параболы, то ортоцентр[1] треугольника A_1, A_2, A_3 лежит на директрисе данной параболы.

Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение данной параболы, а $B_1(x_1,\ y_1)$, $B_2(x_2,\ y_2)$ и $B_3(x_3,\ y_3)$ — точки, в которых соответственно прямые l_1, l_2, l_3 касаются параболы. При этих обозначениях прямые l_1, l_2 и l_3 имеют уравнения:

$$(l_1) \qquad yy_1 = p(x+x_1),$$
$$(l_2) \qquad yy_2 = p(x+x_2),$$
$$(l_3) \qquad yy_3 = p(x+x_3).$$

Определим уравнение высоты h_1, проведенной через точку A_1. Если A_1 есть точка пересечения прямых l_2 и l_3, то высоту h_1 можно определить как прямую пучка, определяемого прямыми l_2 и l_3, перпендикулярную к прямой l_1.

[1] То есть точка пересечения высот треугольника.

Пучок, определяемый прямыми l_2 и l_3, имеет уравнение:

$$\lambda \{yy_2 - p(x + x_2)\} + \{yy_3 - p(x + x_3)\} = 0. \qquad (8)$$

Прямые l_1 и (8) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $y_1(\lambda y_2 + y_3) + p(\lambda p + p) = 0$. Отсюда получаем:

$$\lambda = -\frac{p^2 + y_1 y_3}{y_1 y_2 + p^2}.$$

Подставив это значение в соотношение (8), получаем уравнение высоты:

$$-\frac{y_1 y_3 + p^2}{y_1 y_2 + p^2}\{yy_2 - p(x + x_2)\} + \{yy_3 - p(x + x_3)\} = 0$$

или

$$(y_1 y_3 + p^2)[yy_2 - p(x + x_2)] - (y_1 y_2 + p^2)[yy_3 - p(x + x_3)] = 0.$$

Учитывая, что $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$ и $x_3 = \frac{y_3^2}{2p}$, после элементарных преобразований получим:

$$pxy_1(y_2 - y_3) + yp^2(y_2 - y_3) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p}p(y_2 - y_3) -$$

$$-\frac{p^2}{2}(y_2 - y_3)(y_2 + y_3) = 0.$$

Так как для различных точек (x_2, y_2) и (x_3, y_3) имеем: $y_2 \neq \neq y_3$, то после сокращения на $p(y_2 - y_3)$ будем иметь:

$$xy_1 + yp - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} - \frac{py_2}{2} - \frac{py_3}{2} = 0.$$

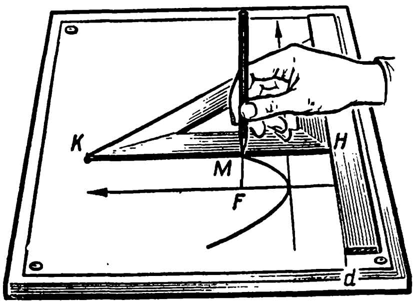
Эта прямая пересекается с директрисой $x = -\frac{p}{2}$ в точке

$$Q\left(-\frac{p}{2}, \ \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right).$$

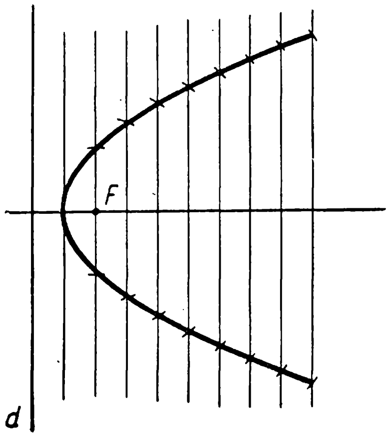
Координаты точек B_1, B_2 и B_3 входят в полученное выражение симметрично, поэтому для других высот треугольника $A_1A_2A_3$ получим те же значения координат точек пересечений с директрисой. Таким образом, все высоты проходят через одну и ту же точку директрисы. Задача решена.

5. Построение параболы. а) Вычерчивание параболы по фокусу и директрисе. Определение параболы дает следующий способ ее вычерчивания при помощи линейки, угольника и нитки. Пусть F — фокус, а d — директриса параболы (черт. 116). Возьмем угольник и нитку, длина которой равна бо́льшему катету угольника. Один конец нитки прикрепим к фокусу, а другой конец — к вершине острого угла K, противолежащего меньшему катету. Закрепим вдоль директрисы линейку и к ней приставим меньшим катетом угольник. Если перемещать угольник вдоль линейки, удерживая нить натянутой карандашом, как указано на чертеже, то острие карандаша будет описывать параболу. В самом деле, $KH = KM + MH$ и $KH = KM + MF$, поэтому $MH = MF$ (относительно обозначений см. черт. 116).

б) Построение точек параболы при помощи циркуля по данным фокусу и директрисе. Пусть F — фокус, а d — директриса параболы. Проведем через F прямую, перпендикулярную директрисе. Построим ряд прямых, параллельных директрисе, и сделаем на каждой



Черт. 116



Черт. 117

из них с центром в фокусе две засечки радиусом, равным расстоянию от директрисы до соответствующей прямой (черт. 117). Полученные точки, очевидно, будут принадлежать параболе.

Вопросы, упражнения и задачи

296. Почему в определении параболы требуется, чтобы фокус F не лежал на директрисе? Какую получим кривую, если предположим, что F принадлежит директрисе?

297. Составить каноническое уравнение параболы, зная, что:

а) расстояние фокуса от вершины равно 4;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс, проходит через начало координат и через точку M (1, 2);

в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку (5, 1);

г) парабола имеет фокус F (0, —3), проходит через начало координат и ее осью служит ось ординат.

298. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 9x$ со следующими прямыми: а) $y - 9 = 0$; б) $6x + y - 3 = 0$; в) $9x - 2y + 1 = 0$.

299. Через точку (1,1/2) провести такую хорду параболы $y^2 = 2x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

300. Дана парабола $y^2 = 10x$. Найти касательную: а) в точке $(4, 2\sqrt{10})$; б) проходящую через точку $(-1, 0)$; в) в точке $(10, 10)$.

301. Найти точку прикосновения параболы $y^2 = \frac{1}{4}x$ и прямой $4x + 12y + 9 = 0$.

302. Написать уравнение той касательной к параболе $y^2 = 4x$, которая параллельна прямой $2x + 6y - 1 = 0$.

303. Из любой точки директрисы проводятся две касательные к параболе. Доказать, что точки прикосновения этих касательных и фокус параболы лежат на одной прямой.

304. Доказать, что прямые $x - 10 = 0$, $2x - y\sqrt{5} = 0$, $2x + \sqrt{5}y = 0$ попарно пересекаются в точках A, B, C, лежащих на параболе $y^2 = 8x$, и точка пересечения высот треугольника ABC совпадает с фокусом.

305. Через вершину $y^2 = 2px$ проведена хорда $y = kx$. Найти ее длину.

306. В параболе $y^2 = 2px$ через вершину проводятся две взаимно перпендикулярные хорды. Доказать, что $\sqrt[3]{\frac{l_1}{l_2}} + \sqrt[3]{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{l_1 l_2}{4p^2}$, где l_1 и l_2 — длины проведенных хорд.

§ 23. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ И ПАРАБОЛЫ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Геометрическое место точек, приводящее к эллипсу, гиперболе и параболе.

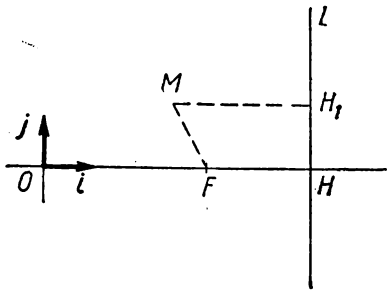
Задача 1. На плоскости даны произвольная прямая l и точка F, не лежащая на l. Найти геометрическое место точек, отношение расстояния от каждой из которых до точки F к соответствующим расстояниям до прямой l постоянно и равно данному положительному числу ε[1].

Решение. Если $\varepsilon = 1$, то рассматриваемое геометрическое место по определению есть парабола, поэтому рассмотрим случай, когда $\varepsilon \neq 1$. Проведем через точку F прямую, перпендикулярную l, и обозначим точку пересечения этой прямой с прямой l через H (черт. 118). Возьмем на прямой FH точку O так, чтобы $OF = \frac{m\varepsilon^2}{|\varepsilon^2 - 1|}$, где $m = FH$. При этом если $\varepsilon > 1$, то O возьмем на луче FH, а

[1] На первый взгляд может показаться, что эта задача нами уже решалась (см. директориальные свойства эллипса, гиперболы и определение параболы). Однако при рассмотрении директориальных свойств эллипса и гиперболы мы исходили из того, что кривая задана, поэтому положение фокуса и одноименной директрисы не являлось произвольным, а определялось самой кривой. Решение предложенной задачи имеет целью установить, что любая прямая, любая точка, не лежащая на этой прямой, и любое положительное число ε могут служить директрисой, фокусом и эксцентриситетом эллипса, гиперболы или параболы.

если $\varepsilon < 1$ — на дополнительном луче (на черт. 118 изображение точки O дано для случая $\varepsilon < 1$). Точку O примем за начало прямоугольной декартовой системы координат, а прямую OF — за ось абсцисс, направленную от точки O к точке F. Составим уравнение рассматриваемого геометрического места точек в выбранной системе координат.

а) $\varepsilon < 1$. В этом случае $OF = \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$, $OH = OF + FH = \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + m = \frac{m}{1-\varepsilon^2}$, поэтому точка F имеет координаты $F\left(\frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, 0\right)$, а прямая l уравнение $x = \frac{m}{1-\varepsilon^2}$. Если точка $M(x, y)$ принадлежит геометрическому месту точек, то $MF = \varepsilon\rho_M$, где ρ_M — расстояние от точки M до прямой l.



Черт. 118

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2},$$

$$\rho_M = \left|x - \frac{m}{1-\varepsilon^2}\right|,$$

поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению:

$$\sqrt{\left(x - \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2} = \varepsilon\left|x - \frac{m}{1-\varepsilon^2}\right|.$$

Если мы возведем это соотношение в квадрат и приведем подобные члены, то получим:

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$, а $b^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. Таким образом, любая точка геометрического места принадлежит эллипсу (1) с полуосями:

$$a = \frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Докажем обратное. Покажем, что каждая точка эллипса принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек. Найдем первый фокус, первую директрису и эксцентриситет эллипса (1).

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{m^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{m^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} = \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что первый фокус имеет координаты $\left(\frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, 0\right)$, поэтому совпадает с точкой F. Директриса отстоит от O на расстоянии

$$\frac{a^2}{c} = \frac{m^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \; \frac{1-\varepsilon^2}{m\varepsilon^2} = \frac{m}{1-\varepsilon^2}.$$

Это означает, что директриса эллипса (1) совпадает с прямой l. Эксцентриситет эллипса равен

$$\frac{c}{a} = \frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} : \frac{1-\varepsilon^2}{m\varepsilon} = \varepsilon.$$

Из директориального свойства эллипса следует, что каждая точка эллипса принадлежит геометрическому месту. Мы пришли к выводу, что эллипс (1) есть искомое геометрическое место точек.

б) $\varepsilon > 1$. В этом случае $OF = \frac{m\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$, $OF - FH = \frac{m\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1} - m = \frac{m}{\varepsilon^2-1} > 0$, поэтому $OF > FH$ и прямая l имеет уравнение $x = \frac{m}{\varepsilon^2-1}$. Если $M(x, y)$ принадлежит геометрическому месту точек, то $MF = \varepsilon\rho_M$, где ρ_M — расстояние от M до прямой l.

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{m\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\right)^2 + y^2}, \quad \rho_M = \left|x - \frac{m}{\varepsilon^2-1}\right|,$$

поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению:

$$\sqrt{\left(x - \frac{m\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\right)^2 + y^2} = \varepsilon\left|x - \frac{m}{\varepsilon^2-1}\right|.$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где

$$a^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2}, \quad b^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}.$$

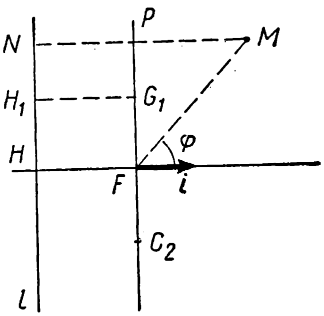
Мы показали, что каждая точка геометрического места принадлежит гиперболе (2). Точно так же, как и в предыдущем случае, можно показать, что каждая точка гиперболы (2) принадлежит геометрическому месту, т. е. гипербола (2) есть искомое геометрическое место. Резюмируя все сказанное, приходим к теореме:

Теорема [23.1]. *Пусть на плоскости дана произвольная прямая l и точка F, не лежащая на прямой. Геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до точки F к соответствующим расстояниям до прямой l равно постоянному числу ε, есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, и гипербола, если $\varepsilon > 1$. Данные* *точка F и прямая l являются односторонними фокусом и директрисой кривой. Полуоси кривой равны:*

$$a = \frac{m\varepsilon}{|\varepsilon^2 - 1|}, \quad b = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon^2 - 1|}}.$$

Здесь m — расстояние от точки F до прямой l.

2. Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, определение параболы, а также теорема [23.1] позволяют дать единое определение эллипса, параболы и гиперболы. В самом деле, все эти кривые могут быть определены как геометрические места точек M, отношение расстояний от каждой из которых до данной точки F к соответствующим расстояниям до данной прямой l есть постоянная величина ε. Если $\varepsilon < 1$, то кривая является эллипсом, если $\varepsilon = 1$ — параболой, если же $\varepsilon > 1$ — гиперболой. На этом определении основан вывод уравнения кривых в полярных координатах.



Черт. 119

Точку F примем за полюс, а прямую, проходящую через F перпендикулярно l, — за ось полярной системы; направление полярной оси указано на чертеже 119. Проведем через точку F прямую, параллельную l. На этой прямой существуют две и только две точки G_1 и G_2, принадлежащие кривой. Они расположены симметрично относительно точки F. Длину отрезков $G_1F = G_2F$ назовем фокальным параметром кривой и обозначим через p. Если $HF = m$, то по определению $\frac{G_1F}{G_1H_1} = \frac{G_1F}{FH} = \frac{p}{m} = \varepsilon$ (относительно обозначений см. черт. 119). Отсюда получаем:

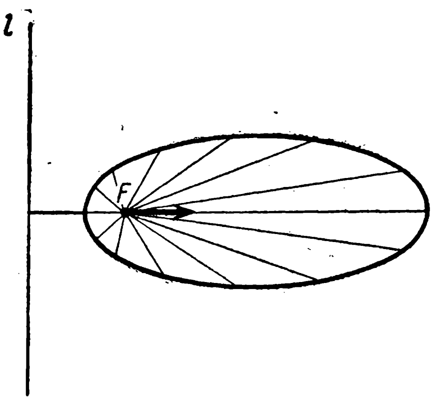
$$p = m\varepsilon. \tag{3}$$

Обозначим через ρ и φ полярные координаты произвольной точки M геометрического места. Тогда $FM = \varepsilon MN$, где N — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую l. Но $FM = \rho$, $MN = MP + PN = \rho\cos\varphi + m$, поэтому

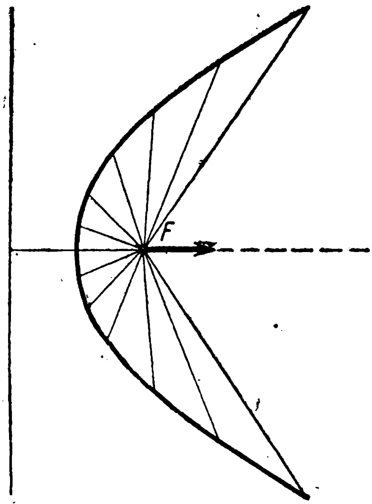
$$\rho = \varepsilon(\rho\cos\varphi + m). \tag{4}$$

Если M лежит между N и P, то $NM = NP - PM = m - PM = m + \rho\cos\varphi$. Мы приходим снова к соотношению (4).

Обратно, если полярные координаты точки M (ρ, φ) удовлетворяют соотношению (4), то точка принадлежит геометрическому месту. Если ρ и φ — необобщенные координаты точки, то соотно-



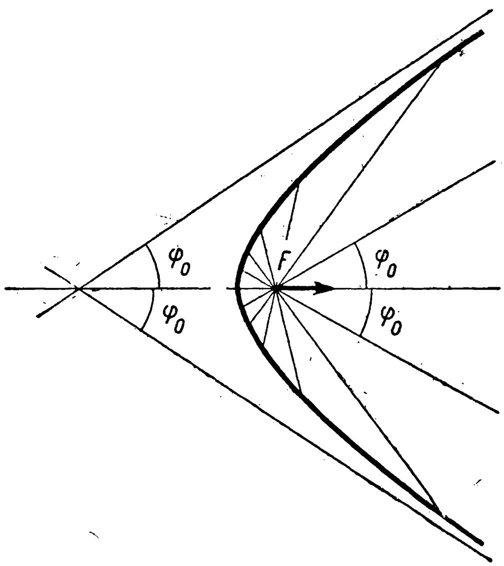
Черт. 120 *а*



Черт. 120 *б*

шение (4) справедливо только для тех точек геометрического места, которые расположены по ту же сторону от прямой l, что и F. В самом деле, если точки M и F расположены по разные стороны от l, то $\rho \cos \varphi + m < 0$ и соотношение (4) не имеет смысла. Из соотношения (4) выразим ρ через остальные величины $\rho\ (1 - \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon m$. Подставив сюда значение p из (3), получаем:

$$\rho\ (1 - \varepsilon \cos \varphi) = p. \quad (5)$$



Черт. 120 *в*

При $\varepsilon < 1$ кривая представляет собой эллипс. В этом случае при любом φ имеем: $1 - \varepsilon \cos \varphi \neq 0$, поэтому соотношение (5) можно записать в виде:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \tag{6}$$

Если φ пробегает значения $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то соотношение (6) определяет все точки эллипса (черт. 120, *а*).

При $\varepsilon = 1$ кривая представляет собой параболу и $1 - \varepsilon \cos \varphi \neq \neq 0$, если $\varphi \neq 0$. Но как известно, на параболе нет точки, для которой $\varphi = 0$. Таким образом, если φ пробегает значения от 0 до 2π, то соотношение (6) определяет все точки параболы (черт. 120,*б*).

При $\varepsilon > 1$ соотношение (5) имеет смысл только для точек, полярные углы которых удовлетворяют неравенству $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$ или $\cos \varphi < \frac{1}{\varepsilon}$.

Если φ_0 — угол, для которого

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{7}$$

то предыдущее неравенство запишется в виде: $\cos \varphi_0 > \cos \varphi$, откуда $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$. В этом случае соотношение (6) определяет все точки о д н о й в е т в и гиперболы.

Легко показать, что $\varphi_0 = \psi$, где ψ — угол, который образует каждая асимптота гиперболы с действительной осью. В самом деле, $\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (см. (9), § 21), отсюда $\operatorname{tg}^2 \psi = \varepsilon^2 - 1$, $\cos^2 \psi = \frac{1}{\varepsilon^2}$, $\cos \psi = \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\cos \psi = \cos \varphi_0$, $\psi = \varphi_0$ (см. черт. 120, *в*).

Интересно, что если под φ и ρ понимать обобщенные координаты точки, то при $\varphi_0 < \varphi < -\varphi_0$ соотношение (6) определяет другую ветвь гиперболы. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

З а д а ч а 2. Если AB — хорда эллипса, гиперболы или параболы, проходящая через фокус F, то число $\frac{FA \cdot FB}{AB}$ не зависит от выбора хорды. Доказать.

Р е ш е н и е. Возьмем полярную систему координат так, как было указано выше, и запишем уравнение кривой в виде (6).

Обозначим через (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) полярные координаты точек A и B. Очевидно, $\varphi_2 = \varphi_1 + 180°$, поэтому

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi_1}, \quad \rho_2 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_1}.$$

Так как $FA = \rho_1$, $FB = \rho_2$ и $AB = \rho_1 + \rho_2$, то

$$\frac{FA \cdot FB}{AB} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\dfrac{p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1}}{\dfrac{p(1 + \varepsilon \cos \varphi_1 + 1 - \varepsilon \cos \varphi_1)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1}} = \frac{p}{2}.$$

Очевидно, уравнение эллипса, параболы или гиперболы в полярных координатах существенно зависит от выбора системы. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую задачу:

З а д а ч а 3. Составить уравнение эллипса в полярной системе, если центр эллипса совпадает с полюсом, а большая ось лежит на полярной оси.

Р е ш е н и е. В § 9 была установлена связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами одной и той же точки. Очевидно, данная в задаче полярная система и каноническая система координат удовлетворяют условиям теоремы [9.1], поэтому если (x, y) — прямоугольные декартовы координаты точки, а (ρ, φ) — полярные, то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Подставив эти значения в каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, мы получим искомое уравнение:

$$\frac{\rho^2 \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \rho^2\left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) = 1,$$

$$\rho^2 \frac{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{a^2b^2} = 1, \qquad \frac{\rho^2}{a^2b^2}(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 - a^2 \cos^2 \varphi) = 1,$$

$$\frac{\rho^2}{a^2b^2}(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi) = 1, \quad \frac{\rho^2}{b^2}(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) = 1.$$

Отсюда, так как для всех φ имеем: $1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \neq 0$, то

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \tag{8}$$

Как видим, уравнения (6) и (8) существенно отличаются друг от друга.

Упражнения и задачи

307. На плоскости дана произвольная прямая l и точка F, л е ж а щ а я на l. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до точки F к соответствующим расстояниям до прямой l постоянно и равно данному положительному числу ε.

308. Найти длины полуосей и расстояние между фокусами эллипса или гиперболы, заданного уравнением (6).

309. Какая кривая определяется уравнением:

а) $\rho = \frac{2}{3 - 4\cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{4}{2 - 2\cos\varphi}$?

310. Составить уравнение гиперболы в полярной системе, если центр совпадает с полюсом, а действительная ось лежит на полярной оси.

311. Составить уравнение параболы в полярной системе, если вершина совпадает с полюсом, а ось симметрии — с полярной осью.

312. Вычислить длины полуосей и расстояние между фокусами кривых:

$$\text{а) } \rho = \frac{6}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos\varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{3 - 4\cos\varphi}.$$

313. Вычислить угол между асимптотами гиперболы

$$\rho = \frac{5}{2 - 2\sqrt{2}\cos\varphi}.$$

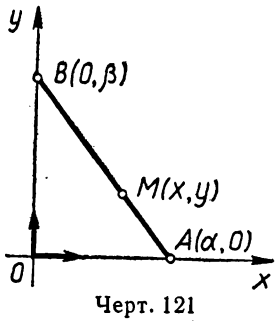
314. Вычислить расстояние между директрисами эллипса или гиперболы, заданной уравнением (6).

315. Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из концов любой фокальной хорды на ось параболы, имеет постоянную длину.

§ 24. ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА, ПРИВОДЯЩИЕ К ЭЛЛИПСУ, ГИПЕРБОЛЕ И ПАРАБОЛЕ

В настоящем параграфе рассмотрим несколько задач на геометрические места, которые приводят к эллипсу, параболе, гиперболе.

Задача 1. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M; найти траекторию, которую описывает точка M.



Черт. 121

Решение. Данные взаимно перпендикулярные прямые примем за координатные оси (черт. 121). Пусть в некоторый произвольный момент времени концы скользящего отрезка AB имеют координаты A $(\alpha, 0)$, B $(0, \beta)$. Если (x, y) — координаты произвольной точки M геометрического места, l — длина отрезка AB, а λ — отношение, в котором точка M делит отрезок AB, то

$$x = \frac{\alpha}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda\beta}{1+\lambda}, \quad l^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{1}$$

Из этих соотношений, исключив α и β, получаем:

$$l^2 = (1+\lambda)^2 x^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2} y^2$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}} = 1. \tag{2}$$

Таким образом, если точка M (x, y) принадлежит геометрическому месту, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2).

Докажем обратное предложение. Пусть M (x, y) — некоторая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (2). Положим,

$$\alpha = x(1+\lambda), \quad \beta = \frac{y(1+\lambda)}{\lambda}, \tag{3}$$

где λ — данное отношение, в котором точка, описывающая искомую траекторию, делит отрезок AB.

Из соотношений (3) следует:

$$x = \frac{\alpha + \lambda \cdot 0}{1+\lambda}, \quad y = \frac{0 + \lambda\beta}{1+\lambda}.$$

Если обозначить через M_1 и M_2 точки с координатами $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$, то предыдущие соотношения показывают, что M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ.

Точка M_1 лежит на оси абсцисс, а M_2 — на оси ординат; кроме того, в силу соотношений (3) и (2) имеем:

$$M_1M_2 = \sqrt{x^2(1+\lambda^2) + \frac{y^2(1+\lambda)^2}{\lambda^2}} = \sqrt{l^2} = l.$$

Отсюда следует, что M принадлежит искомой траектории.

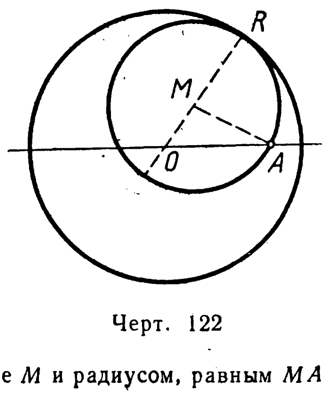
Уравнением (2) задается эллипс; в частном случае при $\lambda = 1$ — окружность.

З а д а ч а 2. Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, лежащую внутри данной окружности.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр данной окружности, а M — произвольная точка геометрического места (черт. 122). Если окружность M (MA)[1] касается данной окружности O (r) в точке R, то, очевидно,

$$r = OR = OM + MR = OM + MA. \tag{4}$$

Докажем обратное предложение, т. е докажем, что если для некоторой точки M плоскости имеет место соотношение (4), то M принадлежит геометрическому месту точек.



Черт. 122

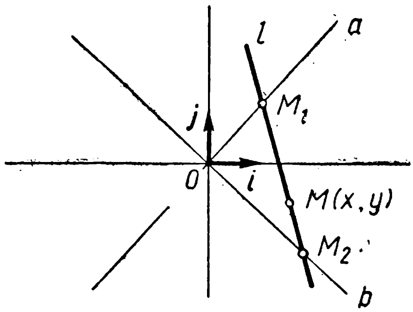
Так как $OA < r$, то точка M не совпадает с точками O и A. В самом деле, если бы, например, M и O совпали, то из (4) следовало бы, что $r = OO + OA = OA$. Таким образом, $MA > 0$ и $OM < r$, т. е. M является внутренней точкой окружности.

[1] M (MA) — окружность с центром в точке M и радиусом, равным MA.

Рассмотрим луч OM и обозначим через R точку пересечения этого луча с данной окружностью. Так как $OM + MR = r$ и $OM + MA = r$, то $MA = MR$. Это означает, что окружность M (MR), которая касается окружности O (OR), проходит через точку A.

Таким образом, мы доказали, что искомое геометрическое место совпадает с геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию (4). Этим условием задается эллипс, фокусами которого являются точки A и O, а большая ось равна r.

З а д а ч а 3. Прямая l перемещается так, что площадь треугольника, образованного ею с двумя взаимно перпендикулярными прямыми a и b, сохраняет постоянную величину S. Найти геометрическое место точек, делящих отрезок этой прямой, заключенной между прямыми a и b, в данном отношении λ.



Черт. 123

Р е ш е н и е. Прямоугольную декартову систему координат возьмем так, чтобы оси совпадали с биссектрисами углов между прямыми a и b, а начало — с точкой пересечения O этих прямых (черт. 123).

В этой системе прямые a и b имеют соответственно уравнения:

$$(a) \qquad x = y, \qquad (5)$$

$$(b) \qquad x = -y. \qquad (6)$$

Пусть при некотором произвольном положении прямая l пересекает прямые a и b соответственно в точках M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Так как M_1 лежит на прямой (5), а M_2 — на прямой (6), то $x_1 = y_1$, $x_2 = -y_2$. Если ввести обозначения: $\alpha = x_1 = y_1$, $\beta = x_2 = -y_2$, то точки M_1 и M_2 будут иметь координаты: $M_1(\alpha, \alpha)$, M_2 $(\beta, -\beta)$.

Треугольник OM_1, M_2 имеет площадь S, поэтому

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \beta & -\beta \end{matrix}\right\|^{1} = S \quad \text{или} \quad |\alpha\beta| = S. \qquad (7)$$

Если M (x, y) — точка искомого геометрического места, то

$$x = \frac{\alpha + \lambda\beta}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\alpha - \lambda\beta}{1+\lambda}.$$

Отсюда определяем α и β:

$$\alpha = \frac{x+y}{2}(1+\lambda), \qquad \beta = \frac{x-y}{2}\,\frac{1+\lambda}{\lambda}. \qquad (8)$$

[1] Здесь записан модуль определителя.

Подставив эти значения в соотношение (7), получаем:

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{4} \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} \right| = S, \tag{9}$$

откуда следует, что

$$(x^2 - y^2)(1+\lambda)^2 = 4\lambda S \text{ и } (x^2 - y^2)(1+\lambda)^2 = -4\lambda S. \tag{10}$$

Мы пришли к выводу, что точки искомого геометрического места принадлежат двум равнобочным гиперболам:

$$\frac{x^2}{\frac{4\lambda S}{(1+\lambda)^2}} - \frac{y^2}{\frac{4\lambda S}{(1+\lambda)^2}} = 1 \text{ и } \frac{y^2}{\frac{4\lambda S}{(1+\lambda)^2}} - \frac{x^2}{\frac{4\lambda S}{(1+\lambda)^2}} = 1. \tag{11}$$

Для этих гипербол прямые a и b являются асимптотами.

Покажем, что каждая точка, лежащая на гиперболах (11), принадлежит геометрическому месту точек. В самом деле, пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют одному из уравнений (11). Отсюда следует, что (x, y) удовлетворяют одному из уравнений (10) или уравнению (9). Рассмотрим точки $M_1(\alpha, \alpha)$ и $M_2(\beta, -\beta)$, где α и β определяются из соотношений (8). Из соотношений (8) следует, что

$$x = \frac{\alpha + \lambda\beta}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\alpha - \lambda\beta}{1+\lambda}.$$

Отсюда следует, что M лежит на прямой M_1M_2 и делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. С другой стороны, площадь S' треугольника OM_1M_2 равна:

$$S' = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \beta & -\beta \end{matrix} \right\|^1 = |\alpha\beta| = \left| \frac{(x+y)}{2}(1+\lambda)\frac{(x-y)}{2}\frac{1+\lambda}{\lambda} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x^2 - y^2)}{4} \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} \right|.$$

Из соотношения (9) следует, что $S' = S$, т. е. M принадлежит искомому геометрическому месту. Итак, соотношения (11) являются уравнениями искомого геометрического места. Они определяют две сопряженные[2] равнобочные гиперболы.

Задача 4. Через вершину параболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — данная парабола с вершиной в начале координат. Проведем через эту точку произвольную хорду

---

[1] См. сноску на странице 206.

[2] То есть имеющие общие асимптоты.

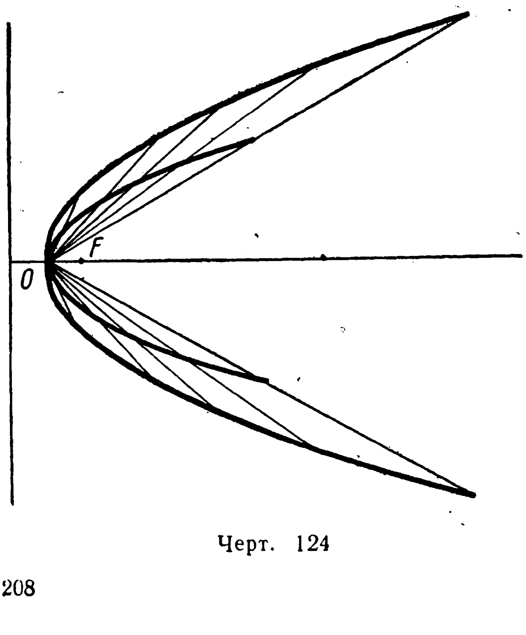
$y = kx$ и найдем точки пересечения этой хорды с данной параболой. Для этого необходимо решить систему:

$$y^2 = 2px\,, \quad y = kx. \tag{12}$$

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{2p}{k^2}$, $y_2 = \frac{2p}{k}$. Мы получили две точки пересечения: $O(0, 0)$ и $M\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$. Отсюда видно, что положение точки M зависит от k, т. е. от направления хорды. Если $N(x, y)$ — середина хорды OM, то $x = \frac{p}{k^2}$, $y = \frac{p}{k}$. Исключив из этих соотношений k, получаем: $y^2 = px$.

Таким образом, все точки искомого геометрического места принадлежат параболе (13). Вершина и ось этой параболы совпадают с вершиной и осью исходной параболы, фокальный параметр равен $\frac{p}{2}$ (черт. 124).

Докажем обратное утверждение, т. е. покажем, что каждая точка параболы (13) является точкой искомого геометрического места. В самом деле, пусть $N(x_0, y_0)$ — произвольная точка параболы (13), отличная от вершины. Покажем, что она является серединой некоторой хорды исходной параболы, проходящей через вершину O. Рассмотрим прямую $y = \frac{p}{y_0}x$. Она проходит через начало координат и через точку N, так как числа x_0, y_0, в силу соотношения (13), удовлетворяют уравнению прямой. Прямая пересекает исходную параболу в точках $O(0, 0)$ и $M\left(\frac{2y_0^2}{p}, 2y_0\right)$. Но $y_0^2 = px_0$, поэтому координаты точки M могут быть записаны так: $M(2x_0, 2y_0)$. Очевидно, точка $N(x_0, y_0)$ является серединой отрезка OM.



Черт. 124

Мы доказали, что искомым геометрическим местом точек является парабола (13).

Задача 5. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

Решение. Пусть парабола дана своим каноническим уравнением $y^2 = 2px$. В этом случае, как известно, вершина параболы совпадает с началом координат O. Возьмем две произвольные ортогональные прямые, проходящие через начало координат. Если угловой коэффициент первой прямой обозначить через k, то угловой коэффициент второй прямой равен $-\frac{1}{k}$, поэтому прямые будут иметь уравнения:

$$y = kx, \quad y = -\frac{1}{k}x.$$

Определим точки пересечения рассматриваемых прямых с данной параболой, решая следующие системы:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = -\frac{1}{k}x; \end{cases}$$

$$P\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right); \quad Q(2pk^2, -2pk).$$

Напишем уравнение прямой PQ:

$$\begin{vmatrix} x - 2pk^2 & y + 2pk \\ 2p(k^4 - 1) & -2pk(k^2 + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$xk + y(k^2 - 1) - 2pk = 0.$$

Положение этой прямой на плоскости зависит от k, т. е. от положения прямого угла POQ. Она пересекает ось параболы ($y = 0$) в точке $R(2p, 0)$, которая не меняется при изменении k.

Таким образом, при вращении угла POQ вокруг точки O прямая PQ вращается вокруг точки R.

Теоремы и задачи

316. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, проведенных из конца его малой оси.

317. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

318. Через вершину O параболы $y^2 = 2px$ проведены всевозможные хорды OP, где P — произвольная точка параболы. Найти

геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию: $\overline{OM} = \lambda \overline{MP}$. Здесь λ — данное постоянное число.

319. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса r и прямой l, проходящей через центр этой окружности.

320. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса r и проходящих через точку, лежащую вне данной окружности.

321. Пусть M — произвольная точка гиперболы, а $t_м$ — касательная в этой точке. Пусть, далее, P есть точка пересечения прямой, проведенной через фокус F перпендикулярно $t_м$ с прямой OM, где O — центр гиперболы. Найти траекторию точки P, если M описывает всю гиперболу.

322. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на ее касательные, есть касательная к вершине параболы.

323. Дана прямая l и точка F, не лежащая на прямой l. Найти геометрическое место центров всех окружностей, касающихся прямой l и проходящих через точку F.

324. Найти геометрическое место середин фокальных радиусов всех точек эллипса (одной ветви гиперболы, параболы), проведенных из одного и того же фокуса.

325. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом (т. е. точек, из которых можно провести взаимно перпендикулярные касательные к эллипсу).

326. Найти геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

327. Пусть $A_0B_0C_0$ — треугольник, вершины которого лежат на гиперболе. Найти геометрическое место середин сторон BC всевозможных треугольников ABC, вершины которых лежат на данной гиперболе и стороны AB и AC соответственно параллельны (или совпадают) сторонам A_0B_0 и A_0C_0.

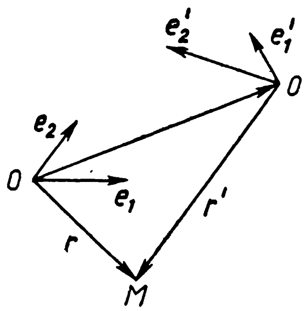
ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 25. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ

В § 7 при введении понятия координат точек на плоскости было отмечено, что координаты точки существенно зависят от выбора системы. В настоящем параграфе мы установим связь между координатами одной и той же точки в двух различных системах.

1. Связь между координатами точки в различных аффинных системах. Пусть Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$ — две аффинные системы координат на плоскости, а M — произвольная точка, имеющая в системе Oe_1e_2 координаты x, y, а в системе $O'e_1'e_2'$ — x', y'. Установим связь между x, y и x', y'. Для удобства дальнейшего изложения систему Oe_1e_2 назовем старой, а систему $O'e_1'e_2'$ — новой. Старую систему будем считать исходной и предположим, что координаты новых координатных векторов и нового начала заданы в этой системе:



Черт. 125.

$$e_1'\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad e_2'\{\alpha_2, \beta_2\}, \quad O'(x_0, y_0). \tag{1}$$

Если $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M в старой системе, а $\boldsymbol{r}' = \overline{O'M}$ — радиус-вектор той же точки в новой системе (черт. 125), то из правила сложения векторов для треугольника $OO'M$ следует, что $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ или

$$\boldsymbol{r} = \overline{OO'} + \boldsymbol{r}'. \tag{2}$$

Из определения координат точек следует, что $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$; $\overline{OO'} = x_0\boldsymbol{e}_1 + y_0\boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2'$. Но $\boldsymbol{e}_1' = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2$, поэтому $\boldsymbol{r}' = x'(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2) + y'(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2) = (\alpha_1x' + \alpha_2y')\boldsymbol{e}_1 + (\beta_1x' + \beta_2y')\boldsymbol{e}_2$.

Подставив эти значения в выражение (2), получаем:

$$xe_1 + ye_2 = x_0e_1 + y_0e_2 + (\alpha_1 x' + \alpha_2 y')\, e_1 + (\beta_1 x' + \beta_2 y')\, e_2.$$

Отсюда, учитывая, что e_1 и e_2 не коллинеарны, получаем:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти соотношения называются **формулами преобразования аффинных координат точек.**

Таким образом, координаты точки M в системе Oe_1e_2 выражаются через координаты той же точки в системе $O'e_1'e_2'$ при помощи системы линейных уравнений. Коэффициентами при x' являются координаты вектора e_1', а при y' — координаты вектора e_2'; свободными членами являются координаты нового начала в старой системе. Так как векторы e_1' и e_2' не коллинеарны, то

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

поэтому система (3) всегда разрешима относительно x', y'. Мы доказали следующую теорему:

Теорема [25. 1]. Пусть Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$ — *две аффинные системы координат, причем точка O' и векторы e_1', e_2' заданы в системе Oe_1e_2 своими координатами: $O'(x_0, y_0)$, $e_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e_2\{\alpha_2, \beta_2\}$. Если x, y и x', y' являются координатами произвольной точки M плоскости соответственно в системах Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$,* то *x, y выражаются через x', y' при помощи соотношений* (3).

Пример 1. Написать формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

$$e_1'\{1, 3\}, \quad e_2'\{0, 5\}, \quad O'(3, -1).$$

Решение. Подставив значения данных координат в (3), получаем:

$$\begin{aligned} x &= x' + 3, \\ y &= 3x' + 5y' - 1. \end{aligned}$$

Отсюда, разрешив эти соотношения относительно x' и y', получаем выражения новых координат через старые:

$$x' = x - 3,$$

$$y' = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + 2.$$

Пример 2. Пусть OAB — произвольный треугольник. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы O, $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$ к аффинной системе $O'e'_1e'_2$, где $O' \equiv A$, $e'_1 = \overline{AB}$, $e'_2 = \overline{AO}$.

Решение. Для решения задачи необходимо определить координаты точки A и векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AO}$ в системе Oe_1e_2. Из соотношения $e_1 = \overline{OA}$ следует, что точка A имеет координаты $(1, 0)$; $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA} = e_2 - e_1$, поэтому $\overline{AB}\{-1, 1\}$; $\overline{AO} = -e_1$, поэтому $\overline{AO}\{-1, 0\}$. Итак, $O'(1, 0)$, $e'_1\{-1, 1\}$, $e'_2\{-1, 0\}$. Формулы преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= -1x' - 1y' + 1, \\ y &= \ \ 1x' + 0 \cdot y' + 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= -x' - y' + 1, \\ y &= x'. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти точку, которая имеет одни и те же координаты в системах: Oe_1e_2 и $O'e'_1e'_2$, где $O'(2, -3)$, $e'_1\{1, 3\}$, $e'_2\{-2, 1\}$.

Решение. Напишем формулы преобразования координат при переходе от Oe_1e_2 к $O'e'_1e'_2$:

$$\begin{aligned} x &= 1x' - 2y' + 2, \\ y &= 3x' + 1 \cdot y' - 3. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь потребуем, чтобы $x = x'$ и $y = y'$. Из формул (5) получаем: $x = x - 2y + 2$, $y = 3x + y - 3$. Отсюда $y = 1$, $x = 1$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что точка $(1, 1)$ имеет одни и те же координаты в системах Oe_1e_2 и $O'e'_1e'_2$.

2. Частные случаи преобразования аффинных систем. Если при переходе от системы Oe_1e_2 к другой системе $O'e'_1e'_2$ векторы e_1 и e_2 не меняются, т. е. $e'_1 = e_1$ и $e'_2 = e_2$, то такое преобразование называется переносом начала координат. В данном случае $e'_1\{1, 0\}_{Oe_1e_2}$, $e'_2\{0, 1\}_{Oe_1e_2}$, поэтому формулы (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти выражения называются формулами преобразования при переносе начала координат.

Пример 4. Написать формулы преобразования при переносе начала координат в точку $O'(2, -3)_{Oe_1e_2}$.

Решение. Подставив значения координат точки O' в (6), получаем:

$$x = x' + 2, \quad y = y' - 3.$$

Заметим, что при переносе начала координат все точки меняют свои координаты.

Если при переходе от системы Oe_1e_2 к другой системе $O'e'_1e'_2$ начало координат не меняется, т. е. $O = O'$, то такое преобразование называется аффинным поворотом системы координат. Существенно отметить, что при аффинном повороте, вообще говоря, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \neq \angle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, $|\boldsymbol{e}_1| \neq |\boldsymbol{e}'_1|$, $|\boldsymbol{e}_2| \neq |\boldsymbol{e}'_2|$. При аффинном повороте O' в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ имеет координаты (O, O), поэтому соотношения (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{aligned} \qquad (7)$$

Эти соотношения называются формулами преобразования при аффинном повороте.

Пример 5. Написать формулы преобразования при аффинном повороте, если $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

Решение. В данном случае $\boldsymbol{e}'_1\{1, 0\}$, $\boldsymbol{e}'_2\{2, -1\}$, поэтому формулы (7) принимают вид:

$$x = x' + 2y', \quad y = -y'.$$

3. Связь между координатами точки в различных прямоугольных декартовых системах. Формулы преобразования (3) применимы так же и в том случае, когда как старая, так и новая системы являются прямоугольными декартовыми. Покажем, что в этом случае коэффициенты при x' и y' имеют простой геометрический смысл. Пусть $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ — две прямоугольные декартовы системы и $O'(x_0, y_0)_{O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{i}'\{\alpha_1, \beta_1\}_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j}'\{\alpha_2, \beta_2\}_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}$. Выясним геометрический смысл чисел α_1, β_1, α_2, β_2. Если $\varphi = \angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}')$, то в соответствии с п. 3, § 5, имеем: $\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}$.

Возможны два случая:

а) Системы $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ на плоскости определяют одну и ту же ориентацию, т. е. $\angle(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}') = +90°$. В этом случае

$$\angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}') = \angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') + \angle(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}') = \varphi + 90°$$

и

$$\boldsymbol{j}' = \cos(\varphi + 90°)\,\boldsymbol{i} + \sin(\varphi + 90°)\,\boldsymbol{j} = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

Формулы преобразования (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0. \end{aligned} \qquad (8)$$

б) Системы $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ на плоскости определяют различные ориентации, т. е. $\angle(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}') = -90°$. В этом случае

$$\angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}') = \angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') + \angle(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}') = \varphi - 90°.$$

$$\boldsymbol{j}' = \cos(\varphi - 90°)\,\boldsymbol{i} + \sin(\varphi - 90°)\,\boldsymbol{j} = \sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \cos\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

Формулы преобразования (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + x_0, \\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + y_0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема [25.2]. *Пусть $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i'j'}$ — две прямоугольные декартовы системы координат, причем точка O' в системе $O\boldsymbol{ij}$ имеет координаты x_0, y_0 и $\angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i'}) = \varphi$. Если системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i'j'}$ определяют на плоскости одну и ту же ориентацию, то формулы преобразования координат точек имеют вид* (8), *если же они определяют различную ориентацию — вид* (9).

Пример 6. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если $O'(1, -3)$, $\varphi(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i'}) = 30^\circ$ и системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i'j'}$ определяют на плоскости различные ориентации.

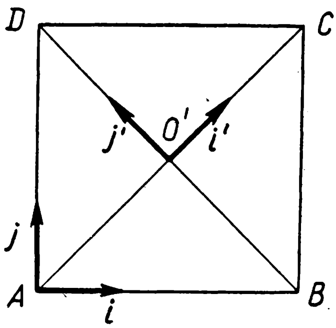
Решение. В данном случае формулы преобразования имеют вид (9). Так как

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -3,$$

то формулы (9) принимают вид:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1,$$

$$y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 3.$$



Черт. 126

Пример 7. Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если направленные прямые AB и AD являются осями координат в старой системе, а направленные прямые AC и BD — осями координат в новой системе.

Решение. Сначала определим координаты нового начала O' и новых координатных векторов $\boldsymbol{i'}$ и $\boldsymbol{j'}$ в старой системе (черт. 126). Точка O' пересечения диагоналей является началом новой системы координат. Очевидно,

$$O'\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad \boldsymbol{i'}\left\{\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right\}, \quad \boldsymbol{j'}\left\{\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right\}$$

или

$$\boldsymbol{i'}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \quad \boldsymbol{j'}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{x' - y'}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}, \quad y = \frac{x' + y'}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}.$$

4. Частные случаи преобразования прямоугольных декартовых систем. В случае переноса начала прямоугольных декартовых систем координат формулы преобразования имеют вид (6) и ничем не отличаются от общего случая переноса начала.

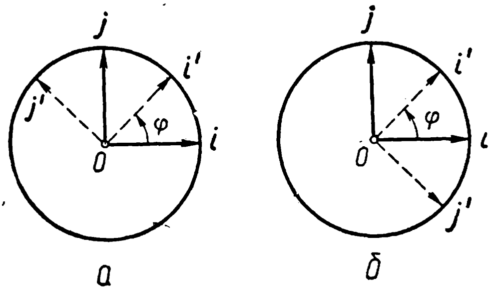
В случае поворота системы координат, т. е. когда O' совпадает с O, формулы преобразования имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,\\
y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,
\end{aligned} \tag{10}
$$

если $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ определяют одну и ту же ориентацию (черт. 127, *а*) и

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,\\
y &= x' \sin\varphi - y' \cos\varphi,
\end{aligned} \tag{11}
$$

если они определяют различные ориентации (черт. 127, *б*).



Черт. 127

5. Обратная задача. Теперь поставим обратную задачу: пусть дана аффинная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и система уравнений (3), удовлетворяющая условию (4). Существует ли такая новая аффинная система координат $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$, при переходе к которой формулы преобразования координат точек имеют вид (3)? Для того чтобы ответить на этот вопрос, введем в рассмотрение точку $O'(x_0, y_0)$ и векторы $\boldsymbol{e}'_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{e}'_2\{\alpha_2, \beta_2\}$, где числа $x_0, y_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ взяты из уравнений (3). Векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ линейно независимы, так как их координаты удовлетворяют условию (4). Отсюда следует, что $O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ является аффинной системой. Легко убедиться в том, что эта координатная система является искомой. Мы доказали следующую теорему:

Теорема [25.3]. *Если дана система координат* $O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ *и система линейных уравнений* (3), *коэффициенты которой удовлетворяют условию* (4), *то существует система координат* $O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, *при переходе к которой соотношения* (3) *являются формулами преобразования координат точек. Новая система определяется соотношениями* (1).

Из этой теоремы непосредственно следует:

Теорема [25.4]. *Если дана прямоугольная декартова система* $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ *и система линейных уравнений* (3), *коэффициенты которой удовлетворяют условиям*:

$$
\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \ \alpha_2^2 + \beta^2 = 1, \ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0, \tag{12}
$$

то существует прямоугольная декартова система $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$, *при переходе к которой соотношения* (3) *являются формулами преобразования координат точек. Новая система определяется так*:

$$
O'(x_0, y_0), \quad \boldsymbol{i}'\{\alpha_1, \beta_1\}, \ \boldsymbol{j}'\{\alpha_2, \beta_2\}.
$$

В самом деле, существование новой системы следует из предыдущей теоремы. Из соотношений (12) вытекает, что она прямоугольная декартова.

Пример 8. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x = 2x' - y' + 3,$ б) $x' = 2x - y,$ в) $x = \sqrt{2}x' - 3y' + 2,$
$y = x' + 2y' + 1;$ $y' = x - 3y + 1;$ $y = 2x' - 3\sqrt{2}y' - 3.$

Решение. а) Так как данная система удовлетворяет условиям теоремы [25.3], то новая система существует, начало O' и координатные векторы e_1', e_2' имеют следующие координаты:

$$O'(3,\ 1),\ e_1'\{2,\ 1\},\ e_2'\{-1,\ 2\}.$$

б) Для того чтобы применить теорему [25.3], предварительно выразим x и y через x' и y'. Заметим, что определитель системы б) не равен нулю, поэтому x и y однозначно выражаются через x' и y':

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' + \frac{1}{5},$$

$$y = \frac{1}{5}x' - \frac{2}{5}y' + \frac{2}{5}.$$

Отсюда, учитывая теорему [25.3], получаем:

$$O'\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right),\ e_1'\left\{\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right\},\ e_2'\left\{-\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right\}.$$

в) Легко видеть, что в данном случае условие (4) не выполняется, так как

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & -3\sqrt{2} \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Отсюда следует, что соотношения в) не являются формулами преобразования, т. е. не существует такой системы $O'e'_1e'_2$, при переходе к которой уравнения в) являются формулами преобразования.

Пример 9. В системе O, e_1, e_2 точки A и B имеют координаты (1, 1) и (2, 2). Существует ли такая новая система координат, начало которой совпадает с началом старой системы и в которой точки A и B имеют координаты (1, 1), (—1, —2)?

Решение. Пусть O, e_1', e_2' — искомая система. Если $e_1'\{\alpha_1,\ \beta_1\}$, $e_2'\{\alpha_2,\ \beta_2\}$, то формулы преобразования имеют вид:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y'.$$

Так как A в обеих системах имеет координаты (1, 1), то

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad 1 = \beta_1 + \beta_2.$$

С другой стороны, точка B в старой системе имеет координаты (2, 2), а в новой системе координаты (—1, —2), поэтому

$$2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2, \quad 2 = -\beta_1 - 2\beta_2.$$

Из этих уравнений получаем: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -3$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = -3$.

Таким образом, векторы e'_1 и e'_2 имеют координаты: $e'_1\{4,4\}$, $e'_2\{-3, -3\}$. Отсюда следует, что e'_1 и e'_2 коллинеарны, что невозможно. Таким образом, новой системы координат, для которой точки A и B имели бы соответственно координаты (1, 1) и (— 1, — 2), не существует.

Вопросы и примеры

328. Где мы пользовались условием (4) при доказательстве теоремы [25.1]? Существенно ли это условие?

329. Написать формулы преобразования аффинных систем координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

а) $e'_1\{2, 3\}$, $e'_2\{1, 5\}$, $O'(3, -1)$;

б) $e'_1\{1, 0\}$, $e'_2\{0, 1\}$, $O'(2, 5)$;

в) $e'_1\{4, -1\}$, $e'_2\{1, 1\}$, $O'(0, 0)$;

г) $e'_1\{1, 0\}$, $e'_2\{1, 2\}$, $O'(2, 0)$;

д) $e'_1\{-1, 0\}$, $e'_2\{0, 1\}$, $O'(0, -5)$.

330. Существуют ли точки, которые имеют одни и те же координаты при аффинном повороте (7)? Как определить их координаты?

331. Написать формулы преобразования при переносе начала координат в точку:

а) $(0, -1)$; б) $(3, -5)$; в) $(\sqrt{2}, 0)$; г) $(3, -7)$.

332. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x = x' - 3y'$, $y = x' + y' + 1$; б) $x' = x - 3$, $y' = y + 4$; в) $x = x' - y' + 1$, $y = y'$;

г) $x' = x + y + 1$, $y' = x - 5$; д) $x = x'$, $y = y' + 1$; е) $x' = x - 2y$, $y' = x$.

333. Дан треугольник ABC. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы координат, для которой $O \equiv A$, $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AB}$, к аффинной системе, для которой $O' \equiv C$, $e'_1 = \overline{CA}$, $e'_2 = \overline{CB}$.

334. В заданном треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Написать формулы преобразова-

ния координат точек при переходе от аффинной системы координат O, $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$ к аффинной системе O', $e'_1 = \overline{O'A}$, $e'_2 = \overline{O'B}$.

335. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых систем координат в каждом из следующих случаев:

а) $i' = \frac{\sqrt{2}}{10} i + \frac{7\sqrt{2}}{10} j$, $O'(2, -3)$; системы Oij и $O'i'j'$ определяют одну и ту же ориентацию.

б) $\varphi = \angle(i, i') = 45°$, $O'(0, 1)$; системы Oij и $O'i'j'$ определяют различные ориентации.

в) $i' = \frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j$, $O'(0, 0)$; системы Oij и $O'i'j'$ определяют различные ориентации.

336. Вычислить определители Δ, составленные из коэффициентов при x', y' в соотношениях (8) и (9), и убедиться в том, что $\Delta = +1$, если системы Oij и $O'i'j'$ определяют одну и ту же ориентацию, и $\Delta = -1$ — в противном случае. Пользуясь этим правилом, выяснить, определяют ли одну и ту же ориентацию системы Oij и $O'i'j'$, для которых формулы преобразования имеют вид:

а) $2x' = \sqrt{3}x - y, \quad 2y' = x + \sqrt{3}y$;

б) $5x' = 4x + 3y, \quad 5y' = 3x - 4y$;

в) $\sqrt{5}x' = x - 2y, \quad \sqrt{5}y' = 2x + y$.

337. Даны две различные прямоугольные декартовы системы координат, причем вторая система получена из первой переносом начала в точку $O'(3, 4)$ (без изменения направления осей). Найти расстояние между двумя точками, имеющими одинаковые координаты (x_0, y_0) относительно рассматриваемых систем.

§ 26. ИЗМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КООРДИНАТ ТОЧЕК; НЕВЕЩЕСТВЕННЫЕ ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

1. Изменение уравнения геометрического места точек при преобразовании координат. Пусть в некоторой аффинной системе Oe_1e_2 дано геометрическое место точек G уравнением:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если на плоскости взять другую систему $O'e'_1e'_2$, то, очевидно, уравнение этого геометрического места, вообще говоря, изменится. Для нахождения нового уравнения необходимо записать формулы преобразования (см. § 25, формулы (3)) и подставить в уравнение (1) выражения x, y через x', y':

$$F(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \quad \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0) = 0. \tag{2}$$

В самом деле, пусть точка M с координатами x, y в старой системе и x', y' в новой системе принадлежит геометрическому месту G. Тогда числа x, y удовлетворяют уравнению (1). Но $x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0$ и $y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0$, поэтому числа x', y' удовлетворяют уравнению (2). Обратно, пусть новые координаты x', y' точки M удовлетворяют уравнению (2). Так как старые координаты x, y той же точки равны: $x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0$, $y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0$, то x, y удовлетворяют уравнению (1), поэтому точка M принадлежит геометрическому месту G.

Пример 1. В системе Oe_1e_2 дано геометрическое место точек уравнением: $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$. Определить уравнение этого же геометрического места в аффинной системе $O'e_1'e_2'$, если $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{1, 0\}$.

Решение. Запишем формулы преобразования координат (§ 25, формулы (3)):

$$x = x' + y' - \frac{1}{5}, \quad y = x' + \frac{3}{5}. \tag{3}$$

Для того чтобы получить уравнение геометрического места точек в новой системе, необходимо выражения x и y из соотношений (3) подставить в данное уравнение кривой:

$$9\left(x' + y' - \frac{1}{5}\right)^2 - 4\left(x' + y' - \frac{1}{5}\right)\left(x' + \frac{3}{5}\right) + $$
$$+ 6\left(x' + \frac{3}{5}\right)^2 + 6\left(x' + y' - \frac{1}{5}\right) - 8\left(x' + \frac{3}{5}\right) + 2 = 0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав подобные члены, окончательно получим:

$$11x'^2 + 9y'^2 + 14x'y' - 1 = 0.$$

Формулы преобразования могут быть применены для упрощения уравнений геометрических мест точек. Рассмотрим следующий пример:

Пример 2. В аффинной системе координат дано геометрическое место точек уравнением:

$$2x^2 - y^2 + 5xy - 3x + 4y - 5 = 0. \tag{4}$$

Новую аффинную систему координат выбрать так, чтобы в уравнении кривой исчезли члены первой степени.

Решение. Рассмотрим перенос начала в точку (x_0, y_0):

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0 \tag{5}$$

и постараемся выбрать новое начало $O'(x_0, y_0)$ так, чтобы в уравнении кривой в новой системе отсутствовали члены первой степени. Для этой цели пока сохраним x_0, y_0 неопределенными и найдем уравнение кривой в новой системе. Для этого достаточно значения x, y из (5) подставить в (4):

$$2(x' + x_0)^2 - (y' + y_0)^2 + 5(x' + x_0)(y' + y_0) - 3(x' + x_0) + \\ + 4(y' + y_0) - 5 = 0.$$

После раскрытия скобок и элементарных преобразований получаем:

$$2x'^2 - y'^2 + 5x'y' + x'(4x_0 + 5y_0 - 3) + y'(5x_0 - 2y_0 + 4) + \\ + 2x_0^2 - y_0^2 + 5x_0 y_0 - 3x_0 + 4y_0 - 5 = 0. \quad (6)$$

Подберем x_0, y_0 так, чтобы коэффициенты при x' и y' обратились в нуль. Для этого достаточно потребовать, чтобы $4x_0 + 5y_0 - 3 = 0$, $5x_0 - 2y_0 + 4 = 0$. Решив эту систему, получаем: $x_0 = -\frac{14}{33}$, $y_0 = \frac{31}{33}$.

Подставив эти значения в соотношение (6), получаем уравнение кривой в новой системе:

$$2x'^2 - y'^2 + 5x'y' + \frac{1634}{1089} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7), очевидно, значительно проще уравнения (4). Сейчас мы покажем, что не всегда можно добиться того, чтобы в уравнении кривой исчезли члены первой степени.

Пример 3. Парабола дана своим каноническим уравнением. Можно ли выбрать новую аффинную систему координат так, чтобы в этой системе уравнение параболы не содержало членов первой степени?

Решение. Рассмотрим параболу $y^2 = 2px$ в канонической системе координат Oij и поставим задачу: найти такую систему координат $O'e'_1 e'_2$, в которой уравнение рассматриваемой параболы не содержит членов первой степени.

Пусть $O'(x_0, y_0)$, $e'_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e'_2\{\alpha_2, \beta_2\}$, тогда формулы преобразования имеют вид:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0,$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0.$$

Подставив эти значения в уравнение $y^2 = 2px$, получаем уравнение параболы в новой системе координат:

$$(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0)^2 = 2p(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)$$

или

$$\beta_1^2 x'^2 + \beta_2^2 y'^2 + 2\beta_1\beta_2 x'y' + 2(\beta_1 y_0 - p\alpha_1)x' + 2(\beta_2 y_0 - p\alpha_2)y' + \\ + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Так как в этом уравнении коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то

$$\beta_1 y_0 - p\alpha_1 = 0, \; \beta_2 y_0 - p\alpha_2 = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{y_0}{p}\cdot\beta_1,\quad \alpha_2 = \frac{y_0}{p}\cdot\beta_2.$$

Отсюда следует, что $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$, т. е. векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ коллинеарны, что невозможно.

Мы пришли к выводу, что не существует такой системы координат, относительно которой уравнение параболы не содержало бы членов первой степени.

Рассмотрим еще один пример преобразования уравнения геометрического места точек.

Пример 4. Аффинная система координат выбрана так, что оси совпадают с асимптотами гиперболы. Каково уравнение гиперболы в этой системе?

Решение. Пусть $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ — исходная система координат, а $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ — каноническая система координат гиперболы, имеющей в этой системе уравнение:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Так как O — точка пересечения асимптот, то O' и O совпадают. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ параллельны асимптотам, поэтому $\boldsymbol{e}_1 = \alpha(a\boldsymbol{i}' + b\boldsymbol{j}')$, $\boldsymbol{e}_2 = \beta(a\boldsymbol{i}' - b\boldsymbol{j}')$ (см. § 21, п. 3). Если x, y — координаты точки в исходной системе координат, а x', y' — координаты той же точки в канонической, то

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\, ax + \beta ay,\\ y' &= \alpha\, bx - \beta by. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в каноническое уравнение гиперболы, после элементарных преобразований получаем:

$$xy = \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

Если, в частности, $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, то $xy = 1$.

Если кривая задана уравнением в аффинной системе координат, то в отдельных случаях легко упростить уравнение кривой и определить ее вид, не прибегая к известным приемам. Для этого следует надлежащим образом сгруппировать члены, находящиеся в левой части уравнения, и путем введения новых переменных упростить уравнение кривой.

Рассмотрим пример: $xy - x = 1$. Уравнение кривой может быть записано в виде: $x(y - 1) = 1$. Введем новые переменные x' и y' так, чтобы

$$x' = y,\ y' = y - 1. \tag{8}$$

Легко показать, что существует новая система координат, при переходе к которой соотношения (8) являются формулами преобразования. В новой системе данная кривая имеет уравнение $x'y' = 1$. Этим уравнением задана гипербола (см. пример 4). Следовательно, исходным уравнением также задана гипербола.

При решении задач подобного рода существенно обратить внимание на следующее обстоятельство. Новые переменные x', y' следует вводить так, чтобы формулы $x' = \varphi_1(x, y)$, $y' = \varphi_2(x, y)$ являлись формулами преобразования координат. Это означает, что функции φ_1 и φ_2 должны быть линейными, т. е. должны иметь вид:

$$\varphi_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + x_0,$$
$$\varphi_2 = \beta_1 x + \beta_2 y + y_0,$$

и, кроме того, необходимо выполнение условия (4), § 25:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Другими словами, должны быть выполнены условия теоремы [25.3].

Рассмотрим пример: $x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$(x - y)^2 - \frac{1}{5} = 0.$$

Если ввести новые переменные x', y' так, чтобы

$$x' = x - y, \quad y' = y, \tag{9}$$

то уравнение кривой в новой системе будет иметь вид:

$$x'^2 = \frac{1}{5}.$$

Этим уравнением задана *пара параллельных прямых*.

Рассмотрим другой способ упрощения уравнения той же кривой:

$$x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0, \quad (x - y)^2 - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\left(x - y - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x - y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Если ввести новые переменные $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ так, чтобы

$$\tilde{x} = x - y - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = x - y + \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{10}$$

то уравнение кривой в новой системе будет иметь вид: $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = 0$. Кривая представляет собой *пару пересекающихся* прямых. Мы пришли в противоречие с предыдущим результатом. В чем причина этого?

Дело в том, что соотношения (9) могут служить формулами преобразования координат точек, а соотношения (10) таковыми не могут быть. В самом деле, определитель системы (9) не равен нулю, а определитель системы (10) равен нулю. (См. теорему [25. 3].)

Формулы преобразования могут быть применены для нахождения неканонических уравнений эллипсов, гипербол и парабол, заданных координатами фокусов и некоторыми дополнительными данными.

Пример 5. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты двух фокусов F_1 (1, 3), F_2 (—1, 2) и точки M (—1,3) эллипса. Найти каноническое уравнение эллипса и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение эллипса в исходной неканонической системе координат.

Решение. По координатам двух фокусов легко определить фокальное расстояние.

$$2c = F_1F_2 = \sqrt{(1+1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{5}.$$

С другой стороны, пользуясь фокальным свойством эллипса, получаем:

$$2a = F_1M + MF_2 = \sqrt{4+0} + \sqrt{0+1} = 3.$$

Таким образом, $a = \frac{3}{2}$, $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$, поэтому $b = 1$. Если $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$—каноническая система координат для данного эллипса, то в этой системе эллипс задается уравнением:

$$\frac{4}{9} x'^2 + y'^2 = 1. \tag{11}$$

Для канонической системы координат середина O' отрезка F_1F_2 является началом координат, направленная прямая F_2F_1 — осью абсцисс, а прямая, проходящая через O' и перпендикулярная к F_1F_2, — осью ординат. Таким образом, если $O'(x_0, y_0)$, то

$$x_0 = \frac{1-1}{2} = 0, \quad y_0 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\boldsymbol{i}' = \frac{\overline{F_2F_1}}{|\overline{F_2F_1}|}, \quad \boldsymbol{i}'\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \quad \boldsymbol{j}'\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' - \frac{1}{\sqrt{5}} y'; \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{5}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$x' = \frac{2x + y - \frac{5}{2}}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{-x + 2y - 5}{\sqrt{5}}.$$

Подставив эти значения в уравнение (11), после элементарных преобразований получаем уравнение эллипса в исходной системе:

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 40y + 41 = 0.$$

2. Невещественные точки и прямые на плоскости. Для дальнейшего изложения нам необходимо ввести в рассмотрение так называемые невещественные точки и прямые на плоскости.

Если на плоскости дана система координат, то каждая точка задается двумя координатами (x, y) и, наоборот, каждой паре действительных чисел соответствует некоторая точка. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех точек плоскости, с одной стороны, и совокупностью всех пар вещественных чисел, взятых в определенном порядке, с другой стороны. Теперь мы расширим понятие точки и *при выбранной системе координат точкой назовем любую пару комплексных чисел, взятых в определенном порядке* (x, y). *Точки* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2) *совпадают тогда и только тогда, когда* $x_1 = x_2$ *и* $y_1 = y_2$. Если обе координаты точки вещественные, то она называется действительной или вещественной, если же хотя бы одна координата невещественна — комплексной или невещественной. Если точка в системе Oe_1e_2 имеет координаты (x, y), то мы будем считать, что та же точка в системе $O'e'_1e'_2$ имеет координаты $(x', y',)$ где

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0,$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0,$$

$O'(x_0, y_0)$, $e'_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e'_2\{\alpha_2, \beta_2\}$. Важно подчеркнуть, что числа x_0, y_0, α_1, β_1, α_2, β_2 всегда считаются действительными, поэтому понятие действительных и комплексных точек не зависит от выбора системы координат. Например, если точки $A(i, 1)$, $B(0, 5)$, $C(i, i+1)$ заданы в системе Oe_1e_2, то те же точки в системе $O'e'_1e'_2$, где $O' \equiv O$ $e'_1 = 2e_1$, $e'_2 = -e_2$, имеют координаты: $A\left(\frac{i}{2}, -1\right)$, $B(0, -5)$, $C\left(\frac{i}{2}, -i-1\right)$, так как $x' = \frac{x}{2}$, $y' = -y$.

Две точки, у которых соответственные координаты являются сопряженными комплексными числами, называются комплексно-сопряженными точками. Можно показать, что это понятие также не зависит от выбора системы координат.

Линией, выражаемой уравнением $F(x, y) = 0$, *мы будем называть совокупность всех точек* (x, y), *как действительных, так и невещественных, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.* В частности, прямой называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $Ax + By + C = 0$, причем по крайней мере один из коэффициентов A или B отличен от нуля. Если A, B и C вещественны или могут быть сделаны вещественными путем умножения на одно и то же число, то прямая называется вещественной, в противном случае — невещественной. Например, прямая $5x + y - 1 = 0$ — вещественная, а $ix - y + 1 = 0$ — невещественная. На вещественной прямой существуют как вещественные, так и невещественные точки. Например, точка $(i, -5i + 1)$ принадлежит вещественной прямой $5x + y - 1 = 0$. Предложение о том, что через две точки проходит одна и только одна прямая, сохраняется и в комплексной геометрии.

Прямые могут быть заданы также параметрически: $x = \alpha t + x_0$, $y = \beta t + y_0$. Здесь α, β, x_0, y_0 — вообще говоря, комплексные числа. Если они действительны, то прямая будет действительной. Отметим, что для получения всех точек прямой параметру t следует давать всевозможные значения, как действительные, так и комплексные.

Каждая линия, вообще говоря, имеет как действительные, так и комплексные точки. Например, эллипс $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, как мы знаем, имеет бесчисленное множество действительных точек. Но этому эллипсу принадлежит также бесчисленное множество комплексных точек. Например, точки $\left(\sqrt{\frac{5}{4}(4 - t^2)},\ t\right)$ при любом t лежат на эллипсе. Эти точки являются комплексными при всех действительных $t > 2$. Однако существуют кривые, не имеющие ни одной действительной точки. Например, кривая $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + 1 = 0$ не имеет ни одной действительной точки. В самом деле, предыдущее уравнение можно записать в виде $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = -1$. Но сумма квадратов двух чисел не может равняться минус единице, поэтому x и y не могут быть одновременно действительными.

В заключение отметим, что понятие линии и, в частности, прямой не зависит от выбора системы координат.

Примеры и задачи

338. В системе Oij дано геометрическое место точек уравнением: $4xy + 4y = 1$. Определить уравнение этого же геометрического места в новой прямоугольной декартовой системе, если

$$O'(-1,\ 0),\ i'\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ j'\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

По уравнению определить геометрическое место точек.

339. Показать, что надлежащим подбором нового начала координат можно добиться того, чтобы при параллельном перенесении системы координат в уравнении кривой $x^2+y^2-4x+2y-1=0$ исчезли члены первой степени.

340. Показать, что существует такая прямоугольная система координат[1], в которой уравнение эллипса имеет вид $x^2+y^2=1$.

341. Показать, что существует такая прямоугольная система координат, в которой уравнение гиперболы имеет вид $x^2-y^2=1$.

342. В прямоугольной декартовой системе дана равнобочная гипербола $x^2-y^2=1$. Определить уравнение этой гиперболы, если начало координат оставлено прежнее, а оси повернуты на 45° в отрицательном направлении.

343. Доказать, что геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют уравнению $xy=1$, есть гипербола.

344. Надлежащим образом сгруппировав члены, находящиеся в левой части уравнений, путем введения новых переменных упростить уравнения и определить вид следующих кривых:

а) $xy-x=0$; в) $x^2+2xy+y^2+x+2y+1=0$;

б) $x^2+y+1=0$; г) $2x^2+5y^2-2xy-1=0$.

345. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты двух фокусов $F_1(2,4)$, $F_2(0,3)$ и точка $M(0,4)$ гиперболы. Найти каноническое уравнение гиперболы и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение гиперболы в исходной неканонической системе координат.

346. В прямоугольной декартовой системе координат даны фокус $F(1,-1)$, точка $M\ (2,1)$ параболы и вектор $\boldsymbol{a}\{-1,2\}$, определяющий направление оси параболы. Определить уравнение параболы в исходной системе координат.

347. Даны точки $A\ (1,\ i)$, $B\ (0,5)$, $C(i+1,\ -i)$, $D\ (-1,\ 12)$ в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Найти координаты тех же точек в системе: $O'(1,0)$, $\boldsymbol{e}'_1\ \{1,1\}$, $\boldsymbol{e}'_2\ \{2,\ 0\}$. Убедиться в том, что понятие невещественной точки не зависит от выбора системы координат.

348. Написать уравнение прямой, проходящей через точки а) $(i,-i)$, $(0,\ 0)$; б) $(0,\ 1)$, $(-i,\ 0)$; в) $(i,0)$, $\left(2i,\ -\frac{i}{3}\right)$.

Выяснить, какие из данных прямых являются невещественными.

349. Доказать теорему: для того чтобы прямая, заданная уравнением $(\alpha_1+i\beta_1)x+(\alpha_2+i\beta_2)y+(\alpha_3+i\beta_3)=0$, была действительной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\begin{Vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{Vmatrix}$ был равен единице.

350. Выяснить, существуют ли действительные точки на комплексной прямой $ix+y+1=0$ и сколько их?

---

[1] Система прямоугольная, но не обязательно декартова, т. е. $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$, но не обязательно $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|$.

ГЛАВА VII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В главе IV было показано, что всякая прямая на плоскости задается при помощи линейного уравнения, если выбрана аффинная система координат. Была доказана также обратная теорема, т. е. что геометрическое место точек плоскости, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют линейному уравнению, есть прямая. Следовательно, с алгебраической точки зрения прямая является линейным образом. В настоящей главе мы переходим к изучению более сложных, квадратичных образов — так называемых кривых второго порядка.

1. Определение кривой второго порядка. *Кривой второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых в некоторой (вообще говоря, аффинной) системе удовлетворяют уравнению*:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где A, B, ..., F — действительные числа, причем хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю. Покажем, что это определение носит геометрический характер, т. е. не зависит от выбора системы координат. Пусть $O\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$ — исходная, а $O'\,\mathbf{e}'_1\,\mathbf{e}'_2$ — новая системы координат, причем $O'(x_0, y_0)$, $\mathbf{e}'_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\mathbf{e}'_2\{\alpha_2, \beta_2\}$. Найдем уравнение геометрического места (1) в новой системе. Для этого, как было показано в § 26, необходимо из соотношений

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \qquad y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0$$

(см. формулы (3), § 25) значения x, y подставить в уравнение (1):

$$\begin{gathered} A(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)^2 + B(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0)^2 + \\ + C(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0) + \\ + D(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0) + E(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0) + F = 0. \end{gathered}$$

После элементарных преобразований получаем:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x'y' + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

где A', B', ..., F' — некоторые числовые коэффициенты, Мы пришли к выводу, что в новой системе геометрическое место задано алгебраическим уравнением, степень которого не выше степени уравнения (1), т. е. двух. В отличие от уравнения (1), мы пока не можем утверждать, что в уравнении (2) хотя бы один из коэффициентов A', B', C' не равен нулю. Однако легко видеть, что при переходе от системы $Oe_1\, e_2$ к системе $O'e_1{}'e_2{}'$ степень уравнения (1) не может понизиться, т. е. коэффициенты A', B' и C' одновременно не равны нулю. В самом деле, если предположить, что степень уравнения (2) ниже степени уравнения (1), то при обратном переходе от системы $Oe'_1e'_2$ к Oe_1e_2 степень уравнения должна повыситься, что противоречит предыдущему выводу. Итак, доказана следующая теорема:

Теорема [27. 1]. *Если в некоторой системе Oe_1e_2 геометрическое место точек задано алгебраическим уравнением второй степени* (1), *то в любой другой системе $O_1'\, e_1'\, e_2'$ оно задается также алгебраическим уравнением второй степени.*

Эллипс, парабола и гипербола, рассмотренные нами в главе V, являются примерами кривых второго порядка. Однако существуют и другие кривые второго порядка. Например, $x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0$ по определению является кривой второго порядка. В § 26 мы показали, что этим уравнением задается пара параллельных прямых. В настоящем параграфе, путем преобразования системы координат и упрощения уравнения, установим все виды кривых второго порядка. Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения для коэффициентов уравнения (1):

$$A = a_{11},\ B = a_{22},\ C = 2a_{12},\ D = 2a_{13},\ E = 2a_{23},\ F = a_{33}.$$

В новых обозначениях уравнение (1) принимает вид:

$$F(x,\ y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}\, y^2 + 2a_{13}\, x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3)$$

Условимся также считать, что $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Члены $a_{11}x^2$, $2a_{12}xy$, $a_{22}\, y^2$ называются старшими членами уравнения (3). Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} могут быть любыми действительными числами, но a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно не равны нулю.

2. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем поворота системы координат. В последующем изложении этого параграфа мы будем предполагать, что кривая (3) задана в прямоугольной декартовой системе. Поставим следующую задачу: пусть в уравнении (3) $a_{12} \neq 0$; путем вращения системы координат перейти к новой системе так, чтобы в этой системе $a'_{12} = 0$. Прежде всего найдем уравнение кривой в новой системе $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$, которая получена из $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ поворотом на угол α без изменения ориентации системы. В этом случае формулы преобразования имеют вид (см. формулы (10), § 25):

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \qquad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad (4)$$

Подставив эти значения в уравнение (3), после элементарных преобразований, получаем:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0, \qquad (3')$$

где коэффициенты $a'_{11}, a'_{12},\ldots$ выражаются через коэффициенты уравнения (3) и $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. В частности,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \quad a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha,\\ a'_{12} &= -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\sin\alpha\cos\alpha,\\ a'_{22} &= \quad a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha,\\ a'_{13} &= a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha,\\ a'_{23} &= -a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha,\\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Покажем, что всегда можно подобрать α так, чтобы $a'_{12}=0$. Для этого запишем выражение a'_{12} в виде: $a'_{12}=\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\sin 2\alpha+$ $+a_{12}\cos 2\alpha=0$. Если $\frac{a_{22}-a_{11}}{2}=0$, то $\alpha=45°$ удовлетворяет уравнению. Если $\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\neq 0$, то $\cos 2\alpha\neq 0$, поэтому из предыдущего соотношения получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}. \qquad (6)$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема [27.2]. *Если дана кривая второго порядка, то всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение кривой имеет вид*:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (7)$$

3. Упрощение уравнения кривой путем переноса начала координат. Дальнейшее упрощение уравнения кривой (7) может быть выполнено путем переноса начала координат. Возможны три случая.

а) Коэффициенты a_{11} и a_{22} не равны нулю, а остальные произвольны. Сгруппируем члены левой части уравнения относительно x и y следующим образом:

$$a_{11}\left(x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right)+a_{22}\left(y^2+2\frac{a_{23}}{a_{22}}y+\frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right)+$$

$$+a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}-\frac{a_{23}^2}{a_{23}}=0$$

или

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2+a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}-\frac{a_{23}^2}{a_{22}}=0.$$

Возьмем новую систему координат так, чтобы

$$x'=x+\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad y'=y+\frac{a_{23}}{a_{22}}.$$

Очевидно, новая система получена из старой переносом начала координат в точку $\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}},\ -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$. В этой системе уравнение кривой имеет вид:

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a'_{33}=0, \tag{8}$$

где для сокращения записи свободный член обозначен через a'_{33}.

б) $a_{22}=0$, $a_{23}\neq 0$ или $a_{11}=0$, $a_{13}\neq 0$.

Эти случаи аналогичны, так как путем преобразования $x'=y$, $y'=x$ один из них можно свести к другому. Рассмотрим первый случай. Так как коэффициенты при старших членах одновременно не равны нулю, то $a_{11}\neq 0$. Сгруппируем члены левой части уравнения (7) относительно x, y следующим образом:

$$a_{11}\left(x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right)+2a_{23}\left(y+\frac{a_{33}}{2a_{23}}-\frac{a_{13}^2}{2a_{11}^2a_{23}}\right)=0$$

или

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+2a_{23}(y+a')=0.$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$a'=\frac{a_{33}}{2a_{23}}-\frac{a_{13}^2}{2a_{11}^2a_{23}}.$$

Возьмем новую систему координат так, чтобы

$$x'=x+\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad y'=y+a'.$$

В этой системе уравнение кривой принимает вид:

$$a_{11}x'^2+2a_{23}y'=0. \tag{9}$$

в) $a_{11}=0$, $a_{13}=0$ или $a_{22}=0$, $a_{23}=0$. Эти случаи также аналогичны. Рассмотрим второй случай. Уравнение (7) принимает вид:

$$a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}=0, \tag{7'}$$

где $a_{11}\neq 0$. Аналогично предыдущему это выражение можно записать так:

$$a_{11}\left(x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right)+a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}=0$$

или

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a'=0,$$

где для сокращения записи введено обозначение: $a'=a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}$.

Если взять новую систему координат так, чтобы $x'=x+\frac{a_{13}}{a_{11}}$, $y'=y$, то в этой системе уравнение кривой принимает вид:

$$a_{11}x'^2+a'=0. \tag{10}$$

Мы пришли к следующему выводу:

Теорема [27.3]. *Если кривая второго порядка в прямоугольной декартовой системе дана уравнением* (7), *то путем надлежащего выбора новой прямоугольной декартовой системы координат уравнение этой кривой можно привести к одному из следующих видов*:

$$Ax^2+By^2+C=0, \quad \text{где } A\neq 0, \quad B\neq 0; \tag{8'}$$

$$Ax^2+By=0, \quad \text{где } A\neq 0, \quad B\neq 0; \tag{9'}$$

$$Ax^2+B=0, \quad \text{где } A\neq 0. \tag{10'}$$

4. Классификация кривых второго порядка. Из теорем [27. 2] и [27.3] следует, что путем надлежащего выбора прямоугольной декартовой системы координат уравнение любой кривой второго порядка можно привести к одному из видов (8), (9) или (10). В самом деле, сначала поворотом системы координат можно привести уравнение кривой к виду (7), а затем переносом начала координат привести полученное уравнение к одному из видов (8), (9) или (10). Отсюда мы получаем способ для полной классификации кривых второго порядка.

А. Классификация кривых, заданных уравнением (8′). В уравнении (8′) коэффициенты A и B отличны от нуля, а C произвольно. Рассмотрим два случая:

1) $C\neq 0$. Разделив (8′) на $-C$, получаем:

$$-\frac{A}{C}x^2-\frac{B}{C}y^2=1. \tag{11}$$

Возможны следующие случаи:

а) $-\frac{A}{C}>0$, $-\frac{B}{C}>0$. Если ввести обозначения: $-\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}$, $-\frac{B}{C}=\frac{1}{b^2}$, то уравнение (11) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Мы получили каноническое уравнение эллипса.

б) $-\frac{A}{C}>0$, $-\frac{B}{C}<0$. Если ввести обозначения: $-\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}$,

$-\frac{B}{C}=-\frac{1}{b^2}$, то уравнение (11) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Мы получили **каноническое уравнение гиперболы**.

в) $-\frac{A}{C}<0$, $-\frac{B}{C}>0$. Этот случай легко свести к предыдущему, если поменять ролями оси координат, т. е. рассмотреть преобразование $x'=y$, $y'=x$. Таким образом, в этом случае кривая представляет собой гиперболу.

г) $-\frac{A}{C}<0$, $-\frac{B}{C}<0$. Если ввести обозначения $\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{B}{C}=\frac{1}{b^2}$, то уравнение (12) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. На этой кривой нет ни одной действительной точки. Она называется **мнимым эллипсом**. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

называется **каноническим уравнением мнимого эллипса**.

2) $C=0$. Уравнение (8′) принимает вид:

$$Ax^2+By^2=0. \qquad (12)$$

Возможны следующие случаи:

а) $A>0$, $B<0$. Если положить $A=\frac{1}{a^2}$, $B=-\frac{1}{b^2}$, то уравнение (12) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ или $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$. Этим уравнением задается **пара действительных прямых** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, пересекающихся в начале координат.

б) $A<0$, $B>0$. Этот случай легко свести к предыдущему, если умножить соотношение (12) на -1. В этом случае кривая также представляет собой пару пересекающихся действительных прямых.

в) $A>0$, $B>0$. Если положить $A=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{1}{b^2}$, то уравнение (12) принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}\right)=0.$$

Этим уравнением задается **пара комплексных прямых**, пересекающихся в действительной точке O (0, 0).

г) $A<0$, $B<0$. Этот случай сводится к предыдущему умножением соотношения (12) на -1.

Резюмируя все вышеизложенное, мы приходим к теореме:

Теорема [27.4]. *Кривая второго порядка, заданная в прямоугольной декартовой системе уравнением*

$$Ax^2+By^2+C=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0,$$

представляет собой

1. Эллипс, если $C\neq 0$, $\frac{A}{C}<0$, $\frac{B}{C}<0$.

2. Гиперболу, если $C\neq 0$, $\frac{A}{C}>0$, $\frac{B}{C}<0$ или $C\neq 0$, $\frac{A}{C}<0$, $\frac{B}{C}>0$.

3. Мнимый эллипс, если $C\neq 0$, $\frac{A}{C}>0$, $\frac{B}{C}>0$.

4. Пару действительных пересекающихся прямых, если $C=0$, $AB<0$.

5. Пару комплексных прямых, пересекающихся в действительной точке, если $C=0$, $AB>0$.

Б. Классификация кривых, заданных уравнением (9′). Разделив уравнение (9′) на A, получаем: $x^2+\frac{B}{A}y=0$. Возможны два случая.

1. $\frac{B}{A}>0$. Если положить $\frac{B}{A}=2p$ и изменить направление оси Oy, т. е. рассмотреть преобразование $x=x'$, $y=-y'$, то предыдущее уравнение принимает вид: $x'^2=2py'$. Мы получили уравнение параболы (см. § 22, (2′)).

2. $\frac{B}{A}<0$. Если положить $\frac{B}{A}=2p$, то исходное уравнение принимает вид: $x^2=2py$. Мы снова получили уравнение параболы. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема [27.5]. *Кривая второго порядка, заданная уравнением $Ax^2+By=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$, представляет собой параболу.*

В. Классификация кривых, заданных уравнением (10′). Рассмотрим два случая:

1. $B\neq 0$. Разделив уравнение (10′) на B, получаем: $\frac{A}{B}x^2+1=0$.

а) Если $\frac{A}{B}<0$, то, положив $-\frac{A}{B}=\frac{1}{a^2}$, получаем следующее уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-1=0$ или $\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)=0$. Кривая представляет собой пару параллельных прямых $\frac{x}{a}=1$, $\frac{x}{a}=-1$.

б) Если $\frac{A}{B}>0$, то, положив $\frac{A}{B}=\frac{1}{a^2}$, получаем следующее уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+1=0$ или $\left(\frac{x}{a}+i\right)\left(\frac{x}{a}-i\right)=0$. Кривая представляет собой пару параллельных невещественных прямых.

2. $B = 0$. Уравнение (10′) принимает вид $x^2 = 0$. Мы получили уравнение оси Oy. В этом случае говорят, что кривая представляет собой пару слившихся прямых. Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [27.6]. *Кривая второго порядка, заданная в прямоугольной декартовой системе уравнением* $Ax^2 + B = 0$, $A \neq 0$, *представляет собой*:

1. *Пару вещественных параллельных прямых, если* $AB < 0$.
2. *Пару невещественных параллельных прямых, если* $AB > 0$.
3. *Пару слившихся прямых, если* $B = 0$.

Резюмируя приведенное выше исследование, можно сформулировать теорему:

Теорема [27.7]. *Существуют девять и только девять типов кривых второго порядка.*

Название кривой	Каноническое уравнение
1. Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. Парабола	$y^2 = 2px$
4. Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
5. Пара пересекающихся действительных прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
6. Пара невещественных пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
7. Пара параллельных действительных прямых	$\frac{x^2}{a^2} = 1$
8. Пара параллельных невещественных прямых	$\frac{x^2}{a^2} = -1$
9. Пара слившихся прямых	$x^2 = 0$

§ 28. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

В предыдущем параграфе по существу был показан способ приведения кривой второго порядка к каноническому виду. Идея упрощения уравнения кривой заключается в том, что сначала путем поворота системы координат приводят уравнение к виду (7), § 27, не содержащему члена с произведением переменных, далее переносом начала координат добиваются дальнейшего упрощения (см. формулы (8), (9), (10) предыдущего параграфа). Однако формула (6), § 27, не всегда удобна для нахождения $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, поэтому практически при решении задач на упрощение уравнения кривой поступают несколько иначе.

1. Характеристическое уравнение кривой. Пусть требуется привести к каноническому виду уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

где $a_{12} \neq 0$. Из формул (5), § 27 следует, что угол поворота α, приводящий к новой системе, в которой $a'_{12} = 0$, определяется из соотношения:

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Запишем это соотношение в виде

$$\sin\alpha\,(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha) - \cos\alpha\,(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha & a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что строки определителя пропорциональны, т. е,

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha &= s\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= s\sin\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha &= 0, \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - s)\sin\alpha &= 0. \end{aligned} \qquad (3')$$

Эта система относительно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

или

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \qquad (4')$$

Найдя какой-либо корень этого уравнения и подставив в (3′), получаем два уравнения, каждое из которых является следствием другого. Поэтому, отбросив одно из них, определяем из другого $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

Уравнение (4′) *называется* *характеристическим уравнением кривой второго порядка.*

2. Свойства корней характеристического уравнения.

Теорема [28.1]. *Характеристическое уравнение кривой второго порядка, отличной от окружности, всегда имеет два различных действительных корня.*

Доказательство. Корни квадратного уравнения (4′), как известно, определяются по формуле

$$s = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}.$$

Но подкоренное выражение можно записать так:

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=$$
$$=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2.$$

Легко видеть, что это выражение положительно. В самом деле, оно не отрицательно, как сумма квадратов двух чисел. Если $(a_{11}-a_{22})^2+$ $+4a^2{}_{12}=0$, то $a_{11}-a_{22}=0$ и $a_{12}=0$, т. е. кривая согласно теореме [12.2] представляет собой окружность. Теорема доказана.

Каждому корню характеристического уравнения соответствует свой угол поворота. Если s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения, а α_1 и α_2 — соответствующие углы, то из (3′) следует, что $(a_{11}-s_1)\cos\alpha_1+a_{12}\sin\alpha_1=0$, $(a_{11}-s_2)\cos\alpha_2+$ $+a_{12}\sin\alpha_2=0$.

Так как $a_{12}\neq 0$, то $\cos\alpha_1\neq 0$ и $\cos\alpha_2\neq 0$, поэтому, разделив эти соотношения соответственно на $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$, получаем выражения для угловых коэффициентов соответствующих направлений:

$$k_1=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}=\frac{s_1-a_{11}}{a_{12}},\quad k_2=\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}=\frac{s_2-a_{11}}{a_{12}}. \tag{5}$$

Покажем, что $k_1k_2=-1$. В самом деле,

$$k_1k_2=\frac{(s_1-a_{11})(s_2-a_{11})}{a_{12}^2}=\frac{s_1s_2-a_{11}(s_1+s_2)+a_{11}^2}{a_{12}^2}. \tag{6}$$

По теореме Виета из (4′) получаем:

$$s_1+s_2=a_{11}+a_{22},\qquad s_1s_2=a_{11}a_{22}-a^2{}_{12}.$$

Подставив эти значения в соотношение (6), после элементарных преобразований получаем: $k_1k_2=-1$. Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [28.2]. *Каждому корню характеристического уравнения соответствует направление, определяемое из уравнений* (3), *причем два направления, соответствующие различным корням, взаимно перпендикулярны. Они определяют направление осей новой системы* $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$, *в которой кривая имеет уравнение, не содержащее члена с произведением переменных.*

В заключение отметим еще одно интересное свойство корней характеристического уравнения.

Теорема [28.3]. *Пусть кривая в системе* $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ *задана уравнением* (1). *Если систему координат повернуть так, чтобы новые оси определялись угловыми коэффициентами* (5), *то в новой системе кривая имеет уравнение*:

$$s_1x'^2+s_2y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a_{33}=0, \tag{7}$$

где s_1, s_2 — *корни характеристического уравнения,*

$$a'_{13}=a_{13}\cos\alpha_1+a_{23}\sin\alpha_1,\ a'_{23}=a_{13}\cos\alpha_2+a_{23}\sin\alpha_2, \tag{8}$$

а α_1, α_2 — *углы, соответствующие угловым коэффициентам* k_1 *и* k_2.

Доказательство. Угловые коэффициенты (5) определяют новую систему, в которой уравнение кривой имеет вид (3′), § 27, где $a'_{12} = 0$. Коэффициенты $a'_{11}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}$ этого уравнения определяются из соотношений (5), § 27. Если $\boldsymbol{i}'$ имеет направление, соответствующее угловому коэффициенту k_1, то из (5), § 27 следует, что

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha_1 + 2a_{12}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + a_{22}\sin^2\alpha_1 =$$
$$= \cos\alpha_1(a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1) + \sin\alpha_1(a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1).$$

Из уравнений (3) следует, что

$$a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1 = s_1\cos\alpha_1, \qquad a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1 = s_1\sin\alpha_1.$$

Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем:

$$a'_{11} = \cos\alpha_1(s_1\cos\alpha_1) + \sin\alpha_1(s_1\sin\alpha_1) = s_1.$$

Аналогично определяем коэффициент a_{22}:

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha_1 - 2a_{12}\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + a_{22}\cos^2\alpha_1.$$

Но $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 - 90°$ и

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2(\alpha_2 - 90°) - 2a_{12}\sin(\alpha_2 - 90°)\cos(\alpha_2 - 90°) +$$
$$+ a_{22}\cos^2(\alpha_2 - 90°) = a_{11}\cos^2\alpha_2 + 2a_{12}\cos\alpha_2\sin\alpha_2 + a_{22}\sin^2\alpha_2 =$$
$$= \cos\alpha_2(a_{11}\cos\alpha_2 + a_{12}\sin\alpha_2) + \sin\alpha_2(a_{21}\cos\alpha_2 + a_{22}\sin\alpha_2).$$

Из уравнений (3) следует, что

$$a_{11}\cos\alpha_2 + a_{12}\sin\alpha_2 = s_2\cos\alpha_2; \qquad a_{21}\cos\alpha_2 + a_{22}\sin\alpha_2 = s_2\cos\alpha_2.$$

Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $a'_{22} = s_2$.

Коэффициенты $a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}$ непосредственно определяются из (5), § 27, если учесть, что $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$. Теорема доказана.

3. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем поворота системы координат. Теоремы [28. 2] и [28. 3] позволяют упростить уравнение кривой путем поворота системы координат. Если кривая второго порядка в прямоугольной декартовой системе задана уравнением (1), где $a_{12} \neq 0$, то для упрощения этого уравнения сначала, пользуясь формулами (5), определяют угловые коэффициенты координатных осей новой координатной системы, в которой $a'_{12} = 0$. В этих формулах s_1 и s_2—корни характеристического уравнения (4′).

Знная k_1 и k_2, можно найти формулы преобразования координат. В самом деле, если $\alpha = \angle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}')$, то

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad k_2 = \operatorname{tg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Определив $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, получаем формулы преобразования:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Из теоремы [28.3] следует, что в новой системе кривая имеет уравнение (7), где a'_{13} и a'_{23} определяются из соотношений (8).

Если в исходном уравнении (1) $a_{13} = a_{23} = 0$, то из (8) следует, что $a'_{13} = a'_{23} = 0$, поэтому уравнение (7) принимает вид:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + a_{33} = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим несколько примеров упрощения уравнения кривой путем поворота системы координат. В каждом примере запишем формулы преобразования и изобразим кривые на чертеже.

Пример 1. $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0$.

а) Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни: $s^2 - 10s = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 10$.

б) Определим угловые коэффициенты новых координатных осей по формулам (5):

$$k_1 = \frac{0-9}{-3} = 3, \ k_2 = \frac{10-9}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$. Отсюда легко получить:

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Формулы преобразования координат к новой системе имеют вид:

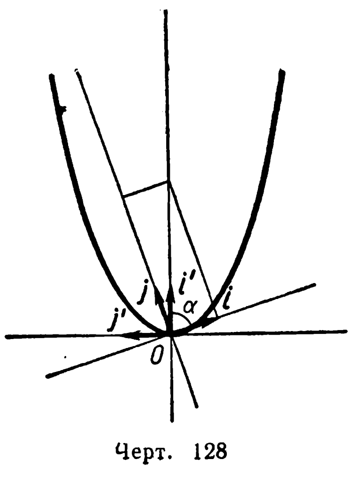
$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y',$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'.$$

в) Относительно новой системы координат данная кривая определяется уравнением:

$$y'^2 = x',$$

г) На чертеже 128 изображена данная парабола.



Черт. 128

Пример 2. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

Решение. а) Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни:

$$s^2 - 10s + 9 = 0, \ s_1 = 1, \ s_2 = 9.$$

б) Относительно новой системы координат данная кривая определяется уравнением (9), которое в данном случае имеет вид:

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0.$$

Отсюда, разделив на 9, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

в) Для того чтобы написать формулы преобразования системы координат, найдем угловые коэффициенты новых координатных осей по формулам (5):

$$k_1 = \frac{1-5}{4} = -1, \quad k_2 = \frac{9-5}{4} = 1.$$

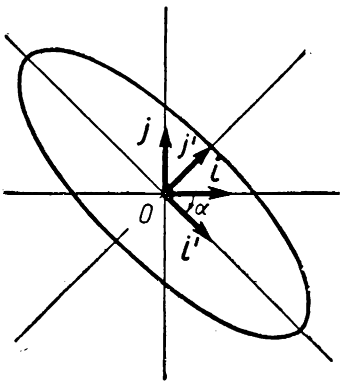
Таким образом,

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_1 = -45^\circ,$$
$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = 1, \qquad \alpha_2 = 45^\circ.$$

Формулы преобразования будут иметь вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$



Черт. 129

г) На чертеже 129 изображен данный эллипс.

П р и м е р 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$.

Р е ш е н и е. а) Составим характеристическое уравнение кривой и найдем его корни:

$$s^2 - 5s = 0, \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = 5.$$

б) Относительно новой системы координат данная кривая определяется уравнением:

$$0\cdot x'^2 + 5y'^2 - 15 = 0, \quad \text{или} \quad y'^2 = 3.$$

Получили уравнение пары параллельных прямых.

в) Для определения формул преобразования найдем угловые коэффициенты новых координатных осей:

$$k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{4}{2} = 2, \ k_2 = \frac{5-4}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

В данном случае координаты единичного вектора $\boldsymbol{i}\,\{\alpha, \beta\}$ удобнее определить из уравнений:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \ \beta = 2\alpha;$$

отсюда

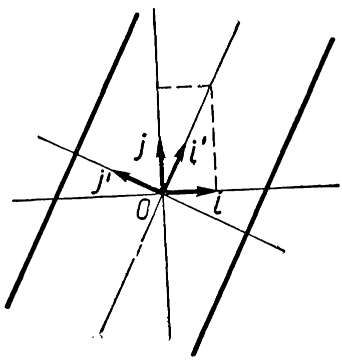
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Вектор j' имеет координаты $j'\{-\beta, \alpha\} : j'\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$. Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y', \ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'.$$

г) На чертеже 130 дано изображение кривой.

4. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем переноса начала координат. Рассмотрим несколько примеров упрощения уравнения кривой путем переноса начала координат. При этом будем пользоваться методом, изложенным в п. 3, § 27.



Черт. 130

П р и м е р 4. $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$.

Р е ш е н и е. а) Сгруппируем члены левой части данного уравнения относительно x и y следующим образом:

$$(x^2 - 6x + 9) + 6(y^2 + 2y + 1) - 2 = 0$$

или

$$(x-3)^2 + 6(y+1)^2 - 2 = 0.$$

б) Введем обозначения: $x - 3 = x'$, $y + 1 = y'$. Отсюда получаем формулы переноса начала координат в точку $O'(3, -1)$:

$$x = x' + 3, \quad y = y' + (-1).$$

в) Уравнение данной кривой относительно системы $O'x'y'$ имеет вид:

$$x'^2 + 6y'^2 - 2 = 0 \text{ или } \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса.

г) Для того чтобы начертить кривую, возьмем новую систему координат и на канонических осях построим отрезки $A_1A_2 = 2\sqrt{2}$ и $B_1B_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ так, как это изображено на чертеже 131. Далее, строим эллипс, для которого отрезки A_1A_2 и B_1B_2 являются осями.

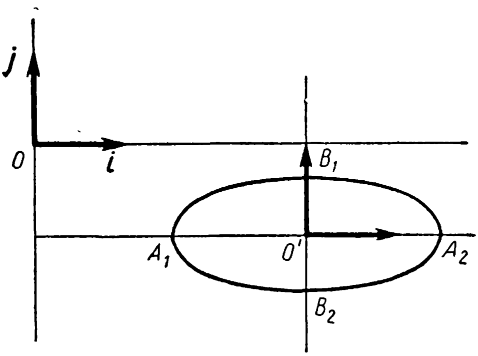
Пример 5. $2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0$.

Решение. Задача решается аналогично предыдущей.

$$\text{а) } 2(x^2 - 4x + 4) + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0$$

или

$$2(x-2)^2 + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$



Черт. 131

б) Введем обозначения:

$$x' = x - 2, \quad y' = y + \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем формулы переноса начала координат в точку

$$O'\left(2, -\frac{1}{4}\right):$$

$$x = x' + 2, \quad y = y' - \frac{1}{4}.$$

в) Уравнение данной кривой в новой системе $O'x'y'$ имеет вид:

$$2x'^2 + 4y' = 0 \quad \text{или} \quad x'^2 = -2y'.$$

Если положить $x'' = x', y'' = -y'$, то это уравнение принимает вид: $x''^2 = 2y''$. Получили каноническое уравнение параболы.

г) На чертеже 132 дано изображение кривой в старой системе координат.

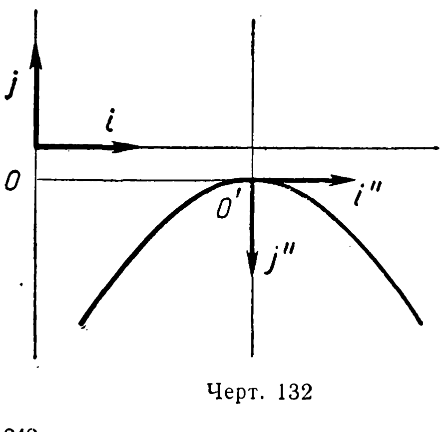
Пример 6. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.

Решение. Задача решается аналогично предыдущим:

а) $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$

или

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0.$$



Черт. 132

б) $x' = x - 1, \quad y' = 2 + y$.

Отсюда

$$x = x' + 1, \qquad y = y' - 2,$$

$$O'(1, -2).$$

в) В новой системе получаем каноническое уравнение пары мнимых прямых, пересекающихся в начале координат:

$$x'^2 + y'^2 = 0.$$

5. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. В заключение рассмотрим примеры упрощения уравнений кривой путем как поворота системы координат, так и переноса начала координат. В рассмотренных ниже примерах мы приводим уравнения кривых к каноническому виду и записываем формулы преобразования.

Пример 7. $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0$.

а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$s^2 - 65s + 676 = 0; \quad s_1 = 52, \quad s_2 = 13.$$

б) Найдем единичные векторы новой системы координат, соответствующие полученным характеристическим числам:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \quad k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$\boldsymbol{i}'\left\{\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}, \quad \boldsymbol{j}'\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13}, a'_{23} при членах первой степени в новой системе. Для этого запишем найденные результаты в следующую таблицу.

	$i' \to s_1 = 52$	$j' \to s_2 = 13$
$a_{13} = -4$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$
$a_{23} = -7$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$

Во втором столбце таблицы записаны координаты вектора $\boldsymbol{i}'$, а в третьем столбце — координаты вектора $\boldsymbol{j}'$.

Из формул (8) следует, что коэффициент a'_{k3} равен сумме произведений соответствующих элементов первого и $(k+1)$-го столбцов таблицы. В данном случае

$$a'_{13} = -2\sqrt{13}, \quad a'_{23} = -\sqrt{13}.$$

Уравнение данной кривой в новой системе $Ox'y'$ в общем виде запишется так:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Подставив сюда найденные значения, получаем следующее уравнение:

$$52x'^2 + 13y'^2 - 4\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y' + 1 = 0.$$

г) Совершим преобразование переноса начала координат:

$$52\left(x'^2-\frac{\sqrt{13}}{13}x'+\frac{1}{52}\right)+13\left(y'^2-\frac{2}{\sqrt{13}}y'+\frac{1}{13}\right)+1-1-1=$$
$$=52\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2+13\left(y'-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2-1=0.$$

Если ввести обозначения:

$$\tilde{x}=x'-\frac{1}{2\sqrt{13}},\quad \tilde{y}=y'-\frac{1}{\sqrt{13}},$$

то в новой системе с началом в точке $O'\left(\frac{1}{2\sqrt{13}},\ \sqrt{13}\right)$ уравнение кривой будет иметь вид:

$$52\tilde{x}^2+13\tilde{y}^2=1 \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{x}^2}{\frac{1}{52}}+\frac{\tilde{y}^2}{\frac{1}{13}}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса.

д) Определим формулы преобразования координат при переходе от исходной системы Oxy к системе $O'\tilde{x}\tilde{y}$. Так как

$$x=\frac{3}{\sqrt{13}}x'-\frac{2}{\sqrt{13}}y',\quad y=\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}y'$$

и

$$x'=\tilde{x}+\frac{1}{2\sqrt{13}},\quad y'=\tilde{y}+\frac{1}{\sqrt{13}},$$

то

$$x=\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x}-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y}-\frac{1}{26},$$
$$y=\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{x}+\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{y}+\frac{4}{13}.$$

Пример 8. $2xy+4x+2y+5=0$.

Решение. а) Составим характеристическое уравнение и найдем корни:

$$s^2-1=0,\qquad s_1=1,\qquad s_2=-1.$$

б) Найдем единичные векторы новой системы координат, соответствующие полученным характеристическим числам:

$$k_1=\frac{s_1-a_{11}}{a_{12}}=1,\quad k_2=-1.$$

Отсюда будем иметь:

$$\boldsymbol{i}'\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},\quad \boldsymbol{j}'\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13}, a'_{23} при членах первой степени в новой системе. Для этого запишем найденные значения в следующую таблицу:

	$i' \to s_1 = 1$	$j' \to s_2 = -1$
$a_{13} = 2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$a_{23} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Отсюда получаем: $a'_{13} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $a'_{23} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. предыдущий пример, пункт в).

Уравнение данной кривой в новой системе $Ox'y'$ запишется так:

$$x'^2 - y'^2 + 3\sqrt{2}\,x' - \sqrt{2}\,y' + 5 = 0.$$

г) Совершим преобразование переноса начала координат:

$$\left(x'^2 + 2\cdot x'\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{18}{4}\right) - \left(y'^2 + 2\cdot y'\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 5 - \\ -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\left(x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 0.$$

Если ввести обозначения

$$\tilde{x} = x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{y} = y' + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то в новой системе координат с началом в точке $O'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ уравнение кривой примет вид:

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1 = 0.$$

Положив $x^* = \tilde{y}$ и $y^* = \tilde{x}$, получим каноническое уравнение гиперболы: $x^{*2} - y^{*2} = 1$.

д) Определим формулы преобразования при переходе от исходной системы Oxy к системе $O'x^*y^*$. Так как

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y';$$

$$x' = \tilde{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y' = \tilde{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x^* = \tilde{y}, \quad y^* = \tilde{x},$$

то

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} x^* + \frac{\sqrt{2}}{2} y^* - 1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} x^* + \frac{\sqrt{2}}{2} y^* - 2.$$

Пример 9. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$s^2 - 5s = 0; \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = 5.$$

б) Найдем единичные векторы новой системы координат:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2, \quad k_2 = \frac{s_2 - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$\boldsymbol{i}'\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}, \quad \boldsymbol{j}'\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13}, a'_{23} при членах первой степени

$$a'_{13} = -\frac{15}{\sqrt{5}}, \quad a'_{23} = -\frac{5}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение данной кривой в новой системе примет вид:

$$5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}} x' - \frac{10}{\sqrt{5}} y' + 7 = 0.$$

г) Совершим преобразование переноса начала координат:

$$5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{1}{5}\right) - \frac{30}{\sqrt{5}} x' + 6 = 0,$$

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

Если ввести обозначения

$$\tilde{x} = x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{1}{\sqrt{5}},$$

то в новой системе с началом в точке $O'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ уравнение кривой примет вид:

$$\tilde{y}^2 = \frac{6}{\sqrt{5}} \tilde{x}.$$

Мы получили каноническое уравнение параболы.

д) Формулы преобразования предоставляем определить читателю.

Задачи

С помощью преобразования поворота системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка, написать формулы преобразования и изобразить данные кривые на чертеже:

351. $-23x^2 - 72xy - 2y^2 - 25 = 0.$

352. $x^2 - 14xy + 49y^2 - 50 = 0.$

353. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0.$

354. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0.$

355. $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 25 = 0.$

356. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$

357. $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0.$

358. $x^2 + 2xy + y^2 = 0.$

359. $-17x^2 + 2\sqrt{35}xy + 17y^2 = 0.$

С помощью переноса начала координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка, написать формулы преобразования координат и изобразить данные кривые на чертеже:

360. $x^2 - \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y - 1 = 0.$

361. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$

362. $x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 23 = 0.$

363. $x^2 - 6x - 16 = 0.$

364. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0.$

365. $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0.$

366. $x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{3}x + 20y - 47 = 0.$

367. $2x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0.$

С помощью преобразования поворота системы координат и переноса начала привести к каноническому виду уравнения следующих кривых и написать формулы преобразования:

368. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

369. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0.$

370. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 + 2xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$

371. $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0.$

372. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0.$

373. $25x^2 + 40y^2 + 36xy - 34x - 116y + 89 = 0.$

374. $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 66y - 88x + 121 = 0.$

§ 29. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОЙ; АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ И АСИМПТОТЫ

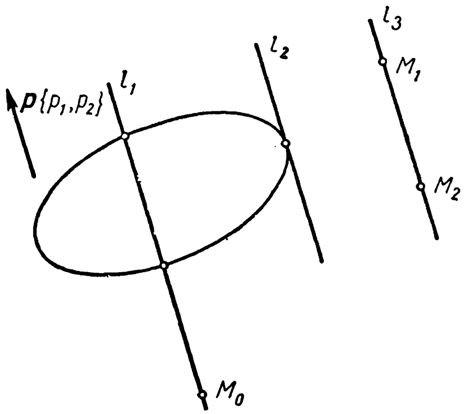
1. Определение точек пересечения кривой второго порядка с прямой. Пусть в аффинной системе координат Oe_1e_2 дана кривая второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

и прямая

$$\begin{aligned} x &= p_1 t + \xi_1, \\ y &= p_2 t + \xi_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $p\{p_1, p_2\}$ — направляющий вектор прямой, а $M_0(\xi_1, \xi_2)$ — начальная точка (черт. 133). Найдем точки пересечения прямой (2) и кривой (1). Для решения этой задачи подставим значения x, y из соотношений (2) в уравнение (1) и определим корни полученного уравнения относительно t. Тем самым мы определим параметры точек пересечений прямой (2) с кривой (1):



Черт. 133

$$a_{11}(p_1 t + \xi_1)^2 + 2a_{12}(p_1 t + \xi_1)(p_2 t + \xi_2) + a_{22}(p_2 t + \xi_2)^2 + 2a_{13}(p_1 t + \xi_1) + 2a_{23}(p_2 t + \xi_2) + a_{33} = 0.$$

После раскрытия скобок и группировки членов получаем:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (3)$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$P = a_{11} p_1 p_1 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2 p_2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} Q &= a_{11} p_1 \xi_1 + a_{12} p_1 \xi_2 + a_{21} p_2 \xi_1 + a_{22} p_2 \xi_2 + \\ &+ a_{13} p_1 + a_{23} p_2 = p_1 (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}) + \\ &+ p_2 (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} p_\alpha \xi_\beta + \sum_{\alpha=1}^{2} a_{\alpha 3} p_\alpha, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} R &= a_{11}\xi_1\xi_1 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2\xi_2 + 2a_{13}\xi_1 + 2a_{23}\xi_2 + a_{33} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta + 2\sum_{\alpha=1}^{2} a_{\alpha 3}\xi_\alpha + a_{33}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Определив из уравнения (3) значения параметров точек пересечений и подставив в (2), получаем координаты точек пересечений.

Заметим, что каждому корню уравнения (3) соответствует точка пересечения, причем различным корням соответствуют различные точки. Существенно заметить, что действительным корням уравнения (3) соответствуют действительные точки, а невещественным корням — невещественные. Таким образом, для определения количества и характера точек пересечений необходимо исследовать уравнение (3).

2. Исследование уравнения (3). Прежде чем перейти к исследованию корней квадратного уравнения (3), сделаем несколько замечаний относительно коэффициентов этого уравнения. Прежде всего заметим, что коэффициент P зависит от направления прямой (2) и не зависит от выбора начальной точки. Отсюда следует, что если для всех параллельных прямых взять один и тот же направляющий вектор, то коэффициент P будет иметь одно и то же значение. Далее, если для данной прямой $P \neq 0$, то для всех прямых, параллельных этой прямой, $P \neq 0$.

Из соотношения (6) следует, что R есть значение левой части уравнения (1), куда вместо x и y подставлены координаты начальной точки прямой. R не зависит от направления прямой, зависит только от положения начальной точки. Если начальная точка лежит на кривой, то $R = 0$ и наоборот. Отсюда, в частности, следует, что если кривая имеет по крайней мере одну действительную точку, то, подходящим образом выбрав систему координат, всегда можно добиться того, чтобы $R = 0$.

Корни уравнения (3) существенно зависят от значений его коэффициентов.

1. $P = \sum a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \neq 0$. Уравнение (3) имеет два корня:

$$t_{1,2} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}}{P}. \tag{7}$$

Возможны следующие случаи:

а) $Q^2 - PR > 0$; уравнение (3) имеет два различных действительных корня, поэтому прямая (2) пересекается с кривой (1) в двух действительных различных точках (черт. 133, прямая l_1).

б) $Q^2 - PR = 0$; уравнение (3) имеет два совпадающих корня, поэтому прямая (2) пересекается с кривой (1) в двух слившихся точках. В этом случае мы будем говорить, что прямая (2) *касается данной кривой* (черт. 133, прямая l_2).

в) $Q^2 - PR < 0$. Уравнение (3) имеет два комплексно-сопряженных корня. Обозначив их через $t_1 = \alpha + i\beta$ и $t_2 = \alpha - i\beta$ и подставив в (2), получаем:

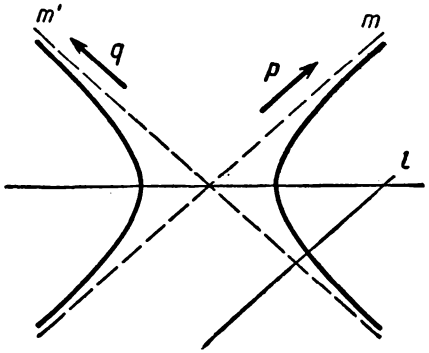
$$x_1 = (p_1\alpha + \xi_1) + ip_1\beta, \quad y_1 = (p_2\alpha + \xi_2) + ip_2\beta;$$
$$x_2 = (p_1\alpha + \xi_1) - ip_1\beta, \quad y_2 = (p_2\alpha + \xi_2) - ip_2\beta.$$

Таким образом, прямая пересекается с кривой в двух комплексно-сопряженных точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (черт. 133, прямая l_3).

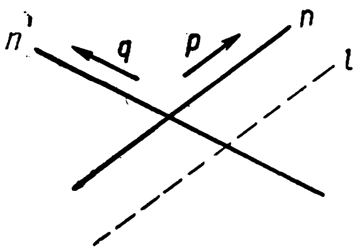
2. $P = \sum a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 0$. В этом случае уравнение (3) имеет вид: $2Qt + R = 0$.

а) $Q \neq 0$, R — любое. Уравнение (3) имеет один-единственный корень: $t = -\frac{R}{2Q}$, поэтому прямая (2) пересекает кривую (1) в одной действительной точке (черт. 134, прямая l, или черт. 135, прямая l).

б) $Q = 0$, $R \neq 0$. Уравнение (3) не имеет ни одного корня (ни вещественного, ни невещественного), поэтому прямая не пересекает кривую ни в одной точке (черт. 134 или черт. 136, прямая m).



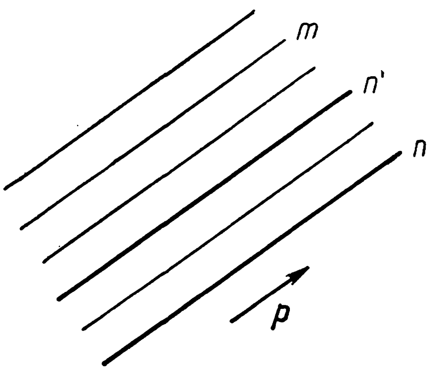
Черт. 134



Черт. 135

в) $Q = 0$, $R = 0$. Любое значение t удовлетворяет уравнение (3), поэтому прямая всеми своими точками принадлежит кривой, т. е. в этом случае кривая распадается на две прямые (черт. 135 или черт. 136, прямые n и n').

Прямые, направляющие векторы которых удовлетворяют условию $P = 0$, называются ***п р я м ы м и а с и м п т о т и ч е с к о г о н а п р а в л е н и я*** *по отношению к данной кривой, а направляющие векторы этих прямых — векторами* ***а с и м п т о т и ч е с к о г о н а п р а в л е н и я*** *или* ***а с и м п т о т и ч е с к и м и в е к т о р а м и***. На чертежах 134, 135, 136 и 137 векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ имеют асимптотические направления.



Черт. 136

Очевидно, понятие прямой асимптотического направления не зависит от выбора аффинной системы координат, так как оно имеет геометрический смысл. Кроме того, из замечания, сделанного выше, следует, что если некоторая прямая имеет асимптотическое направление, то любая параллельная ей прямая также имеет асимптотическое направление. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

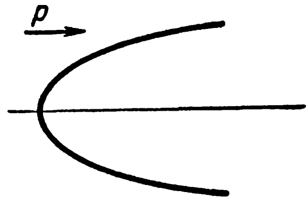
Т е о р е м а [29. 1]. *Если прямая* (2) *не имеет асимптотического направления по отношению к кривой второго порядка* (1), *то она пересекается с ней в двух точках*:

а) *действительных различных, если* $Q^2 - PR > 0$,

б) *комплексно-сопряженных, если* $Q^2 - PR < 0$,

в) *совпадающих, если* $Q^2 - PR = 0$.

Если прямая имеет асимптотическое направление по отношению к кривой второго порядка, то она либо пересекается с ней в одной точке ($P=0$, $Q \neq 0$), *либо не имеет с ней ни одной общей точки* ($P = 0$, $Q = 0$, $R \neq 0$), *либо принадлежит кривой* ($P = Q = R = 0$).



Черт. 137

Из этой теоремы непосредственно следует:

Т е о р е м а [29.2]. *Если прямая имеет с кривой более чем две общие точки, то она целиком принадлежит кривой.*

П р и м е р 1. Найти точки пересечения кривой

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

с прямыми:

$$\text{а) } \begin{array}{l} x = t, \\ y = 5t - 5; \end{array} \qquad \text{б) } \begin{array}{l} x = 3t + 6, \\ y = t + 2. \end{array}$$

Р е ш е н и е. а) Сначала найдем коэффициенты уравнения (3). Для этого можно либо воспользоваться формулами (4), (5) и (6), либо подставить значения x, y из уравнения прямой в уравнение кривой и, раскрыв скобки, сгруппировать подобные члены. Решим задачу вторым способом: $x = t$, $y = 5(t - 1)$, $t^2 - 2t \cdot 5(t - 1) - 3 \cdot 25(t - 1)^2 - 4t - 6 \cdot 5(t - 1) + 3 = 0$. Отсюда получаем: $-84t^2 + 126t - 42 = 0$ или $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Это уравнение имеет корни: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Подставив эти значения в уравнение прямой, получаем координаты двух точек пересечения: $M_1(1, 0)$, $M_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что эти точки лежат на данной кривой. Таким образом, имеет место случай: $P \neq 0$, $Q^2 - PR > 0$.

б) Определим коэффициенты P, Q и R из соотношений (4), (5) и (6). В данном случае $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $\xi_1 = 6$, $\xi_2 = 2$. $P = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0$; $Q = 3(1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 2) + 1(-1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 3) = 6 - 15 = -9$; $R = 36 - 2 \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 3 = -33$.

Таким образом, уравнение (3) имеет один корень: $t = \frac{33}{-18} = -\frac{33}{18}$. Подставив это значение в уравнение прямой, получаем координаты единственной точки пересечения: $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

Пример 2. Через точку (1, 0) провести касательную к кривой: $3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0$.

Решение. Пусть $k = \frac{p_2}{p_1}$ — угловой коэффициент касательной. Определим k из условия $Q^2 - PR = 0$ и запишем уравнение прямой, проходящей через точку (1, 0) и имеющей угловой коэффициент k.

$$P = 3p_1^2 + 7p_1 p_2 + 5p_2^2; \quad Q = p_1(a_{11} + a_{13}) + p_2(a_{21} + a_{23}) =$$
$$= 2p_1 + \frac{5}{2}p_2; \; R = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$
$$Q^2 - PR = 4p_1^2 + 10p_1 p_2 + \frac{25}{4}p_2^2 - 3p_1^2 -$$
$$- 7p_1 p_2 - 5p_2^2 = p_1^2 + 3p_1 p_2 + \frac{5}{4}p_2^2.$$

Таким образом, p_1 и p_2 должны удовлетворять условию: $p_1^2 + 3p_1 p_2 + \frac{5}{4}p_2^2 = 0$. Нас интересуют ненулевые решения этого уравнения, поэтому $p_1 \neq 0$. Разделив уравнение на p_1^2 и учитывая, что $\frac{p_2}{p_1} = k$, будем иметь: $\frac{5}{4}k^2 + 3k + 1 = 0$. Отсюда получаем угловые коэффициенты касательных: $k_1 = -\frac{2}{5}$, $k_2 = -2$.

Уравнения касательных, соответствующих этим угловым коэффициентам, таковы:

$$2x + 5y - 2 = 0, \qquad 2x + y - 2 = 0.$$

3. Асимптотические направления. Выше было отмечено, что вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ называется вектором асимптотического направления относительно кривой второго порядка (1), если его координаты удовлетворяют условию $P = 0$ или в развернутом виде:

$$a_{11}p_1p_1 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2p_2 = 0. \tag{8}$$

Геометрически это означает, что всякая прямая, параллельная вектору $\boldsymbol{p}$, либо пересекает кривую в одной точке, либо не пересекает ее, либо всеми точками принадлежит кривой. Отсюда вытекает, что условие (8) не зависит от выбора аффинной системы координат. Исследуем соотношение (8) и выясним, сколько асимптотических направлений имеют те или иные кривые второго порядка. Рассмотрим следующие два случая:

1) $a_{22} \neq 0$. Так как нас интересуют ненулевые решения уравнения (8), то в данном случае $p_1 \neq 0$. Разделив соотношение (8) на p_1^2 и положив $\frac{p_2}{p_1} = k$, получаем:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0. \tag{9}$$

Здесь k — угловой коэффициент искомых векторов асимптотического направления. Решив это уравнение относительно k, получаем:

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{22}}, \text{ где } I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{10}$$

Отсюда следует:

а) если $I_2 > 0$, то кривая не имеет ни одного действительного асимптотического направления;

б) если $I_2 < 0$, то кривая имеет два различных асимптотических направления;

в) если $I_2 = 0$, то кривая имеет одно асимптотическое направление;

2) $a_{22} = 0$. В этом случае уравнение (8) принимает вид:

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 = 0 \text{ или } p_1(a_{11}p_1 + 2a_{12}p_2) = 0, \tag{8'}$$

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -a_{12}^2.$$

Отсюда следует, что в этом случае $I_2 \leqslant 0$. Если $I_2 < 0$, то $a_{12} \neq 0$ и уравнению (8′) удовлетворяют два различных направления.

а) $p_1 = 0$, p_2 — любые; б) $k = \frac{p_2}{p_1} = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}$.

Первое из них, очевидно, совпадает с направлением оси Oy. Если $I_2 = 0$, то $a_{12} = 0$ и уравнение (8′) определяет только одно направление $p_1 = 0$, p_2—любое, которое совпадает с направлением оси Oy. Таким образом, случаи $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} = 0$ несущественно отличаются друг от друга и мы приходим к следующей теореме:

Теорема [29.3]. *Пусть дана кривая второго порядка* (1) и $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$. *Если* $I_2 > 0$, *то кривая не имеет действительных асимптотических направлений* (черт. 133), *если* $I_2 = 0$, *то она имеет одно асимптотическое направление* (черт. 136, 137), *если же* $I_2 < 0$, *то два различных асимптотических направления* (черт. 134 и 135).

Вычислим I_2 для всех девяти типов кривых второго порядка. Знак I_2, как следует из предыдущей теоремы, имеет геометрический смысл, поэтому он не зависит от выбора системы координат. В самом деле, если, например, в какой-то системе Oe_1e_2 для данной кривой $I_2 > 0$, а в другой системе $O'e_1'e_2'$ $I'_2 < 0$, то это означает, что в первой системе кривая не имеет действительных асимптотических направлений, а во второй системе имеет два направления. Этот вывод, очевидно, противоречив, так как наличие асимптотических направлений не зависит от выбора системы координат. Учитывая это обстоятельство для вычисления I_2, мы воспользуемся каноническими уравнениями кривых, которые приведены в теореме [27.7]. Непосредственный подсчет показывает, что для эллипса, мнимого эллипса, пары невещественных пересекающихся прямых $I_2 = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$. Для гиперболы, пары пересекающихся действительных прямых $I_2 = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0$, а для остальных кривых $I_2 = 0$.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема [29. 4]. *Действительный и мнимый эллипсы, пара невещественных пересекающихся прямых не имеют действительных асимптотических направлений. Гипербола и пара пересекающихся действительных прямых имеют два асимптотических направления, а парабола, пара параллельных действительных или невещественных прямых и пара слившихся прямых имеют одно асимптотическое направление* (см. черт. 133—137).

Введем следующее определение. *Если $I_2 > 0$, то кривую будем называть кривой эллиптического типа, если $I_2 < 0$ — гиперболического типа, если же $I_2 = 0$ — параболического типа.*

Пример 3. Найти векторы асимптотического направления кривой второго порядка: $4x^2 - 3xy - y^2 - x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Так как $I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = -4 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} < 0$,

то кривая принадлежит гиперболическому типу и имеет два различных асимптотических направления. Так как $a_{22} = -1 \neq 0$, то угловые коэффициенты этих направлений определяются из соотношения (10): $k = \dfrac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{-1} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$; $k_1 = -4$, $k_2 = 1$. Векторами асимптотического направления будут $p_1\{1, -4\}$, $p_2\{1, 1\}$ и любые ненулевые векторы, им коллинеарные.

4. Асимптоты. *Асимптотой кривой второго порядка называется всякая прямая, которая либо вовсе не пересекается с кривой (не имеет с ней ни вещественных, ни невещественных точек), либо всеми точками принадлежит кривой*[1]. Если кривая задана уравнением (1), то прямая (2) будет асимптотой тогда и только тогда, когда $P = Q = 0$, R — произвольное. Из этого определения следует, что всякая асимптота имеет асимптотическое направление, поэтому

[1] Это определение, вообще говоря, не совпадает с определением асимптот, которое дается в курсе математического анализа. Оно заимствовано у А. М. Лопшица [6].

асимптоты могут существовать только для кривых гиперболического и параболического типа.

Возникает вопрос: пусть вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ имеет асимптотическое направление относительно кривой (1). Существуют ли асимптоты, параллельные вектору $\boldsymbol{p}$? На этот вопрос по существу отвечает следующее предложение:

Теорема [29.5]. *Если $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ является вектором асимптотического направления относительно кривой* (1), *то для того, чтобы точка $M(x, y)$ лежала на некоторой асимптоте, имеющей направление $\boldsymbol{p}$, необходимо и достаточно, чтобы координаты M удовлетворяли уравнению*:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на асимптоте l, имеющей направление $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$. Запишем параметрическое задание прямой l, приняв точку M за начальную:

$$X = p_1t + x, \qquad Y = p_2t + y. \tag{12}$$

Уравнение (3) для прямой l запишется так:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \tag{13}$$

где в выражения Q и R вместо ξ_1 и ξ_2 подставлены x и y (см. соотношения (5) и (6)). Так как l является асимптотой, то $P = Q = 0$. Но условие $Q = 0$ в данном случае имеет вид (11).

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (11). Проведем через точку M прямую l, параллельную вектору $\boldsymbol{p}$ и докажем, что эта прямая является асимптотой. Если (12) есть параметрическое задание прямой l, а (13) — условие, из которого определяются параметры точек пересечений этой прямой с кривой (1), то в силу (11) $Q = 0$ и в силу того, что $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ имеет асимптотическое направление, $P = 0$. Таким образом, l является асимптотой. Теорема доказана.

Исследуем уравнение (11) для различных типов кривых.

1. $I_2 > 0$. В этом случае кривая не имеет асимптотических направлений и, следовательно, асимптот (черт. 133).

2. $I_2 < 0$. Кривая имеет два асимптотических направления. Пусть $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ — одно из них. Запишем уравнение (11) в виде:

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)x + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)y + a_{31}p_1 + a_{32}p_2 = 0. \tag{11'}$$

В этом уравнении коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю. В самом деле, если предположить, что $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$ и $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$, то отсюда следует, что $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = 0$, что противоречиво. Таким образом, уравнением (11') задается одна прямая.

3. $I_2 = 0$. В этом случае, как следует из исследования асимптотических направлений, p_1 и p_2 пропорциональны числам a_{22}, $-a_{12}$

(см. стр. 353). Не нарушая общности, можно положить: $p_1 = a_{22}$, $p_2 = -a_{12}$. Подставив эти значения в (11'), получаем: $I_2 x + 0 \cdot y + (a_{31}a_{22} - a_{32}a_{12}) = 0$ или $0 \cdot x + 0 \cdot y + L = 0$, где $L = a_{31}a_{22} - a_{32}a_{12}$. Если $L \neq 0$, то кривая не имеет асимптот, параллельных вектору $\boldsymbol{p}$, если же $L = 0$, то все прямые, параллельные вектору $\boldsymbol{p}$, являются асимптотами. Других асимптот кривая не имеет. Отсюда видно, что условия $L \neq 0$ или $L = 0$ имеют геометрический смысл, поэтому они не зависят от выбора системы координат. Вычислим L для всех кривых параболического типа, заданных каноническими уравнениями. Для параболы $y^2 - 2px = 0$ имеем: $L = -p \cdot 1 = -p \neq 0$. Для пары параллельных прямых (действительных или комплексных) или для слившихся прямых: $x^2 \pm a^2 = 0$, $L = 0 - 0 = 0$. Мы пришли к выводу, что *парабола не имеет асимптот, а для пары параллельных или слившихся прямых любая прямая, параллельная им, является асимптотой.*

Резюмируя все сказанное, мы приходим к следующей теореме:

Теорема [29.6]. *Кривые эллиптического типа $I_2 > 0$ и парабола не имеют асимптот. Каждая кривая гиперболического типа ($I_2 < 0$) имеет две асимптоты, соответствующие двум различным асимптотическим направлениям. Эти асимптоты задаются уравнением* (11) (черт. 134, прямые m и m', и черт. 135, прямые n и n'). *Кривые параболического типа, отличные от параболы и являющиеся парой слившихся или параллельных прямых, имеют пучок параллельных асимптот, включающий данные прямые* (черт. 136).

Пример 4. Найти асимптоты гиперболы, данной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Согласно предыдущей теореме кривая имеет две асимптоты. Векторы асимптотического направления определяются из условия

$$\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0 \text{ или } \left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right)\left(\frac{p_1}{a} - \frac{p_2}{b}\right) = 0.$$

Отсюда определяем два направления: $\boldsymbol{p}\{-a, b\}$, $\boldsymbol{q}\{a, b\}$.
Подставив эти значения в (11), получаем уравнения двух асимптот:

$$-a\left(\frac{1}{a^2}x\right) + b\left(\frac{1}{b^2}y\right) = 0 \text{ или } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad y = \frac{b}{a}x;$$

$$a\left(\frac{1}{a^2}x\right) + b\left(\frac{1}{b^2}y\right) = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \; y = -\frac{b}{a}x.$$

На чертеже 134 асимптоты гиперболы обозначены через m и m'. Эти уравнения полностью согласуются с тем определением асимптот гиперболы, которое было дано в § 21, п. 3.

Пример 5. Написать уравнение асимптот кривой:

$$2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0.$$

Решение. Так как $I_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$, то кривая имеет две асимптоты. Для нахождения их угловых коэффициентов можно воспользоваться соотношением (10): $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Отсюда определяем векторы асимптотических направлений $\boldsymbol{p}_1\{-1,2\}$, $\boldsymbol{p}_2\{1,-1\}$. Уравнения асимптот данной кривой имеют вид:

$$-1\left(2x + \frac{3}{2}y - 1\right) + 2\left(\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$1\left(2x + \frac{3}{2}y - 1\right) - 1\left(\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$x + \frac{1}{2}y + 2 = 0 \quad \text{или} \quad 2x + y + 4 = 0;$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{или} \quad x + y - 3 = 0.$$

Примеры и задачи

375. Определить точки пересечения кривой второго порядка

$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0$ с прямой $x + y - 2 = 0$.

376. Дана кривая второго порядка:

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

Выяснить, какие из векторов $\boldsymbol{a}\{1,2\}$, $\boldsymbol{b}\{3,-4\}$, $\boldsymbol{c}\{7, 1\}$, $\boldsymbol{d}\{2,0\}$, $\boldsymbol{e}\{-1,1\}$ имеют асимптотическое направление относительно данной кривой.

377. Каково необходимое и достаточное условие того, что а) ось Ox имеет асимптотическое направление; б) ось Oy имеет асимптотическое направление?

378. Напишите общий вид уравнения кривой, для которой оси координат имеют асимптотические направления. К какому типу принадлежит эта кривая?

379. Доказать, что если координаты ненулевого вектора $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ удовлетворяют уравнениям

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0,$$

то кривая принадлежит параболическому типу и вектор $\boldsymbol{p}$ имеет асимптотическое направление.

380. Найти векторы асимптотического направления для следующих кривых второго порядка:

а) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$;
д) $y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$.

381. Написать уравнения асимптот следующих кривых второго порядка:

а) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;
б) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
в) $2x^2 + xy + y^2 + 11x - 4y + 5 = 0$.

382. Назовите кривые второго порядка, имеющие:

а) два асимптотических направления и две асимптоты;

б) одно асимптотическое направление и бесчисленное множество асимптот;

в) одно асимптотическое направление и ни одной асимптоты.

383. Используя понятие асимптотических направлений, показать, что кривая $x^2 - x + y = 0$ не эллипс и не гипербола, а кривая $xy + x + 1 = 0$ не парабола и не эллипс.

384. Ответьте на следующие вопросы: при каких условиях

а) ось Ox является асимптотой данной кривой?

б) ось Oy является асимптотой данной кривой?

в) оси координат являются асимптотами кривой? Для каких кривых это возможно?

385. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(0, -5)$ и имеющей асимптоты

$$x - 1 = 0, \qquad 2x - y + 1 = 0.$$

386. Через точку $(4, 3)$ провести касательные к кривой $x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$.

§ 30. ДИАМЕТРЫ И ЦЕНТР КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Диаметры кривой второго порядка. Пусть $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ — вектор неасимптотического направления относительно кривой второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

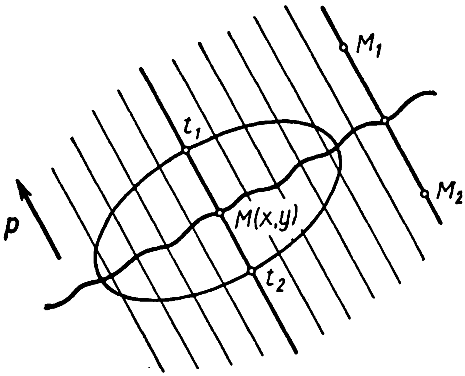
Из теоремы [29.1] следует, что все прямые, параллельные $\boldsymbol{p}$, пересекают кривую в двух точках — действительных или мнимых. Если $M_1(\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2)$ и $M_2(\alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 - i\beta_2)$ — комплексно-сопряженные точки, в которых прямая пересекает кривую второго порядка, то середина отрезка M_1M_2, очевидно, имеет действительные координаты (α_1, α_2). Таким образом, *середина любой хорды неасимптотического направления есть действительная точка.*

Рассмотрим геометрическое место середин всех хорд, параллельных вектору $\boldsymbol{p}$ (черт. 138). Обозначим через $M(x, y)$ координаты произвольной точки искомого геометрического места. Напишем параметрическое задание прямой, проходящей через $M(x,y)$ параллельно $\boldsymbol{p}\ \{p_1,p_2\}$, приняв точку M за начальную точку:

$$X = p_1 t + x, \qquad Y = p_2 t + y. \tag{2}$$

Пусть X_1,Y_1 и X_2, Y_2—координаты точек пересечения данной прямой с кривой (1), а t_1 и t_2 — параметры этих точек. Тогда $X_1 = p_1t_1 + x$, $Y_1 = p_2t_1 + y$; $X_2 = p_1t_2 + x$, $Y_2 = p_2t_2 + y$. Так как $M(x,y)$ — середина отрезка (X_1, Y_1), (X_2,Y_2), то $X_1 + X_2 = 2x$, $Y_1 + Y_2 = 2y$, поэтому $p_1(t_1 + t_2) = 0$ и $p_2(t_1 + t_2) = 0$. Но p_1 и p_2 одновременно не равны нулю, поэтому

$$t_1 + t_2 = 0. \tag{3}$$



Черт. 138

С другой стороны, t_1 и t_2 являются корнями уравнения (3), § 29, где $P = a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 \neq 0$. Сумма корней квадратного уравнения равна нулю в том и только в том случае, когда коэффициент при неизвестном в первой степени равен нулю. В данном случае, в силу формулы (5), § 29, имеем:

$$Q = p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{4}$$

Мы показали, что если (x, y) — координаты середины произвольной хорды, параллельной вектору $\boldsymbol{p}\{p_1\ p_2\}$, то они удовлетворяют уравнению (4).

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (4). Покажем, что M принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек. Проведем через M прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{p}(p_1, p_2)$. Принимая M за начальную точку, напишем параметрическое задание прямой в виде (2). Если (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), t_1 и t_2 — соответственно координаты и параметры точек пересечений прямой с кривой, то, в силу (4),

$$Pt^2 + R = 0,\ t_1 = \sqrt{-\frac{R}{P}},\ t_2 = -\sqrt{-\frac{R}{P}};\ t_1 + t_2 = 0,$$

поэтому

$$X_1 + X_2 = p_1 t_1 + x + p_1 t_2 + x = 2x,$$

$$Y_1 + Y_2 = p_2 t_1 + y + p_2 t_2 + y = 2y.$$

Отсюда следует, что M есть середина хорды, проходящей через эту точку и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$. Таким образом, соотношение (4) есть уравнение искомого геометрического места точек.

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (4) является уравнением прямой, необходимо показать, что в этом уравнении коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю. В самом деле, если предположить, что $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 0$ и $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = 0$, то, умножив первое соотношение на p_1, а второе на p_2 и сложив, получаем: $a_{11}p^2_1 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p^2_2 = 0$, т. е. вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ будет иметь асимптотическое направление, что противоречит условию выбора вектора $\boldsymbol{p}$. Мы доказали теорему:

Теорема [30. 1]. *Геометрическое место середин всех хорд кривой* (1), *параллельных вектору* $\boldsymbol{p}\{p_1,p_2\}$ *неасимптотического направления, есть прямая, заданная уравнением* (4). *Эта прямая называется диаметром кривой, соответствующим (или сопряженным) вектору* $\boldsymbol{p}$.

Таким образом, каждому вектору $\boldsymbol{p}$ неасимптотического направления соответствует свой диаметр.

Уравнение диаметра (4) по виду тождественно с уравнением асимптот (11), § 29. Однако следует помнить, что в уравнении (4) вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ не имеет асимптотического направления, в то время как в уравнении (11), § 29, $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ является вектором асимптотического направления.

Пример 1. Определить диаметр кривой $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x = 0$, соответствующий вектору $\boldsymbol{p}\{1, 2\}$.

Решение. Вектор $\boldsymbol{p}$ не имеет асимптотического направления относительно данной кривой, поэтому существует диаметр, соответствующий вектору $\boldsymbol{p}$. Подставив значения коэффициентов уравнения кривой и координат вектора $\boldsymbol{p}$ в (4), получаем:

$$1\left(1\cdot x - \frac{3}{2}y - 2\right) + 2\left(-\frac{3}{2}x + 2y\right) = 0$$

или после приведения подобных членов:

$$-2x + \frac{5}{2}y - 2 = 0, \quad 4x - 5y + 4 = 0.$$

Пример 2. Определить тот диаметр кривой $4x^2 - 6xy + y^2 - 8y + 1 = 0$, который проходит через точку $(0, 1)$.

Решение. Если кривая задана уравнением (1), то диаметр, соответствующий вектору $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$, определяется уравнением (4). В данном случае это уравнение имеет вид: $p_1(4x - 3y) + p_2(-3x + y - 4) = 0$. Так как этот диаметр проходит через точку $(0, 1)$, то $p_1(0 - 3) + p_2(1 - 4) = 0$ или $p_1 + p_2 = 0$. Пусть, например, $p_1 = 1$, то $p_2 = -1$. Подставив эти значения в предыдущее уравнение, получаем: $7x - 4y + 4 = 0$.

2. Центр кривой второго порядка. *Точка C плоскости называется* ***центром кривой второго порядка***, *если кривая симметрична относительно C.* Это означает, что для всякой точки M, принадлежащей кривой, точка M', симметричная M относительно C, также принадлежит кривой.

Выясним, каждая ли кривая второго порядка имеет центр, сколько может существовать центров и как определить их координаты. На все эти вопросы по существу отвечает следующая основная теорема:

Теорема [30. 2]. *Для того чтобы точка $C\ (x_0, y_0)$ была центром кривой второго порядка (1), необходимо и достаточно, чтобы координаты точки $C\ (x_0, y_0)$ удовлетворяли уравнениям:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $C\ (x_0, y_0)$ — центр кривой (1). Возьмем два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{p}\ \{p_1, p_2\}$, $\boldsymbol{q}\ \{q_1, q_2\}$, не имеющих асимптотических направлений относительно данной кривой. Если через $C\ (x_0, y_0)$ провести две прямые, параллельные векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, то каждая из этих прямых пересекается с кривой соответственно в двух точках M_1, M_2 и N_1, N_2. Очевидно, точка C как центр кривой является серединой отрезков M_1M_2 и N_1N_2. Отсюда следует, что C принадлежит диаметрам, соответствующим векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, но тогда координаты точки C удовлетворяют их уравнениям:

$$\begin{aligned} p_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + p_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) &= 0, \\ q_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + q_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) &= 0. \end{aligned}$$

Так как векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ не коллинеарны, то $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому выражения в скобках равны нулю, т. е. выполняются условия (5).

Обратно, пусть координаты точки $C\ (x_0, y_0)$ удовлетворяют соотношениям (5). Возьмем произвольную (вещественную или невещественную!) точку $M_1\ (x_1, y_1)$ кривой (1) и докажем, что точка $M_2\,(x_2, y_2)$, симметричная точке M_1 относительно C, также лежит на кривой. В самом деле, $x_1 + x_2 = 2x_0$, $y_1 + y_2 = 2y_0$, отсюда $x_2 = 2x_0 - x_1$, $y_2 = 2y_0 - y_1$.

$$\begin{aligned} &a_{11}(2x_0 - x_1)(2x_0 - x_1) + 2a_{12}(2x_0 - x_1)(2y_0 - y_1) + \\ &+ a_{22}(2y_0 - y_1)(2y_0 - y_1) + 2a_{13}(2x_0 - x_1) + 2a_{23}(2y_0 - \\ &- y_1) + a_{33} = 4x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + 4y_0(a_{21}x_0 + \\ &+ a_{22}y_0 + a_{23}) - 4x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) - 4y_1(a_{21}x_0 + \\ &+ a_{22}y_0 + a_{23}) + a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1y_1 + 2a_{13}x_1 + \\ &+ 2a_{23}y_1 + a_{33}. \end{aligned}$$

Эта сумма равна нулю, так как точка $M_1\ (x_1, y_1)$ принадлежит кривой и координаты точки $C\ (x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнениям (5). Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет исследовать вопрос о существовании центров данной кривой. Задача сводится к исследованию системы уравнений (5). Рассмотрим матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

и обозначим соответственно через r и R их ранги. Очевидно, $r \leqslant R$. Возможны следующие случаи.

1. $r = R = 2$. В этом случае система (5) имеет единственное решение и соответственно этому кривая имеет один и только один центр. Кривые, обладающие этим свойством, называются центральными.

2. $r = R = 1$. В этом случае система (5) имеет бесчисленное множество решений; одно из уравнений системы (5) является следствием другого. Кривая имеет прямую центров. Уравнение этой прямой определяется одним из соотношений (5).

3. $r = 1$, $R = 2$. Система (5) не имеет ни одного решения и в соответствии с этим кривая не имеет ни одного центра.

Кривые, не имеющие центров или имеющие больше, чем один центр, называются нецентральными. Из предыдущих рассуждений следует, что кривая будет центральной тогда и только тогда, когда $I \neq 0$. *Таким образом кривые эллиптического и гиперболического типов являются центральными, а кривые параболического типа — нецентральными.*

Из приведенных рассуждений следует,что ранги r и R матриц (6) имеют геометрический смысл, поэтому они не зависят от выбора системы координат. Учитывая это обстоятельство, рассмотрим вопрос о существовании центров всех девяти типов кривых, заданных каноническими уравнениями.

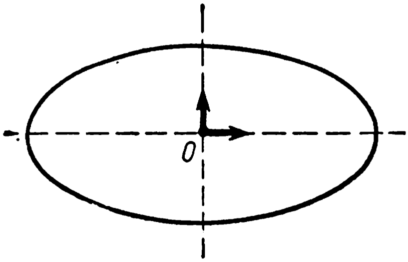
а) Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как $I_2 > 0$, то эллипс является центральной кривой и имеет, следовательно, единственный центр. Из уравнений (5) получаем координаты центра: $\frac{1}{a^2} x_0 = 0$; $\frac{1}{b^2} y_0 = 0$, отсюда $x_0 = y_0 = 0$, т. е. центром является начало канонической системы координат (черт. 139, а).

б) Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как $I_2 < 0$, то гипербола является центральной кривой и также имеет единственный центр. По аналогии с предыдущим приходим к выводу, что центром является начало канонической системы координат (черт. 139, *б*).

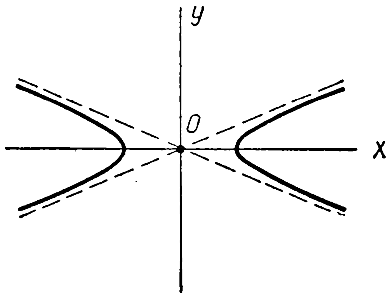
в) Парабола $y^2 - 2px = 0$. Матрицы (6) имеют вид:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, $r = 1$, $R = 2$, т. е. *парабола не имеет ни одного центра.*



Черт. 139 *а*

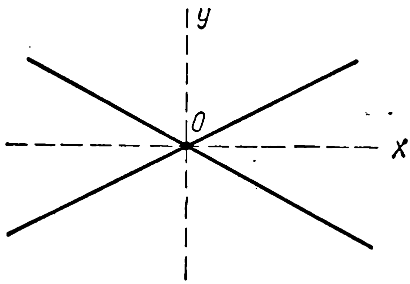


Черт. 139 *б*

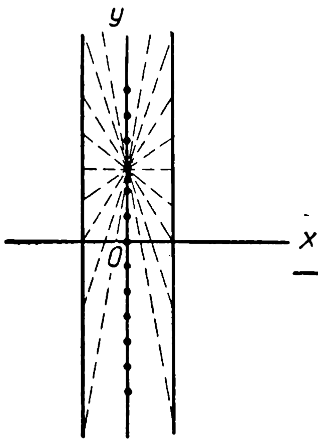
г) Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=-1$. Кривая аналогична эллипсу и является центральной кривой; ее центр совпадает с началом канонической системы координат.

д) Пара пересекающихся действительных прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Так как $I_2<0$, то кривая центральная. Из уравнений (5) следует, что центром этой кривой является начало канонической системы координат, т. е. точка пересечения прямых, на которые кривая распадается (черт. 139, *в*).

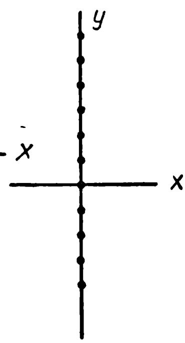
е) Пара невещественных пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Этот случай аналогичен предыдущему. Кривая является центральной и центр совпадает с началом канонической системы координат.



Черт. 139*в*



Черт. 139 *г*



Черт. 139 *д*

ж) Пара параллельных действительных прямых $\frac{x^2}{a^2} = 1$. В этом случае матрицы (6) имеют вид:

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$r = R = 1$ и кривая имеет прямую линию центров. Из (5) получаем уравнение этой линии: $\frac{1}{a^2} x_0 = 0$ или $x_0 = 0$. Итак, линией центров является ось Oy. Этот вывод вполне согласуется с геометрическими соображениями, так как «кривая» (пара параллельных прямых, изображенных на черт. 139, *г*) симметрична относительно каждой точки оси Oy.

з) Пара невещественных параллельных прямых $\frac{x^2}{a_2} = -1$. Этот случай аналогичен предыдущему; кривая имеет прямую центров, совпадающую с канонической осью Oy.

и) Пара слившихся прямых $x^2 = 0$. Легко убедиться в том, что кривая имеет линию центров, совпадающую с самой прямой (черт. 139, *д*). Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [30. 3]. *Эллипс, мнимый эллипс, гипербола, пара пересекающихся вещественных и невещественных прямых являются центральными кривыми и каждая из них имеет единственный центр. Парабола не имеет ни одного центра; пара параллельных или слившихся прямых имеет прямую центров.*

Пример 3. Найти центр кривой второго порядка

$$3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0.$$

Решение. Составим систему (5) для данной кривой

$$3x_0 - 6y_0 + 1 = 0,$$
$$-6x_0 + 6y_0 - 1 = 0.$$

Так как $I_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 36 = -18 < 0$, то кривая центральная и полученная система имеет единственное решение: $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{6}$. Кривая имеет единственный центр $C\left(0, \frac{1}{6}\right)$.

Пример 4. Каково условие того, что ось Ox является линией центров кривой второго порядка?

Решение. Если кривая задана уравнением (1), то координаты центра определяются уравнениями (5).

Так как ось Ox является линией центров, то из уравнений (5) следует, что $a_{21} = a_{23} = 0$ и $a_{11} = a_{13} = 0$. Таким образом, уравнение кривой может быть записано в виде: $a_{22}y^2 + a_{33} = 0$. Очевидно, справедливо и обратное предложение.

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [30. 4]. *Для того чтобы кривая* (1) *имела линию центров, совпадающую с осью Ох, необходимо и достаточно, чтобы в уравнении кривой*

$$a_{11} = a_{21} = a_{23} = a_{13} = 0.$$

Пример 5. При каком условии кривая имеет хотя бы один центр, совпадающий с началом координат?

Решение. Если O (0, 0) является одним из центров кривой (1), то координаты этой точки должны удовлетворять системе (5), поэтому $a_{11}0 + a_{12}0 + a_{13} = 0$, $a_{21}0 + a_{22}0 + a_{23} = 0$ или $a_{13} = a_{23} = 0$.

Обратно, если в уравнении кривой $a_{13} = a_{23} = 0$, то координаты начала координат удовлетворяют системе (5). Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [30. 5]. *Для того чтобы кривая* (1) *имела хотя бы один центр, совпадающий с началом координат, необходимо и достаточно, чтобы* $a_{13} = a_{23} = 0$. *В этом случае уравнение кривой имеет вид*:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

3. О расположении диаметров кривой второго порядка. Из уравнения (4) диаметра следует, что независимо от направления вектора $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ каждый центр кривой принадлежит всем диаметрам. Поэтому если кривая центральная, то все диаметры кривой проходят через центр C; если кривая имеет линию центров, то все диаметры совпадают с этой линией. Рассмотрим более подробно этот вопрос для различных типов кривых.

а) Кривые эллиптического типа ($I_2 > 0$). Докажем теорему.

Теорема [30. 6]. *Если C — центр кривой второго порядка эллиптического типа, то совокупность всех диаметров кривой образует пучок прямых с центром в точке C.*

Доказательство. Совокупность всех диаметров кривой (1) определяется уравнением (4) для всевозможных p_1 и p_2, не равных одновременно нулю. Так как прямые $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ и $a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ пересекаются $\left(I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\right)$, то уравнение (4), согласно теореме [17. 5], определяет пучок пересекающихся прямых. Теорема доказана.

б) Кривые гиперболического типа ($I_2 < 0$).

Теорема [30. 7]. *Если C — центр кривой второго порядка гиперболического типа, то совокупность всех диаметров кривой вместе с двумя асимптотами образует пучок прямых с центром в точке C.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично предыдущему, поэтому предоставляем его читателю[1].

в) Кривые параболического типа ($I_2 = 0$). Так как пара параллельных, как вещественных, так и невещественных, прямых и пара слившихся прямых имеют линию центров, то каждая из этих кривых имеет один-единственный диаметр — линию центров (черт. 139, *г*, *д*).

Рассмотрим вопрос о расположении диаметров параболы. Запишем уравнение (4) в предположении, что парабола дана канонически: $y^2 = 2px$. В этом случае (4) принимает вид: $-p_1p + p_2y = 0$. Здесь p_1 и p_2 могут принимать всевозможные значения, за исключением $p_2 = 0$. В случае $p_2 = 0$ вектор $\{p_1, p_2\}$ имеет асимптотическое направление и не определяет никакого диаметра. Разделив предыдущее уравнение на p_2 и положив $-\frac{p_1p}{p_2} = \alpha$, получаем: $y + \alpha = 0$. Согласно теореме [17. 6] это соотношение задает пучок параллельных прямых, определяемый вектором $\boldsymbol{i}$. Этот вектор, как известно, имеет асимптотическое направление. Мы пришли к следующей теореме:

Теорема [30. 8]. *Совокупность всех диаметров параболы образует пучок параллельных прямых асимптотического направления.*

Вопросы и задачи

387. Почему в определении диаметра предполагается, что вектор $\boldsymbol{p}\ \{p_1, p_2\}$ не имеет асимптотического направления?

388. Определить диаметр кривой $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 3 = 0$, который проходит через точку (2, 2).

389. Написать уравнение того диаметра кривой $xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$, который параллелен оси Oy.

390. Ответить на следующие вопросы:

а) Для каких кривых все диаметры параллельны?

б) Для каких кривых все диаметры совпадают?

в) При каком условии ось Ox является одним из диаметров данной кривой?

391. Найти общий диаметр двух кривых:

$$4x^2 - 2xy - y^2 - 2x - y = 0 \quad \text{и} \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + y = 0.$$

392. Найти центры следующих кривых:

а) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
в) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

---

[1] При доказательстве следует учесть, что (4) является не только уравнением диаметров, но и уравнением асимптот кривой.

393. Доказать, что если кривая второго порядка имеет две непараллельные асимптоты, то точка пересечения этих асимптот есть центр кривой.

394. Доказать, что если кривая имеет линию центров, то она распадается на пару параллельных или совпавших прямых.

395. Как подобрать значения коэффициентов a и b в уравнении

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0,$$

чтобы оно изображало: а) центральную кривую; б) кривую без центра; в) кривую с прямой центров?

396. Написать общий вид уравнения кривой второго порядка, для которой прямая $x + y = 0$ является линией центров.

§ 31. СОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И СОПРЯЖЕННЫЕ ДИАМЕТРЫ; ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРЫ

1. Сопряженные направления. *Если координаты двух ненулевых векторов* $\boldsymbol{p}\,\{p_1, p_2\}$ и $\boldsymbol{q}\,\{q_1, q_2\}$ *удовлетворяют условию*

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0, \tag{1}$$

то они называются ***сопряженными*** *относительно кривой второго порядка*:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Очевидно, понятие сопряженности есть взаимное понятие, так как если в соотношении (1) p_1, p_2 заменить на q_1, q_2 и наоборот, то оно не изменится.

Из определения следует, что понятие сопряженности есть в некотором смысле обобщение понятия асимптотичности. В самом деле, если сопряженные векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны, то $\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{p}$ или $q_1 = \lambda p_1$, $q_2 = \lambda p_2$. Подставив эти значения в (1), получаем условие асимптотичности (см. (8), § 29). Другими словами, *вектор асимптотического направления есть самосопряженный вектор.*

Рассмотрим некоторые свойства этого понятия.

1°. Если векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ сопряжены относительно кривой (2), то $\lambda\boldsymbol{p}$ и $\mu\boldsymbol{q}$, где $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, также сопряжены относительно той же кривой. Это свойство легко проверить, если в соотношение (1) вместо координат $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ подставить координаты $\lambda\boldsymbol{p}$ и $\mu\boldsymbol{q}$.

Из этого свойства следует, что понятие сопряженности по существу относится не к векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, а к их направлениям.

2°. Если вектор $\boldsymbol{p}$ сопряжен с двумя неколлинеарными векторами $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, то он сопряжен с любым вектором плоскости. В самом деле, пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор плоскости. Разложим этот вектор по векторам $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{q} + \mu\boldsymbol{r}$ или в координатах: $x_1 = \lambda q_1 + \mu r_1$, $x_2 = \lambda q_2 + \mu r_2$. Проверим условие сопряженности векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$:

$$a_{11}p_1x_1 + a_{12}p_1x_2 + a_{21}p_2x_1 + a_{22}p_2x_2 = a_{11}p_1(\lambda q_1 + \mu r_1) + \\ + a_{12}p_1(\lambda q_2 + \mu r_2) + a_{21}p_2(\lambda q_1 + \mu r_1) + a_{22}p_2(\lambda q_2 + \mu r_2) = \\ = \lambda(a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2) + \mu(a_{11}p_1r_1 + \\ + a_{12}p_1r_2 + a_{21}p_2r_1 + a_{22}p_2r_2) = 0.$$

Выражения в скобках равны нулю, так как каждый из векторов $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ сопряжен с вектором $\boldsymbol{p}$.

3°. Если $\boldsymbol{p}$ — вектор асимптотического направления, то либо $\boldsymbol{p}$ сопряжен только с самим собой, либо он сопряжен с любым вектором плоскости. Второй случай возможен тогда и только тогда, когда $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$.

В самом деле, если $\boldsymbol{p}$ — вектор асимптотического направления, то он сопряжен с самим собой. Если существует еще хотя бы один вектор плоскости, не коллинеарный $\boldsymbol{p}$ и сопряженный вектору $\boldsymbol{p}$, то по предыдущему свойству он сопряжен с любым вектором плоскости.

Для доказательства второй части утверждения запишем соотношение (1) в виде:

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0. \qquad (1')$$

Если $\boldsymbol{p}$ сопряжен с любым вектором плоскости, то соотношение (1′) является тождеством относительно q_1 и q_2. Но отсюда следует, что $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$. Это возможно только в том случае, когда $I_2 = 0$. Обратно, если $I_2 = 0$, то кривая имеет только одно асимптотическое направление (теорема [29. 3]). Координаты вектора этого направления удовлетворяют соотношениям: $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$ (задача 379). Таким образом, соотношение (1′) является тождеством.

4°. Для того чтобы координатные векторы были сопряжены относительно данной кривой (2), необходимо и достаточно, чтобы в уравнении (2) коэффициент a_{12} обратился в нуль. В самом деле, условие (1) для векторов $\boldsymbol{e}_1\{1, 0\}$ и $\boldsymbol{e}_2\{0, 1\}$ сводится к соотношению; $a_{12} = 0$.

Пример 1. Дана кривая второго порядка

$$x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$$

и вектор $\boldsymbol{a}\{1, 1\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a}'$, сопряженного с вектором $\boldsymbol{a}$.

Решение. Запишем условие сопряженности в виде (1′):

$$(2p_1 + p_2)q_1 + (p_1 + 4p_2)q_2 = 0.$$

Для определения координат вектора $\boldsymbol{a}'$ подставим сюда вместо p_1 и p_2 значения координат вектора $\boldsymbol{a}$: $3q_1 + 5q_2 = 0$, откуда получаем: $\boldsymbol{a}'\{-5, 3\}$.

2. Сопряженные диаметры. Выясним геометрический смысл сопряженных направлений. Для этого докажем следующую теорему:

Теорема [31. 1]. *Если $\boldsymbol{p}$ не является вектором асимптотического направления кривой, то все векторы, сопряженные вектору $\boldsymbol{p}$, параллельны диаметру, соответствующему $\boldsymbol{p}$. Обратно, всякий вектор, параллельный диаметру, соответствующему $\boldsymbol{p}$, сопряжен с $\boldsymbol{p}$.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{p}$ не является вектором асимптотического направления, то диаметр, соответствующий этому вектору, имеет уравнение:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Для того чтобы вектор $\boldsymbol{q}\,\{q_1, q_2\}$ был параллелен этой прямой, необходимо и достаточно, чтобы он был коллинеарен направляющему вектору прямой, т. е.

$$\begin{vmatrix} -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) & (a_{11}p_1 + a_{12}p_2) \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)\,q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)\,q_2 = 0.$$

Это условие совпадает с условием (1′), т. е. с условием сопряженности векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует одно интересное геометрическое свойство диаметров кривых второго порядка. Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — два сопряженных вектора, причем ни один из них не имеет асимптотического направления. Рассмотрим диаметр l_p, соответствующий вектору $\boldsymbol{p}$. По предыдущей теореме, вектор $\boldsymbol{q}$ параллелен l_p. Теперь рассмотрим диаметр l_q, соответствующий вектору $\boldsymbol{q}$. По той же теореме вектор $\boldsymbol{p}$ параллелен l_q. Итак, если диаметр l_p является геометрическим местом середин хорд, параллельных диаметру l_q, то l_q является геометрическим местом середин хорд, параллельных l_p.

Два диаметра кривой второго порядка, каждый из которых является геометрическим местом середин хорд, параллельных другому, называются сопряженными. Предыдущий вывод можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема [31. 2]. *Если данный диаметр кривой второго порядка не имеет асимптотического направления, то существует один и только один диаметр, сопряженный данному.*

Пример 2. Дана кривая второго порядка

$$2x^2 - 2xy + 6y^2 + 4x - 5 = 0.$$

Найти два сопряженных диаметра, один из которых проходит через точку (2, 0).

Решение. Сначала найдем уравнение диаметра, проходящего через точку (2, 0). Общее уравнение диаметра имеет вид:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Подставив сюда значения коэффициентов кривой и координаты точки (2, 0), получаем:

$$p_1(2\cdot 2+2)+p_2(-2+0)=0;\qquad 6p_1-2p_2=0.$$

Если $p_2=3$, то $p_1=1$. Таким образом, диаметр, проходящий через точку (2, 0), имеет уравнение

$$(2x-y+2)+3(-1x+6y+0)=0, \text{ или } -x+17y+2=0.$$

Этот диаметр имеет направляющий вектор $\{17, 1\}$. Диаметр, сопряженный этому вектору, имеет уравнение:

$$17(2x-y+2)+(-x+6y)=0 \text{ или } 33x-11y+34=0.$$

Полученные уравнения действительно определяют сопряженные диаметры, так как направляющие векторы $\{17, 1\}$ и $\{1, 3\}$ сопряжены относительно данной кривой.

3. Главные направления. *Направление ненулевого вектора* $\boldsymbol{p}$ *называется* г л а в н ы м *относительно данной кривой, если любой вектор, перпендикулярный* $\boldsymbol{p}$, *сопряжен с ним.* Из этого определения сразу следует, что если $\boldsymbol{p}$ имеет главное направление, то вектор, перпендикулярный ему, также имеет главное направление, поэтому обычно говорят о взаимно перпендикулярных главных направлениях.

Определим условие, при котором данный вектор имеет главное направление. Пусть кривая второго порядка дана в п р я м о у г о л ь н о й д е к а р т о в о й с и с т е м е уравнением:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\,\{p_1, p_2\}$ имел главное направление, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{p}$ был сопряжен с вектором $\boldsymbol{p}'\{-p_2, p_1\}$, перпендикулярным вектору $\boldsymbol{p}$. Таким образом, условие сопряженности векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ одновременно является условием того, что $\boldsymbol{p}$ имеет главное направление

$$-a_{11}p_1p_2+a_{12}p_1p_1-a_{21}p_2p_2+a_{22}p_2p_1=0$$

или

$$(a_{22}-a_{11})\,p_1p_2+a_{12}\,(p^2{}_1-p^2{}_2)=0. \tag{3}$$

Исследуем это уравнение. а) $a_{12}\neq 0$. Отсюда следует, что $p_1\neq 0$. Разделив соотношение (3) на p_1 и вводя обозначение $k=\frac{p_2}{p_1}$, получаем из (3):

$$a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})\,k-a_{12}=0. \tag{3'}$$

Отсюда будем иметь:

$$k=\frac{a_{22}-a_{11}\pm\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \tag{4}$$

Так как подкоренное выражение положительно, то это уравнение всегда имеет два различных действительных корня. Отсюда следует, что в данном случае кривая имеет два и только два главных направления. Эти направления взаимно перпендикулярны, что по существу следует из определения этих направлений. Однако это можно доказать и непосредственно, исходя из формулы (4). В самом деле,

$$k_1 = \frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{(a_{22} - a_{21})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

$$k_2 = \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

$$k_1 k_2 = \frac{(a_{22} - a_{11})^2 - (a_{22} - a_{11})^2 - 4a_{12}^2}{4a_{12}^2} = -1,$$

т. е. направления k_1 и k_2 перпендикулярны.

б) $a_{12} = 0$. Формула (3) принимает вид:

$$(a_{22} - a_{11})\, p_1 p_2 = 0. \tag{5}$$

Если $a_{22} - a_{11} \neq 0$, то этому уравнению удовлетворяют только два вектора: $p_1 = 0$, p_2 — любое и $p_2 = 0$, p_1 — любое. Эти векторы, очевидно, определяют координатные оси. Если $a_{22} - a_{11} = 0$, то любой вектор плоскости удовлетворяет этому условию. В данном случае ($a_{12} = 0$, $a_{22} = a_{11}$) кривая представляет собой окружность действительного, нулевого или мнимого радиуса. Резюмируя все сказанное выше, мы приходим к следующей теореме:

Теорема [31. 3]. *Каждая кривая второго порядка, отличная от окружности* ($a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} = 0$), *имеет два и только два главных взаимно перпендикулярных направления. Для окружности каждое направление является главным.*

В § 27 было показано, что всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, относительно которой в уравнении кривой $a_{12} = 0$ (теорема [27. 2]). Легко видеть, что в этом случае оси координат имеют главные направления. В самом деле, условие $a_{12} = 0$ означает, что оси координат сопряжены (см. выше 4°). Но система прямоугольная, поэтому оси координат по определению имеют главные направления. Таким образом, *при приведении уравнения кривой к каноническому виду мы по существу поворотом осей координат добиваемся того, чтобы оси имели главные направления.*

Пример 3. Найти главные направления следующих кривых второго порядка.

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Главные направления определяются из соотношения (3). Пользуясь им, легко определить главные направления данных кривых.

9*

а) $(5-5)p_1p_2+4(p_1^2-p_2^2)=0$,

$$p_1^2-p_2^2=0,\ (p_1-p_2)(p_1+p_2)=0.$$

Отсюда получаем два вектора: $\{1, 1\}$, $\{-1, 1\}$.

б) $(4-1)p_1p_2-2(p_1^2-p_2^2)=0$. Так как $p_1\neq 0$, то, разделив на p_1^2, получаем:

$$3\frac{p_2}{p_1}-2+2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2=0 \text{ или } 2k^2+3k-2=0,$$

где $k=\frac{p_2}{p_1}$. Решив квадратное уравнение, получаем: $k_1=-2$, $k_2=\frac{1}{2}$. Векторы главных направлений имеют координаты: $\{1, -2\}$; $\{2, 1\}$.

4. Главные диаметры. *Диаметр кривой второго порядка называется главным, если он перпендикулярен соответствующим хордам.* Очевидно, всякий главный диаметр является осью симметрии кривой. Для определения главных диаметров можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема [31. 4]. *Для того чтобы диаметр был главным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий вектор был вектором главного, но не асимптотического направления.*

Доказательство. Если d — главный диаметр, то соответствующий вектор $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен d. Отсюда, во-первых, следует, что $\boldsymbol{p}$ не имеет асимптотического направления, а во-вторых, что $\boldsymbol{p}$ имеет главное направление. Последнее следует из теоремы [31. 1].

Обратно, пусть $\boldsymbol{p}$ имеет главное, но не асимптотическое направление. Тогда этому вектору соответствует диаметр, который параллелен векторам, сопряженным с $\boldsymbol{p}$. Но эти векторы согласно определению перпендикулярны $\boldsymbol{p}$. Таким образом, диаметр, соответствующий $\boldsymbol{p}$, перпендикулярен $\boldsymbol{p}$.

Из теорем [31. 3] и [31. 4] непосредственно следует

Теорема [31. 5]. а) *Для окружности всякий диаметр является главным.*

б) *Эллипс (мнимый или действительный), гипербола, пара пересекающихся действительных или комплексных прямых имеют два и только два взаимно перпендикулярных главных диаметра.*

в) *Парабола имеет единственный главный диаметр.*

г) *Для пары параллельных и слившихся прямых единственный диаметр является главным.*

Пример 4. Найти главные диаметры кривых, заданных в примере 3.

Решение. а) Векторы главных направлений кривой $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ имеют координаты $\{1, 1\}$, $\{-1, 1\}$. Легко видеть, что ни один из них не имеет асимптотического направления, поэтому каждому из них соответствует главный диаметр

$$1 \cdot (5x + 4y - 9) + 1\,(4x + 5y - 9) = 0,$$
$$-1 \cdot (5x + 4y - 9) + 1\,(4x + 5y - 9) = 0.$$

После элементарных упрощений получаем: $x + y - 2 = 0$ и $x - y = 0$.

б) Векторы главных направлений кривой

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$$

имеют координаты $\{1, -2\}$, $\{2, 1\}$. Легко видеть, что первый из этих векторов не имеет асимптотического направления, а второй имеет. Поэтому кривая имеет только один главный диаметр, соответствующий вектору $\{1, -2\}$:

$$1\left(x - 2y - \frac{5}{2}\right) - 2\,(-2x + 4y + 5) = 0,$$

$$5x - 10y - \frac{25}{2} = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 4y - 5 = 0.$$

Пример 5. Дана кривая второго порядка общим уравнением в прямоугольной декартовой системе: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. При каком условии: а) ось Ox является главным диаметром; б) начало координат лежит на главном диаметре?

Решение. а) Для того чтобы ось Ox являлась главным диаметром, необходимо, чтобы он соответствовал оси Oy. Уравнение диаметра, соответствующего оси Oy, имеет вид: $a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$. Так как эта прямая совпадает с осью Ox, то $a_{21} = a_{23} = 0$. $a_{22} \neq 0$. Мы пришли к выводу, что

$$a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{22} \neq 0. \tag{6}$$

Обратно, если эти условия имеют место, то ось Oy не имеет асимптотического направления и, кроме того, соответствующий ей диаметр совпадает с осью Ox. Итак, *условия* (6) *являются необходимыми и достаточными для того, чтобы ось Ox была главным диаметром.*

б) Главный диаметр определяется уравнением:

$$p_1\,(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2\,(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0, \tag{7}$$

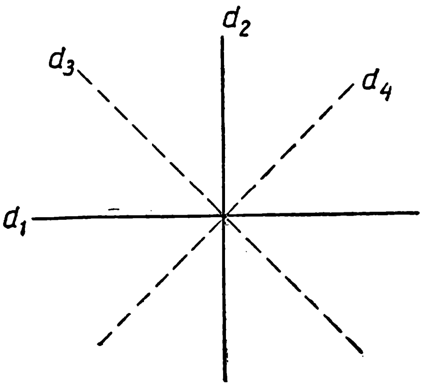
где p_1 и p_2 удовлетворяют условию (3). Если начало координат принадлежит диаметру (7), то

$$a_{13}p_1 + a_{23}\,p_2 = 0. \tag{8}$$

Так как диаметр (7)—главный, то он перпендикулярен вектору $\{p_1, p_2\}$. Из (8) следует, что вектор $\{a_{13}, a_{23}\}$ также перпендикулярен вектору $\{p_1, p_2\}$. Таким образом, вектор $\{a_{13}, a_{23}\}$ коллинеарен направляющему вектору главного диаметра.

Обратно, пусть (7) — главный диаметр, причем вектор $\{a_{13}, a_{23}\}$ коллинеарен направляющему вектору этого диаметра. Так как $\{p_1, p_2\}$ перпендикулярен диаметру, то $a_{13}p_1 + a_{23}p_2 = 0$. Таким образом, уравнение (7) принимает вид: $p_1 (a_{11}x + a_{12}y) + p_2 (a_{21}x + a_{22}y) = 0$. Эта прямая проходит через начало координат. Мы доказали следующую интересную теорему:

Теорема [31. 6]. *Для того чтобы главный диаметр кривой проходил через начало координат, необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор этого диаметра был коллинеарен вектору* $\{a_{13}, a_{23}\}$.



Черт. 140

5. Оси симметрии кривой второго порядка. Осью симметрии называются такие прямые, относительно которых кривая симметрична. Это означает, что если точка M принадлежит кривой, то M', симметричная M относительно оси, также принадлежит кривой.

Очевидно, всякий главный диаметр кривой является осью симметрии. В самом деле, если главный диаметр d соответствует вектору $\boldsymbol{p}$, то $\boldsymbol{p}$ не имеет асимптотического направления, поэтому все прямые, параллельные ей, т. е. перпендикулярные d, пересекают кривую в двух точках, причем середины отрезков, образованных из точек пересечений, лежат на d. Отсюда следует, что d является осью симметрии. Отсюда и из изложенной выше теории следует, что всякая кривая второго порядка имеет хотя бы одну ось симметрии.

Существуют ли у кривой второго порядка оси симметрии, отличные от главных диаметров? Можно показать, что такие оси существуют:

а) пара параллельных (действительных или комплексных) и слившихся прямых: всякая прямая, перпендикулярная данным прямым, является осью симметрии. Эти прямые не являются главными диаметрами;

б) две пересекающиеся взаимно перпендикулярные прямые. Для этой кривой сами прямые являются осями симметрии. Таким образом, пара пересекающихся под прямым углом прямых имеет четыре оси симметрии, из которых только две d_3 и d_4 являются главными диаметрами (черт. 140). В остальных случаях оси симметрии совпадают с главными диаметрами. Мы не останавливаемся на доказательстве этого предложения.

Задачи и теоремы

397. Дана кривая второго порядка

$$x^2 + xy + 2y^2 - 4x + 5y - 3 = 0$$

и векторы $\boldsymbol{a}_1\{2, 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_3\{2, 0\}$. Определить векторы $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$, $\boldsymbol{a}_3'$, сопряженные с каждым из соответствующих векторов в отдельности.

398. Найти два сопряженных диаметра кривой

$$xy - y^2 - 2x + 3y + 3 = 0,$$

из которых один параллелен оси Oy.

399. Имеет ли парабола сопряженные диаметры? Объясните результат.

400. Найти направление хорд, сопряженных диаметру

$$2x + y - 3 = 0$$

относительно кривой $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.

401. Найти главные направления следующих кривых второго порядка:

а) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;
б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$;
в) $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

402. Определить главные диаметры кривых второго порядка, заданных в предыдущей задаче.

403. Найти главные диаметры кривой

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0,$$

заданной в прямоугольной декартовой системе.

404. Найти главные диаметры:

а) пары пересекающихся прямых;
б) пары параллельных прямых.

405. Доказать теорему: для того чтобы вектор $\{p_1, p_2\}$ был вектором и главного и асимптотического направления относительно данной кривой (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0, \ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0.$$

Система координат прямоугольная декартова.

406. Для каких кривых асимптота одновременно является главным диаметром?

407. Доказать теорему: для того чтобы кривая, заданная уравнением (2), была параболой с вершиной в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения (2) удовлетворяли условиям:

а) $a_{23}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, $a_{33} = 0$;

б) ранг матрицы $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{13} \end{Vmatrix}$ равен единице.

§ 32. ИНВАРИАНТЫ ЛЕВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДЕКАРТОВЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ; ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА КРИВОЙ ПО ИНВАРИАНТАМ

Левая часть уравнения кривой второго порядка

$$\Phi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \quad (1)$$

заданного в прямоугольной декартовой системе, является многочленом второй степени. При преобразовании системы координат старые и новые координаты точки связаны соотношениями (см. § 25, формулы (8) и (9)):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - \varepsilon y' \sin\varphi + x_0, \\ y &= x' \sin\varphi + \varepsilon y' \cos\varphi + y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varphi = \angle (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}')$, $\varepsilon = \pm 1$. Причем если при переходе от одной системы к другой ориентация не меняется, то $\varepsilon = +1$, в противном случае $\varepsilon = -1$.

Для того чтобы получить уравнение кривой в новой системе, необходимо в многочлен $\Phi(x, y)$ вместо x и y подставить их значения через x', y' из (2). При этом мы получим новый многочлен относительно переменных x', y'. Коэффициенты этого многочлена будут выражаться через коэффициенты исходного многочлена и через $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, x_0, y_0:

$$\Phi'(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}. \quad (3)$$

Рациональным инвариантом многочлена (1) *относительно преобразований* (2) *называется всякая такая рациональная функция*

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

от коэффициентов a_{ij} этого многочлена, которая не изменяет своей численной величины, если вместо a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} подставить соответственные коэффициенты a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} многочлена (3).

В настоящем параграфе мы ставим задачу определения рациональных инвариантов многочлена второй степени (1). Для решения этой задачи заметим, что общее преобразование (2) можно заменить двумя последовательно выполненными преобразованиями — переносом начала координат

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0 \tag{4}$$

и поворотом системы координат

$$\tilde{x} = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \varepsilon \sin \varphi, \quad \tilde{y} = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \varepsilon \cos \varphi. \tag{5}$$

Очевидно, общие инварианты относительно преобразований (4) и (5) являются инвариантами относительно преобразований (2).

1. Инварианты многочлена второй степени относительно переноса начала координат. При переносе начала координат

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0 \tag{4'}$$

коэффициенты многочлена (1) меняются следующим образом:

$$\Phi(x' + x_0, \ y' + y_0) = a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} \equiv$$
$$\equiv a'_{11} x'^2 + 2a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33},$$

где

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}, \ a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22}, \\ a'_{13} = a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}, \ a'_{23} = a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} = a_{11} x_0^2 + 2a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 + 2a_{13} x_0 + \\ + 2a_{23} y_0 + a_{33} \equiv \Phi(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются инвариантами переноса начала координат (4'), поэтому всякие рациональные функции от этих коэффициентов также являются инвариантами. В частности,

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{7}$$

являются инвариантами многочлена (1) относительно переноса начала координат. Докажем, что определитель

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8}$$

также является инвариантом многочлена относительно переноса начала координат. Для этой цели заметим, что

$$a'_{33} = x_0\ (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0\ (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33};\ \ a'_{33} = x_0 a'_{13} + y_0 a'_{23} + b',$$

где

$$b' = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Вычислим I_3':

$$I_3' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{31}x_0 + a'_{32}y_0 + b' \end{vmatrix} =$$

$$= x_0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{31} \end{vmatrix} + y_0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & b' \end{vmatrix}.$$

Так как в первых двух определителях имеются одинаковые столбцы, то они равны нулю, поэтому

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & b' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} \end{vmatrix}.$$

Запишем этот определитель в виде суммы трех определителей. При этом первые два определителя будут равны нулю, так как они будут иметь одинаковые строчки. Окончательно получаем:

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = I_3.$$

Мы доказали следующую теорему:

Т е о р е м а [32. 1]. *Величины* I_1, I_2 *и* I_3, *определяемые соотношениями* (7) *и* (8), *являются инвариантами многочлена* (1) *относительно переноса начала координат* (4′).

Если в многочлене (1) $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, то после переноса начала координат, как следует из соотношений (6), $a'_{11} = a'_{12} = = a'_{13} = 0$. Таким образом, многочлен вида

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} \tag{9}$$

переходит в многочлен того же вида $a'_{22}\,y'^2 + 2a'_{23}\,y' + a'_{33}$.

Покажем, что выражение

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

является инвариантом многочлена (9) относительно преобразования переноса начала координат. Вычислим K для многочлена (9):

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны,

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{22}y_0 + a_{23} & a_{22}y_0^2 + 2a_{23}y_0 + a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{22}^2 y_0^2 + 2a_{22}a_{23}y_0 + a_{22}a_{33} - a_{22}^2 y_0^2 - a_{22}a_{23}y_0 -$$
$$- a_{22}a_{23}y_0 - a_{23}^2 = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = K.$$

Теорема [32. 2]. *Величина K, определяемая соотношением* (10), *является инвариантом многочлена* (9) *относительно переноса начала* (4′).

2. Инварианты многочлена второй степени относительно поворота системы координат. При повороте системы координат:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\varepsilon\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\varepsilon\cos\varphi \end{aligned} \qquad (5')$$

коэффициенты многочлена (1) меняются следующим образом:

$$a_{11}(x'\cos\varphi - y'\varepsilon\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x'\cos\varphi - y'\varepsilon\sin\varphi) \times$$
$$\times (x'\sin\varphi + y'\varepsilon\cos\varphi) + a_{22}(x'\sin\varphi + y'\varepsilon\cos\varphi)^2 +$$
$$+ 2a_{13}(x'\cos\varphi - y'\varepsilon\sin\varphi) + 2a_{23}(x'\sin\varphi + y'\varepsilon\cos\varphi) +$$
$$+ a_{33} \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33},$$

где

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\
a'_{12} &= \varepsilon(-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}\cos^2\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi), \\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi, \\
a'_{13} &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi, \\
a'_{23} &= \varepsilon(-a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi), \\
a'_{33} &= a_{33}.
\end{aligned} \qquad (11)$$

При выводе этих выражений следует учесть, что $\varepsilon^2 = 1$. Из последнего соотношения немедленно следует, что a_{33} является инвариантом относительно поворота (5′). Докажем, что I_1, I_2, I_3, K, определяемые соотношениями (7), (8), (10), также являются инвариантами относительно преобразований (5′):

а) $I'_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a_{22}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$
$= a_{11} + a_{22} = I_1.$

б) Покажем, что I_2 является инвариантом многочлена (1) относительно поворота системы (5′). Сначала предположим, что при этом повороте новые оси имеют главные направления. Согласно теореме [28. 3] получаем: $a'_{11} = s_1$, $a'_{22} = s_2$, $a'_{12} = 0$, где s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения (4'), § 28. $I'_2 = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = s_1 s_2$. Но произведение корней характеристического уравнения равно свободному члену: $a_{11}a_{22} - a^2_{12}$, т. е. $I'_2 = I_2$. Таким образом, при повороте произвольной прямоугольной системы координат Oij к системе $Oi'j'$, оси которой имеют главные направления, I_2 является инвариантом многочлена (1). Отсюда следует, что при обратном повороте от $Oi'j'$ к Oij I_2 не меняется. В самом деле, если при обратном повороте I_2 меняет свое значение, то при исходном повороте I_2 также должно менять свое значение.

Переходя к общему случаю, заметим, что произвольный поворот системы координат можно заменить двумя последовательно выполненными поворотами: поворот от исходной системы к системе, где оси имеют главные направления, и поворот от этой системы ко второй системе. При каждом из этих поворотов I_2 не меняется, поэтому I_2 является инвариантом многочлена (1) относительно произвольного поворота (5').

в) Покажем, что K является инвариантом многочлена (1) относительно преобразований (5')

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{33} - a'^2_{13} + a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23} =$$
$$= a_{11}a_{33}\cos^2\varphi + 2a_{12}a_{33}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}a_{33}\sin^2\varphi -$$
$$- a^2_{13}\cos^2\varphi - a^2_{23}\sin^2\varphi - 2a_{13}a_{23}\sin\varphi\cos\varphi + a_{11}a_{33}\sin^2\varphi -$$
$$- 2a_{12}a_{33}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}a_{33}\cos^2\varphi - a^2_{13}\sin^2\varphi +$$
$$+ 2a_{13}a_{23}\sin\varphi\cos\varphi - a^2_{23}\cos^2\varphi = a_{11}a_{33} - a^2_{13} +$$
$$+ a_{22}a_{33} - a^2_{23} = K.$$

г) Покажем, что I_3 является инвариантом многочлена (1) относительно преобразования (5'). Так как все кривые второго порядка, за исключением параболы, имеют хотя бы один центр, то возможны два случая:

1) если многочлен приравнять к нулю, то полученная кривая имеет хотя бы один центр;

2) если многочлен приравнять к нулю, то полученная кривая будет параболой.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Пусть Oij — исходная система, а $Oi'j'$ — новая, а C — один из центров кривой. Преобразование от Oij к $Oi'j'$ можно заменить последовательным выполнением следующих преобразований:

α) параллельный перенос: $Oij \to Cij$;

β) поворот вокруг C: $Cij \to Ci'j'$;

γ) параллельный перенос: $Ci'j' \to Oi'j'$.

При преобразованиях α и γ, как было показано выше, I_3 не меняется, поэтому для того чтобы показать, что I_3 есть инвариант, достаточно рассмотреть случай β). В системе Cij у многочлена (1) коэффициенты при x и y равны нулю: $a_{13}= a_{23} = 0$. Из соотношений (11) следует, что в системе $Ci'j'$: $a'_{13} = a'_{23} = 0$.

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} a'_{33} = I'_2 \cdot a'_{33} = I_2 a_{33} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = I_3.$$

2. Пусть Oij — исходная система, $Oi'j'$ — новая, C — вершина параболы, а i_1, j_1 — единичные векторы главных направлений. Преобразование от Oij к $Oi'j'$ можно заменить последовательным выполнением следующих преобразований:

α) перенос начала координат $Oij \to Cij$;

β) поворот вокруг C: $Cij \to Ci_1j_1$;

γ) поворот вокруг C: $Ci_1j_1 \to Ci'j'$;

δ) перенос начала координат $Ci'j' \to Oi'j'$.

При преобразованиях α и δ, как было показано выше, I_3 не меняется. Покажем, что при повороте β) I_3 не меняется. В системе Ci_1j_1 многочлен (3) имеет вид: $a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'$, поэтому

$$I'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a'_{22}\, a'^2_{13}. \text{ Но } I'_1 = I_1,\ K' = K,$$

поэтому

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}, \quad a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & a'_{13} \\ a'_{13} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -a'^2_{13};$$

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} = -a^2_{13} - a^2_{23}.$$

Итак, $a'^2_{13} = a^2_{13} + a^2_{23}$. Подставив эти значения в выражение I'_3, получаем: $I'_3 = -(a_{11}+a_{22})(a^2_{13} + a^2_{23})$. С другой стороны,

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = -a_{11} a^2_{23} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31}(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) =$$

$$= -a_{11} a^2_{23} - a_{22} a^2_{13} + 2a_{12} a_{13} a_{23}.$$

Согласно теореме [31. 6] направляющий вектор главного диаметра параболы параллелен вектору $\{a_{13}, a_{23}\}$. Но главный диаметр имеет асимптотическое направление, поэтому $\{a_{12}, -a_{11}\}$ и $\{a_{22}, -a_{12}\}$ являются направляющими векторами главного диаметра параболы. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13} = 0,$$

$$a_{22}a_{23} + a_{12}a_{13} = 0,$$

$$I_3 - I_3' = 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{13}^2 + a_{22}a_{23}^2 =$$

$$= a_{13}(a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13}) + a_{23}(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}) = 0.$$

Очевидно, при повороте γ) I_3 также не меняется, так как при обратном преобразовании оно не меняется. Мы показали, что при каждом из преобразований α), β), γ) и δ) выражение I_3 не меняется. Отсюда следует, что при последовательном выполнении этих преобразований координат I_3 не меняется.

Резюмируя все сказанное, мы приходим к следующей теореме:

Теорема [32. 3]. *Величины* I_1, I_2, I_3 *и* K, *определяемые соотношениями* (7), (8) *и* (10), *являются инвариантами многочлена* (1) *относительно поворота системы координат* (5′).

3. Инварианты многочлена второй степени относительно общего преобразования прямоугольных декартовых систем. Выше было отмечено, что общее преобразование прямоугольных декартовых систем координат (2) можно заменить двумя последовательно выполненными преобразованиями — переносом начала координат и поворотом системы координат. Из теорем [32. 1] и [32. 3] следует:

Теорема [32. 4]. *Величины* I_1, I_2 *и* I_3, *определяемые соотношениями* (7) *и* (8), *являются инвариантами многочлена* (1) *относительно общих преобразований прямоугольных декартовых систем координат* (2).

Из теорем [32. 2] и [32. 3] следует:

Теорема [32. 5]. *Если при приравнивании к нулю многочлена второй степени* (1) *получаем уравнение пары параллельных или слившихся прямых, то величина* K, *определяемая соотношением* (10), *является инвариантом многочлена* (1) *при преобразовании координат* (2).

4. Определение вида кривой по инвариантам. Теоремы [32. 4] и [32. 5] позволяют определять вид кривой по инвариантам, не приводя ее к каноническому виду. Из теорем [27. 3] и [28. 3] следует, что путем надлежащего подбора новой системы координат $O'\mathbf{i}'\mathbf{j}'$ многочлен (1) всегда может быть приведен к одному из следующих видов:

$$F'(x', y') \equiv s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + a_{33}', \text{ где } s_1 \neq 0, \ s_2 \neq 0, \tag{12}$$

$$F'(x', y') \equiv s_1 x'^2 + 2a_{23}' y', \text{ где } s_1 \neq 0, \ a_{23}' \neq 0, \tag{13}$$

$$F'(x', y') \equiv s_1 x'^2 + a_{33}', \text{ где } s_1 \neq 0. \tag{14}$$

Другими словами, уравнение кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{15}$$

путем надлежащего подбора системы координат можно привести к одному из видов:

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{16}$$

$$s_1 x'^2 + 2a'_{23} y' = 0, \tag{17}$$

$$s_1 x'^2 + a'_{23} = 0. \tag{18}$$

Установим признаки определения вида кривой по инвариантам.

I. Многочлен (1) приводится к виду (12). В этом случае $I_1 = s_1 + s_2$, $I_2 = s_1 s_2$, $I_3 = s_1 s_2 a'_{33}$, поэтому уравнение (16) принимает вид:

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{16'}$$

а) Этим уравнением задается эллипс, если s_1 и s_2 имеют одинаковые знаки, а $\frac{I_3}{I_2}$ — знак, противоположный знакам s_1 и s_2. Отсюда следует, что

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 < 0. \tag{19}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют неравенствам (19), то уравнением (15) задается эллипс. В самом деле, уравнение кривой (15) можно привести к одному из видов (16), (17) и (18). У кривых (17) и (18) $I_2 = 0$, поэтому уравнение рассматриваемой кривой приводится к виду (16) или (16'). Так как $I_2 > 0$, то s_1 и s_2 имеют одинаковые знаки. Из условия $I_1 I_3 < 0$ следует, что $\frac{I_3}{I_2}$ имеет знак, противоположный знакам s_1 и s_2. Из теоремы [27. 4] следует, что рассматриваемая кривая является эллипсом.

б) Уравнением (16') задается мнимый эллипс, если s_1, s_2, $\frac{I_3}{I_2}$ имеют одинаковые знаки. Отсюда следует, что

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0. \tag{20}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют неравенствам (20), то уравнением (15) задается мнимый эллипс. Доказательство аналогично предыдущему.

в) Уравнением (16') задается гипербола, если s_1 и s_2 имеют разные знаки и $\frac{I_3}{I_2} \neq 0$. Отсюда следует, что

$$I_2 < 0, \quad I_3 \neq 0. \tag{21}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют неравенствам (21), то уравнением (15) задается гипербола. В самом деле, уравнение кривой (15) можно привести к одному из видов (16), (17) и (18). У кривых (17) и (18) $I_2 = 0$, поэтому уравнение рассматриваемой кривой приводится к виду (16) или (16'). Так как

$I_2 < 0$, то s_1 и s_2 имеют разные знаки. Из условия $I_3 \neq 0$ следует, что свободный член в уравнении (16′) не равен нулю, поэтому (16′) есть гипербола.

г) Уравнением (16′) задается пара действительных пересекающихся прямых, если

$$I_2 < 0, \quad I_3 = 0. \tag{22}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют условиям (22), то кривая (15) представляет собой пару пересекающихся действительных кривых.

д) Уравнением (16′) задается пара комплексных прямых, если

$$I_2 > 0, \quad I_3 = 0. \tag{23}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют неравенствам (23), то кривая (15) представляет собой пару комплексных прямых.

II. Многочлен (1) приводится к виду (13). В этом случае $I_1 = s_1$, $I_2 = 0$, $I_3 = -s_1 a'^2_{23} = -I_1 a'^2_{23}$, поэтому уравнение (17) принимает вид:

$$I_1 x'^2 + 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\, y' = 0. \tag{17′}$$

Этим уравнением задается парабола. Здесь, очевидно,

$$I_2 = 0, \quad I_3 \neq 0. \tag{24}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют условиям (24), то кривая (15) представляет собой параболу. В самом деле, так как $I_2 = 0$, а $I_3 \neq 0$, то уравнение (15) можно привести только к виду (17) (для кривой (16) $I_2 \neq 0$, а для (18) — $I_3 = 0$). Мы только что показали, что этим уравнением задается парабола.

III. Многочлен (1) приводится к виду (14). В этом случае согласно теоремам [32. 4] и [32. 5] инвариантами многочлена (1) являются I_1, I_2, I_3 и K. $I_1 = s_1$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = s_1 a'_{33}$. Уравнение (18) принимает вид:

$$I_1 x'^2 + \frac{K}{I_1} = 0. \tag{18′}$$

Этим уравнением задается пара действительных параллельных прямых, если $K < 0$, I_1 — любое. В этом случае

$$I_2 = I_3 = 0, \quad K < 0. \tag{25}$$

Обратно, если инварианты многочлена (1) удовлетворяют условиям (25), то уравнением (15) задается пара действительных параллельных прямых. В самом деле, так как $I_2 = I_3 = 0$, то уравнение (15) можно привести только к виду (18) или (18′). Из условия $K < 0$ следует, что этим уравнением задается пара действительных параллельных прямых.

Аналогично предыдущему можно показать, что условия

$$I_2 = I_3 = 0, \quad K > 0 \tag{26}$$

характеризуют пару комплексных параллельных прямых, а условия

$$I_2 = I_3 = 0, \quad K = 0 \tag{27}$$

— пару слившихся прямых.

Резюмируя все изложенное выше, мы приходим к следующей таблице для определения вида линии второго порядка по инвариантам:

№ п/п	Признак вида	Приведенное уравнение	Каноническое уравнение	Название кривой
1	$I_2>0,\ I_1 I_3<0$	$s_1 x^2+s_2 y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллипс
2	$I_2>0,\ I_1 I_3>0$	$s_1 x^2+s_2 y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мнимый эллипс
3	$I_2<0,\ I_3\neq 0$	$s_1 x^2+s_2 y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гипербола
4	$I_2<0,\ I_3=0$	$s_1 x^2+s_2 y^2=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся прямых
5	$I_2>0,\ I_3=0$	$s_1 x^2+s_2 y^2=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара комплексных пересекающихся прямых
6	$I_2=0,\ I_3\neq 0$	$I_1 x^2+2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}y=0$	$x^2=2py$	Парабола
7	$I_2=I_3=0,\ K<0$	$I_1 x^2+\frac{K}{I_1}=0$	$\frac{x^2}{a^2}=1$	Пара параллельных прямых
8	$I_2=I_3=0,\ K>0$	$I_1 x^2+\frac{K}{I_1}=0$	$\frac{x^2}{a^2}=-1$	Пара комплексных параллельных прямых
9	$I_2=I_3=K=0$	$x^2=0$	$x^2=0$	Пара слившихся прямых

Рассмотрим несколько примеров определения вида кривой по инвариантам.

Пример 1. $-2x^2+12xy+7y^2-8x-6y=0$.
Определим инварианты этой кривой

$$I_1 = a_{11}+a_{22} = -2+7 = 5; \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -14-36 = -50;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & -3 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot 10 + 3\cdot 30 = 50.$$

В данном случае $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$, поэтому кривая представляет собой гиперболу.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$s^2 - I_1 s + I_2 = 0,\ s^2 - 5s - 50 = 0,\ s_1 = 10,\ s_2 = -5.$$

Приведенное уравнение имеет вид: $10x^2 - 5y^2 - 1 = 0$.

Пример 2. $3x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$.

$$I_1 = 3 + 1 = 4,\ I_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 = 10.$$

В данном случае $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 = 4 \cdot 10 = 40 > 0$. Кривая представляет собой мнимый эллипс.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$s^2 - 4s + 2 = 0,\ s_1 = 2 + \sqrt{2},\ s_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Приведенное уравнение:

$$(2 + \sqrt{2})\,x^2 + (2 - \sqrt{2})\,y^2 + 5 = 0.$$

Пример 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 0 =$$

$$= -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Кривая представляет собой параболу. Приведенное уравнение имеет вид: $5x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{20}}\,y = 0$, $x^2 + \frac{1}{5\sqrt{5}}\,y = 0$.

Примеры

Определить вид следующих кривых по инвариантам. Написать приведенные уравнения кривых.

408. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$.

409. $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$.

410. $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$.

411. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 3\sqrt{10}x - \sqrt{10}y = 0$.

412. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

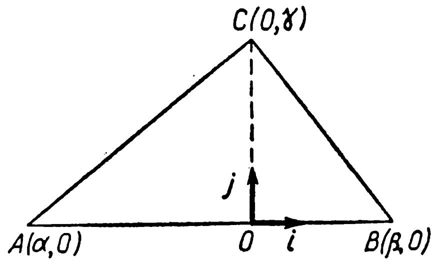
413. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$.

414. $x^2 + 2y^2 + 4x + 4 = 0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

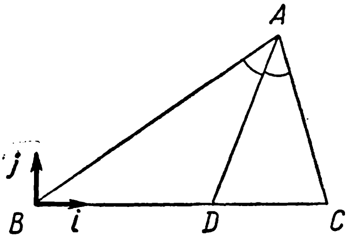
3. Нет. **4.** Да. **5.** Нет. **8.** а) Векторы, лежащие на взаимно перпендикулярных прямых, коллинеарны тогда и только тогда, когда хотя бы один из них нулевой. б) Векторы равны только в том случае, когда оба нулевые. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** В примерах а), в) все условия равенства векторов выполнены, а в примерах б), г) и д) отдельные из них не выполняются. **13.** Модули всех векторов равны друг другу. **14.** Да. **16.** Да. **18.** $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. Аналогично доказывается второе соотношение. **20.** а) Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$; тогда $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overline{BA}$, а $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, поэтому $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. б) Пусть $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{b}$, тогда $\overline{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Рассмотрим точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно O. Очевидно, $\overline{OA'}=-\boldsymbol{a}$, $\overline{OB'}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overline{A'B'}=-\boldsymbol{b}$. Из правила треугольника имеем: $\overline{OB'}=\overline{OA'}+\overline{A'B'}$ или $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{b})$. в) $\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+[-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{c})$. С другой стороны, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{c})$. **21.** Да, например, если O — середина отрезка AB, то $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$. **24.** Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то данное в условии равенство означает, что диагонали параллелограмма, построенного на данных векторах, имеют равные длины. Этим свойством характеризуется прямоугольник, поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то условие задачи всегда выполнено. Если, наконец, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. **30.** а) Да. б) Коллинеарны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. **34.** Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то $\boldsymbol{x}$ не существует. Если $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}=0$, то $\boldsymbol{x}$ также не существует. Если $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{b}=0$, то любое число удовлетворяет соотношению. Если, наконец, $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}\neq 0$, то $\boldsymbol{x}=-\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ и определяется однозначно. **37.** Если C_k — произвольная точка деления ($k=1, 2, \ldots, n-1$), то $\overline{OC_k}=\dfrac{(n-k)\,\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}}{n}$. **38.** Последовательно исключив переменные, сначала найти $\boldsymbol{x}$, потом $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$: $60\boldsymbol{x}=114\boldsymbol{a}+66\boldsymbol{b}$; $60\boldsymbol{y}=49\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}$; $60\boldsymbol{z}=-61\boldsymbol{a}+121\boldsymbol{b}$. **39.** а) $-8\boldsymbol{b}$; б) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{a}$; в) $2(\alpha\boldsymbol{b}-\beta\boldsymbol{a})$. **41.** а) $\boldsymbol{a}\{-1,2\}$, $\boldsymbol{b}\{1,0\}$, $\boldsymbol{c}\{1, -3\}$; б) $\boldsymbol{a}\{-2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{3, 1\}$; в) $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 0\}$, $\boldsymbol{c}\{-1, 3\}$. **42.** $-\boldsymbol{a}\{-1, 0\}$, $-\boldsymbol{b}\{3, 1\}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\{-3,2\}$. **46.** а) $\overline{CM}\{-1, 1\}$; $\overline{OB}\{-1, -2\}$; $\overline{KM}\{-1, -1\}$; $\overline{CB}\{-2, -2\}$; $\overline{NC}\{1, 1\}$; $\overline{AN}\{-1, -3\}$. **47.** $\overline{BC}=-\dfrac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\overline{AC}=\dfrac{a-b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\overline{BD}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. Указание. Пусть AB — большее основание трапеции. Сначала показать, что $\overline{CD}=\frac{b-a}{a}e_1$, где $a=AB$, $b=AD$. **48.** Может, например, $p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$, где A, B и C — произвольные точки плоскости. **50.** Да. **53.** $a=2b+c$, $b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$, $c=a-2b$. **54.** $p=2u-3v$. **55.** $\alpha=-2$. Указание. Выразить координаты векторов $p\{x_1, y_1\}$ и $q\{x_2, y_2\}$ через координаты векторов a и b и воспользоваться условием коллинеарности: $x_1y_2-y_1x_2=0$. **56.** а) $\alpha=0$; б) $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$; в) При любом α векторы p и q не коллинеарны. **57.** Да, $a-b+c=0$. **58.** Трапеция существует, так как a и c коллинеарны и $a+b+c-d=0$. **62.** Да. **63.** а) Нет; б) Да. **64.** $(\widehat{a_1, b_1})=-45°$, $(\widehat{a_2, b_2})=+90°$, $(\widehat{b_2, a_2})=-90°$, $(\widehat{a_3, b_3})=+30°$. **65.** а) $+60°$; б) $-60°$; в) $+60°$; г) $-120°$; д) $+60°$. **67.** Если $a\{x, y\}$, то $x=|a|\cos\varphi=5\sqrt{3}$, $y=|a|\sin\varphi=5$. **68.** $|a|=5$; $|b|=10$; $|c|=5$; $|d|=13$; $|e|=\sqrt{5}$. **69.** $a_1\perp b_1$; $a_3\perp b_3$. **70.** $a_1'\{-5, 2\}$, $a_2'\{2, -1\}$, $a_3'\{0, 5\}$, $a_4'\{-1, 0\}$, $a_5'\{\sqrt{5}, 2\}$. **71.** а) 45°; б) 75°; в) $-30°$; г) $-60°$. **72.** $\{y, -x\}$. **73.** Выразить вектор средней линии через векторы оснований и учесть, что векторы оснований коллинеарны. **75.** См. решение примера 8, § 4. **76.** Показать, что стороны треугольника ABC соответственно параллельны сторонам треугольника $A_2B_2C_2$; $k=\frac{3}{4}$. **77.** Решение задачи аналогично доказательству теоремы [6, 6]. **78.** Полагая $\overline{AB}=a$ и $\overline{AD}=b$, выразить векторы $\overline{AP}$ и $\overline{AC}$ через a и b и записать условие их коллинеарности. **87.** Да. Если точка M в системе Oe_1e_2 имеет координаты x, y, то в системе Oe_1e_3 та же точка имеет координаты x, $-y$. **88.** Для точек оси Ox и только для этих точек соответствующие координаты совпадают. **89.** Точки, лежащие на прямой, соединяющей начало координат с точкой (1, 1). В прямоугольной декартовой системе эта прямая является биссектрисой I и III координатных углов. **92.** $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $B(0, 1)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$. **93.** $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 0)$. **94.** $A(-5, 0)$, $B(-5+2\sqrt{3}, 2)$, $C(5-2\sqrt{3}, 2)$, $D(5, 0)$; $M\left(0, \frac{5(5+\sqrt{3})}{22}\right)$, $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **95.** $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{5}, 1\right)$, $D(1, 0)$, $M\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{10-2\sqrt{3}}, \frac{5}{10-2\sqrt{3}}\right)$, $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$. **97.** $A(0, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(-1, 3)$, $D(4, -2)$, $E(0, -1)$. **98.** а) $(2, -5)$; б) $(-2, 5)$; в) $(-2, -5)$. **100.** Середина отрезка AB имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и лежит в первом координатном угле. **104.** $\overline{AB}\{-1, -6\}$, $\overline{AD}\{-1, 2\}$, $\overline{DB}\{0, -8\}$, $\overline{BC}\{1, -1\}$, $\overline{CA}\{0, 7\}$. **105.** $(1, 7)$. **108.** а) 4; б) $-\frac{1}{5}$; в) -5; г) $-\frac{5}{4}$. **109.** $\frac{1}{\lambda}$. **110.** $A'(2, -5)$, $B'(0, -1)$, $C'(3, 1)$. **111.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $(-4, 1)$; $\left(1, \frac{8}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$. **112.** Имеются две точки, удовлетворяющие условию задачи: $C_1(-3, -5)$ и $C_2(3, -6)$. **113.** $A_1\left(3, \frac{13}{3}\right)$, $A_3\left(1, \frac{17}{3}\right)$; $A_4\left(0, \frac{19}{3}\right)$,

$A_6\left(-2, \frac{23}{3}\right)$. $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_6 = -4$. **115.** (0, 3). **117.** $A(1, -3)$, $B(3, 4)$, $C(7, -2)$. **119.** $\sqrt{10}$; 4; 5; $2\sqrt{5}$. **120.** $4\sqrt{2}$. **121.** $(\sqrt{5}, 2)$; $(-\sqrt{5}, 2)$; $(2\sqrt{2}, -1)$; $(-2\sqrt{2}, -1)$; (0, 3); $(\sqrt{7}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$. **122.** $\frac{\sqrt{157}}{2}$. **124.** Задача имеет два решения: $C_1(-20, 20)$ $r_1 = 20$; $C_2(-4, 4)$, $r_2 = 4$. **126.** а) $S = 4$; б) $S = \frac{27}{2}$; в) $S = -13$. **127.** $S = 25$, $2p = 15 + 5\sqrt{5}$. **128.** Коллинеарны следующие тройки точек: а), г), д). **129.** В новой системе точка M будет иметь координаты $(\rho, -\varphi)$. **133.** Если обозначить через M_1', M_2', M_3', M_4' точки, симметричные данным по отношению к полюсу, а через M_1'', M_2'', M_3'', M_4'' — по отношению к полярной оси, то $M_1'\left(2, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_2'\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$; $M_3'\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4'\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$; $M_1''\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_2''\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$; $M_3''\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_4''\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$. **135.** $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, $S = 1$. **136.** $AB = BC = 7$. **137.** а), б) На окружностях с центрами в полюсе и радиусами, соответственно равными 3 и 5; в), г) на лучах, исходящих из полюса и образующих с полярной осью углы 60° и 45°; д) на прямой, перпендикулярной к полярной оси и пересекающей ее в точке (5, 0); е) на прямой, параллельной полярной оси и отстоящей от полюса на расстоянии $\rho=3$. **140.** а) Симметричны относительно полюса; б) симметричны относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси; в) симметричны относительно полярной оси. **141.** A, C и E. **142.** а) $A'\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$, $B'(-2, \pi)$, $C'\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$, $D'\left(-1, -\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $A'\left(-5, -\frac{\pi}{3}\right)$, $B'(2, -\pi)$, $C'\left(-4, \frac{\pi}{2}\right)$, $D'\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$. **143.** Систему координат выбрать так, как на чертеже 141, и доказать, что $AC^2 = AO \cdot AB$. При этом воспользоваться теоремой Пифагора: $AC^2 + CB^2 = AB^2$. **144.** Систему координат выбрать так, как в предыдущей задаче. **146.** Систему координат выбрать так, как на чертеже 142. Тогда $B(0, 0)$ и $C(a, 0)$. Координаты точки D определяем из условия: $BD : DC = c : b$; $D\left(\frac{ca}{b+c}, 0\right)$. Отсюда $BD = \frac{ca}{b+c}$ и $DC = \frac{ab}{b+c}$. Далее

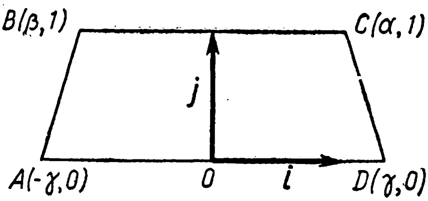


Черт. 141

воспользоваться теоремой Стюарта. **147.** Если систему координат выбрать так, как указано на чертеже 143, то из условия $AC = BD$ получаем: $\alpha+\beta=0$. **149.** Принять две стороны треугольника ABC за векторы аффинной системы координат и учесть, что если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, то точка пересечения медиан треугольника ABC имеет координаты $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **152.** Пусть A лежит между O и B. Примем точку O за начало прямоугольной декартовой системы координат, а вектор $\overline{OA}$ — за единичный вектор l. В этой системе координаты вершин четырехугольника могут быть записаны так: $A(1, 0)$, $B(\lambda, 0)$, $D(\alpha, \beta)$, $C(\mu\alpha, \mu\beta)$, причем $\lambda > 1$, $\mu > 1$. Вычислить площади треугольников OAD, OBC, OSP и показать, что $S_{OBC} - S_{OAD} = 4S_{OSP}$. **153.** Взять точку O за начало координат и учесть указание к задаче 149. **154.** Начало координат поместить в точку G. В этом случае, если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — вершины треугольника, то $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. **156.** $|y| = 4$ или $y = \pm 4$. Две прямые, параллельные оси Ox. **157.** а) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 8$, $x \geqslant 2$, или $x^2 + y^2 \leqslant 8$, $x \leqslant -2$, или $x^2 + y^2 \leqslant 8$, $y \geqslant 2$, или $x^2 + y^2 \leqslant 8$, $y \leqslant -2$. Фигура представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют хотя бы одному из перечисленных условий; в) $x \leqslant y$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$; г) $y \leqslant 0$. **158.** Пусть h — расстояние между параллельными прямыми, а α — данное число. Возможны три случая: а) $\alpha < h$, искомое г. м. т. не



Черт. 142

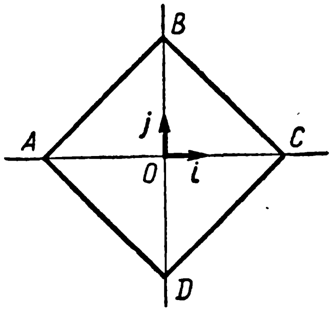


Черт. 143

существует; б) $\alpha = h$; искомое г. м. т. представляет собой совокупность всех точек, расположенных на заданных прямых и в полосе между ними; в) $\alpha > h$; искомое г. м. т. представляет собой пару прямых l_1 и l_2, параллельных данным. Прямые l_1 и l_2 расположены симметрично относительно данных прямых; расстояние между ними равно α. **159.** За оси координат принять прямые, соединяющие середины противоположных сторон. Ответ. Прямые, соединяющие середины противоположных сторон. **160.** а) Биссектриса первого и третьего координатных углов; б) две прямые, параллельные оси Oy; в) прямая, параллельная оси Ox; г) две прямые: ось абсцисс и биссектриса второго и четвертого координатных углов; д) биссектрисы координатных углов; е) прямая, параллельная оси Oy; ж) пара прямых: ось абсцисс и прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$. **161.** а), б) Не совпадают; в) совпадают. **162.** а) Окружность с центром в полюсе радиуса 4; б) прямая, перпендикулярная к полярной оси и проходящая через точку $\rho = 2$, $\varphi = 0$; в) окружность радиуса 5 с центром в точке $C(0, 5)$; г) луч, исходящий из полюса и образующий с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$; д) прямая, параллельная полярной оси и проходящая через точку $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; е) два луча, исходящие из полюса и образующие с полярной осью углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; ж) прямая, проходящая через полюс и образующая с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$. В примерах б), в), д) и ж) целесообразно перейти к прямоугольной декартовой системе. **163.** Пусть AB — один из отрезков параллельных прямых, заключенных между a и b, причем A принадлежит прямой a, а B — прямой b. Если аффинную систему выбрать так, чтобы

A совпадала с началом, $\overline{AB} = e_2$ и $e_1 \parallel a$, то в этой системе искомое геометрическое место имеет уравнение $y = \frac{1}{2}$. Этим уравнением задается прямая линия, параллельная данным прямым. **164.** Пусть O — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a. Если прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы O совпала с началом, $\overline{OA} = \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i} \parallel a$, то в этой системе искомое геометрическое место имеет уравнение $y = \frac{1}{2}$. Этим уравнением задается прямая линия, параллельная данной прямой. **166.** Да. **167.** Нет. **168.** а) Полуокружность с центром в начале координат, $r = 8$; б) другая полуокружность. **169.** а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, $C(1, -2)$, $r = 5$; д) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $C(1, 0)$, $r = 1$; ж) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, $C(2, 1)$, $r = 2$. Остальные уравнения не определяют окружность. **170.** Пусть $AB = 2a$, а α^2 — данная сумма квадратов; а) $\alpha^2 > 2a^2$; искомое г. м. т. есть окружность с центром в середине отрезка AB; б) $\alpha^2 = 2a^2$; искомое г. м. т. представляет собой точку — середину отрезка AB; в) $\alpha^2 < 2a^2$; на плоскости не существует ни одной точки, удовлетворяющей условию задачи. **171.** Окружность, центр которой совпадает с центром тяжести треугольника ABC. **172.** Окружность, концентрическая данной окружности. **173.** Окружность, построенная на диаметре AB. Указание. Начало координат взять в середине отрезка AB и воспользоваться теоремой Пифагора. **174.** Написать уравнение искомого геометрического места точек в полярной системе координат, приняв точку O за полюс, а диаметр, проходящий через нее, — за полярную ось; затем перейти к прямоугольной декартовой системе. Ответ. Две окружности. **175.** Окружность, концентрическая данной окружности. **179.** а) $x - y - 3 = 0$; б) $2x + 3y - 21 = 0$; в) $y - 6 = 0$. **180.** а) $4x - 3y + 7 = 0$; б) $5x - 2y = 0$; в) $x + y + 4 = 0$; г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; д) $y - 5 = 0$; е) $x + 1 = 0$; ж) $x + y = 1$. **181.** Написать уравнение прямой, проходящей через две точки, и выяснить, лежит ли третья точка на этой прямой. **182.** а) Нет; б) нет. **183.** а) $y = -3x + 3$; б) $y = 2x - 4$; в) $y = \sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}$; г) $y = 9x$. **184.** а) $y = x$; б) $y = -x$; в) $x + y - 7 = 0$; г) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Указание. Биссектриса угла, образованного единичными векторами $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$, параллельна вектору $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0$. **185.** а) $y = 2$; б) $y = 2x - 4$. **188.** $x - y + \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$; $x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$; $x - y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$; $x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$. **189.** (AB) $y = 0$; (BC) $\sqrt{3}x - y - a\sqrt{3} = 0$; (CD) $\sqrt{3}x + y - 2a\sqrt{3} = 0$; (DE) $y - a\sqrt{3} = 0$; (EF) $\sqrt{3}x - y + a\sqrt{3} = 0$; (AF) $y + \sqrt{3}x = 0$. **190.** $AB \parallel CD$; $3x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$; $y - 1 = 0$. **191.** Сначала определить координаты общей вершины искомых сторон. $x - y - 7 = 0$; $x - 2y - 10 = 0$. **192.** Вектор $\boldsymbol{p} = \frac{\overline{AB}}{AB} + \frac{\overline{AC}}{AC}$ является направляющим вектором биссектрисы внутреннего угла A. а) $13x - 9y + 7 = 0$; б) $36x - 23y + 29 = 0$. **194.** б), в) и д). **195.** Если $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $Ax + By + C = 0$ уравнение прямой, то числа $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C$, $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$, $\delta_3 = Ax_3 + By_3 + C$ отличны от нуля и два из них имеют разные знаки. **196.** OA и AB. **197.** Нет. **198.** $a = -\frac{10}{3}$; $b = \frac{5}{2}$. **199.** $2x - y - 2 < 0$, $2x - 5y + 6 > 0$. **203.** $\mu = 6$, $\lambda = -9$. **204.** а) $x - 4y + 18 = 0$; б) $2x + y + 2 = 0$; в) $2x - y = 0$; г) $x = 1$. **205.** а) $3x - y - 1 = 0$; б) $x - 3y - 20 = 0$; в) $x - y = 0$; г) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; д) $x + y - 7 = 0$; е) $3x + y +$

$+8=0$. **206.** а) $3x-y-8=0$; б) $y+5=0$; в) $2x+y+7=0$; г) $x+y-15=0$; д) $3x+2y=0$. **207.** $p\{5, 2\}$; $n\{2, -5\}$; $k=\frac{2}{5}$; $a=-\frac{3}{2}$; $b=\frac{3}{5}$. **208.** $2x-4y-21=0$. **209.** а) $x-1=0$; $2x-3y+8=0$; $2x+3y-12=0$; б) $y-5=0$; $3x+2y-1=0$; $3x-2y-5=0$. **210.** $3x+4y-17=0$; $3x-4y-1=0$; $2x-5y+27=0$. **211.** $(AB)\ x-y+\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$, $(BC) x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$, $(CD) x-y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$, $(DA)\ x+y+\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$ (черт. 144).



Черт. 144

212. а) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$; б) $\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{5}}{3}y=0$; в) $\frac{\sqrt{11}}{6}x+\frac{5}{6}y-\frac{1}{2}=0$; г) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{15}{\sqrt{2}}=0$. **213.** 5. **214.** $(0, 6)$; $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. **215.** Для решения задачи полезно сформулировать ее следующим образом: провести прямые, имеющие направляющий вектор $p\{-4, 3\}$ и отстоящие от точки $(1, -2)$ на расстоянии 5. Ответ. $3x+4y+30=0$, $3x+4y-20=0$. **216.** Уравнение искомой прямой зиписать в виде $y-1=k(x-1)$ и потребовать, чтобы расстояние ее от точки C равнялось $2\sqrt{2}$. Ответ. $x-y=0$, $x+y-2=0$. **217.** $8x+14y+5=0$; $7x-4y=0$; $\left(-\frac{2}{13}; -\frac{7}{26}\right)$. **218.** $\cos\varphi=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$. **219.** $4x-3y-22=0$; $4x-3y+8=0$. **220.** а) $2x-5y-1=0$; б) $3x+5y+5=0$. **221.** $9x+9y+13=0$. **222.** $2x+y-7=0$; $x-2y-6=0$. **223.** $x-2y-5=0$; $2x-y-6=0$. **224.** $x-7y-5=0$. **225.** а) Пересекаются в точке $(3, 0)$; б) параллельны; в) совпадают. **226.** а) Пересекаются в точке $(-3, 3)$; б) параллельны; в) параллельны; г) совпадают. **227.** $t_1=-\frac{2}{3}$, $t_2=2$. **228.** $3\lambda+7\mu+3=0$. **229.** Пусть $y-6=k(x-1)$ — уравнение искомой прямой. Определить координаты точек пересечения этой прямой с данными параллельными прямыми и потребовать, чтобы середина этого отрезка лежала на другой прямой. Из полученного условия определить k. Ответ. $x+y-7=0$. **230.** $2x+y-4=0$. **234.** $5x-3y+6=0$. **235.** $x-y=0$. **236.** $y+1=0$. **237.** а) $4x-5y+22=0$; $4x+y-18=0$; $2x-y+1=0$; б) $x+2y-7=0$; $5x+4y+7=0$; $x-4y-13=0$. **238.** $y-17=0$; $2x+13=0$; $34x-13y=0$. **239.** $\lambda=-5$; $\mu=-5$; $13x+39y+5=0$. **240.** а) Принадлежат пучку пересекающихся прямых; б) не принадлежат пучку; в) принадлежат пучку параллельных прямых. **243.** Если прямые a и b пересекаются, то за начало аффинной системы координат взять точку их пересечения O и положить $e_1=\overline{OA}$, $e_2=\overline{OD}$. Если прямые a и b параллельны, то за начало аффинной системы взять точку A и положить $e_1=\overline{AB}$, $e_2=\overline{AD}$. **244.** Аффинную систему координат выбрать так, как при доказательстве теоремы [18.1]. **245.** Аффинную систему координат выбрать так, как при доказательстве теоремы [18.1]. **247.** Аффинную систему координат взять так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой l. **248.** Прямая, проходящая через точку O. За ось Ox принять прямую a. **249.** $d=\frac{14}{\sqrt{29}}$. **250.** Систему координат выбрать так, как при доказательстве теоремы [18.2]. Искомая сумма равна высоте треугольника. **251.** а) Отрезок F_1F_2; б) геометрическое место пустое. **252.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **253.** а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$. **254.** Две прямые: $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$. **255.** $F_1(\sqrt{140},\ 0)$; $F_2(-\sqrt{140},\ 0)$. **256.** $\frac{2b^2}{a}$. **257.** $F_2M_1=F_2M_2=\frac{a^2+c^2}{a}$. **258.** Воспользоваться соотношениями (4) и (5). Ответ. $\left(\frac{a^2}{2c},\ \frac{b}{2c}\sqrt{4c^2-a^2}\right)$, $\left(\frac{a^2}{2c},\ -\frac{b}{2c}\sqrt{4c^2-a^2}\right)$. **259.** См. предыдущую задачу: $(0,\ b)$; $(0,\ -b)$. **260.** Кривая симметрична относительно биссектрисы координатного угла $(\widehat{i,j})$, если уравнение ее не изменится от замены x на y, а y на x. Эллипс, отличный от окружности, не симметричен относительно этой биссектрисы. **263.** $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$, $A_1B_1=A_1B_2=A_2B_1=A_2B_2=\sqrt{a^2+b^2}$. **264.** а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **265.** $F_1(3,\ 0)$; $F_2(-3,\ 0)$; $\varepsilon=\frac{3}{5}$; директриса: $x=\frac{25}{3}$, $x=-\frac{25}{3}$. **266.** а) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{4x^2}{117}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **267.** $\frac{32}{\sqrt{7}}$. **268.** $a=\frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$, $b=\frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $c=\frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. **270.** а) $2\sqrt{3}$; б) 4; в) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **271.** $\frac{45}{4}$; $\frac{5}{4}$. **273.** Если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — данный эллипс, то $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{k^2b^2}=1$ — его образ. Отсюда $\varepsilon'=\frac{c'}{a'}=\sqrt{1-k^2\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-k^2+k^2\varepsilon^2}$; $\varepsilon'^2-\varepsilon^2=(1-k^2)(1-\varepsilon^2)>0$ и $\varepsilon'>\varepsilon$. **275.** $2x-y+12=0$, $2x-y-12=0$. **278.** а) Лучи прямой F_1F_2, исходящие из точек F_1 и F_2 и не содержащие соответственно точек F_2 и F_1; б) геометрическое место пустое. **279.** а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. **280.** $a=3$, $b=4$, $F_1(-5,\ 0)$, $F_2(5,\ 0)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $x=\pm\frac{9}{5}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$. **281.** а) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$; б) $x^2-y^2=16$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $x^2-y^2=1$. **282.** а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $x^2-y^2=1$; в) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$; г) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. **283.** Постоянная равна b^2 (см. пример 4, § 20). **284.** $\frac{a^2+c^2}{a}$. **285.** Нет. **286.** а) Нет; б) нет; в) существуют две точки, если $\varepsilon<3$; одна точка, если $\varepsilon=3$. При $\varepsilon>3$ таких точек нет. **287.** $\frac{32}{5}$. **288.** $a=\frac{m\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$, $b=\frac{m\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$, $c=\frac{m\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$. **289.** $y=\sqrt{\varepsilon^2-1}\,x$, $y=-\sqrt{\varepsilon^2-1}\,x$. **290.** $\varepsilon=$

$=\sqrt{2}$; асимптоты: $y=x$, $y=-x$. **291.** Существуют четыре точки: $\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}, \frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, \frac{9}{5}\right)$, $\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}, -\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, -\frac{9}{5}\right)$. **292.** а) $\left(\frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{10}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$; б) нет точек пересечений. **293.** а) $3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y-6=0$ и $3\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y-6=0$; б) одна касательная: $3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+6=0$; в) нет касательных. **294.** $x+y+6=0$ и $x+y-6=0$. **295.** b. **296.** Прямую, проходящую через фокус и перпендикулярную директрисе. **297.** а) $y^2=16x$; б) $y^2=4x$; в) $x^2=25y$; г) $x^2=-12y$. **298.** а) $(9, 9)$; б) $(1, -3)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$; в) прямая касается параболы в точке $\left(\frac{1}{9}, 1\right)$.

299. $4x-2y-3=0$. **300.** а) $5x-2\sqrt{10}y+20=0$; б) $x+\sqrt{\frac{2}{5}}y+1=0$ и $x-\sqrt{\frac{2}{5}}y+1=0$; в) $x-2y+10=0$. **301.** $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$. **302.** $x+3y+9=0$. **305.** $\frac{2p}{k^2}\sqrt{1+k^2}$. **306.** Записать уравнения хорд в виде $y=kx$, $y=-\frac{1}{k}x$, вычислить длины этих хорд, воспользовавшись предыдущей задачей, и из полученных уравнений исключить k. **307.** Если $\varepsilon<1$, то г. м. т. не существует; если $\varepsilon=1$ — прямая, проходящая через F и перпендикулярная l, если $\varepsilon>1$ — две прямые, пересекающиеся в точке F. **308.** $a=\frac{p}{|\varepsilon^2-1|}$, $b=\frac{p}{\sqrt{|\varepsilon^2-1|}}$, $F_1F_2=2c=\frac{2p\varepsilon}{|\varepsilon^2-1|}$. **309.** а) Гипербола; б) парабола. **310.** $\rho^2=\frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\varphi-1}$. **311.** $\rho=\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **312.** См. задачу 308. Ответ. а) $a=2\sqrt{2}$; $b=\sqrt{6}$, $2c=2\sqrt{2}$; б) $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{1}{\sqrt{7}}$, $2c=\frac{8}{7}$. **313.** Воспользоваться соотношением (7). Ответ. $\varphi_0=45°$; $2\varphi_0=90°$. Гипербола равнобочная, см. задачу 290. **314.** $\frac{2p}{\varepsilon|\varepsilon^2-1|}$. **316.** Эллипс с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA. Здесь O — центр, A — выбранная вершина, а a и b—полуоси данного эллипса. **317.** Гипербола с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA. Обозначения те же, что и в предыдущей задаче. **318.** Парабола: $y^2=\frac{2p\lambda}{1+\lambda}x$. При $\lambda=1$ получаем: $y^2=px$, см. § 24, задачу 4. **319.** Если за начало координат принять центр данной окружности, а за ось ординат прямую l, то г. м. т. будет иметь уравнение: $y^2\pm 2ry-r^2=0$; две параболы. **320.** Гипербола. **321.** Отрезок директрисы, одноименный с фокусом F, заключенный между асимптотами, а также действительная ось. **323.** Парабола, для которой точка F является фокусом, а прямая l — директрисой. **324.** Эллипс (одна ветвь гиперболы, парабола). При решении этой задачи удобнее воспользоваться полярной системой координат. **325.** Если эллипс дан уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то искомое г. м. т. имеет уравнение: $x^2+y^2=a^2+b^2$ (окружность). **326.** Директриса параболы. **327.** Гипербола. **329.** а) $x=2x'+y'+3$, $y=3x'+5y'-1$; б) $x=x'+2$, $y=y'\pm 5$; в) $x=4x'+y'$; $y=-x'+y'$; г) $x=x'+y'+2$, $y=2y'$;

д) $x = -x'$, $y = y' - 5$. **330.** Координаты точек, имеющих одни и те же координаты в двух системах при аффинном повороте определяются из соотношений: $(\alpha_1 - 1)x + \alpha_2 y = 0$, $\beta_1 x + (\beta_2 - 1)y = 0$. Эта система всегда имеет решение $0(0, 0)$. Другие точки существуют тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$. **331.** а) $x = x'$, $y = y' - 1$; б) $x = x' + 3$. $y = y' - 5$; в) $x = x' + \sqrt{2}$, $y = y'$; г) $x = x' + 3$, $y = y' - 7$. **332.** В примерах б), г) и е) сначала выразить x, y через x', y'. а) $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{-3, 1\}$, $O'(0, 1)$; б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(3, -4)$; в) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{-1, 1\}$, $O'(1, 0)$; г) $e_1'\{0, 1\}$, $e_2'\{1, -1\}$, $O'(5, -6)$; д) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(0, 1)$; е) $e_1'\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, $e_2'\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, $O'(0, 0)$. **333.** $x = y'$, $y = -x' - y' + 1$. **334.** $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$. **335.** а) $x = \frac{\sqrt{2}}{10}x' - \frac{7\sqrt{2}}{10}y' + 2$, $y = \frac{7\sqrt{2}}{10}x' + \frac{\sqrt{2}}{10}y' - 3$; б) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1$; в) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$. **336.** а) Системы определяют одну и ту же ориентацию; б) системы определяют различные ориентации; в) системы определяют одну и ту же ориентацию. **337.** $d = 5$. **338.** Гипербола: $2x'^2 - 2y'^2 = 1$. **339.** Если начало координат перенести в точку $(2, -1)$, то уравнение кривой примет вид: $x'^2 + y'^2 = 6$. **343.** Воспользоваться решением примера 4. **344.** а) Пара пересекающихся прямых; б) парабола; в) парабола; г) эллипс: $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4xy + 4y^2) - 1 = 0$. **345.** $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $4x'^2 - y'^2 = 1$. Формулы преобразования: $\sqrt{5}x' = 2x + y - \frac{11}{2}$, $\sqrt{5}y' = -x + 2y - 6$. В исходной системе гипербола имеет уравнение: $3x^2 + 4xy - 20x - 4y + 16 = 0$. **346.** Задача имеет два решения: а) $4x^2 + 4xy + y^2 - 10y - 15 = 0$, $p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (расстояние от фокуса до директрисы); б) $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x + 30y - 15 = 0$, $p = \frac{8}{\sqrt{5}}$. При решении этой задачи, пользуясь координатами точки M, определить расстояние от фокуса до директрисы. Кроме того, учесть, что каноническая ось Ox' проходит через точку F. **348.** а) $x + y = 0$ — вещественная прямая; б) $ix + y - 1 = 0$ — невещественная прямая; в) $x + 3y - i = 0$ — невещественная прямая. **350.** Единственная точка $(0, -1)$. **351.** Гипербола: $x'^2 - 2y'^2 = 1$; $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$. **352.** Пара параллельных прямых: $x'^2 - 1 = 0$; $10x = \sqrt{2}x' + 7\sqrt{2}y'$, $10y = -7\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'$. **353.** Парабола: $y'^2 = x'$; $2x' = \sqrt{3}x - y$, $2y' = x + \sqrt{3}y$. **354.** Мнимый эллипс: $x'^2 + \frac{y'^2}{4} = -1$; $2x = \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'$, $2y = \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'$. **355.** Эллипс: $x'^2 + 2y'^2 = 1$; $5x' = 4x - 3y$, $5y' = 3x + 4y$. **356.** Парабола: $y'^2 = 2x'$; $5x' = 4x - 3y$, $5y' = 3x + 4y$. **357.** Гипербола: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4} = 1$; $\sqrt{5}x' = x - 2y$, $\sqrt{5}y' = 2x + y$. **358.** Пара слившихся прямых: $x'^2 = 0$; $2x' = \sqrt{2}(x + y)$, $2y' = \sqrt{2}(x - y)$. **359.** Пара пересекающихся прямых: $x'^2 - y'^2 = 0$; $6x' = x + \sqrt{35}\,y$, $6y' = -\sqrt{35}\,x + y$. **360.** Гипербола: $x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 = -1$; $x = x' + \frac{1}{2}$; $y = y' - 3$. **361.** Две пересекающиеся прямые: $\sqrt{3}(x+1) + \sqrt{2}(y-1) = 0$, $\sqrt{3}(x+1) - \sqrt{2}(y-1) = 0$; $x = x' - 1$, $y = y' + 1$. **362.** Мнимый эллипс: $x'^2 + 2y'^2 = -1$; $x = x' + 2$, $y = y' + 3$. **363.** Пара параллельных прямых: $x'^2 - 25 = 0$; $x = x' + 3$, $y = y'$. **364.** Эллипс: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; $x = x' + 1$, $y = y'$. **365.** Гипербола: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 1$; $x = x' + 2$, $y = y' - 1$. **366.** Пара пересекающихся прямых: $x'^2 - 2y'^2 = 0$; $x = x' - \sqrt{3}$, $y = y' + 5$. **367.** Пара мнимых пересекающихся прямых: $2x'^2 + y'^2 = 0$; $x = x'$, $y = y' - 2$. **368.** Парабола: $\tilde{y}^2 = 2\tilde{x}$; $5x = -4\tilde{x} + 3\tilde{y} + 18$, $5y = -3\tilde{x} + 4\tilde{y} + 1$. **369.** Пара параллельных прямых: $\tilde{x}^2 - 2 = 0$; $5\tilde{x} = 3x - 4y - 5$, $5\tilde{y} = 4x + 3y$. **370.** Пара пересекающихся прямых: $\tilde{x}\,\tilde{y} = 0$; $2\tilde{x} = \sqrt{3}\,x - y - 2$, $2\tilde{y} = x + \sqrt{3}\,y$. **371.** Эллипс: $\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = 1$; $\sqrt{5}\,\tilde{x} = x - 2y + 1$, $\sqrt{5}\,\tilde{y} = 2x + y$. **372.** Парабола: $\tilde{y}^2 = 3\tilde{x}$; $\sqrt{10}\,\tilde{x} = x + 3y - 3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}\,\tilde{y} = -3x + y$. **373.** Пара мнимых пересекающихся прямых: $\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 = 0$; $\sqrt{13}\,\tilde{x} = 3x - 2y + 5$, $\sqrt{13}\,\tilde{y} = 2x + 3y - 4$. **374.** Пара слившихся прямых: $\tilde{x}^2 = 0$; $5\tilde{x} = -4x + 3y + 11$, $5\tilde{y} = -3x - 4y + 5$. **375.** (1, 1), (2, 0). **377.** а) $a_{11} = 0$; б) $a_{22} = 0$. **378.** $a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Кривая принадлежит гиперболическому типу. **380.** а) $k_1 = 4$, $k_2 = 1$; б) $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$; в) нет асимптотических направлений; г) $\alpha_1 = 0$, β_1 произвольно, $k_2 = \frac{1}{2}$; д) $k_1 = k_2 = 0$. **381.** а) $2x - 3y + 1 = 0$ и $x - 1 = 0$; б) $6x + 14y + 11 = 0$ и $2x + 2y - 1 = 0$; в) асимптот нет. **384.** а) $a_{11} = a_{13} = 0$; б) $a_{22} = a_{23} = 0$; в) $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$. Уравнение: $a_{12}xy + a_{33} = 0$. Гипербола или пара пересекающихся действительных прямых. **385.** $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. **386.** $2x - 7y + 13 = 0$ и $y - 3 = 0$. **388.** $x - y = 0$. **389.** $x - 1 = 0$. **390.** а) Парабола; б) пара параллельных или слившихся прямых; в) существует вектор $\{\alpha, \beta\}$ не асимптотического направления, координаты которого удовлетворяют условиям: $\alpha a_{11} + \beta a_{21} = 0$; $\alpha a_{13} + \beta a_{23} = 0$. **391.** $10x + 5y + 2 = 0$. **392.** а) (3, —2); б) нет центров; в) линия центров: $x - y - 3 = 0$. **394.** Воспользоваться теоремой [30. 4]. **395.** а) $a \neq 9$; б) $a = 9$, $b \neq 9$; в) $a = b = 9$. **396.** $x^2 + 2xy + y^2 + a_{33} = 0$. Потребовать, чтобы коэффициенты уравнений (5) были пропорциональны коэффициентам уравнения $x + y = 0$. **397.** $\boldsymbol{a}'_1\{-2, 1\}$, $\boldsymbol{a}'_2\{3, 1\}$, $\boldsymbol{a}'_4\{-1, 2\}$. **398.** $x - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$. **399.** Нет, так как все диаметры параллельны. **400.** $k = 0$. **401.** а) $\{1, 1\}$, $\{1, -1\}$; б) $\{1, -2\}$, $\{2, 1\}$; в) $\{1, 1+\sqrt{2}\}$, $\{1, 1-\sqrt{2}\}$. **402.** а) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$; б) $2x - 4y - 1 = 0$; в) $7(1+\sqrt{2})x - 7y - 18 - 13\sqrt{2} = 0$, $7(1-\sqrt{2})x - 7y - 18 + 13\sqrt{2} = 0$. **403.** Кривая представляет собой окружность, поэтому главными диаметрами будут все прямые, проходящие через центр (4, —3). **404.** а) Две взаимно перпендикулярные биссектрисы; б) прямая, проходящая между данными параллельными прямыми, на равном расстоянии от них. **406.** Для пары слившихся или параллельных прямых. **407.** Воспользоваться теоремой [31. 6]. **408.** $I_1 = 15$, $I_2 = 50$, $I_3 = -50$; эллипс: $5x^2 + 10y^2 = 1$. **409.** $I_1 = 5$, $I_2 = -36$, $I_3 = 1296$; гипербола: $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. **410.** $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$; парабола: $y^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}x$. **411.** $I_1 = 10$, $I_2 = 0$, $I_3 = -250$; парабола: $x^2 + y = 0$. **412.** $I_1 = 10$, $I_2 = 9$, $I_3 = -81$. Эллипс: $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$. **413.** $I_1 = 5$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $k = -75$; пара параллельных прямых: $5x^2 - 15 = 0$. **414.** $I_1 = 3$, $I_2 = 2$, $I_3 = 0$; пара комплексных пересекающихся прямых: $2x^2 + y^2 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Учебники и учебные пособия

1. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1962.

2. Выгодский М. Я., Аналитическая геометрия, Физматгиз, 1963.

3. Делоне Б. Н. и Райков Д. А., Аналитическая геометрия, т. 1, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

4. Дзиобек О., Курс аналитической геометрии, ч. 1, Одесса, 1911.

5. Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, Физматгиз, 1960.

6. Лопшиц А. М., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1948.

7. Моденов П. С., Аналитическая геометрия, Издательство МГУ, 1955.

8, Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, Гостехиздат, 1947.

9. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Векторы в курсе геометрии средней школы, Учпедгиз, 1962.

10. Выгодский М. Я., Справочник по высшей математике, изд. 6, Физматгиз, 1962.

11. Гольдфайн И. А., Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, 1948.

12. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, 1939.

13. Минорский В. П. и Улановский В. П., Векторная алгебра, Гостехиздат, 1951.

II. Задачники

14. Адамов А. А., Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению, ОГИЗ, 1924.

15. Атанасян Л. С., Васильева М. В., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Козьмина Т. Л., Редозубова О. С., Сборник задач по элементарной геометрии, изд. II, изд. «Просвещение», 1964.

16. Бахвалов С. В., Моденов П. С. и Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, Гостехиздат, 1957

17. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, Гостехиздат, 1957.

18. Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии, Физматгиз, 1960.

19. Скопец З. А., Жаров В. А., Задачи и теоремы по элементарной геометрии, Учпедгиз, 1962.
20. Цубербиллер О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии, Физматгиз, 1961.

III. Методические пособия для студентов-заочников педагогических институтов

21. Атанасян Л. С., Задачник-практикум по аналитической геометрии, Учпедгиз, 1963.
22. Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., Общая теория линий второго порядка, Учпедгиз, 1956.
23. Каченовский М. И., Методические указания и контрольные работы по аналитической геометрии, Учпедгиз, 1956.
24. Майоров В. М. и Скопец З. А., Задачник-практикум по векторной алгебре, Учпедгиз, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Атанасян Левон Сергеевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *А. З. Рывкин* и *Н. И. Никитина.* Художник *Б. Д. Константинов.* Переплет художника *М. И. Володина.* Художественный редактор *В. С. Эрденко.* Технический редактор *Т. А. Семейкина.* Корректор *Т. А. Кузнецова*

Сдано в набор 8/IV 1966 г. Подписано к печати 28/X 1966 г. 60×90$^1/_{16}$. Печ. л. 18.75. Уч.-изд. л. 15,83. Тираж 25 тыс. экз. А18303.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 494.

Цена без переплета 44 к., переплет 10 к.