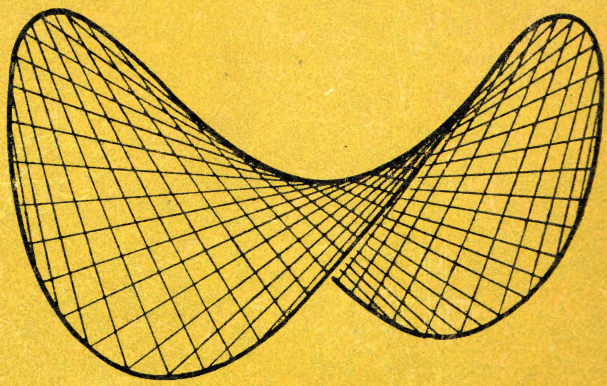
Б 232560
516
А 92

Л. С. АТАНАСЯН



Аналитическая геометрия

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Л. С. АТАНАСЯН

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Часть вторая

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Издательство «Просвещение»
Москва 1970

Атанасян Л. С.

А-92 Аналитическая геометрия. Ч. 2. Аналитическая геометрия в пространстве. М., «Просвещение», 1969.

000 с. (Глав. упр. высших и средн. пед. учеб. заведений М-ва просвещения РСФСР. Моск. гос. заоч. пед. ин-т.)

Книга представляет собой вторую часть курса аналитической геометрии (аналитическая геометрия в пространстве) и содержит как теоретический материал, так и набор упражнений, снабженных ответами.

2-2-3 **517. 3**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вторая (заключительная) часть курса аналитической геометрии посвящена изложению аналитической геометрии в пространстве. Она состоит из шести глав и приложения. В первой главе рассмотрены координаты векторов и точек в пространстве. Во второй главе введены скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и изучены их основные свойства. В третьей и четвертой главах изложена теория плоскости и прямой в трехмерном пространстве. Последние две главы посвящены изучению поверхностей в пространстве. В частности, там дана классификация поверхностей второго порядка и рассмотрены основные типы этих поверхностей, заданных своими каноническими уравнениями. В приложении рассмотрены некоторые вопросы линейной алгебры, которые применяются как в первой, так и во второй частях настоящего учебника. Такими вопросами являются определители второго и третьего порядков, исследование и решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трех линейных уравнений с тремя неизвестными, а также понятие матрицы и ее ранга для соответствующих случаев.

Так же, как и в первой части книги, автор руководствовался следующими принципами.

а) Учебник содержит минимальный теоретический материал, необходимый для усвоения всей программы. В частности, исходя из этих соображений по существу пришлось отказаться от изложения многих вопросов общей теории поверхностей второго порядка. Рассмотрена только классификация и изучены основные типы поверхностей второго порядка по каноническим уравнениям. Опущено изложение теории инвариантов и семиинвариантов многочленов второй степени от трех переменных.

Вместе с тем достаточно подробно изучены основы векторной алгебры, теория прямых и плоскостей в пространстве. В частности, подробно рассмотрена теория пучков и связок плоскостей.

б) Все теоретические вопросы, изложенные в учебнике, проиллюстрированы многочисленными примерами и задачами. Многие задачи приведены с подробными решениями. Кроме того, в конце каждого параграфа дано большое число примеров и задач для самостоятельного решения. В конце книги приведены ответы и краткие указания к задачам. Таким образом, при изучении аналитической геометрии по данному учебнику студенту по существу не потребуется привлечение какого-либо задачника.

в) В книге обращено большое внимание приложению аналитической геометрии к решению задач элементарной геометрии. В ряде случаев этому вопросу посвящены отдельные параграфы. Нам кажется, что этот принцип является существенным для учебника, предназначенного студентам педагогических институтов.

При написании второй части учебника использована литература по аналитической геометрии, список которой помещен на стр. 365—366. Широко использован задачник-практикум автора по аналитической геометрии [16]. Многие из помещенных там задач вошли в настоящий учебник.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Г. Б. Гуревичу, который внимательно прочитал рукопись и сделал ряд ценных замечаний, способствующих улучшению книги.

Автор выражает также благодарность редактору книги А. З. Рывкину, положившему много труда при подготовке рукописи к изданию.

ГЛАВА I

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

В первой части настоящей книги были определены векторы и основные операции над ними — сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число. Эти операции вводились нами для векторов трехмерного пространства. Однако, как только мы перешли к аналитическому заданию векторов, т. е. к заданию векторов с помощью координат, мы ограничились рассмотрением векторов, лежащих в одной плоскости, или, точнее, векторов, параллельных одной плоскости.

В настоящем параграфе распространим понятие координат вектора на случай трехмерного пространства. Предварительно введем ряд простых понятий.

1. Система компланарных векторов. *Будем говорить, что вектор* $\boldsymbol{p}$ *параллелен* (*или коллинеарен*) *плоскости* π, *если в этой плоскости найдутся две такие точки* P *и* Q, *что* $\overline{PQ}=\boldsymbol{p}$ (рис. 1,*а*). *Система векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *называется компланарной, если существует такая плоскость, которой параллельны все векторы системы. В противном случае система векторов называется некомпланарной.*

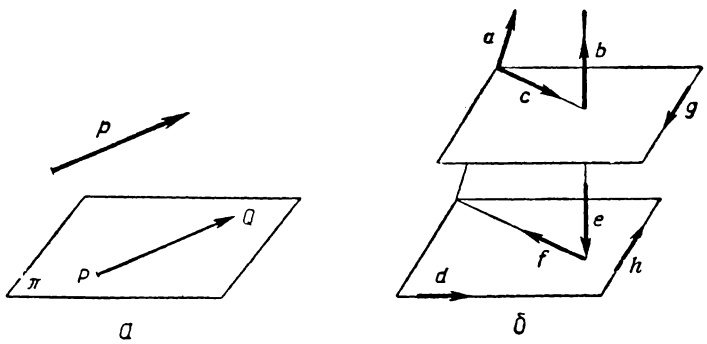


Рис. 1

Например, на рисунке 1,*б* системы векторов $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}$ компланарны, а система векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{h}$ — не компланарна. Очевидно, система, состоящая из двух векторов, всегда компланарна.

Докажем предложение, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема [1.1][1]. *Для того чтобы система, состоящая из трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, *была компланарной, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа* α, β *и* γ, *не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию*:

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0.$$

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возможны следующие случаи: а) $\boldsymbol{a} = 0$; б) $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны; в) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Покажем, что в каждом из этих случаев существуют не равные одновременно нулю числа α, β и γ, удовлетворяющие условиям теоремы.

В самом деле, в случае а) наше утверждение очевидно, так как

$$1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

В случае б) имеем: $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$, поэтому

$$\alpha\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

В случае в) разложим вектор $\boldsymbol{c}$ по неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b},$$

полученное соотношение запишем так:

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + (-1)\boldsymbol{c} = 0.$$

Теперь предположим, что

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

и какой-либо из коэффициентов α, β и γ не равен нулю. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Разделив предыдущее соотношение на α, получим:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c}.$$

Перенесем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в точку O и через O проведем плоскость π, содержащую векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Из предыдущего соотношения следует, что вектор $\boldsymbol{a}$ также лежит в плоскости π. В самом деле, так как $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ лежат в плоскости π, то $-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b}$ и $-\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c}$ также лежат в плос-

---

[1] Так же, как и в первой части настоящей книги, в записи [1.1] первое число означает номер параграфа, а второе — номер теоремы. В дальнейшем теоремы будут нумероваться аналогичным образом.

кости π. Отсюда следует, что их сумма, т. е. вектор $\boldsymbol{a}$, лежит в π. Таким образом, система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарна.

Из доказанного предложения следует теорема.

Теорема [1.2]. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *не компланарны, то из соотношения*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

следует, что

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. Базис пространства. *Базисом или базой пространства называется система трех некомпланарных векторов* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, *взятых в определенном порядке.* Вектор $\boldsymbol{e}_1$ называется при этом первым вектором базиса, вектор $\boldsymbol{e}_2$ — вторым и вектор $\boldsymbol{e}_3$ — третьим.

На векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ накладывается, таким образом, только одно ограничение — требуется, чтобы они были не компланарны, в остальном векторы базиса произвольны. Важно отметить, что порядок следования векторов базиса существен. Так, например, системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ образуют различные базисы.

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *называется прямоугольным декартовым, если векторы базиса взаимно перпендикулярны и* $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$. В дальнейшем изложении векторы прямоугольного декартового базиса будем обозначать буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Произвольный базис, в отличие от прямоугольного декартова, называется общим декартовым или аффинным.

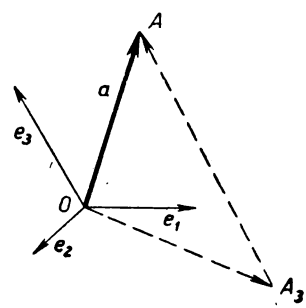


Рис. 2

3. Координаты вектора в пространстве. Пусть в пространстве дан аффинный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{a}$. Все четыре вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{a}$ отложим от некоторой точки O пространства (рис. 2). Проведем через конец A вектора $\boldsymbol{a}$ прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{e}_3$, и обозначим через A_3 точку пересечения проведенной прямой с плоскостью Oe_1e_2.

Очевидно, $\overline{OA} = \overline{OA_3} + \overline{A_3A}$. Вектор $\overline{OA_3}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, поэтому $\overline{OA_3} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$ (см. I, [4.1][1]).

---

[1] Все ссылки на параграфы или теоремы первой части настоящей книги обозначаются римской цифрой I с указанием номера параграфа или теоремы. Здесь I, [4.1] означает, что мы ссылаемся на теорему [4.1] первой части настоящей книги.

С другой стороны, вектор $\overline{A_3A}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}_3$, поэтому $\overline{A_3A} = \gamma \boldsymbol{e}_3$. Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получаем:

$$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3. \qquad (1)$$

Соотношение (1) называется разложением вектора $\boldsymbol{a}$ по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Существенно подчеркнуть, что разложение (1) возможно для любого вектора $\boldsymbol{a}$. Если, например, вектор $\boldsymbol{a}$ компланарен с $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то в этом случае точки A и A_3 совпадают, поэтому $\gamma = 0$, и соотношение (1) принимает вид: $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2$, т. е. мы приходим к случаю, рассмотренному в I, § 4. Если вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}_3$, то A_3 совпадает с O и мы получаем $\boldsymbol{a} = \gamma \boldsymbol{e}_3$. Таким образом, в этом случае $\alpha = \beta = 0$.

Покажем, что если задан базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ коэффициенты α, β, γ в соотношении (1) определяются однозначно. В самом деле, пусть $\boldsymbol{a}$ имеет разложение (1) и, кроме того, разложение

$$\boldsymbol{a} = \alpha' \boldsymbol{e}_1 + \beta' \boldsymbol{e}_2 + \gamma' \boldsymbol{e}_3. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3 = \alpha' \boldsymbol{e}_1 + \beta' \boldsymbol{e}_2 + \gamma' \boldsymbol{e}_3$$

или

$$(\alpha - \alpha') \boldsymbol{e}_1 + (\beta - \beta') \boldsymbol{e}_2 + (\gamma - \gamma') \boldsymbol{e}_3 = 0;$$

так как векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ не компланарны, то из теоремы [1.2] следует, что $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = 0$,
т. е.

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'.$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [1.3]. *Если дан базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства может быть разложен по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, причем коэффициенты α, β и γ в разложении* (1) *определяются однозначно и не зависят от способа разложения.*

Только что доказанная теорема показывает, что если в пространстве выбран базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то для любого вектора пространства однозначно определяются три числа α, β и γ — коэффициенты разложения вектора по базисным векторам. Эти числа называются координатами вектора в данном базисе.

Итак, *координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты разложения вектора по базисным векторам.* При этом α называется первой координатой, β — второй, а γ — третьей. Для координат вектора приняты следующие обозначения: $\boldsymbol{a}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}_{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}$.

Очевидно, если в пространстве выбран базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то любые три числа, взятые в определенном порядке, в свою очередь определяют вектор. В самом деле, если α, β и γ — данные числа, то вектор

$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$ имеет эти числа своими координатами. Числа $\{0, 0, 0\}$ являются координатами вектора $\mathbf{0}$. Важно подчеркнуть, что одни и те же числа в разных базисах, вообще говоря, определяют разные векторы (см. пример 2).

Если выбранный базис прямоугольный декартовый, то координаты вектора называются прямоугольными декартовыми, в общем случае они называются общими декартовыми или аффинными.

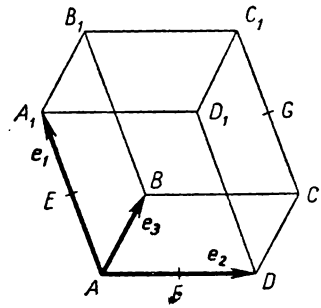


Рис. 3

Векторы, коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_1$, имеют координаты $\{\alpha, 0, 0\}$, коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_2$—координаты $\{0, \beta, 0\}$ и коллинеарные $\boldsymbol{e}_3$ — координаты $\{0, 0, \gamma\}$.

4. Определение координат данных векторов. Пусть в пространстве заданы векторы и некоторый базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Требуется определить координаты данных векторов.

Для решения задачи, очевидно, необходимо определить коэффициенты разложения данных векторов по векторам базиса. При этом согласно теореме [1.3] эти коэффициенты не зависят от способа разложения, поэтому для решения поставленной задачи достаточно *каким-либо* способом данные векторы разложить по $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E, F, G — соответственно середины сторон AA_1, AD, CC_1. Принимая векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{FG}$, $\overline{GD}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{A_1G}$.

Решение. Координатами вектора в системе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ называются коэффициенты разложения его по координатным векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. При этом известно, что коэффициенты разложения не зависят от способа разложения, поэтому для решения задачи достаточно каким-либо способом данные векторы разложить по $\boldsymbol{e}_1 = \overline{AA_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{AD}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{AB}$ (рис. 3); $\overline{AC} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, отсюда следует, что $\overline{AC}\{0, 1, 1\}$; $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$, отсюда следует, что $\overline{AE}\left\{\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$; $\overline{EC_1} = \overline{EA_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{D_1C_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, отсюда следует, что $\overline{EC_1}\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$.

Аналогично можно получить координаты остальных векторов:

$$\overline{B_1C_1}\{0,\ 1,\ 0\},\ \overline{FG}\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right\},\ \overline{GD}\left\{-\frac{1}{2},\ 0,\ -1\right\},$$

$$\overline{CB_1}\{1,\ -1,\ 0\},\ \overline{A_1G}\left\{-\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right\}.$$

Координаты вектора существенно зависят от выбора системы координат. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\boldsymbol{e}_1 = \overline{AC_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{B_1C_1}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{CD}$.

Решение. $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{B_1C_1} + (-1)\,\overline{CD} = \boldsymbol{e}_2 + (-1)\,\boldsymbol{e}_3$,

отсюда следует, что $\overline{AC}\{0,\ 1,\ -1\}$;

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AC_1} + \overline{C_1A_1}) = \frac{1}{2}\overline{AC_1} - \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3),$$

отсюда следует, что $\overline{AE}\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$;

$$\overline{EC_1} = \overline{EA} + \overline{AC_1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3;$$

отсюда следует, что $\overline{EC_1}\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Аналогично получаем координаты остальных векторов:

$$\overline{B_1C_1}\{0,\ 1,\ 0\},\ \overline{FG}\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right\},\ \overline{CD}\left\{0,\ 0,\ 1\right\},$$

$$\overline{CB_1}\left\{1,\ -2,\ 1\right\},\ \overline{A_1G}\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right\}.$$

5. Теорема о координатах линейной комбинации векторов. Если даны векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, то, как известно, линейной комбинацией этих векторов называется всякий вектор вида: $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа (см. I, § 4, п. 5).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Дано несколько векторов своими координатами в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a}_1\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\},\ \boldsymbol{a}_2\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}.$$

Дана также некоторая линейная комбинация этих векторов: $\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$ (т. е. известны коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$). Определить координаты вектора $\boldsymbol{p}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Решение. По определению координат векторов имеем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2 + \gamma_1\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{a}_2 &= \alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_2\boldsymbol{e}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{a}_k &= \alpha_k\boldsymbol{e}_1 + \beta_k\boldsymbol{e}_2 + \gamma_k\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражение для вектора $\boldsymbol{p}$, будем иметь:

$$\boldsymbol{p} = \lambda_1(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2 + \gamma_1\boldsymbol{e}_3) + \lambda_2(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_2\boldsymbol{e}_3) + \cdots + \lambda_k(\alpha_k\boldsymbol{e}_1 + \beta_k\boldsymbol{e}_2 + \gamma_k\boldsymbol{e}_3) = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_k\beta_k)\boldsymbol{e}_2 + (\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_k\gamma_k)\boldsymbol{e}_3.$$

Отсюда согласно теореме [1.3] получаем координаты x, y, z вектора $\boldsymbol{p}$:

$$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_k\alpha_k,$$
$$y = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_k\beta_k,$$
$$z = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_k\gamma_k.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему о координатах линейной комбинации векторов.

Теорема [1.4]. *Каждая координата линейной комбинации нескольких векторов равна той же линейной комбинации соответствующих координат составляющих векторов*[1].

Пример 3. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{1,-2,1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 1, 4\}$, $\boldsymbol{a}_3\{0,-1, 0\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$.

Решение. Согласно предыдущей теореме каждая координата вектора $\boldsymbol{p}\{x, y, z\}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат составляющих векторов, поэтому

$$x = 1 - 2 + 4 \cdot 0 = -1, \quad y = -2 - 1 + 4(-1) = -7,$$
$$z = 1 - 4 + 4 \cdot 0 = -3.$$

Итак, $\boldsymbol{p}\{-1, -7, -3\}$.

Пример 4. В пространстве даны три некомпланарных вектора: $\boldsymbol{u}\{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{v}\{1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{w}\{0, -1, 3\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}\{2, -5, 11\}$ по данным векторам $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}$. Определим коэффициенты α, β и γ. Согласно теореме [1.4] каждая координата вектора $\boldsymbol{a}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, поэтому

$$2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0,$$
$$-5 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1),$$
$$11 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (3).$$

Из последних двух соотношений определяем β и γ:

$$\beta = -1, \gamma = 4.$$

Из первого соотношения получаем: $\alpha = 3$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}.$$

---

[1] Отметим, что соответствующая теорема на плоскости формулируется точно так же (см. I, теорема [4.2]).

6. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число. Векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{a}$ являются, очевидно, линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому к ним применима теорема [1.4]. Тем самым доказана теорема:

Т е о р е м а [1.5]. а) *Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.*

б) *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого векторов.*

в) *При умножении вектора на число каждая его координата умножается на то же число.*

П р и м е р 5. Пусть в данной системе известны векторы:

$$\boldsymbol{a}\{1, -2, 1\}, \ \boldsymbol{b}\{0, 5, \sqrt{2}\}.$$

Определить координаты векторов $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$, $\sqrt{2}\,\boldsymbol{b}$.

Р е ш е н и е. Из сформулированной теоремы непосредственно следует, что $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\{1, 3, 1 + \sqrt{2}\}$, $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\{-1, 7, \sqrt{2} - 1\}$,

$$3\boldsymbol{a}\{3, -6, 3\}, \ \sqrt{2}\,\boldsymbol{b}\{0, 5\sqrt{2}, 2\}.$$

7. Линейно зависимая система векторов. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *называется линейно зависимой, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию*:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = 0. \tag{3}$$

В противном случае система называется л и н е й н о н е з а в и с и м о й.

Очевидно, система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ будет линейно независимой тогда и только тогда, когда равенство (3) имеет место только при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ..., $\lambda_k = 0$. Из определения следует, что два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Из теоремы [1.1] следует также, что три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Легко показать, что *система, состоящая более чем из трех векторов, всегда линейно зависима.*

В самом деле, пусть имеем систему $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, где $k > 3$. Возьмем первые три вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Возможны два случая:

а) Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ компланарны. Согласно теореме [1.1] существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию: $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = 0$.

Но в этом случае, очевидно, справедливо равенство:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_4 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k = 0,$$

которое означает, что вся система векторов линейно зависима.

б) Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны. Тогда, принимая векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ за базисные, разложим вектор $\boldsymbol{a}_4$ согласно теореме [1.3] по векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ $\boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{a}_4 = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3.$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + (-1)\,\boldsymbol{a}_4 = 0$$

или в виде

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + (-1)\,\boldsymbol{a}_4 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_5 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k = 0,$$

приходим к выводу, что система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ (где $k > 3$) линейно зависима.

Из теоремы [1.4] непосредственно следует

Т е о р е м а [1.6]. *Если система векторов*

$$\boldsymbol{a}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\},\ \boldsymbol{a}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}$$

линейно зависима и имеет место соотношение (3), *то та же линейная зависимость имеет место между соответствующими координатами данных векторов, т. е.*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k &= 0,\\ \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_k\beta_k &= 0,\\ \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_k\gamma_k &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В самом деле, соотношение (3) говорит о том, что вектор $\mathbf{0}$ есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$. Из теоремы [1.4] следует, что каждая координата вектора $\mathbf{0}\{0, 0, 0\}$ равна той же линейной комбинации составляющих векторов, т. е. имеют место соотношения (4).

П р и м е р 6. Найти линейную зависимость между векторами

$$\boldsymbol{a}\{1, 3, 0\},\ \boldsymbol{b}\{5, 10, 0\},\ \boldsymbol{c}\{4, -2, 6\},\ \boldsymbol{d}\left\{\frac{21}{2}, 17, 3\right\}.$$

Р е ш е н и е. Система, состоящая из четырех векторов, всегда линейно зависима, поэтому существуют коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условию:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{c} + \lambda_4 \boldsymbol{d} = 0.$$

Известно, что та же линейная зависимость существует между координатами этих векторов, поэтому:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{21}{2}\lambda_4 &= 0,\\ 3\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 + 17\lambda_4 &= 0,\\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Получили систему однородных линейных уравнений относительно λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4. Очевидно, $\lambda_4 \neq 0$. В самом деле, если $\lambda_4 = 0$, то из третьего соотношения следует, что $\lambda_3 = 0$. Тогда из первого и

второго соотношений получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это противоречит условию линейной зависимости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$. Таким образом, λ_4 можно положить равным любому числу, отличному от нуля. Пусть $\lambda_4 = 2$; тогда $\lambda_3 = -1$. Подставив эти значения в первое и второе соотношения, получаем:

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3.$$

8. Условие коллинеарности двух векторов. Выведем необходимые и достаточные условия коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами в пространстве. Пусть в некоторой системе координат даны два вектора $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, причем $\boldsymbol{b} \neq 0$. Для того чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$ [1]. Отсюда на основании теоремы [1.4] заключаем, что

$$\alpha_1 = \lambda\alpha_2,\ \beta_1 = \lambda\beta_2,\ \gamma_1 = \lambda\gamma_2. \tag{5}$$

Обратно, пусть существует число λ, удовлетворяющее условиям (5). Умножив обе части первого соотношения на $\boldsymbol{e}_1$, второго соотношения на $\boldsymbol{e}_2$ и третьего — на $\boldsymbol{e}_3$, получаем:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 = \lambda\alpha_2\boldsymbol{e}_1,\ \beta_1\boldsymbol{e}_2 = \lambda\beta_2\boldsymbol{e}_2,\ \gamma_1\boldsymbol{e}_3 = \lambda\gamma_2\boldsymbol{e}_3.$$

Складывая почленно эти равенства, будем иметь:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2 + \gamma_1\boldsymbol{e}_3 = \lambda(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_2\boldsymbol{e}_3)$$

или $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$. Последнее равенство означает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Итак, мы получили следующее предложение.

Теорема [1.7]. *Для того чтобы векторы* $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ *и* $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \neq 0$, *заданные в аффинном базисе своими координатами, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора* $\boldsymbol{a}$ *были пропорциональны координатам вектора* $\boldsymbol{b}$.

Условие коллинеарности двух векторов можно сформулировать несколько иначе.

Теорема [1.8]. *Для того чтобы векторы* $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ *и* $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы одновременно были равны нулю три определителя второго порядка:*

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если хотя бы один из них нулевой, то наше утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что $\boldsymbol{b} \neq 0$. В этом случае согласно предыдущей теореме $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$, $\gamma_1 = \lambda\gamma_2$, поэтому строки определителей (6) будут пропорциональны, а, значит, каждый из них обратится в нуль.

---

[1] См. I, лемму [3.1].

Обратно, пусть имеют место соотношения (6). Если $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, то $\boldsymbol{a} = 0$ и наше утверждение справедливо. Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда из соотношений (6) получаем: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2 = 0$, откуда $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1$, $\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\gamma_1$.

Если ввести обозначение $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda$, то $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\beta_1$, $\gamma_2 = \lambda\gamma_1$. Согласно теореме [1.7] векторы коллинеарны.

Если читатель знаком с понятием ранга матрицы[1], то ему нетрудно усмотреть, что доказанной теореме можно дать несколько иную формулировку.

Теорема [1.9]. *Для того чтобы векторы* $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

образованной из координат векторов, был меньше двух.

Пример 7. Выяснить, какие из следующих пар векторов коллинеарны:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{b}_1\{0, 4, -1\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{-\sqrt{3}, 1, -3\}$, $\boldsymbol{b}_2\{3, -\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, 1, 3\}$, $\boldsymbol{b}_3\{0, -2, -6\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_4\{2, 0, 0\}$.

Решение. Векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Можно в этом убедиться также, используя теорему [1.8]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Первое из условий (6) не выполнено, поэтому векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ не коллинеарны. Важно подчеркнуть, что для коллинеарности векторов необходимо равенство нулю в с е х т р е х определителей второго порядка (6).

Векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_2$ коллинеарны, так как $\boldsymbol{b}_2 = -\sqrt{3} \cdot \boldsymbol{a}_2$. Аналогично убеждаемся в том, что векторы $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_3$ коллинеарны, а $\boldsymbol{a}_4$ и $\boldsymbol{b}_4$ не коллинеарны.

Вопросы и упражнения

1. На рисунке 4 изображены три параллельные плоскости и ряд векторов. Укажите среди них коллинеарные и компланарные векторы.

2. В пространстве даны три вектора, среди которых два коллинеарны. Можно ли утверждать, что все три вектора компланарны?

---

[1] См. на стр. 347 Приложение, § 4.

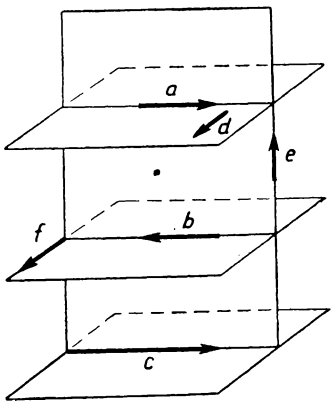


Рис. 4

3. При определении координат векторов было подчеркнуто, что векторы базиса не компланарны. Где было использовано это ограничение?

4. В базисе e_1, e_2, e_3 вектор a имеет координаты $\{x, y, z\}$. Каковы координаты того же вектора в базисах:

а) e_2, e_1, e_3; б) e_3, e_2, e_1;

в) $-e_1, e_3, e_2$?

5. Чему равны координаты векторов, направленных по диагоналям параллелограмма, построенного на векторах e_1 и e_3?

6. Пусть $OABC$ — некоторый тетраэдр в пространстве. Определить векторы, имеющие одни и те же координаты $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$ в базисах: а) $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$; б) $\overline{OC}, \overline{OB}, \overline{OA}$; в) $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{AB}$.

7. В пространстве даны два вектора a и b. Всегда ли можно выбрать третий вектор c так, чтобы a, b и c были: а) компланарны; б) не компланарны?

8. В тетраэдре $OABC$ векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$ приняты за координатные. Определить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{OK}$, $\overline{OL}$. Здесь K и L — середины соответственно отрезков AB и OA.

9. В тетраэдре $ABCS$ точки A', B', C' — соответственно середины ребер SA, SB и SC; O и O' — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$. Принимая векторы $\overline{O'C'}$, $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'S}$ за координатные, определить координаты векторов $\overline{CS}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA'}$, $\overline{O'A}$, $\overline{AS}$, $\overline{AC'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{AE'}$, где E' — середина отрезка $A'C'$.

10. Решить предыдущую задачу, полагая

$$e_1 = \overline{O'A'},\quad e_2 = \overline{O'E'},\quad e_3 = \overline{O'O}.$$

11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5) — векторы, совпадающие с его ребрами: $a = \overline{AA_1}$, $b = \overline{AD}$, $c = \overline{AB}$, приняты за координатные. Определить координаты векторов $\overline{AD_1}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ в базисе a, b, c. Здесь E и F — соответственно середины сторон CC_1 и BB_1.

12. В условиях предыдущей задачи найти векторы, имеющие в базисе a, b, c координаты:

а) $\left\{-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right\}$;

б) $\{1, -1, -1\}$; в) $\{0, -1, -1\}$;

г) $\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right\}$.

13. Пусть в некотором базисе e_1, e_2, e_3 даны векторы $a\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $b\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Каково необходимое и достаточное условие компланарности векторов a, b и e_1?

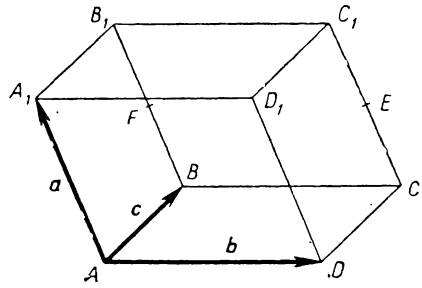


Рис. 5

14. Даны векторы: $a_1\{1, -6, 1\}$, $a_2\{0, 1, 3\}$, $a_3\{2, 0, 0\}$, $a_4\{0, -3, 0\}$, $a_5\{5, 0, -4\}$, $a_6\{2, 2, 0\}$, $a_7\{4, 4, -4\}$, $a_8\{0, 0, \sqrt{2}\}$, $a_9\{-2, 0, 0\}$.

Укажите среди них векторы: а) коллинеарные вектору $-e_1$; б) коллинеарные вектору e_2; в) коллинеарные вектору e_3; г) коллинеарные вектору $e_1 + e_2$; д) коллинеарные вектору $e_1 + e_2 - e_3$; е) компланарные с векторами e_1 и e_2; ж) компланарные с векторами e_1, e_3; з) компланарные с векторами e_2 и e_3.

15. Даны векторы $a\{2, 3, -1\}$, $b\{0, 1, 4\}$, $c\{1, 0, -3\}$. Определить координаты следующих векторов:

а) $p_1 = 2a - b - 2c$; г) $p_4 = a - b - c$;

б) $p_2 = a - b - 3c$; д) $p_5 = \frac{a + b}{2}$;

в) $p_3 = a + 2b + 3c$; е) $p_6 = \frac{a - 2b + c}{3}$.

16. При обозначениях задачи 11 (рис. 5) найти линейную зависимость между векторами:

а) $\overline{B_1C_1}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{CA}$;

б) $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{FD}$, $\overline{AB}$;

в) $\overline{FE}$, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$, $\overline{FD}$.

17. Даны пары векторов:

а) $a_1\{3, -1, 0\}$ и $a_2\{0, 1, -3\}$;

б) $b_1\{4, 0, -1\}$ и $b_2\{-8, 0, 2\}$;

в) $c_1\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ и $c_2\left\{\frac{1}{5}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{6}\right\}$;

г) $d_1\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ и $d_2\left\{1, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$.

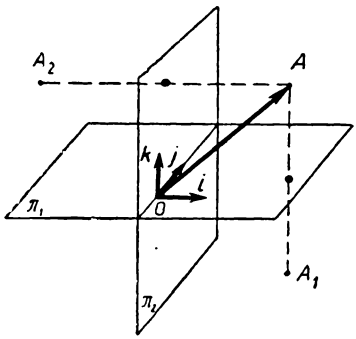


Рис. 6

Указать среди них пары коллинеарных векторов.

18. На рисунке 6 изображен прямоугольный декартовый базис. Обозначим через π_1 и π_2 плоскости Oij и Ojk. Точка A_1 симметрична A относительно плоскости π_1, а A_2 симметрична A относительно π_2. Вычислить координаты векторов $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{AA_2}$, если $\overline{OA}$ {2, 3, 3}.

19. Показать, что, вообще говоря, в соотношениях (6) из любых двух следует третье. В каком случае это утверждение не справедливо?

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ И АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ В КООРДИНАТАХ

1. Прямоугольные декартовы координаты точек в пространстве. Координатная система в пространстве вводится по аналогии с системой координат на плоскости. Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые a, b и c, пересекающиеся в точке O, и на каждой из прямых — единичный вектор, исходящий из точки O. Пусть $\boldsymbol{i}$ — вектор на прямой a, $\boldsymbol{j}$ — на прямой b и $\boldsymbol{k}$ — на прямой c.

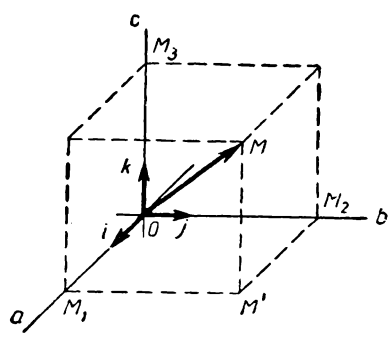


Рис. 7

Построенный геометрический образ, состоящий из трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O, и векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ назовем прямоугольной декартовой системой координат в пространстве (рис. 7). Точка O называется началом координат, а направленные прямые a, b, c — осями координат[1]. Направления осей определяются соответственно единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, которые называются координатными. Ось a называется первой координатной осью или осью абсцисс,

[1] Осью в геометрии называется всякая прямая, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений в качестве положительного.

b — второй координатной осью или осью ординат, а c — третьей координатной осью или осью аппликат. Оси координат обычно обозначаются так: Ox, Oy, Oz, а система координат: $Oijk$ или $Oxyz$. Плоскости Oxy, Oxz и Oyz называются координатными плоскостями.

Легко видеть, что задание системы координат в пространстве позволяет определять положение любой точки в пространстве при помощи трех чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям[1], и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей с осями координат (рис. 7). По существу M_1, M_2 и M_3 — проекции точки M на координатные оси. Числа

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{i}, \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{j}, \quad z = \frac{\overline{OM_3}}{k}$$

называются координатами точки M в системе $Oijk$, причем x — первая координата или абсцисса точки, y — вторая координата или ордината, а z — третья координата или аппликата этой точки. Если точка M не лежит на координатных плоскостях, то M_1, M_2 и M_3 не совпадают с точкой M, поэтому координаты точки M отличны от нуля. Если точка лежит на одной из координатных плоскостей, то соответствующая координата равна нулю. Например, для всех точек плоскости Oxy третьи координаты равны нулю. Если точка M имеет координаты x, y, z, то это обычно записывается так: $M(x, y, z)$.

Можно дать несколько иное определение координат точки, эквивалентное предыдущему. Пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее прямую, параллельную оси Oz; пусть M' — точка пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Далее проведем через точку M' прямую, параллельную оси Oy. Точка пересечения этой прямой с осью Ox совпадает с точкой M_1 (рис. 7). Рассмотрим ломаную $OM_1M'M$ и назовем ее координатной ломаной точки M. Очевидно,

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{i}, \quad y = \frac{\overline{M_1M'}}{j}, \quad z = \frac{\overline{M'M}}{k}.$$

Таким образом, длины звеньев координатной ломаной данной точки M, взятые с соответствующими знаками, определяют координаты этой точки. Например, точки, изображенные на рисунке 8, име-

[1] Здесь термин «параллельность» понимается в широком смысле слова, т. е. если, например, точка M лежит в плоскости Oxy, то «плоскость, проходящая через M и параллельная Oxy», будет та же плоскость Oxy.

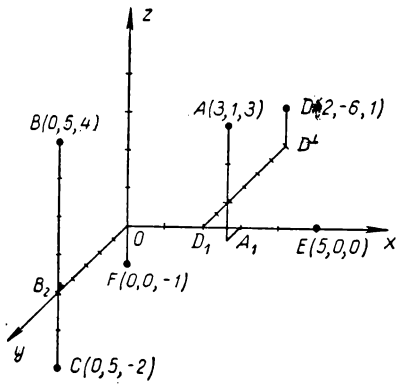


Рис. 8

ют координаты: $A(3,1,3)$, $B(0,5,4)$, C (0, 5, —2), D (2, —6, 1), E (5, 0, 0), F (0, 0, —1).

Итак, если выбрана система координат, то любая точка пространства имеет три координаты. Обратно, при данной системе координат любые три действительных числа, взятых в определенном порядке, определяют некоторую точку пространства. Таким образом, задание системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел, взятых в определенном порядке. Для построения точки по координатам достаточно построить ее координатную ломаную. Например, точку D (2, —6, 1) можно построить так (рис. 8). Отложим от точки O на оси Ox в *положительном* направлении отрезок OD_1, равный 2. Далее, через точку D_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, и на ней отложим в *отрицательном* направлении отрезок D_1D', равный — 6. Через точку D' проведем прямую, параллельную оси Oz, и на ней в положительном направлении отложим отрезок $D'D$, равный единице. Точка D — искомая. Отметим, что отдельные звенья координатной ломаной могут быть равны нулю. Например, координатная ломаная точки B имеет два звена OB_2 и B_2B, а координатная ломаная точки E — одно звено OE.

Замечание. Пусть π_1, π_2 и π_3 — координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy. Возьмем произвольную точку M в плоскости π_3. Очевидно, ее третья координата равна нулю, а первые две координаты совпадают с соответствующими координатами той же точки, если мы ее будем рассматривать как точку, лежащую в плоскости π_3 с координатной системой Oij. Аналогичные замечания имеют место для координат точек, лежащих в плоскостях π_1 и π_2.

Рассмотрим конкретные примеры определения координат точек по заданным геометрическим условиям.

Пример 1. Дана правильная шестиугольная призма

$$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1,$$

радиус основания которой в выбранной системе единиц равен 1, а высота 3. Найти координаты ее вершин и центров оснований O_1 и O_2, если за начало прямоугольной декартовой системы координат

взята вершина A, а оси координат направлены вдоль прямых AB, AE и AA_1 (рис. 9).

Р е ш е н и е. Как нижнее, так и верхнее основания пирамиды являются правильными шестиугольниками, вписанными в окружность, поэтому длины сторон этих оснований равны единице. Отсюда следует, что $\overline{AB} = \boldsymbol{i}$. Координаты всех точек, лежащих в нижнем основании, могут быть легко определены, если использовать приведенное выше замечание.

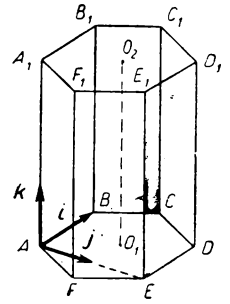


Рис. 9

В системе $\boldsymbol{Aij}$ точки нижнего основания имеют координаты $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3})$, $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (см. I, § 7, задача 1), поэтому эти же точки в трехмерном пространстве в системе $O\boldsymbol{ijk}$ имеют координаты:

$$A\ (0, 0, 0),\ B\ (1, 0, 0),\ C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ D(1, \sqrt{3}, 0),$$

$$E(0, \sqrt{3}, 0),\quad F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Так как верхнее основание призмы параллельно нижнему и высота призмы равна трем, то третьи координаты всех точек верхнего основания равны трем. У точек A и A_1 первые две координаты совпадают, так как они лежат на оси Oz. Совершенно аналогично, совпадают первые две координаты точек B и B_1, C и C_1 и т. д. Эти соображения позволяют сразу определить искомые координаты всех точек верхнего основания:

$$A_1\ (0, 0, 3),\quad B_1(1, 0, 3),\ C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right),$$

$$D_1(1, \sqrt{3}, 3),\ E_1(0, \sqrt{3}, 3),\ F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right),\ O_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right).$$

2. Аффинные координаты точек в пространстве. В прямоугольной декартовой системе координат оси взаимно перпендикулярны, а координатные векторы — единичные. Если отказаться от этих двух требований, а во всем остальном поступить так, как в предыдущем пункте, то получим более общий способ аналитического задания точек в пространстве. Возьмем в пространстве три прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в точке O.

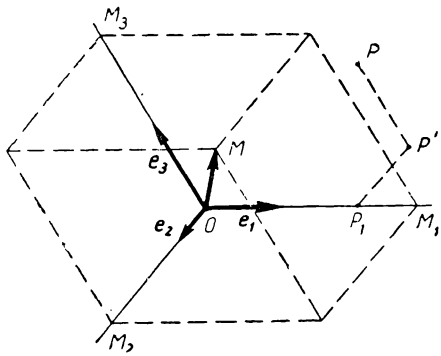


Рис. 10

На каждой из этих прямых выберем по ненулевому вектору: $\boldsymbol{e}_1$ — на прямой a, $\boldsymbol{e}_2$ — на прямой b, а $\boldsymbol{e}_3$ — на прямой c. *Построенный геометрический образ, состоящий из прямых a, b, c, пересекающихся в точке O и не лежащих в одной плоскости, и векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, назовем аффинной или общей декартовой системой координат.* Терминология и обозначения для аффинной системы координат те же, что и в случае прямоугольной декартовой.

Покажем, что задание аффинной системы координат позволяет определить положение любой точки в пространстве при помощи трех чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей с осями координат (рис. 10). Числа

$$x = \frac{\overline{OM}_1}{\boldsymbol{e}_1},\quad y = \frac{\overline{OM}_2}{\boldsymbol{e}_2},\quad z = \frac{\overline{OM}_3}{\boldsymbol{e}_3}$$

называются координатами точки M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, причем x — первая координата или абсцисса точки, y — вторая координата или ордината, а z — третья координата или аппликата точки M. Запись: $M(x, y, z)_{O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}$ означает, что M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеет координаты x, y и z. Так же как и в случае прямоугольной декартовой системы, задание аффинной системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел, взятых в определенном порядке.

Для построения точки по координатам, так же как и в случае прямоугольной декартовой системы, достаточно построить ее координатную ломаную. Например, для построения точки P (2, —2, 1) в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ можно поступить так (рис. 10). Отложим от точки O на оси Ox в *положительном* направлении отрезок OP_1, равный двум, *принимая за единицу длину вектора $\boldsymbol{e}_1$*. Точнее, строим точку P_1, удовлетворяющую условию: $\overline{OP}_1 = 2\boldsymbol{e}_1$. Далее, через P_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, и на ней в *отрицательном* направлении отложим отрезок P_1P', равный двум, *принимая за единицу измерения длину вектора $\boldsymbol{e}_2$*. Точнее, $\overline{P_1P'} = -2\boldsymbol{e}_2$. Через точку P' проведем прямую, параллельную $\boldsymbol{e}_3$, и на ней отло-

жим отрезок $P'P$, равный единице, *принимая за единицу измерения длину вектора* e_3, т. е. $\overline{P'P} = e_3$. Точка P — искомая. Подчеркнем еще раз, что на каждом из звеньев координатной ломаной принята своя единица измерения. В общем случае эти единицы измерения не совпадают. Рассмотрим следующий пример.

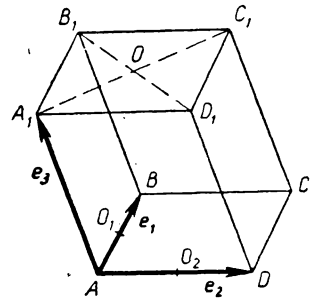


Рис. 11

Пример 2. В пространстве дан параллелепипед

$$ABCDA_1B_1C_1D_1.$$

Принимая точку A за начало аффинной системы координат и полагая $\overline{AB} = e_1$, $\overline{AD} = e_2$, $\overline{AA_1} = e_3$, определить координаты всех вершин и центра O верхней грани параллелепипеда (рис. 11).

Решение. Так как A — начало координат, а B, D и A_1 — концы координатных векторов, то

$$A\ (0, 0, 0),\ B\ (1, 0, 0,),\ D\ (0, 1, 0),\ A_1\ (0, 0, 1).$$

Из определения координат точек непосредственно следует, что

$$C\ (1, 1, 0),\ D_1\ (0, 1, 1),\ C_1(1, 1, 1),\ B_1\ (1, 0, 1).$$

Для определения координат точки O проведем через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям (эти плоскости на рисунке 11 не изображены). Очевидно, они пересекают координатные оси соответственно в точках O_1, O_2, A_1. Здесь O_1 — середина отрезка AB, а O_2 — середина отрезка AD. Отсюда следует, что $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Заметим, что координаты точки, так же как и координаты вектора, существенно зависят от выбора системы координат. Одна и та же точка в различных системах имеет, вообще говоря, различные координаты. Например, точка O на рисунке 11 в системе $Ae_1e_2e_3$, как мы показали, имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Та же точка в системе A_1, $\overline{A_1A}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1D_1}$ имеет координаты $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Легко видеть, что прямоугольная декартова система координат есть частный случай аффинной, поэтому все теоремы и предложения, доказанные для аффинной системы координат, справедливы и для прямоугольной декартовой. Обратное утверждение, конечно, не справедливо. Поэтому в дальнейшем изложении во всех случаях, когда это возможно, будем пользоваться аффинной системой координат. В прямоугольной декартовой системе будем рассматривать только такие вопросы, изложение которых существенно упрощается, если пользоваться прямоугольной декартовой системой координат. Итак, *во всем дальнейшем изложении, если*

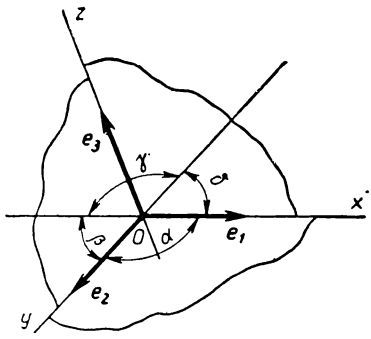


Рис. 12

не будет специальных оговорок, мы предполагаем, что система координат аффинная.

3. Координатные октанты. Координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz аффинной системы разделяют пространство на восемь частей, называемых координатными октантами. Введем нумерацию для координатных октантов. Предположим, что координатные векторы приложены к точке O. Прежде всего рассмотрим координатную плоскость Oxy и в этой плоскости введем нумерацию для координатных углов, определяемых системой Oe_1e_2. Пусть α — первый угол, β — второй, γ — третий и δ —четвертый[1] (рис. 12). Плоскость Oxy делит пространство на два полупространства. Октанты, расположенные по ту же сторону от Oxy, что и e_3, и примыкающие к углам α, β, γ и δ, называются соответственно первым, вторым, третьим и четвертым. Октанты, расположенные по другую сторону от плоскости Oxy и примыкающие к углам α, β, γ и δ, называются соответственно пятым, шестым, седьмым и восьмым.

Если точка M (x, y, z) не лежит на координатных плоскостях, то по знакам чисел x, y и z можно определить, в каком из восьми координатных октантов она расположена. В самом деле,

если $x>0$, $y>0$, $z>0$, то точка лежит в первом октанте,
если $x<0$, $y>0$, $z>0$, то точка лежит во втором октанте,
если $x<0$, $y<0$, $z>0$, то точка лежит в третьем октанте,
если $x>0$, $y<0$, $z>0$, то точка лежит в четвертом октанте,
если $x>0$, $y>0$, $z<0$, то точка лежит в пятом октанте,
если $x<0$, $y>0$, $z<0$, то точка лежит в шестом октанте,
если $x<0$, $y<0$, $z<0$, то точка лежит в седьмом октанте,
если $x>0$, $y<0$, $z<0$, то точка лежит в восьмом октанте.

Очевидно, имеют место и обратные утверждения.

По этим критериям легко определить положение точки в пространстве по ее координатам, не прибегая к чертежу. Так, например, если A (2,4,1), B (—2, 3, 4), C $(-5, -\sqrt{2}, -1)$, D $(-3, 5, -\sqrt{3})$, то из предыдущего изложения следует, что A лежит в первом октанте, B — во втором, C — в седьмом, D — в шестом.

4. Радиус-вектор точки. Пусть $Oe_1e_2e_3$ — данная система координат, а M — произвольная точка пространства. Вектор $\overline{OM}$ на-

[1] См. I, § 7, п. 3.

зывается радиус-вектором точки M (рис. 10). Если M имеет координаты x, y, z, то по определению

$$x = \frac{\overline{OM}_1}{e_1},\quad y = \frac{\overline{OM}_2}{e_2},\quad z = \frac{\overline{OM}_3}{e_3},$$

или

$$\overline{OM}_1 = x\,e_1,\quad \overline{OM}_2 = y\,e_2,\quad \overline{OM}_3 = z\,e_3.$$

Но так как $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$, то

$$\overline{OM} = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3. \qquad (1)$$

Это соотношение имеет место также и в том случае, когда M лежит на одной из координатных плоскостей. Соотношение (1) показывает, что *координаты точки M в системе $Oe_1e_2e_3$ соответственно равны координатам радиус-вектора точки M в базисе e_1, e_2, e_3*. Это утверждение, по существу являющееся очевидным, играет существенную роль во всем дальнейшем изложении. Следует заметить, что предыдущее утверждение, высказанное по отношению к аффинной системе координат, очевидно, справедливо и для ее частного случая — прямоугольной декартовой системы, т. е. координаты точки M в прямоугольной декартовой системе $Oijk$ соответственно равны координатам радиус-вектора этой точки в базисе i, j, k.

Используем понятие радиус-вектора для решения следующей задачи.

Пример 3. Дана наклонная шестиугольная призма

$$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1,$$

в основании которой лежит правильный шестиугольник. Принимая точку A за начало координат и полагая

$$\overline{AB} = e_1,\quad \overline{AF} = e_2,\quad \overline{AA}_1 = e_3,$$

определить координаты всех вершин и центров O_1 и O_2 двух оснований.

Решение. Предположим, что вершины призмы обозначены по аналогии с обозначениями рисунка 9. Так как начало координат совпадает с точкой A, а точки B, F и A_1 являются концами координатных векторов, то A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), F (0, 1, 0), A_1 (0, 0, 1). Для определения координат остальных точек выразим их радиус-векторы через e_1, e_2 и e_3:

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = e_2 + 2e_1, \text{ поэтому } C(2,\ 1,\ 0);$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 2e_1 + e_2 + e_2 = 2e_1 + 2e_2, \text{ поэтому } D(2,\ 2,\ 0);$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 2e_1 + 2e_2 - e_1 = e_1 + 2e_2, \text{ поэтому } E(1,\ 2,\ 0);$$

$$\overline{AO}_1 = \frac{1}{2}\overline{AD} = e_1 + e_2, \text{ поэтому } O_1(1,\ 1,\ 0);$$

$$\overline{AB}_1 = \overline{AB} + \overline{BB}_1 = e_1 + e_3, \text{ поэтому } B_1(1,\ 0,\ 1);$$

$\overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{CC_1} = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, поэтому $C_1(2, 1, 1)$;
$\overline{AD_1} = \overline{AD} + \overline{DD_1} = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, поэтому $D_1(2, 2, 1)$;
$\overline{AE_1} = \overline{AE} + \overline{EE_1} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, поэтому $E_1(1, 2, 1)$;
$\overline{AF_1} = \overline{AF} + \overline{FF_1} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, поэтому $F_1(0, 1, 1)$;
$\overline{AO_2} = \overline{AO_1} + \overline{O_1O_2} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, поэтому $O_2(1, 1, 1)$.

Очевидно, полученные результаты справедливы также и в том случае, когда призма правильная. Сравнивая между собой координаты одних и тех же точек в примерах 1 и 3, мы замечаем, что они различны и существенно зависят от выбора системы координат.

Перейдем к решению некоторых простейших задач аналитической геометрии в координатах[1].

5. Разыскание координат вектора по координатам его концов.

З а д а ч а 1. Даны две точки A и B своими координатами в аффинной системе: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Определить координаты вектора $\overline{AB}$.

Р е ш е н и е. Если O — начало аффинной системы координат, то $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Но $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ являются радиус-векторами точек A и B, поэтому их координаты нам известны:

$$\overline{OA}\ \{x_1, y_1, z_1\},\ \overline{OB}\ \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Таким образом, $\overline{AB}$ как разность векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ имеет координаты:

$$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Итак,

Т е о р е м а [2.1]. *Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора.*

П р и м е р 4. Даны точки $A(2; -5, 3)$, $B(1, -1, 4)$ и $C(\sqrt{2}, 4, 0)$. Определить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$.

Р е ш е н и е. Вычитая из координат точки B соответствующие координаты точки A, получаем координаты вектора

$$\overline{AB}\ \{-1, 4, 1\}.$$

Аналогично получаем координаты остальных векторов:

$$\overline{BC}\{\sqrt{2} - 1, 5, -4\},\ \overline{AC}\{\sqrt{2} - 2, 9, -3\}.$$

П р и м е р 5. Найти координаты начала вектора $\boldsymbol{a}\{2, -3, 4\}$, если конец этого вектора имеет координаты $(3, -1, 0)$.

Р е ш е н и е. Пусть $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$. Нам известны координаты вектора $\boldsymbol{a}$ и точки B. По этим данным легко определить координаты точки A. В самом деле,

$$A(x, y, z),\quad B(3, -1, 0),\quad \boldsymbol{a}\{2, -3, 4\}.$$

---

[1] Ср. I, § 8.

По теореме [2, 1] находим:

$$3 - x = 2,\ -1 - y = -3,\ 0 - z = 4.$$

Отсюда

$$x = 1,\quad y = 2,\quad z = -4;\quad A\ (1,\ 2,\ -4).$$

Проверка: $A\ (1, 2, -4)$, $B\ (3, -1, 0)$, $\overline{AB}\ \{2, -3, 4\}$. Мы видим, что $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, задача решена правильно.

Пример 6. Вершины четырехугольника находятся в точках

$$A\ (1, 3, 4),\ B\ (4, 0, 6),\ C\ (1, 0, -1) \text{ и } D\ (-2, 3, -3).$$

Показать,что $ABCD$ — параллелограмм. Система координат аффинная.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны и $\overline{AB} = \overline{DC}$. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$. Имеем: $\overline{AB}\{3, -3, 2\}$, $\overline{BC}\{-3, 0, -7\}$, $\overline{DC}\ \{3, -3, 2\}$.

Отсюда видно, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны, так как соответствующие координаты этих векторов равны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

6. Определение координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении. Напомним понятие деления отрезка в данном отношении, которое было введено нами в I, § 8[1]. Говорят, что точка M, лежащая на прямой AB, делит направленный отрезок AB в отношении λ, если $\lambda = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$.

Рассмотрим задачу об определении координат точки, делящей данный отрезок в отношении λ.

Задача 2. Пусть в аффинной системе даны две различные точки своими координатами $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$. Определить координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}$ — соответственно радиус-векторы точек A, B и M. Так как $\lambda = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, то $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$. Но $\overline{AM} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\overline{MB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})$. Отсюда, учитывая, что $\lambda \neq -1$, получаем:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

---

[1] Рекомендуем читателю еще раз внимательно прочитать содержание I, § 8, п. 2.

Пользуясь теоремой о координатах линейной комбинации векторов, получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

В частности, если точка M делит отрезок AB пополам, то $\lambda = 1$, поэтому

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема [2.2]. *Координаты точки, делящей отрезок AB, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в отношении λ, определяются из соотношений* (3).

Координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат концов отрезка.

Пример 7. Определить координаты точек, делящих отрезок AB, A (1, 2, —5), B (0, 1, 4), в отношении $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, $\lambda_4 = 1$.

Решение. Для определения координат точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$, делящих отрезок AB соответственно в отношениях λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4, воспользуемся формулами (3):

$$x_1 = \frac{1 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{2 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{4}{3}, \quad z_1 = \frac{-5 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{1 - 3 \cdot 0}{1 - 3} = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{2 - 3 \cdot 1}{1 - 3} = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{-5 - 3 \cdot 4}{1 - 3} = \frac{17}{2};$$

$$x_3 = \frac{1 + \frac{1}{4} \cdot 0}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \quad y_3 = \frac{2 + \frac{1}{4} \cdot 1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{5}, \quad z_3 = \frac{-5 + \frac{1}{4} \cdot 4}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{16}{5};$$

$$x_4 = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_4 = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}, \quad z_4 = \frac{-5 + 4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB, если даны A (2, —1, 7) и B (4, 5, —2).

Решение. Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 — отношения, в которых каждая из координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy делит отрезок AB.

Если обозначить через P_1, P_2 и P_3 точки пересечения прямой AB с плоскостями Oyz, Oxz и Oxy, то

$$P_1\left(\frac{2 + \lambda_1 \cdot 4}{1 + \lambda_1}, \quad \frac{-1 + \lambda_1 \cdot 5}{1 + \lambda_1}, \quad \frac{7 - \lambda_1 \cdot 2}{1 + \lambda_1}\right),$$

$$P_2\left(\frac{2+\lambda_2\cdot 4}{1+\lambda_2},\ \frac{-1+\lambda_2\cdot 5}{1+\lambda_2},\ \frac{7-\lambda_2\cdot 2}{1+\lambda_2}\right),$$
$$P_3\left(\frac{2+\lambda_3\cdot 4}{1+\lambda_3},\ \frac{-1+\lambda_3\cdot 5}{1+\lambda_3},\ \frac{7-\lambda_3\cdot 2}{1+\lambda_3}\right).$$

Так как P_1 лежит в плоскости Oyz, то $\frac{2+\lambda_1\cdot 4}{1+\lambda_1}=0$, отсюда $\lambda_1=-\frac{1}{2}$.

Точно так же получаем: $\lambda_2=\frac{1}{5}$ и $\lambda_3=\frac{7}{2}$.

Пример 9. Дана точка M (2, —4, 4) в прямоугольной декартовой системе координат. Определить координаты точки M', симметричной с точкой M:

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей

$$Oxy,\ Oyz,\ Oxz;$$

в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

Решение. а) Если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно начала координат, то

$$\frac{x+x'}{2}=0,\ \frac{y+y'}{2}=0 \text{ и } \frac{z+z'}{2}=0.$$

Отсюда $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$. Для данной точки M получаем: M' (—2, 4, —4);

б) если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно координатной плоскости Oxy, то отрезок MM' перпендикулярен к плоскости Oxy и его середина принадлежит этой плоскости, поэтому вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{k}$, и середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy. Следовательно, $x'-x=0$, $y'-y=0$ (условие коллинеарности: $\overline{MM'}\parallel\boldsymbol{k}$); $\frac{z+z'}{2}=0$ (середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy). Таким образом, $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$.

Для данной точки получаем: $M'(2, -4, -4)$.

Если N и P — точки, симметричные точке M относительно плоскостей Oxz и Oyz, то аналогично предыдущему получаем: N (2, 4, 4), P (—2, —4, 4);

в) если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно оси Ox, то вектор $\overline{MM'}$ параллелен плоскости Oyz, т. е. компланарен с векторами $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, и середина отрезка MM' лежит на оси Ox.

Следовательно, $x-x'=0$ (условие компланарности векторов $\overline{MM'}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$), $\frac{y+y'}{2}=0$, $\frac{z+z'}{2}=0$ (середина отрезка MM' лежит на оси Ox).

Таким образом, $x' = x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Для данной точки получаем: $M'(2, 4, -4)$.

Если R и S — точки, симметричные точке M относительно осей Oy и Oz, то аналогично предыдущему получаем: $R(-2, -4, -4)$, $S(-2, 4, 4)$.

7. Условие коллинеарности трех точек.

Задача 3. Пусть в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ даны три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$. Найти необходимое и достаточное условие коллинеарности этих точек.

Решение. *Точки называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой.* Для того чтобы A, B и C были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ были коллинеарны. Отсюда легко получить искомое условие. По теореме [2.1] имеем:

$\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{AC}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$. Согласно теореме [1.8] условие коллинеарности этих векторов запишется так:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Согласно теореме [1.9] условие коллинеарности тех же точек состоит в следующем: ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

равен единице. Мы получили теорему.

Теорема [2.3]. *Для того чтобы три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (5) *или чтобы ранг матрицы* (6) *был равен единице.*

Пример 10. Даны тройки точек:

а) $A_1(2, -1, 1)$, $B_1(-1, 0, 0)$, $C_1(2, -4, 15)$;
б) $A_2(1, 0, -1)$, $B_2(3, 2, 1)$, $C_2(0, -1, -2)$;
в) $A_3(3, 4, -1)$, $B_3(3, 4, 1)$, $C_3(3, 4, -18)$.

Выяснить, какие из этих троек точек коллинеарны.

Решение. Проверяем условие коллинеарности соответствующих векторов для каждой из троек чисел:

а) $\overline{A_1B_1}\{-3, 1, -1\}$, $\overline{A_1C_1}\{0, -3, 14\}$.

Векторы не коллинеарны, так как, например, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой;

б) $\overline{A_2B_2}\{2, 2, 2\}$, $\overline{A_2C_2}\{-1, -1, -1\}$.