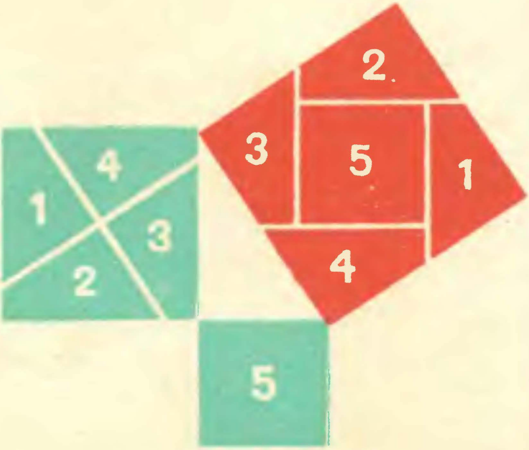
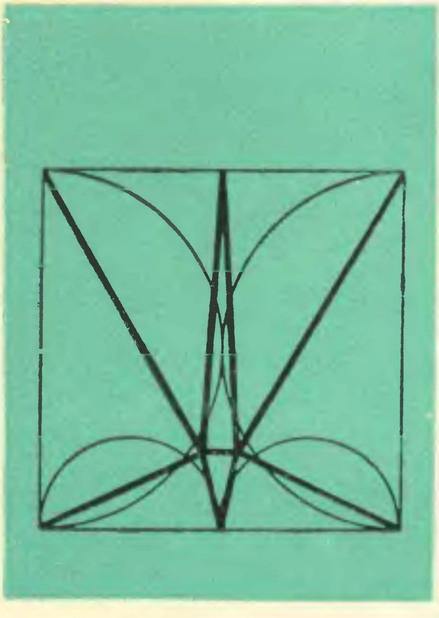
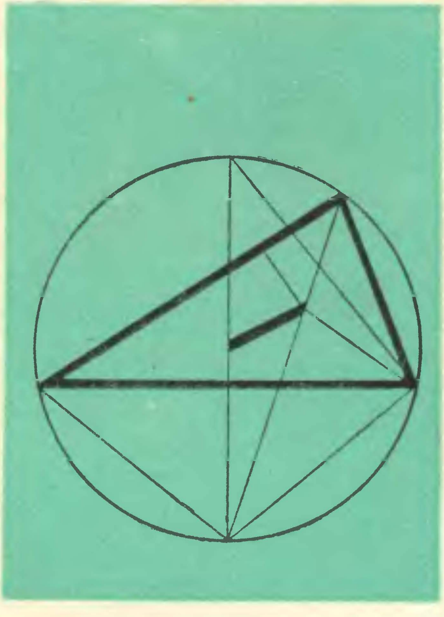


А. И. ФЕТИСОВ

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ





А. И. ФЕТИСОВ

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Пособие для учащихся школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1977

513
Ф45

Фетисов А. И.

Ф45 Геометрия в задачах. Пособие для учащихся школ и классов с углубл. теоретическим и практическим изучением математики. М., «Просвещение», 1977.

192 с. с ил.

Книга содержит задачи, разнообразные по степени трудности, по всем основным разделам курса геометрии средней школы. Ко всем задачам даны решения или указания к решению. Книга может быть использована учащимися IX — X классов, желающими углубить и расширить свои математические знания.

Ф $\frac{60601 - 667}{103(03) - 77}$ 223—77 513

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задач — это одна из активных форм обучения. В процессе решения задач учащиеся знакомятся с новыми математическими закономерностями, задачи помогают им по-иному взглянуть на уже известные факты, учат самостоятельно добывать новые знания. Решая задачи, можно значительно повысить уровень своего математического образования. При этом успех во многом зависит от того, насколько совершенна система задач, как полно она отражает соответствующий курс.

Настоящая книга «Геометрия в задачах» по своей структуре служит хорошим пособием для изучения геометрии. В ней даны задачи, которые по своему содержанию отражают весь курс геометрии средней школы. Значительная часть задач по своему решению вполне доступна большинству учащихся. Более трудные задачи помечены звездочкой, а особенно трудные — двумя звездочками. Правильный результат, полученный при решении задачи со звездочкой или двумя звездочками, свидетельствует о глубоком понимании материала, о достаточно развитом логическом мышлении.

В книге приводятся решения или указания к решениям всех задач. Предполагается, что к этому разделу учащиеся будут обращаться лишь в крайних случаях, ибо ничего не может принести столько пользы, сколько приносит самостоятельная работа по поиску решения. Надо хорошо усвоить, что труд и упорство — основные источники успеха.

Данная книга поможет учащимся узнать много нового, полюбить математику. Она будет полезной не только учащимся, которые учатся в школах и классах с углубленным теоретическим и практическим изучением математики, но и учащимся, которые не имеют возможности посещать такие классы, но хотят самостоятельно повысить уровень своих знаний по геометрии, лучше подготовиться к продолжению своего образования и трудовой деятельности, предполагающей развитие пространственного воображения и логического мышления. Она будет полезна огромному контингенту учащихся, которые любят технику, хотят ей посвятить свою послешкольную деятельность. В наше время молодому человеку, входящему в самостоятельную жизнь после школы, нужны прежде всего твердые навыки в самообразовании. В этом деле предлагаемая книга — верный помощник.

С. И. Шварцбурд

Часть I

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Основные понятия и теоремы. Перемещения плоскости. Композиция перемещений. Многоугольники и окружности

1. Даны три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. Доказать, что всякая прямая, не проходящая через точки A, B и C, либо не пересекает ни одного отрезка BC, CA и AB, либо пересекает два и только два из них.

Заметим, что в некоторых курсах геометрии предложение этой задачи принимается в качестве аксиомы, называемой аксиомой Паша[1].

2. Плоскость разделена конечным числом прямых на несколько областей Доказать, что достаточно иметь только две краски, чтобы закрасить полученную «карту» так, что области, имеющие общую границу (отрезок), будут закрашены разными красками.

3*. На плоскости даны n различных прямых, из которых каждая пересекает все остальные и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей они делят плоскость?

4. Точки A, B, C не принадлежат одной прямой, точка P не принадлежит прямым BC, CA и AB. Доказать, что по крайней мере одна из прямых PA, PB или PC пересекает соответственно отрезок BC, CA или AB.

5. Дана ось симметрии l и точки A и A', симметричные относительно оси l. Построить точку B', симметричную произвольной точке B относительно оси l, пользуясь только линейкой.

6. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, если:

а) даны вершины A и B, а третья вершина C должна находиться на данной прямой l;

б)* данная вершина A находится внутри данного острого угла, а вершины B и C должны находиться на двух сторонах этого угла;

в)* вершины A, B и C искомого треугольника должны находиться соответственно на сторонах $[NP]$, $[PM]$ и $[MN]$ данного остроугольного треугольника MNP.

7.* Используя результат предыдущей задачи, доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

---

[1] Мориц Паш (1843—1930) — немецкий геометр.

8. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Найти наибольшее возможное число точек их пересечения.

9*. Внутри выпуклого n-угольника дано m точек. Соединим эти точки отрезками друг с другом и с вершинами многоугольника так, чтобы каждая из данных точек была вершиной треугольника и получившиеся треугольники не имели общих внутренних точек. На сколько треугольников разобьется многоугольник?

10*. Некоторое перемещение отображает три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, соответственно на точки A', B', C'. Доказать, что образ P' любой точки P можно построить, пользуясь только линейкой и циркулем «с острыми ножками», т. е. пользуясь циркулем только для перенесения отрезков, не проводя им окружности.

11. Доказать следующие свойства композиции осевых симметрий:

а) композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот на угол, вдвое больший угла между осями, с центром в точке пересечения осей;

б) композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос (вектор), направленный перпендикулярно осям от первой оси ко второй, на расстояние, равное удвоенному расстоянию между осями.

12. Доказать следующие свойства поворотов и параллельных переносов:

а) каждый поворот можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с осями, проходящими через центр поворота и образующими угол величиной вдвое меньше величины угла поворота, причем одну из осей можно провести через центр поворота произвольно;

б) каждый вектор (параллельный перенос) можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых перпендикулярны направлению вектора, а расстояние между ними вдвое меньше длины вектора, причем одну из осей можно провести произвольно.

13*. Доказать, что композиция двух поворотов есть либо поворот, либо параллельный перенос. В каком случае будет тот или другой результат? Если композицией будет поворот, то как построить его центр? Каков будет угол поворота?

14*. На трех сторонах треугольника вне его построено три квадрата. Как восстановить (построить) треугольник, если даны только центры этих квадратов?

15. Доказать, что композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос — вектор. Как найти этот вектор? Обратно: каждый перенос можно представить в виде композиции двух центральных симметрий, причем один из центров можно выбрать произвольно.

16. Каким перемещением является композиция четного числа центральных симметрий? нечетного?

17*. Дано 5 точек — середины сторон некоторого пятиугольника. Построить этот пятиугольник.

18*. Доказать, что любые два конгруэнтных и одинаково ориентированных[1] треугольника можно отобразить один на другой либо поворотом, либо параллельным переносом, причем в том и другом случае перемещение определяется однозначно.

19*. Доказать, что композиция трех осевых симметрий с осями, проходящими через одну и ту же точку, есть осевая симметрия.

20*. Доказать, что композиция трех осевых симметрий с осями, не проходящими через одну точку и не параллельными одной прямой, может быть представлена как композиция осевой симметрии и параллельного переноса—вектора, параллельного оси симметрии. (Это перемещение называется *скользящей симметрией*.)

21*. Даны два конгруэнтных, но противоположно ориентированных треугольника (см. примечание к задаче 18): $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки, отображающиеся друг на друга, обозначены одинаковыми буквами. Доказать, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой.

22. Доказать, что данный разносторонний треугольник никакой прямой нельзя разделить на два конгруэнтных треугольника.

23*. Лист бумаги имеет лицо и изнанку. На этой бумаге нарисован разносторонний треугольник. Как разрезать этот треугольник на наименьшее число частей, чтобы из этих частей можно было бы сложить треугольник, перевернув каждую из частей на прежнем месте изнанкой вверх?

24. Полосой называется множество точек плоскости, лежащих между двумя параллельными, т. е. принадлежащих отрезкам, соединяющим точки одной из параллельных прямых с точками другой; по-другому полоса определяется как непустое пересечение двух полуплоскостей с различными параллельными границами.

а) Доказать, что множество центров симметрии полосы есть прямая (ось полосы).

б) Получить все основные свойства параллелограммов (в том числе прямоугольника, ромба, квадрата), рассматривая параллелограмм как пересечение двух полос.

25. При помощи двусторонней линейки (модель полосы) выполнить следующие построения: а) провести биссектрису данного угла; б)* через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой; в) удвоить, утроить и т. д. данный отрезок; г) разделить данный отрезок на n конгруэнтных частей; д)* удвоить, утроить данный угол; е)* найти точку, симметричную данной относительно данной оси; ж)** построить равносторонний треугольник, имеющий данный отрезок своей стороной.

---

[1] Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с заданным порядком вершин называются одинаково ориентированными, если в обоих треугольниках обход «по контуру» от A к B, B к C, C к A и от A_1 к B_1, B_1 к C_1, C_1 к A_1 совершается в одном и том же направлении, т. е. против или по часовой стрелке.

26*. Как построить биссектрису угла, пользуясь только чертежным угольником?

27. Как построить биссектрису угла, вершина которого недоступна? Можно ли выполнить это построение, пользуясь только двусторонней линейкой?

28*. Дана точка P и две не проходящие через нее прямые, точка пересечения которых недоступна. Пользуясь только чертежным угольником, провести прямую через точку P и точку пересечения данных прямых.

29*. Треугольник вписан в окружность. Доказать следующие утверждения:

а) три точки, симметричные ортоцентру треугольника — точке пересечения высот — относительно его сторон, лежат на окружности;

б) если на окружности взять любую точку и найти три точки, симметричные ей относительно трех сторон треугольника, то эти три точки лежат на одной и той же прямой, проходящей через ортоцентр рассматриваемого треугольника.

30*. Дан треугольник ABC и на прямых BC, CA и AB взяты соответственно точки A', B' и C'. Доказать, что три окружности, проходящие через тройки точек A, B', C'; B, C', A' и C, A', B', пересекаются в одной точке.

31. Четыре прямые при пересечении друг с другом образуют четыре треугольника. Доказать:

а)* четыре окружности, описанные около этих треугольников, пересекаются в одной точке;

б)* четыре центра этих окружностей лежат на одной окружности, проходящей через ту же точку;

в)** четыре ортоцентра этих треугольников лежат на одной прямой.

32.** В окружность вписан шестиугольник $ABCC'B'A'$. Пусть $(BC') \cap (B'C) = A_1$, $(CA') \cap (C'A) = B_1$, $(AB') \cap (A'B) = C_1$. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой, предварительно доказав, что три окружности, описанные около треугольников BCA_1, CAB_1 и ABC_1, пересекаются в одной точке[1].

§ 2. Векторы. Гомотетия и подобие. Метрические соотношения в плоских фигурах. Метод координат на плоскости

1. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник, O — его центр. Доказать, что сумма векторов $\vec{OA_1}$, $\vec{OA_2}$, ..., $\vec{OA_n}$ равна 0.

2. Доказать, что точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда в выражении вектора $\vec{OC}$ через векторы

[1] Доказываемое предложение известно под именем теоремы Паскаля, Блез Паскаль (1623—1662) — выдающийся французский математик и физик.

$\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ т. е. в соотношении $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, сумма коэффициентов равна 1, т. е. $x + y = 1$ (здесь $A \neq B$, O — точка, не принадлежащая прямой AB).

3. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

4. Зафиксируем точку O плоскости. Любая другая точка A однозначно определяется своим *радиус-вектором* $\overrightarrow{OA}$, который будем обозначать просто $\vec{A}$. Этим понятием и обозначением мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем. Фиксированную точку O принято называть *начальной точкой*. Введем также символ (ABC) — *простое отношение трех точек* A, B, C, принадлежащих одной прямой; точки A и B называются *базисными точками*, точка C — *делящей*. Символ (ABC) есть число, определяемое формулой:

$$\overrightarrow{CA} = (ABC) \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Далее, для двух коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно определяется число λ такое, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Введем обозначение $\lambda = \frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ (отношение коллинеарных векторов). В таком случае можно записать:

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Замечание. Обозначение для отношения векторов не связано со скалярным умножением векторов! (Скажем, соотношение $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}}{\vec{d}}$ влечет $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ и $\vec{c} = \lambda\vec{d}$, откуда $\vec{a} \cdot \vec{d} = (\lambda\vec{b}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \vec{c}$, но обратное неверно — из соотношения $\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ совсем не следует, что $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}}{\vec{d}}$: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не обязаны быть коллинеарными. Приведите соответствующий пример.)

Вывести формулу, выражающую вектор $\vec{C}$ через векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, при условии, что $(ABC) = k$.

5. Пусть $[AN]$ — биссектриса угла при вершине A в треугольнике ABC. Вывести формулу, выражающую вектор $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}$$

6. В треугольнике ABC $|AB| \neq |AC|$. Сохраняя обозначения предыдущего упражнения, вывести формулу, выражающую

вектор $\overrightarrow{AN'} = \vec{n}'$, где $[AN']$ — биссектриса внешнего угла треугольника ABC, $N' \in (BC)$, через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Доказать, что $(BCN') = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}$.

7. Доказать, что при любом выборе начальной точки O центроид Q (точка пересечения медиан) треугольника ABC определяется формулой:

$$\vec{Q} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}.$$

8*. Доказать, что вектор $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$ определяет соответствующую точку $P = \vec{P}(O)$ однозначно, независимо от выбора начала O всех радиус-векторов. Точка P называется *центром масс* или *центроидом* системы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, обладающих массами $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Доказать, что в случае двух точек A_1 и A_2 точки A_1, A_2 и P принадлежат одной прямой, причем

$$(A_1A_2P) = -\frac{m_2}{m_1}.$$

9*. Найти положение центра тяжести проволочного треугольника (считаем, что вся проволока одного диаметра и состоит из одного и того же металла).

10*. В вершинах произвольного четырехугольника помещены равные массы. Найти положение их центроида.

11*. Принимая без доказательства, что центр тяжести однородной треугольной пластинки совпадает с центроидом треугольника, т. е. точкой пересечения его медиан, доказать, что центр тяжести однородной четырехугольной пластинки (четырехугольник — выпуклый) совпадает с центром параллелограмма, который строится так: каждую сторону четырехугольника делим на три равные части и через каждую пару точек, ближайших к каждой вершине, проводим прямые — они и будут ограничивать этот параллелограмм.

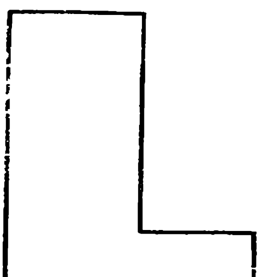


Рис. 1

12*. Найти центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму, изображенную на рис. 1. Построение выполнить только линейкой.

13. Гомотетия определена центром S и коэффициентом k. Написать формулу, связывающую $\vec{A}$ и $\vec{A}'$, где A' — образ точки A при этой гомотетии. (Заметим, что ответ не зависит от выбора начала O.)

14*. Доказать, что композиция двух гомотетий есть либо гомотетия, либо параллельный перенос. Как определяется центр и коэффициент результирующей гомотетии в первом случае и как определяется соответствующий вектор во втором случае?

15**. Даны три окружности с центрами, не принадлежащими одной прямой, и разными радиусами. Установив, что для каждой пары этих окружностей существуют две гомотетии, преобразующие их друг в друга, доказать, что шесть центров полученных гомотетий расположены по три на четырех прямых. (Это утверждение называется теоремой Даламбера[1].)

16*. Дан треугольник ABC. На прямых BC, CA и AB расположены соответственно точки X, Y и Z. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точки X, Y, Z принадлежали одной прямой, является выполнение равенства $(BCX) \cdot (CAY) \cdot (ABZ) = 1$, или $\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$. (Это утверждение называется теоремой Менелая[2].)

17*. Дан треугольник ABC, в котором биссектрисы внешних углов при вершинах A, B и C пересекают противоположные стороны или их продолжения соответственно в точках M, N и P. Доказать, что эти три точки принадлежат одной прямой.

18*. Одна из сторон угла пересекает окружность. Построить окружность, которая касалась бы обеих сторон угла и данной окружности.

19*. Доказать, что два подобных и одинаково ориентированных треугольника, не конгруэнтных и не гомотетичных друг другу, всегда можно отобразить один на другой композицией гомотетии и поворота с общим, однозначно определяемым центром.

20**. Доказать, что два подобных и противоположно ориентированных треугольника всегда можно преобразовать друг в друга композицией симметрии относительно какой-нибудь (любой) из двух взаимно перпендикулярных осей и гомотетии с центром в точке пересечения этих осей. Оси эти определяются однозначно.

21. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений непараллельных сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середины оснований трапеции.

Верна ли обратная теорема: если прямая, проходящая через точку пересечения продолжения противоположных сторон четырехугольника и точку пересечения его диагоналей, делит одну из сторон четырехугольника пополам, то четырехугольник — трапеция?

22. Предложения, доказанные в предыдущей задаче, использовать для следующих построений, выполняемых только линейкой:

а) на одной из двух параллельных прямых дан отрезок. Построить его середину;

---

[1] Жан Лерон Даламбер (1717—1783) — французский математик.
[2] Менелай — древнегреческий астроном и математик (I в. н. э.).

б) на данной прямой задан отрезок с отмеченной серединой. Через данную вне прямой точку провести параллельную ей прямую;

в) дана окружность и ее центр. Вписать в эту окружность квадрат;

г) в данную окружность (с отмеченным центром) вписать прямоугольник и провести его оси симметрии;

д)* фигуру, полученную в предыдущем построении, использовать для проведения прямой, параллельной любой данной прямой, и для построения середины любого отрезка.

23. Для введения прямоугольных (декартовых) координат на плоскости строят *репер* (repère — метка), состоящий из начала координат — точки O и двух единичных векторов (ортов) $\vec{i}$ и $\vec{j}$, перпендикулярных друг другу. Вектор $\vec{i}$ определяет направление оси Ox, вектор $\vec{j}$ — направление оси Oy. Символически этот репер обозначается: $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Положение точки M плоскости определяется радиус-вектором $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ этой точки. Разложив его по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получим $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Числа x и y, определяемые этим разложением, называются *координатами точки* M, векторы $x\vec{i}$ и $y\vec{j}$ называются *компонентами вектора* $\vec{r}$, или его *проекциями* на ось Ox и ось Oy.

Доказать, что проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

а) при умножении вектора на число его проекция умножается на то же число;

б) проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых.

24. Точка M имеет координаты x и y: $M=M(x;\ y)$. Как изменятся эти координаты, если начало O перенести в точку O' с координатами $(a;\ b)$?

25*. Вектор $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ образует с осью Ox угол φ, на который нужно повернуть вектор $\vec{i}$ в положительном направлении для того, чтобы его направление совпало с направлением $\vec{r}$. Как известно, $\frac{x}{r}=\cos\varphi$ и $\frac{y}{r}=\sin\varphi$, где $r=|\vec{r}|$. Отсюда $\vec{r}=\vec{i}r\cos\varphi+\vec{j}r\sin\varphi$. а) Пользуясь этой формулой, установить зависимость между векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и новыми ортами $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, которые получаются, если координатные оси повернуть вокруг начала O на угол φ. б) Точка M в старой системе имела координаты $(x;\ y)$. Какими формулами связаны эти координаты с новыми координатами x', y' той же точки M?

26*. Повернув координатные оси вокруг начала, сначала на угол α, и получив орты $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$, а потом на угол β, и получив новые орты $\vec{i}''$ и $\vec{j}''$, вывести из полученных зависимостей между ортами основные формулы тригонометрии для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$.

27. Даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Найти координаты точки C, удовлетворяющей условию: $(ABC)=\lambda$.

28. Скалярное произведение ненулевых векторов есть произведение длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\vec{b}=ab\cos\varphi$. Доказать основные свойства скалярного произведения:

а) обращение в нуль произведения при $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $\varphi=90°$;

б) коммутативность: $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон);

в) ассоциативность при умножении на число: $m(\vec{a}\vec{b})=(m\vec{a})\vec{b}$ (сочетательный закон);

г) дистрибутивность: $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон).

29. Применить свойства скалярного произведения к выводу основных метрических соотношений планиметрии: а) теоремы косинусов и синусов для треугольника; б) зависимости между сторонами и диагоналями параллелограмма.

30. а) Доказать тождество $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})+\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})+\vec{c}(\vec{a}-\vec{b})=0$. б)* Применить это тождество к доказательству того, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

31. Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей плюс учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей.

32. Выразить длину а) медианы и б)* биссектрисы треугольника через длины его сторон.

33. Записать в координатах скалярное произведение векторов $\vec{r}_1(x_1;\ y_1)$ и $\vec{r}_2(x_2;\ y_2)$.

34. а) Выразить условие перпендикулярности двух векторов, если известны их координаты: $\vec{r}_1(x_1;\ y_1)$, $\vec{r}_2(x_2;\ y_2)$.

б) Какой формулой выразится расстояние между точками, имеющими те же координаты? Как вычислить угол между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$?

35. На координатной плоскости дана прямая l, $O\notin l$. Рассмотрим перпендикулярный к этой прямой вектор $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, где $P\in l$; тогда $p=|\vec{p}|$ есть расстояние от прямой до начала координат. Обозначим через φ угол, который образует $\vec{e}=\frac{\vec{p}}{p}$ — орт вектора $\vec{p}$, — с ортом $\vec{i}$. Пусть $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ — переменный радиус-вектор произвольной точки $M\in l$. Принимая во внимание, что вектор $\overrightarrow{PM}=\vec{r}-\vec{p}$ перпендикулярен вектору $\vec{p}$, вывести векторное уравнение

прямой l в виде $\vec{r}\vec{e}=p\vec{e}$ и потом отсюда получить нормальное уравнение прямой l в координатах: $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p$.

Разобрать случаи различного расположения прямой по отношению к осям координат.

36. Доказать, что уравнение вида

$$\vec{r}\vec{a}=m, \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ — переменный радиус-вектор, $\vec{a}$ — фиксированный вектор, m — действительное число, есть уравнение прямой. Привести это уравнение к нормальному виду: $\vec{r}\vec{c}=p$. Доказать, что в координатной форме уравнение (1) имеет вид:

$$Ax+By+C=0.$$

37. Доказать, что всякое линейное уравнение вида $Ax+By+$ $+C=0$ есть уравнение прямой. Как привести его к векторной форме $\vec{r}\vec{a}=m$ и к нормальному виду:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=p?$$

38*. Доказать: если в левую часть нормального уравнения прямой вида $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ подставить координаты x_1, y_1 произвольной точки M, то получится число, по абсолютной величине равное расстоянию от точки M до данной прямой. Каков будет знак этого числа в зависимости от того, лежат ли точки M и O по разные стороны от этой прямой или нет?

39. Даны уравнения двух прямых:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

а) Вычислить координаты точки пересечения этих прямых и угол, образуемый ими. Установить условия параллельности и перпендикулярности этих прямых.

б)* Приведя рассматриваемые уравнения к нормальному виду и используя результат предыдущей задачи, вывести уравнения биссектрис углов между этими прямыми.

40. Написать общее уравнение прямой, проходящей через данную точку M. Написать уравнение прямой, проходящей через две данные точки M и N. Точки заданы координатами:

$$M(x_1;\ y_1),\ N(x_2;\ y_2).$$

41. При каком условии три прямые, заданные уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0;\quad A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \text{и} \quad A_3x+B_3y+C_3=0,$$

проходят через одну и ту же точку?

42. Окружность задана своим центром C, который определяется радиус-вектором $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, и радиусом R. Написать уравнение окружности в векторной и координатной форме, если координаты

точки C суть $(a;\ b)$. Как выглядят эти уравнения в зависимости от расположения центра: а) центр лежит на оси Ox; б) центр лежит на оси Oy; в) центр совпадает с началом O, — и в случае, когда окружность проходит через начало O?

43. При каких условиях общее уравнение второго порядка:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

задает на координатной плоскости окружность?

44. Доказать тождество:

$$\vec{a}\vec{b}=\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2.$$

Применить это тождество к доказательству следующего предложения: если дана окружность с центром C и радиусом R, $[AB]$ — ее диаметр, M — произвольная точка плоскости, причем

$$|CM|=m,\ \overrightarrow{MA}=\vec{a},\ \overrightarrow{MB}=\vec{b},\ \text{то}\ \vec{a}\vec{b}=m^2-R^2=\pm p^2.$$

Получающаяся постоянная $\pm p^2$, не зависящая от положения диаметра AB, называется *степенью точки M относительно окружности* с центром C радиуса R.

45*. Доказать, что если в левую часть уравнения окружности вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \tag{1}$$

подставить координаты x_1, y_1 произвольной точки M, то полученное число будет степенью точки M относительно данной окружности. Если точка M лежит вне окружности, то степень положительна и равна p^2, если точка M лежит внутри окружности, то степень отрицательна; для точек, лежащих на окружности, степень равна нулю. В первом случае длина отрезка касательной, проведенной из точки M к окружности, от точки M до точки касания, равна p.

46**. а) Доказать, что если даны две не концентрические окружности, то множество точек, имеющих одинаковую степень относительно обеих окружностей, есть прямая, которая называется *радикальной осью* этих окружностей

б) Если центры трех окружностей не принадлежат одной прямой, то три их радикальные оси пересекаются в одной и той же точке — радикальном центре трех окружностей.

47**. Условимся буквой K обозначать выражение, стоящее в левой части уравнения окружности вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0.$$

Доказать, что семейство уравнений вида $K_1+tK_2=0$, где t — переменный параметр, задает так называемый пучок окружностей — семейство окружностей, имеющих общую радикальную ось. Записать уравнение пучка в явном виде (в координатах).

Доказать, что все окружности пучка либо пересекаются в двух общих точках (эллиптический пучок), либо касаются друг друга в одной общей точке (параболический пучок), либо не имеют общих точек (гиперболический пучок). Начертить пучки окружностей каждого вида.

48**. При помощи циркуля и линейки построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

49. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

§ 3. Измерение площадей. Задачи на все разделы планиметрии

1**. Доказать, что необходимым и достаточным условием, чтобы данный треугольник был прямоугольным, является равенство:

$$2R + r = p,$$

где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника.

2*. В данную окружность вписать треугольник наибольшей площади.

3**. Дана сетка квадратов на плоскости («клетчатая бумага»). Можно ли построить равносторонний треугольник, вершины которого находились бы в узлах этой сетки (в точках пересечения линий)?

4**. Доказать, что расстояние d между центрами описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей выражается формулой Эйлера[1]:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружностей.

5**. Вывести аналогичную формулу для расстояния d_a между центрами описанной около треугольника окружности радиуса R и вневписанной окружности радиуса r_a, касающейся стороны $[BC]$:

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

6**. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов R_1 и R_2, $R_1 > R_2$, лежащие одна вне другой или касающиеся друг друга внешним образом. Обозначим через S центр гомотетии с положительным коэффициентом, преобразующий эти окружности друг в друга. Пусть секущая, проведенная из точки S, пересекает эти окружности в точках A_1, A_2 и B_1, B_2, где A_1 и B_1 принадлежат первой окружности, A_2, B_2 — второй. Точки A_1 и A_2,

---

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — великий математик, механик и физик.

отображающиеся друг на друга при упомянутой гомотетии, называются гомологичными, так же как и точки B_1 и B_2, O_1 и O_2. Точки A_1 и B_2, B_1 и A_2 называются антигомологичными. Доказать: а) третья окружность, проходящая через две антигомологичные точки, пересекает данные две окружности в двух других антигомологичных точках; б) окружность, касающаяся двух данных окружностей, определяет две антигомологичные точки касания.

7**. Через данную точку провести окружность, касающуюся двух данных окружностей, удовлетворяющих условиям предыдущей задачи.

8. Вывести формулу, выражающую площадь треугольника через координаты трех его вершин: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$. (Вершины пронумерованы в порядке обхода по контуру треугольника против часовой стрелки.)

9. Вывести формулу для вычисления площади n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, если его вершины пронумерованы в таком же порядке, как и в предыдущей задаче, и заданы их координаты: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n;\ y_n)$.

10. Доказать, что площадь любого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

11. Для проведения эксперимента с удобрениями агроному потребовалось выделить из поля, имеющего форму выпуклого четырехугольника без параллельных сторон, участок, занимающий пятую часть площади поля. Для этого он разделил две противоположные границы поля на 5 равных по длине частей и соединил прямыми линиями две пары средних точек деления. Площадь получившейся полоски он принял за $\frac{1}{5}$ часть площади данного поля. Правильно ли рассчитал агроном?

12. Данный выпуклый пятиугольник разделить на две равновеликие части, т. е. части равной площади, прямой, проходящей через данную на стороне пятиугольника точку.

13**. В плоскости треугольника ABC дана точка M. Эта точка начинает двигаться прямолинейно к вершине A, но на полпути останавливается и начинает двигаться к вершине B, но опять на полпути останавливается и двигается к вершине C, вновь на полпути останавливается и продолжает такое же движение к вершине A и т. д. Доказать, что при неограниченном продолжении такого движения точка будет двигаться бесконечно близко к контуру однозначно определяемого предельного треугольника. Построить этот треугольник и вычислить отношение его площади к площади исходного треугольника ABC.

14. В окружность вписан выпуклый n-угольник, содержащий центр окружности. Через каждую из его вершин проведены касательные к окружности; они ограничивают n-угольник, описанный около данной окружности. На рассматриваемой окружности

взята точка. Доказать, что произведение расстояний от этой точки до всех касательных равно произведению ее расстояний до всех прямых, содержащих стороны вписанного многоугольника.

15. В окружность вписан правильный n-угольник. Соединяя отрезками середину каждой дуги с ближайшими двумя вершинами n-угольника, получим правильный $2n$-угольник. а) Доказать, что, соединяя последовательно середины сторон этого $2n$-угольника, получим новый $2n$-угольник, периметр которого равен периметру первоначального n-угольника. б) Обозначив через h_1 и r_1 апофему и радиус описанной окружности для данного n-угольника, вывести формулы для апофемы h_2 и радиуса r_2 описанной окружности для полученного (второго) $2n$-угольника.

16*. Повторяя построение предыдущей задачи, получим из $2n$-угольника правильный $4n$-угольник с таким же периметром, потом $8n$-угольник и т. д. Доказать, что получающиеся при этом апофемы и радиусы можно последовательно вычислять по формулам:

$$h_{p+1} = \frac{h_p + r_p}{2}, \quad r_{p+1} = \sqrt{h_{p+1} r_p}$$

и что получающиеся последовательности: $h_1, h_2, \ldots, h_p, \ldots$ и $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ имеют общий предел — длину радиуса предельной окружности, к которой приближаются контуры наших правильных $2^p n$-угольников при $p \to \infty$.

17*. Из формулы длины окружности: $C = 2\pi r$, получаем: $\pi = \frac{C}{2r}$ или $\frac{1}{\pi} = \frac{2r}{C}$. Рассмотрим квадрат с периметром 2 и будем последовательно находить значения h_p и r_p по формулам из предыдущей задачи. Последовательно повторяя вычисления, добейтесь того, чтобы значения h_p и r_p совпали в первых пяти знаках после запятой. Этим будет найдено значение $\frac{1}{\pi} = \frac{2r}{C} \approx \frac{2r}{2} = r$ с соответствующей точностью. (Этот метод вычисления π называется методом *изопериметров*.)

18. Дана окружность с центром O, диаметром $[CD]$ и касательной t в точке D. Дуге DA соответствует центральный угол величиной φ.

Пусть окружность с центром C и радиусом $[CD]$ пересекает луч CA в точке A_1. Доказать, что дуги DA и DA_1 имеют одну и ту же длину и что луч DA_1 есть биссектриса угла между $[DA)$ и касательной t.

19. Используя построение предыдущей задачи, на том же чертеже построить дугу DA_2, имеющую ту же длину, что и дуги DA и DA_1, пользуясь окружностью с радиусом, вдвое бо́льшим $|CD|$. Продолжать дальше последовательность таких построений затруднительно ввиду слишком больших размеров радиусов окружностей. Однако найти концы дуг, т. е. точки $A_2, A_3, A_4, \ldots$, можно, не проводя окружностей. Как это сделать?

(Построение точек A_2, A_3, A_4, ... дает метод *графического выпрямления* дуги AD исходной окружности.)

20*. Вычисляя последовательно длины хорд $[DA]$, $[DA_1]$, $[DA_2]$ ... (см. задачи 18—19), вывести формулу Эйлера, дающую длину дуги DA:

$$\breve{DA}_{\infty} = r\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{r\sin\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{\varphi}{8}\dots\cos\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Подставив сюда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $r = 1$, записать формулу для вычисления π, найденную Ф. Виетом[1].

21. Две плоские фигуры называются *равносоставленными*, если каждую из них можно разбить на части, соответственно конгруэнтные частям другой фигуры. Очевидно, равносоставленные фигуры равновелики, т. е. имеют равные площади. Для многоугольников справедливо и обратное утверждение: равновеликие многоугольники всегда равносоставлены. Докажите это для указанных ниже частных случаев.

а) Два параллелограмма с конгруэнтными основаниями и высотами равносоставлены.

б)* Два произвольных равновеликих параллелограмма равносоставлены.

в) Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равносоставлен с объединением квадратов, построенных на катетах.

г)* Произвольный прямоугольник равносоставлен с равновеликим ему квадратом.

д)* Равносторонний треугольник равносоставлен с равновеликим ему квадратом.

22*. Выше (см. § 2, задача 4) мы ввели символ (ABC) для обозначения простого отношения трех точек A, B, C, $C \in (AB)$: $(ABC) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$. Аналогичный символ (abc) удобно ввести и для трех прямых a, b, c, проходящих через одну точку S (прямые a и b называются базисными, а прямая c — делящей). Возьмем на прямой c произвольную точку P и найдем ее ортогональные проекции P_a и P_b на прямые a и b. Пусть $|PP_a| = m$, $|PP_b| = n$; положим, $(abc) = \pm\frac{m}{n}$, причем условимся это отношение считать положительным, если P_a и P_b лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой c, и отрицательным в противном случае. Доказать, что величина $\frac{m}{n}$ не зависит от выбора точки P и что имеет место равенство:

$$(abc) = \frac{m}{n} = \frac{\sin(\widehat{c, a})}{\sin(\widehat{c, b})}.$$

[1] Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик.

23. Доказать: чтобы прямые x, y, z, проходящие соответственно через вершины A, B, C треугольника ABC, пересекались в одной точке или были параллельны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$(bcx)(cay)(abz) = -1, \text{ где } a = (BC), b = (CA), \ c = (AB).$$

(Это — аналог теоремы Менелая; прямые x, y, z следует считать отличными от прямых a, b, c.)

24*. Пусть прямые x, y, z, как и в предыдущей задаче, проходят через вершины треугольника ABC и пересекаются в точке S, не принадлежащей прямым AB, BC, CA. Рассмотрим прямые x', y', z', проходящие через A, B, C и симметричные прямым x, y, z соответственно, относительно биссектрис соответствующих внутренних углов треугольника ABC. Доказать, что x', y', z' либо также пересекаются в одной точке S', либо параллельны друг другу.

25*. Дан треугольник ABC и через его вершины A, B и C проведены соответственно прямые x, y, z, пересекающиеся в точке S. Обозначим $(BC) = a$, $(CA) = b$, $(AB) = c$. Проведем прямые $a' \parallel x$, $b' \parallel y$, $c' \parallel z$; эти прямые ограничивают треугольник $A'B'C' : A' = b' \cap c'$, $B' = c' \cap a'$, $C' = a' \cap b'$. Через точки A', B', C' проведем соответственно прямые $x' \parallel a$, $y' \parallel b$, $z' \parallel c$. Доказать, что эти прямые x', y', z' пересекаются в одной точке.

26*. Доказать теорему Чевы[1]: если на сторонах (BC), (CA), (AB) треугольника ABC даны соответственно точки X, Y, Z, то, для того чтобы прямые (AX), (BY) и (CZ) пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$.

27*. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ соответственно в точках M, N и P. Доказать, что прямые AM, BN и CP проходят через одну точку.

28*. На прямых BC, CA и AB, которым принадлежат стороны треугольника ABC, взяты точки X, Y, Z, причем $(AX) \cap (BY) \cap$ $\cap (CZ) = S$. Через точки X, Y, Z проведена окружность, пересекающая (BC), (CA) и (AB) еще соответственно в точках X', Y', Z'. Доказать, что (AX'), (BY'), (CZ') проходят через одну точку.

29*. На плоскости выбраны две прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$, причем точки O и O' не совпадают, ось Ox не параллельна оси $O'x'$ и единицы измерения длин в этих системах различны.

Существует ли точка плоскости, обе координаты которой в той и в другой системе координат одинаковы?

30*. В трапеции $ABCD$ $(AB) \parallel (DC)$, $|AB| < |CD|$ и $[AD] \cong$ $\cong [BC]$. В нее вписана окружность, к которой в точке P проведена касательная, параллельная (AC) и пересекающая (AD) и (DC) в точках M и N соответственно, причем $\frac{|PN|}{|PM|} = m < 1$.

---

[1] Джованни Чева (1648—1734) — итальянский геометр.

Вывести формулы, определяющие углы трапеции.

31.** В треугольнике ABC дано: $\widehat{A}=60°$, $\widehat{B}=45°$. На медианах $[AM]$ и $[BN]$ как на диаметрах построены окружности. В каком отношении радикальная ось этих окружностей делит среднюю линию треугольника, параллельную стороне $[AB]$?

32. Можно ли построить замкнутую ломаную так, чтобы каждое ее звено пересекалось с каким-то другим звеном (во внутренней точке) и чтобы пересекающиеся звенья были взаимно перпендикулярны? Может ли такая линия иметь 315 звеньев? Может ли она быть симметричной относительно некоторой оси?

33*. Данный разносторонний треугольник ABC разбить прямой, проходящей через точку A, на два треугольника, отношение периметров и площадей которых было бы одинаково.

34*. Внутри данного выпуклого четырехугольника $ABCD$ дана точка M. Вписать в этот четырехугольник $ABCD$ другой четырехугольник так, чтобы его стороны были соответственно параллельны прямым MA, MB, MC, MD.

35*. От данного угла отсечь прямою треугольник данной площади и данного периметра. Периметр задан отрезком длины $2p$, площадь задана как площадь квадрата со стороной длины q.

36. Можно ли конгруэнтными друг другу четырехугольниками (выпуклыми или невыпуклыми) «замостить» плоскость?

37. Можно ли в данном выпуклом многоугольнике найти точку, все проекции которой на прямые, содержащие стороны многоугольника, попали бы не на сами стороны, а только на их продолжения?

38. На стороне угла с вершиной O дана точка A и вне угла — точка B (рис. 2). Найти на другой стороне угла такую точку M, чтобы пересечение данного угла с углом AMB было равнобедренным треугольником с вершиной M.

39. В окружность вписана трапеция $ABCD$, причем $[BC]\parallel[AD]$ и $|BC|<|AD|$. Через центр окружности O проведен диаметр $[CM]$. Прямая BM пересекает сторону $[AD]$ в точке K. Точка L — проекция точки K на диаметр $[CM]$. Вычислить $|EF|$, если известно, что $|LC|=\frac{9}{8}R$, где R — радиус окружности, точка F — середина $[OM]$, точка E — середина диагонали $[BD]$.

40. Дана хорда $[AB]$ окружности, точка M — ее середина. На меньшей из дуг AB взяты произвольные точки C и E. Прямая CM пересекает окружность в точке D, прямая EM пересекает окружность в точке F, $(ED)\cap(AB)=P$, $(CF)\cap(AB)=Q$. Доказать, что $|AP|=|BQ|$.

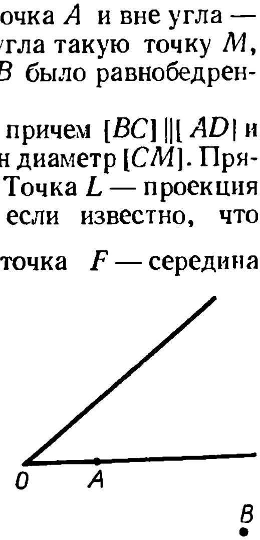


Рис. 2

41. Длина одной стороны прямоугольника 9 *см*, длина другой — 4 *см*. Разбить прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

42*. Данный квадрат разрезать на возможно меньшее число остроугольных треугольников.

43**. Четыре селения расположены в вершинах квадрата. Соединить эти селения сетью дорог так, чтобы суммарная длина всех дорог была наименьшей.

44**. Через две данные точки провести окружность, высекающую на данной прямой хорду данной длины.

45*. Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы две его биссектрисы были конгруэнтными. Доказать.

46**. В плоскости дано n произвольных точек, не принадлежащих одной прямой. Через каждые две из них проведена прямая. Доказать, что среди проведенных прямых существует хотя бы одна, которая проходит через две и только две точки.

Часть II.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 4. Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность. Построения на проекционном чертеже

1*. На сколько областей делят пространство n плоскостей, если каждые три из них имеют ровно одну общую точку, а никакие четыре общих точек не имеют?

2. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и не принадлежащая им точка P. Как определить (построить) проходящую через эту точку прямую, пересекающую прямые a и b?

3. Доказать, что для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую (имеется в виду пересечение только в одной точке). Вывести отсюда теорему о транзитивности отношения параллельности прямых в пространстве.

4. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ лежат в различных плоскостях, причем $(BC) \cap (B'C') = X$, $(CA) \cap (C'A') = Y$, $(AB) \cap (A'B') = Z$. Доказать, что а) $X \in (YZ)$; б) либо $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, либо $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$.

Доказать обратное предложение: если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеем: $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$ или $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$ и $(BC) \cap (B'C') = X$, $(CA) \cap (C'A') = Y$, $(AB) \cap (A'B') = Z$, то $X \in (YZ)$. Рассмотреть случай, когда соответственные стороны треугольников окажутся параллельными.

5*. Утверждения, аналогичные утверждениям в задаче 4, справедливы и для треугольников, лежащих в одной плоскости.

а) Доказать, что если два треугольнка ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости и удовлетворяют условию: $(BC) \cap (B'C') = X$, $(CA) \cap (C'A') = Y$, $(AB) \cap (A'B') = Z$, причем точки X, Y, Z принадлежат одной прямой, то либо $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, либо $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$. Это утверждение называется теоремой Дезарга[1].

б) Сформулировать и доказать обратную теорему.

6.** Совокупность прямых и точек, фигурирующая в теореме Дезарга, есть пример так называемой *конфигурации*: на каждой

[1] Жерар Дезарг (1593—1662) — выдающийся французский геометр, один из основоположников проективной геометрии.

прямой находится одно и то же число точек, а через каждую точку проходит одно и то же число прямых. В конфигурации Дезарга мы имеем 10 точек: A, B, C, A', B', C', X, Y, Z, S и 10 прямых: BC, $B'C'$, CA, $C'A'$, AB, $A'B'$, AA', BB', CC', YZ. Каждой прямой принадлежат три точки (из числа десяти перечисленных) и через каждую точку проходят три прямые[1].

Рассмотрим пространственный пятивершинник, в котором никакие четыре точки из пяти не принадлежат одной плоскости. Проводя прямую через каждые две точки и плоскость через каждые три, получим множество прямых и плоскостей. Доказать, что пересечение этой фигуры с плоскостью, пересекающей все прямые фигуры, есть конфигурация Дезарга.

7. а) В плоскости α даны две прямые a и b, точка пересечения которых недоступна. Вне этой плоскости дана точка P. Как определить прямую, содержащую точку P и недоступную точку пересечения прямых a и b?

б*) Решить ту же задачу для случая, когда P лежит в плоскости α, причем применяя только линейку.

8. Что из себя представляет множество точек, принадлежащих прямым, пересекающим одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельных второй из них?

9*. Дана плоскость α и треугольник ABC, плоскость которого не параллельна плоскости α. Найти в пространстве такую точку S, чтобы прямые SA, SB, SC в пересечении с плоскостью α дали такие три точки A', B', C', что треугольник $A'B'C'$ конгруэнтен другому данному треугольнику MNP.

10. Доказать, что необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является требование, чтобы всякая прямая, пересекающая данную плоскость (в одной точке), пересекала и другую. Вывести отсюда теорему о транзитивности отношения параллельности плоскостей.

11. Существует одна и только одна пара параллельных друг другу плоскостей, содержащих по одной из двух данных скрещивающихся прямых. Доказать.

12. Три параллельные друг другу плоскости определяют на двух пересекающих эти плоскости прямых две пары пропорциональных отрезков. Доказать.

13*. Прямая движется так, что она все время остается параллельной данной плоскости α и в то же время пересекает две данные скрещивающиеся прямые a и b. Какую линию описывает точка такой прямой, делящая в постоянном отношении отрезок этой прямой между точками ее пересечения с прямыми a и b?

14. Даны четыре не принадлежащие одной плоскости точки A, B, C, D. Пусть M — середина $[AB]$, N — середина $[CD]$, P — середина $[BC]$, Q — середина $[AD]$, R — середина $[AC]$, S — сере-

---

[1] Простейший пример конфигурации — треугольник: каждая прямая содержит две точки, через каждую точку проходят две прямые.

дина $|BD|$. Доказать, что три прямые MN, PQ и RS пересекаются в одной точке.

15. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c. Как построить прямую, пересекающую a и b и параллельную c? Всегда ли существует такая прямая?

16. Скрещивающиеся прямые a и b пересекают плоскость γ в точках A и B. Как построить на этих прямых точки $M \in a$ и $N \in b$ так, чтобы было $(MN) \parallel \gamma$ и $|MN| = d$ (d задано)?

17. Для изображения точек A, B, C, ... в пространстве для большей наглядности пользуются условным изображением некоторой фиксированной («основной») плоскости α и изображениями A', B', C', ... параллельных проекций этих точек на плоскость α. Выполнить следующие построения:

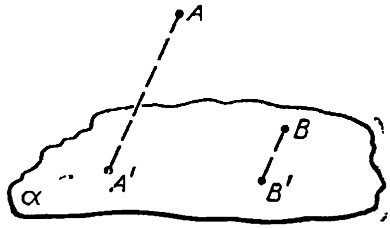


Рис. 3

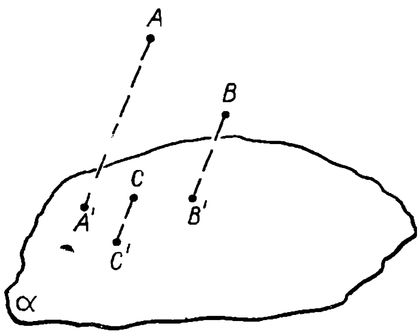


Рис. 4

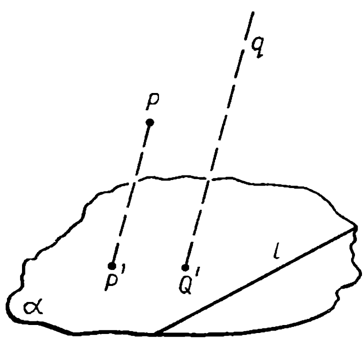


Рис. 5

а) по данным изображениям точек A и B (рис. 3) построить изображение прямой AB и ее проекции на плоскость α. Найти точку P, которая изображает пересечение прямой AB и плоскости α (след (AB) на α);

б) по изображению трех не принадлежащих одной прямой точек A, B, C (рис. 4) найти точки X, Y, Z пересечения прямых BC, CA и AB с плоскостью α. Доказать, что точки X, Y, Z принадлежат одной прямой. [Эта прямая является пересечением плоскости ABC с плоскостью α — следом (ABC) на α].

18. На рисунке 5 даны прямая l пересечения плоскости β с основной плоскостью α и точка P, принадлежащая этой плоскости β. Прямая q, пересекающая основную плоскость в точке Q', параллельна (PP'). Построить изображение точки Q, в которой прямая q пересекает плоскость β.

19. Дано изображение пятиугольной призмы и трех точек на ее боковых ребрах. Построить изображение сечения этой призмы плоскостью, проходящей через эти три точки.

20. Дано изображение пятиугольной пирамиды. Построить изображение сечения этой пирамиды плоскостью, которая задана прямой l ее пересечения с плоскостью основания, причем эта прямая самого основания не пересекает, и одной своей точкой (P) на ребре пирамиды.

21*. Плоскость β задана своим следом b на основной плоскости α и изображением принадлежащей ей точки B вместе с проекцией B'. Плоскость γ задана также своим следом c и изображением принадлежащей ей точки C вместе с проекцией C'. Построить изображение линии пересечения плоскостей β и γ.

22*. Прямая l задана изображениями принадлежащих ей точек M и N (с их проекциями). Плоскость β задана следом b и точкой B (с проекцией). Построить изображение точки пересечения плоскости β с прямой l.

23. Плоскость β задана следом и точкой B. Построить изображение плоскости γ, параллельной плоскости β и проходящей через точку P, заданную ее изображением и проекцией.

24. Пусть треугольник $A'B'C'$ есть параллельная проекция данного треугольника ABC. Доказать, что на изображении треугольника $A'B'C'$ можно осуществить построение точки P', являющейся проекцией данной точки P в плоскости треугольника ABC. Как построить изображение перпендикуляра к прямой AB, проведенного через точку C?

25. Данный параллелограмм $A'B'C'D'$ есть изображение квадрата $ABCD$. Как построить изображение вписанной в квадрат окружности? (Изображение окружности в параллельной проекции есть эллипс. Взаимно перпендикулярным диаметрам окружности соответствуют сопряженные диаметры эллипса, каждый из которых проходит через середины всех хорд эллипса, параллельных другому.)

26. Три не принадлежащие одной прямой точки являются изображениями трех вершин равностороннего треугольника. Построить изображение окружности, описанной около этого треугольника.

27. Даны три не принадлежащие одной прямой точки — проекции трех несмежных вершин правильного шестиугольника. Построить проекцию этого шестиугольника, а также изображение проекции вписанной в шестиугольник окружности.

28. Даны четыре точки A, B, C, D — проекции вершин квадрата. Построить изображение окружности, описанной около этого квадрата, а также изображение правильного восьмиугольника, вписанного в ту же окружность.

29*. Дано изображение параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ и трех точек: $M \in [AA']$, $N \in [BC]$, $P \in [C'D']$. Построить изображение сечения параллелепипеда плоскостью MNP.

30*. Дано изображение параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ и трех точек: M — на грани $ABCD$, N — на грани $CC'D'D$, P — на грани $AA'D'D$. Построить изображение сечения параллелепипеда плоскостью MNP.

§ 5. Векторы в пространстве. Перпендикулярность и ортогональная проекция. Метод координат в пространстве

1. Доказать, что для векторов в пространстве остаются в силе свойства векторных операций, установленные для векторов плоскости:

а) переместительный и сочетательный законы сложения векторов, сочетательное свойство умножения вектора на число, распределительные законы для умножения вектора на сумму чисел и суммы векторов на число;

б) при том же, что и в случае плоскости, определении скалярного произведения двух векторов (см. § 2, задача 28) справедливы переместительный, сочетательный (для умножения одного из векторов на число) и распределительный законы.

2. По двум скрещивающимся прямым a и b движутся точки A и B, соответственно, первая с постоянной скоростью $\vec{m}$, вторая — с постоянной скоростью $\vec{n}$. Какую линию описывает точка $P \in [AB]$, удовлетворяющая условию $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{AB}} = k$? (Для векторов в пространстве обозначение $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ имеет прежний смысл — см. § 2 задача 4.)

3. Даны три попарно скрещивающиеся прямые m, n, p. Как построить параллелепипед, три ребра которого лежали бы на этих трех прямых? Доказать, что существует ровно один такой параллелепипед.

4. Доказать: необходимое и достаточное условие того, чтобы точки A, B, C, D принадлежали одной плоскости, заключается в том, что в любом соотношении (равенстве), связывающем векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, суммы числовых коэффициентов правой и левой части равенства были равны между собой.

5. Доказать, что если провести плоскость через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, то эта плоскость отсекает на диагонали параллелепипеда, проведенной из той же вершины, $\frac{1}{3}$ часть ее длины.

6*. Примем, что в пространстве, как и в плоскости, центр масс двух точек A_1 и A_2, обладающих массами m_1 и m_2, определяется формулой $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}$, или, в сокращенной записи, $\vec{P} = \frac{m_1\vec{A_1} + m_2\vec{A_2}}{m_1 + m_2}$.

Распространить эту формулу на систему n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и доказать, что положение центра масс, определяемое вектором P, не зависит от выбора начала — точки O

7*. У модели правильной четырехугольной пирамиды все грани сделаны из однородных пластинок одного материала (и имеют одинаковую толщину). Боковые ребра пирамиды вдвое длиннее сторон основания. Определить положение центра масс пирамиды, зная радиус-векторы вершины S и четырех вершин основания A_1, A_2, A_3, A_4.

8. Доказать, что боковое ребро правильной треугольной пирамиды перпендикулярно к противолежащей стороне основания.

9. Из данного начала O провести 4 луча так, чтобы все 6 углов между ними были конгруэнтны между собой.

10. Три попарно неколлинеарные и ненулевые радиус-векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ компланарны. Прямая p образует со всеми этими векторами одинаковые по величине углы. Доказать, что прямая p перпендикулярна плоскости ABC.

11. Некомпланарные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ удовлетворяют условию: $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$. Точка P — центр окружности, проходящей через точки A, B и C. Доказать, что прямая OP перпендикулярна плоскости ABC.

12. Доказать, что если одна из двух взаимно перпендикулярных (пересекающихся или скрещивающихся) прямых параллельна данной плоскости γ, а другая — не перпендикулярна γ, то ортогональные проекции этих прямых на плоскость γ взаимно перпендикулярны. Верна ли обратная теорема?

13. Доказать, что если плоскость β пересекается с плоскостью α по прямой l и прямая p перпендикулярна плоскости β, то проекция p' прямой p на плоскость α перпендикулярна прямой l.

14. Дана плоскость α и точка P. Как через точку P провести прямую p, перпендикулярную плоскости α? Доказать единственность такой прямой.

15. Доказать существование взаимно симметричных относительно данной плоскости точек: если дана плоскость α и вне ее точка A, то по другую сторону от плоскости α существует единственная точка A', удовлетворяющая условиям: а) $(AA') \perp \alpha$; б) $(AA') \cap \alpha = S$ и притом $\overrightarrow{SA'} = -\overrightarrow{SA}$. Доказать, что плоскость α есть множество точек, равноудаленных от точек A и A' [Отображение пространства, при котором каждой точке A ставится в соответствие указанным образом точка A', называется *симметрией относительно плоскости* α (или отражением в плоскости α)].

16. Доказать, что симметрия относительно плоскости (см. предыдущую задачу) есть отображение пространства *на* себя, обладающее следующими свойствами:

а) если точка A отображается при симметрии на A', то, обратно, A' отображается на A; точки самой плоскости симметрии неподвижны (отображаются сами в себя);

б) симметрия сохраняет расстояние между точками: если A отображается на A', а B — на B', то $|AB| = |A'B'|$. (Следовательно, симметрия относительно плоскости является перемещением);

в) симметрия отображает прямую на прямую, а плоскость — на плоскость;

г) прямые и плоскости, проходящие через две взаимно симметричные точки, инвариантны, т. е. отображаются сами на себя; такие прямые и плоскости перпендикулярны плоскости симметрии

17. Доказать, что два несовпадающих луча с общим началом определяют единственную плоскость, относительно которой они взаимно симметричны. Доказать, что эта плоскость есть множество точек, принадлежащих всем лучам, имеющим то же начало и образующим с данными лучами конгруэнтные углы.

18. По одну сторону от плоскости α расположены точки A и B. Найти в этой плоскости такую точку M, чтобы сумма расстояний $|AM| + |MB|$ была наименьшая.

19. Две точки A и B находятся по разные стороны от плоскости α. Найти в плоскости α такую точку M, чтобы разность расстояний $||AM| - |MB||$ была бы наибольшей (по абсолютной величине).

20. Через данную точку P провести прямую, перпендикулярную двум скрещивающимся прямым a и b.

21. Отрезок постоянной длины «скользит» своими концами по двум взаимно перпендикулярным скрещивающимся прямым. Какую линию при этом описывает середина отрезка?

22. Доказать, что если из одной точки к данной плоскости проведены две конгруэнтные наклонные, то величина угла между наклонными меньше величины угла между ортогональными проекциями наклонных на данную плоскость.

23. На изображении куба построить отрезок, определяющий расстояние между двумя скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба. Вычислить это расстояние, если длина ребра куба равна a.

24*. Доказать, что композиция симметрий относительно двух параллельных плоскостей есть вектор (параллельный перенос), направленный перпендикулярно этим плоскостям от первой ко второй, причем его длина равна удвоенному расстоянию между плоскостями.

Доказать обратное предложение: всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции двух симметрий относительно плоскостей. Как построить такие плоскости?

25*. Доказать, что композиция трех симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей есть центральная симметрия. Как найти ее центр? Как, обратно, представить центральную симметрию в виде композиции трех симметрий относительно плоскостей?

26*. Каким отображением является композиция двух гомотетий в пространстве? Если это отображение будет гомотетией, то каков будет ее коэффициент? Как определить положение ее центра?

27. Как построить куб по данной его диагонали?

28. Как построить куб с данной величиной разности между длинами его диагонали и стороны?

29. В данную правильную четырехугольную пирамиду вписать куб так, чтобы четыре вершины одной из его граней лежали на четырех боковых ребрах пирамиды.

30. Для введения в пространстве координат пользуются системой координат — *репером* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, где O — начало координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты (векторы единичной длины), определяющие направление осей Ox, Oy, Oz. Разлагая вектор $\vec{r}$ по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получим: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Векторы $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ называются *компонентами* вектора $\vec{r}$ по осям Ox, Oy, Oz или же проекциями $\vec{r}$ на эти оси. Числа (x, y, z) называются *координатами* вектора $\vec{r}$. Наконец, если $\vec{r}$ есть радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M, то эти же числа называются *координатами точки* M. Используя однозначность разложения вектора по трем некомпланарным векторам, доказать следующие свойства проекций вектора на ось:

а) при умножении вектора на число его проекция умножается на то же число;

б) проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых.

31. Выразить скалярное произведение $\vec{r}_1\vec{r}_2$ в координатах, если $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Вычислить $\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Написать в координатах условия коллинеарности и перпендикулярности векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Какой формулой выразится расстояние между точками, координаты которых суть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)?

32. Вектор $\vec{r}$ образует с осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{r}$. Доказать формулу: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

33. Вектор $\vec{r}$ образует с осями Ox и Oy углы по 60°. Какой угол образует этот вектор с осью Oz?

34. Четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, заданы своими координатами: $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$. Найти координаты такой точки M, чтобы силы, пропорциональные векторам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ и приложенные к точке M, уравновешивали друг друга, т. е. чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

35*. В пространстве дано n точек: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с координатами (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ и с помещенными в них массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Написать формулу для координат центра масс этих точек.

36*. Каркасная модель тетраэдра (без граней) сделана из однородной металлической проволоки. Вершины тетраэдра A, B, C, D имеют соответственно координаты: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4). Найти координаты центра тяжести этого тела.

37. Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти координаты точки, принадлежащей оси Ox и находящейся на равных расстояниях от данных точек.

38. Вычислить угол между биссектрисами координатных углов xOy и yOz.

39. Центр нижнего основания куба соединен прямыми с четырьмя вершинами верхнего основания куба. Вычислить углы между этими прямыми.

40. Прямая l проходит через начало координат, ее направление определяется ортом (вектором единичной длины) $\vec{e}$, образующим углы α, β и γ с осями координат Ox, Oy, Oz. Любая точка M этой прямой определяет радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, коллинеарный с ортом $\vec{e}$. Условие коллинеарности записывается как уравнение прямой:

$$\vec{r} = t\vec{e}, \tag{1}$$

где t — переменный параметр, пробегающий все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Привести уравнение (1) к координатной форме:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}\text{[1]}. \tag{2}$$

41. Доказать, что система уравнений вида

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \tag{3}$$

---

[1] Это двойное равенство — удобная запись для системы двух равенств; поэтому мы и говорим о системе уравнений.

задает прямую, проходящую через начало координат. Как привести эти уравнения к виду (2) из предыдущей задачи? При каких значениях m, n, p эта прямая будет лежать в одной из плоскостей координат? совпадать с одной из осей координат?

42. Точка M в пространстве задана радиус-вектором $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ с координатами (x_1, y_1, z_1). Прямая, проходящая через точку M определена ортом $\vec{e}$, образующим углы α, β, γ с осями Ox, Oy, Oz. Пусть $\vec{r}$ — переменный радиус-вектор, соответствующий точкам рассматриваемой прямой. Исходя из того что вектор $\vec{r}-\vec{a}$ коллинеарен с вектором $\vec{e}$, написать уравнение прямой, проходящей через данную точку, в векторной форме, а затем — систему уравнений в координатах.

43. Доказать, что система уравнений вида $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=$ $=\frac{z-z_1}{p}$ задает прямую, проходящую через точку с координатами (x_1, y_1, z_1).

Как, пользуясь этими уравнениями, получить уравнения прямой, проходящей через две точки, заданные своими координатами: (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)?

44. Две прямые заданы системами уравнений:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Написать условие параллельности этих прямых. Написать условие их перпендикулярности.

45. Написать систему уравнений прямой, проходящей через начало координат и образующей равные углы с тремя координатными осями. Определить величину этих углов. Сколько решений имеет задача?

46. Написать систему уравнений прямой, проходящей через точку (3; —2; 1) и перпендикулярной к прямым, заданным системами:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}.$$

47. На луче, исходящем из начала координат, даны две точки с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Расстояния от этих точек до начала координат равны r_1 и r_2. Доказать равенство:

$$r_1r_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

48. Из начала координат к данной плоскости проведен перпендикуляр $[OP]$, определяющий расстояние от этой плоскости до начала. Введем обозначения: $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, $|\vec{p}|=p$ — упомянутое расстояние; $\vec{e}$ — орт вектора $\vec{p}$ (тогда $\vec{p}=p\vec{e}$); α, β, γ — углы между

ортом $\vec{e}$ и осями координат. Подобно тому как на плоскости выводилось уравнение прямой в координатах, вывести уравнение плоскости в пространстве:

а) в векторной форме: $\vec{r}\vec{e} = p$;

б) в координатной форме:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p.$$

Последнее уравнение будем называть нормальным уравнением плоскости.

49. Доказать, что всякое уравнение вида $\vec{r}\vec{a} = m$, где $\vec{r}$ — переменный вектор, $\vec{a}$ — фиксированный ненулевой вектор, m — действительное число, есть уравнение плоскости.

Доказать также, что всякое линейное уравнение с тремя переменными вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, есть уравнение плоскости. Как привести его к нормальному виду?

50. Даны уравнения двух плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Найти условия параллельности и перпендикулярности этих плоскостей.

51. Даны уравнения плоскости и прямой:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ и } \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Найти условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

52. Найти уравнения прямой, проходящей через точку с координатами (3, —2, 4) перпендикулярно плоскости, заданной уравнением $5x - 3y + 3z = 10$.

53*. Доказать, что если в левую часть нормального уравнения плоскости, записанного в виде:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

подставить координаты произвольной точки, то получим число, абсолютная величина которого есть расстояние от этой точки до плоскости. Число это положительно, если точка и начало координат находятся по разные стороны от плоскости, и отрицательно в противном случае.

54*. Даны уравнения двух плоскостей в нормальной форме. Как из них получить уравнение множества точек, находящихся на одинаковых расстояниях от обеих плоскостей? (Это множество есть объединение биссекторных плоскостей двугранных углов между заданными плоскостями.)

55. Точки A и A' заданы своими координатами: (7, 1, 4) и (3, 5, 2). Найти уравнение плоскости, относительно которой эти точки симметричны.

56. Доказать, что уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ задает плоскость, пересекающую оси координат в точках с координатами a, b, c. Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*. При каких условиях уравнение общего вида $Ax+By+Cz+D=0$ можно преобразовать в уравнение в отрезках?

57*. Доказать, что плоскость, пересекающая оси координат в точках с координатами по этим осям a, b и c, находится от начала координат на расстоянии p, удовлетворяющем соотношению

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

58. Плоскости заданы уравнениями:

$$3x+4y-2z=5,$$
$$2x+3y-z=3.$$

Написать в стандартном виде (см. задачи 42, 43) систему уравнений, задающую прямую пересечения этих плоскостей.

59. Вычислить координаты точки пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями:

$$3x-y+4z=2,$$
$$-3x+4y-3z=4,$$
$$-x+y-z=5.$$

60. Центр сферы Q имеет координаты (a, b, c), радиус сферы равен R. Обозначая переменный радиус-вектор через $\vec{r}$, а радиус-вектор точки Q через $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$, вывести векторное уравнение сферы как множества точек, находящихся на расстоянии R от точки Q. Получить отсюда уравнение сферы в координатах (аналогичное уравнению окружности в координатах на плоскости):

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

61. Написать общее уравнение сферы, центр которой совпадает с началом координат. Написать общее уравнение сферы, проходящей через начало координат и с центром на оси Ox.

62*. Даны две точки: $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Точка P определяет два вектора: $\overrightarrow{PA_1}=\vec{q}_1$ и $\overrightarrow{PA_2}=\vec{q}_2$. Что из себя представляет множество точек P, для которых выполняется условие: $\vec{q}_1\vec{q}_2=0$?

63. Доказать, что если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то эта сфера и плоскость имеют в точности одну общую точку. (В этом случае плоскость называется *касательной* к сфере.) Доказать обратное предложение.

64*. Центр сферы Q определяется радиус-вектором $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$. Произвольная точка P сферы определяется радиус-вектором $\vec{r}_1$

с координатами (x_1, y_1, z_1). Произвольная точка M плоскости, касающейся сферы в точке P, задается переменным радиус-вектором $\vec{OM} = \vec{r}$ с координатами (x, y, z). Доказать, что уравнение касательной плоскости можно записать в виде: $(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r_1} - \vec{q}) = 0$.

Привести это уравнение к виду: $(\vec{r} - \vec{q})(\vec{r_1} - \vec{q}) = R^2$ и получить отсюда уравнение касательной плоскости в координатной форме.

65*. Ссновываясь на тождестве:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})^2}{2} - \frac{(\vec{a} - \vec{b})^2}{2},$$

доказать, что если даны сфера с центром Q и радиусом R и произвольная точка M на расстоянии m от центра, а также диаметр сферы $[AB]$, то для векторов $\vec{a} = \vec{MA}$ и $\vec{b} = \vec{MB}$ справедливо соотношение:

$$\vec{a}\vec{b} = m^2 - R^2 = \pm p^2.$$

Эта величина, не зависящая от выбора диаметра AB, называется *степенью точки M* относительно сферы с центром Q.

66*. Доказать: если уравнение сферы записать в виде:

$$(\vec{r} - \vec{q})^2 - R^2 = 0,$$

то, подставив в его левую часть произвольный вектор $\vec{r_1} = \vec{OM}$, получим число, равное степени точки M относительно сферы.

67*. Доказать, что множество точек, имеющих одинаковую степень относительно двух не концентрических сфер, есть плоскость, перпендикулярная линии центров этих сфер. Эта плоскость называется *радикальной плоскостью* этих сфер.

68*. а) Доказать, что если центры трех сфер не принадлежат одной прямой, то множество точек, имеющих одинаковые степени относительно всех трех сфер, есть прямая — *радикальная ось* трех сфер. Эта прямая перпендикулярна плоскости, проходящей через центры сфер.

б) Доказать, что если центры четырех сфер не принадлежат одной плоскости, то существует единственная точка, степень которой относительно всех четырех сфер одна и та же — *радикальный центр* этих сфер.

69. Доказать, что существует бесконечное множество сфер, имеющих общую радикальную плоскость. Они образуют так называемый пучок сфер. Центры всех этих сфер лежат на одной прямой, перпендикулярной к общей радикальной плоскости — на линии центров пучка.

70. а) Доказать, что существует бесконечное семейство сфер, имеющих одну общую радикальную ось — так называемая *связка сфер*. Центры таких сфер принадлежат одной и той же плоскости

центров связки, причем эта плоскость перпендикулярна радикальной оси пучка.

б) Доказать, что существует бесконечное множество сфер, имеющих общий радикальный центр, — так называемая *сферическая сеть.*

§ 6. Двугранные и многогранные углы. Перемещения пространства

1. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости одной из граней острого двугранного угла, наибольший угол с плоскостью второй грани образуют прямые, перпендикулярные ребру двугранного угла.

[Если вторая грань данного двугранного угла горизонтальна, то прямая, проведенная в плоскости первой грани перпендикулярно ребру, называется *линией наибольшего уклона* или *линией ската*: по этой линии скатывается вниз тяжелый шар.]

2. Два плоских зеркала служат гранями двугранного угла. Луч света, перпендикулярный ребру угла и параллельный первому зеркалу, отражается от второго зеркала, затем от первого, потом — вновь от второго, вновь от первого и, наконец, отразившись в последний (пятый) раз от второго зеркала, возвращается обратно по той же прямой. Какова величина двугранного угла между зеркалами?

(Напомним, что по законам отражения света падающий и отраженный лучи лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости зеркала, и образуют с плоскостью зеркала углы равной величины.)

3. Что из себя представляет множество точек, ортогональными проекциями которых на две пересекающиеся плоскости являются две прямые?

4. Плоскость пересекает грани и ребро двугранного угла, причем проекция ребра на эту плоскость совпадает с биссектрисой угла, получающегося в пересечении плоскости с двугранным углом. Ребро образует с рассматриваемой плоскостью угол величиной α, а величина угла в пересечении равна β. Найти величину данного двугранного угла.

5. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, и не принадлежащая ни одной из них точка P. Провести через эту точку плоскость так, чтобы она образовала с данными прямыми равные углы.

6. Из точки O на ребре двугранного угла в одной из его граней проведен луч. Провести из той же точки в другой грани луч, перпендикулярный первому лучу.

7*. На двух гранях двугранного угла даны точки A и B. Найти на ребре угла такую точку M, чтобы угол AMB был прямой.

8*. Что из себя представляет множество точек, сумма расстояний от которых до двух пересекающихся плоскостей постоянна и равна данной величине p?

9. Полуплоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеют общее ребро l. Чему равна сумма величин двугранных углов $\widehat{\alpha_1 l \alpha_2}$, $\widehat{\alpha_2 l \alpha_3}$, ..., $\widehat{\alpha_{n-1} l \alpha_n}$, $\widehat{\alpha_n l \alpha_1}$, дающих в объединении все пространство?

10. Луч, перпендикулярный грани двугранного угла и направленный в полупространство, определяемое плоскостью этой грани и не содержащее другую грань, называется *внешней нормалью* этого угла. Доказать, что сумма величины угла между двумя внешними нормалями двугранного угла и величины линейного угла двугранного угла равна $180°$.

11* Из точки M на ребре двугранного угла в одной из его граней проведен луч. Провести из той же точки M в другой грани луч, образующий с первым лучом угол данной величины.

12*. Даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые a и b и точка P. Что из себя представляет множество точек M, для которых сумма длин проекций отрезка PM на прямые a и b постоянна? [Проекцией точки A на прямую l называется точка $A' \in l$ такая, что $(AA') \perp l$; если $A \in l$, то $A' = A$. Проекцией отрезка AB на прямую l называется отрезок $A'B'$, где точки A' и B' суть проекции точек A и B на прямую l.]

13. Через данную прямую провести плоскость, образующую с другой данной плоскостью двугранный угол данной величины.

14. Доказать, что:

а) сумма величин трех плоских углов трехгранного угла меньше 2π;

б) сумма величин двух плоских углов трехгранного угла больше величины третьего угла.

15. Четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие одной плоскости, определяют замкнутую ломаную линию $ABCDA$ (иногда эту фигуру называют «косым» или пространственным четырехугольником). Доказать, что $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} < 360°$.

16. Что из себя представляет множество точек, равноудаленных от плоскостей всех трех граней трехгранного угла и лежащих внутри этого угла?

17. Что из себя представляет множество точек, равноудаленных от трех прямых, содержащих ребра трехгранного угла, и лежащих внутри этого угла?

18. Семейство параллельных плоскостей, пересекая все грани трехгранного угла, образует семейство треугольников. Что из себя представляет множество *центроидов* (точек пересечения медиан) этих треугольников? Множество *ортоцентров* (точек пересечения высот) этих треугольников?

19. Данный трехгранный угол пересечь плоскостью, образующей с его ребрами углы равной величины.

20. Данный трехгранный угол пересечь плоскостью, образующей с его гранями конгруэнтные двугранные углы.

21. Доказать, что если в трехгранном угле два плоских угла конгруэнтны, то конгруэнтны и противолежащие им двугранные углы. Доказать обратное предложение.

22. Трехгранный угол, в котором все плоские углы — прямые, называется *ортогональным* (например, таков трехгранный угол $Oxyz$ в прямоугольной системе координат[1]). Доказать, что для ортогонального трехгранного угла: а) три точки, лежащие на трех его ребрах и не совпадающие с вершиной O, являются вершинами остроугольного треугольника; б) проекция вершины O на плоскость этого треугольника совпадает с ортоцентром треугольника.

23. Данный ортогональный трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в пересечении получился треугольник, конгруэнтный данному остроугольному треугольнику.

24. Пусть $Oabc$ — ортогональный трехгранный угол. Доказать, что для произвольных точек $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ сумма квадратов площадей треугольников BCO, CAO и ABO равна квадрату площади треугольника ABC.

25. Проведем из вершины S трехгранного угла $Sabc$ внешние нормали[2] a', b', c' к граням bSc, cSa и aSb соответственно: получим новый трехгранный угол $Sa'b'c'$, который называется *полярным* по отношению к углу $Sabc$. Доказать: а) трехгранный угол, полярный к $Sa'b'c'$, есть исходный угол $Sabc$; б) величина плоского угла aSb данного трехгранного угла в сумме с величиной двугранного угла при ребре Sc' в полярном угле дает 180°.

26. Доказать, что во всяком трехгранном угле сумма величин его двугранных углов больше 180°.

27. Треугольник ABC в плоскости чертежа α является пересечением этой плоскости с ортогональным трехгранным углом $Oxyz$, причем $A = Ox \cap \alpha$, $B = Oy \cap \alpha$, $C = Oz \cap \alpha$. Построить на этом чертеже: а) изображение ортогональной проекции точки O на плоскость α; б) изображение точек M, N и P, лежащих на лучах Ox, Oy, Oz на равных расстояниях от точки O.

28*. Определим величину трехгранного угла $SABC$ как $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$, где $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — величины двугранных углов при ребрах SA, SB, SC. Доказать, что: а) величина трехгранного угла всегда положительна; б) если данный трехгранный угол разбить на два трехгранных угла плоскостью, проходящей через одно из его ребер, то величина данного угла равна сумме величин двух получившихся углов.

29. Рассмотрим n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ и точку S вне его плоскости. Множество всех точек, принадлежащих лучам с началом в S и проходящим через точки n-угольника, является n-гранным углом. Доказать, что если исходный n-угольник выпуклый, то соответствующий n-гранный угол есть пересечение n полупро-

---

[1] Здесь и далее трехгранный угол с вершиной S и ребрами $a = [SA)$, $b = [SB)$, $c = [SC)$ обозначается $Sabc$ или $SABC$.

[2] См. задачу 10.

странств, определяемых n плоскостями, пересекающимися в точке S. (Такой угол называется выпуклым многогранным углом.)

30. Пользуясь методом математической индукции, доказать, что сумма величин плоских углов выпуклого многогранного угла (см. задачу 29) меньше 2π.

31*. Данный выпуклый четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

32. Доказать, что выпуклый многогранный угол можно разбить на трехгранные углы плоскостями, проходящими через его несмежные ребра.

33*. Величина многогранного угла $SA_1A_2 \dots A_n$ определяется как разность между суммой величин всех его двугранных углов и суммой величин внутренних углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, получающегося в сечении многогранного угла плоскостью (заметим, что последняя сумма равна $\pi(n-2)$ при любом выборе сечения). Доказать, что эта величина всегда положительна и *аддитивна*, т. е. если данный многогранный угол является объединением двух многогранных углов, имеющих общую грань, то величина данного угла равна сумме величин составляющих его углов.

34*. Какова величина ортогонального трехгранного угла? Какова сумма величин многогранных углов, имеющих общую вершину, не имеющих общих внутренних точек и дающих в объединении все пространство?

35. Если из центра куба провести лучи к его вершинам, то эти лучи можно рассматривать как ребра шести четырехгранных углов, на которые разбивается все пространство. Вычислить величины плоских и двугранных углов этих четырехгранных углов.

36*. Как построить трехгранный угол по данным величинам его плоских углов?

37*. Как построить трехгранный угол по данным величинам его двугранных углов?

38. Напомним, что симметрией пространства относительно оси s называется перемещение пространства, при котором точки прямой s остаются неподвижными, т. е. отображаются сами на себя, а каждая точка $A \notin s$ отображается в точку A' такую, что $A' \neq A$, $(AA') \perp s$, $(AA') \cap s = M$, и $|AM| = |A'M|$. Доказать, что: а) осевая симметрия отображает прямую на прямую и плоскость — на плоскость; б) прямые, перпендикулярные s, отображаются на прямые, тоже перпендикулярные s; если при этом перпендикулярная прямая пересекает ось s, то она отображается на себя; в) плоскости, перпендикулярные s, отображаются на себя.

39. а) Доказать, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом пространства. Как определить длину и направление этого переноса (вектора)? б) Доказать, что любой параллельный перенос пространства можно представить как композицию двух осевых симметрий. Как построить оси таких симметрий?

40. а) Доказать, что композиция симметрий относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей есть осевая симметрия. б) Доказать, что любую осевую симметрию пространства можно представить в виде композиции двух симметрий относительно взаимно перпендикулярных плоскостей. Как построить такие плоскости?

41*. Что из себя представляет композиция двух осевых симметрий со взаимно перпендикулярными (пересекающимися или скрещивающимися) осями?

42. Поворот пространства относительно оси l есть такое перемещение пространства, при котором точки прямой l остаются неподвижными, а каждая точка A, не принадлежащая l, отображается на точку A' такую, что точки A и A' принадлежат плоскости γ, перпендикулярной прямой l, причем величина угла AA_0A', где $A_0 = \gamma \cap l$, не зависит от A — это величина угла поворота. При этом еще требуется, чтобы направление поворота (в плоскости γ) от точки A к точке A' было одинаковым для всех точек A, если смотреть «вдоль прямой l» в фиксированном направлении.

Доказать, что прямая a, перпендикулярная оси поворота, отображается при повороте на прямую a', лежащую в одной плоскости с a, причем угол между прямыми a и a' равен углу поворота.

43. а) Каким отображением является композиция двух симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей? б) Доказать, что любой поворот пространства относительно оси можно представить в виде композиции симметрий относительно двух плоскостей. Как построить такие плоскости?

44*. а) Доказать, что композиция двух осевых симметрий пространства с пересекающимися осями есть поворот относительно оси. Как построить ось поворота? Как определить величину угла поворота? б) Доказать, что любой поворот пространства относительно оси можно представить в виде композиции двух осевых симметрий. Как построить оси таких симметрий?

45*. Доказать, что композиция двух поворотов пространства с пересекающимися осями есть снова поворот. Как построить ось и найти угол результирующего поворота?

46. В пространстве дана прямая l и точки A и B, причем прямые AB и l скрещиваются. Найти на прямой l такую точку M, чтобы сумма расстояний $|AM| + |MB|$ была наименьшей.

47*. Даны два конгруэнтных треугольника AOB и $A'OB'$ (с общей вершиной O), не лежащих в одной плоскости. Доказать, что существует поворот пространства относительно оси, отображающий первый треугольник на второй.

48*. Даны биссектрисы трех плоских углов некоторого трехгранного угла. Восстановить (построить) по ним этот трехгранный угол.

49. Рассмотрим поворот с осью l на угол, равный $\frac{2\pi}{n}$, где n — натуральное число, $n \geqslant 3$. Из точки S на оси l проведем луч, образующий с l угол $\varphi < 90°$. Тогда n лучей, получающихся из этого луча последовательным применением рассматриваемого поворота, можно принять за ребра n-гранного угла. Доказать, что: а) все плоские углы этого n-гранного угла конгруэнтны между собой; б) все двугранные его углы тоже конгруэнтны между собой.

Многогранный угол, обладающий указанными свойствами а) и б), называется *правильным*.

50. Доказать обратное предложение: если n-гранный угол — правильный, то существует ось, при повороте около которой на угол $\frac{2\pi}{n}$ n-гранный угол совмещается сам с собой. Эту ось мы будем называть осью симметрии правильного n-гранного угла.

51. В правильном n-гранном угле ребра образуют с его осью симметрии углы величиной φ. Вычислить величины плоских и двугранных углов этого n-гранного угла.

52. Как построить правильный четырехгранный угол, плоские углы которого имеют величину $\frac{\pi}{3}$?

53*. Даны две скрещивающиеся прямые a и a'. На первой из них дана точка A, на второй — точка A'. Найти поворот пространства относительно оси, отображающий a на a' и A на A' (построить ось такого поворота).

54. Даны скрещивающиеся прямые a и b, образующие с некоторой прямой l равные углы. Доказать, что существует поворот с осью l, отображающий прямую a на прямую a', параллельную b.

55*. Даны четыре отрезка A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, из которых никакие три не лежат в одной плоскости, причем все они параллельны друг другу и в то же время попарно не конгруэнтны. Как расположены центры шести гомотетий, отображающих A_i на A_j и B_i на B_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$?

56*. Доказать, что два подобных, но не конгруэнтных друг другу треугольника в пространстве можно отобразить один на другой композицией гомотетии и поворота относительно оси.

57. Доказать, что две любые сферы разного радиуса гомотетичны одна другой. Как определить центр и коэффициент соответствующей гомотетии?

58. Три сферы с разными радиусами и центрами, не принадлежащими одной прямой, лежат каждая вне двух других. Какую фигуру образуют прямые пересечения пар плоскостей, симметричных относительно плоскости центров сфер и касающихся одновременно всех трех данных сфер?

§ 7. Многогранники, призмы, параллелепипеды, пирамиды, правильные многогранники

1*. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы призма могла быть вписана в сферу?

2*. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы сфера могла быть вписана в призму?

3. Существует ли параллелепипед, отличный от куба, все грани которого конгруэнтны между собой? Есть ли у такого параллелепипеда ось симметрии, т. е. ось поворота, при котором параллелепипед отображается на себя?

4. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, равны 8, 8 и 27. Разбить параллелепипед на такие четыре части, из которых можно было бы сложить куб.

5. Вычислить объем треугольной призмы, зная площадь ее боковой грани и расстояние между плоскостью этой грани и прямой, содержащей противолежащее боковое ребро.

6. Доказать, что сумма квадратов длин четырех диагоналей произвольного параллелепипеда равна сумме квадратов длин двенадцати его ребер.

7*. Доказать, что в деревянной модели куба можно проделать дыру такой величины, что через нее можно пропустить куб, конгруэнтный данному.

8*. Доказать, что площадь треугольника, являющегося пересечением тетраэдра и плоскости, меньше площади по крайней мере одной из граней тетраэдра.

9. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведена прямая MP через середину M ребра AB и центроид P грани BCD. Прямая NQ проходит через середину N ребра BC и центроид Q грани ABD. Вычислить угол между прямыми MP и NQ.

10*. Данный (произвольный) тетраэдр пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

11. Доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного тетраэдра до всех его граней одна и та же и равна высоте тетраэдра.

12. Доказать: если у двух тетраэдров $OABC$ и $O'A'B'C'$ конгруэнтны трехгранные углы при вершинах O и O', то объемы этих тетраэдров относятся между собой как произведения длин трех ребер, выходящих из вершин O и O'.

13. На двух скрещивающихся прямых даны отрезки AB и CD. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не меняется, если эти отрезки, не изменяя своей длины, будут перемещаться по этим прямым. Вычислить этот объем, если даны длины отрезков $m = |AB|$, $n = |CD|$, расстояние h между прямыми AB и CD и φ — угол между прямыми.

14. От произвольного тетраэдра четырьмя плоскостями, проходящими через середины ребер, выходящих из каждой вершины, отделяются четыре меньших тетраэдра. Вычислить отношение объема оставшегося тела к объему исходного тетраэдра.

15*. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит его на две части равного объема.

16. Если соединить внутреннюю точку какой-нибудь n-угольной призмы со всеми ее вершинами, то получим n четырехуголь-

ных пирамид с общей вершиной в этой точке, основаниями которых служат боковые грани призмы. Найти отношение суммы объемов этих пирамид к объему данной призмы.

17. Даны три попарно параллельные прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости. На первой дан $[AA']$, на второй — $[BB']$, на третьей — $[CC']$. Вычислить объем многогранника $ABCA'B'C'$, ограниченного треугольниками ABC и $A'B'C'$ и тремя трапециями с основаниями AA', BB', CC', если даны длины $|AA'| = m$, $|BB'| = n$, $|CC'| = p$ и площадь S треугольника с вершинами в точках пересечения прямых a, b и c с перпендикулярной к ним плоскостью. Показать, что этот объем не изменится, если отрезки AA', BB', CC' будут перемещаться по прямым a, b, c, сохраняя свою длину.

18. Два конгруэнтных куба имеют общую диагональ, причем один получается из другого поворотом вокруг этой диагонали на угол 60°. Найти объем пересечения этих кубов, если длина ребра куба равна a.

19. Доказать, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади основания, деленной на косинус величины двугранного угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

20. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу?

21. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы в пирамиду можно было вписать сферу?

22. Доказать, что объем многогранника, в который вписана сфера, равен одной трети произведения радиуса сферы на площадь поверхности многогранника.

23. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, так, что ее боковая поверхность разделилась на две части равной площади. В каком отношении эта плоскость делит боковые ребра пирамиды?

24*. Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник. Будем закрашивать его грани в синий и красный цвет так, чтобы никакие две смежные, т. е. имеющие общее ребро, грани не были закрашены синим цветом (и при этом каждая грань выкрашена одним цветом). Доказать, что если при таком способе раскраски более половины всех граней будет закрашено в синий цвет, то в такой многогранник нельзя вписать сферу. (Заметим, что как будто можно привести противоречащий этому утверждению пример. Впишем сферу в куб и потом срежем все 8 трехгранных углов куба плоскостями, перпендикулярными диагоналям куба и касающимися вписанной сферы. Мы получили четырнадцатигранник, восемь треугольных граней которого не смежны друг с другом, и их можно закрасить синим цветом. Однако 8 более половины от 14. Как объяснить это противоречие?)

25. В правильную усеченную треугольную пирамиду «вписаны» две сферы: одна касается всех ее граней, другая — всех ее ребер.

Вычислить величину двугранного угла между плоскостями основания пирамиды и ее боковой грани.

26. Центр куба отражается от всех его граней и полученные 6 точек вместе с вершинами куба определяют 14 вершин многогранника, все 12 граней которого — конгруэнтные между собой ромбы. (Этот многогранник называется ромбическим додекаэдром — такую форму имеют природные монокристаллы граната.) Вычислить величину поверхности и объем построенного многогранника, если ребро исходного куба имеет длину a.

27. Введем обозначения: f — число граней многогранника, a — число его ребер, p — число его вершин. В последующих задачах речь будет идти о выпуклых многогранниках. Пусть f_k — число k-угольных граней; доказать равенство: $2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots$.

28. Пусть p_k — число вершин многогранника, при которых сходятся k ребер; доказать равенство: $2a = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \cdots$.

29. Доказать, что число плоских углов всех граней многогранника вдвое больше числа его ребер.

30. Доказать, что сумма величин всех плоских углов многогранника, в принятых нами обозначениях, равна $2\pi(a - f)$.

31*. Существует ли выпуклый многогранник, имеющий 7 ребер?

32*. Для произвольной точки S выпуклого многогранника рассмотрим соответствующие многогранные углы с общей вершиной S, «опирающиеся» на грани многогранника. Эти многогранные углы в объединении дают все пространство. Учитывая это и используя формулы, выведенные в предыдущих задачах, доказать теорему Эйлера[1]: «Сумма числа граней и числа вершин выпуклого многогранника на 2 больше числа его ребер» — в наших обозначениях: $f + p - a = 2$.

33*. Доказать, что не существует выпуклого многогранника, у которого нет ни одной треугольной грани и ни одного трехгранного угла.

34*. а) Доказать, что не существует такого выпуклого многогранника, все грани которого имели бы более 5 сторон.

б) Доказать, что не существует такого выпуклого многогранника, все многогранные углы которого имели бы более 5 граней.

35*. Доказать, что сумма величин плоских углов всех граней выпуклого многогранника вдвое больше величины суммы внутренних углов плоского многоугольника, число вершин которого равно числу вершин многогранника.

36*. Многогранник называется правильным, если все его грани — правильные конгруэнтные между собой многоугольники и все его многогранные углы — тоже правильные и конгруэнтны между собой[2]. Исследовать возможность построения простых пра-

---

[1] Это утверждение было известно выдающемуся мыслителю и математику Франции — Рене Декарту (1596 — 1650). Л. Эйлер опубликовал свое доказательство этого факта в 1752 г.

[2] Нам удобно именно такое определение правильного многогранника, при котором налагаются более сильные требования, чем в учебнике «Геометрия, 10».

вильных многогранников с n-угольными гранями и m-гранными углами и установить возможное число их видов, пользуясь следующими соображениями.

Разобьем все пространство на f конгруэнтных между собой правильных n-гранных углов с общей вершиной S, по m углов при каждом ребре, и выразим величины их двугранных углов через n и f. Если по найденной величине двугранного угла построить правильную n-угольную пирамиду, основанием которой служит правильный n-угольник — грань искомого многогранника, то из таких конгруэнтных пирамид можно сложить правильный многогранник (например, куб сложен из шести правильных четырехугольных пирамид с общей вершиной в центре куба). Можно доказать, что любой правильный многогранник может быть получен таким построением. (Последним замечанием при решении этой и следующих задач можно пользоваться без доказательства.)

37. Прямая l называется *осью вращательной симметрии* пространственной фигуры Ф, если при некотором повороте пространства вокруг оси l фигура Ф отображается на себя. Если при этом наименьший угол такого поворота равен $\frac{2\pi}{n}$, то l называется *осью симметрии порядка* n. (Например, правильный n-гранный угол имеет ось симметрии порядка n.) Сколько осей симметрии и какого порядка имеет каждый из пяти правильных многогранников?

38*. Доказать, что для каждого правильного многогранника можно построить три концентрические сферы: одну — проходящую через все его вершины (описанную сферу); другую — касающуюся всех его ребер; третью — касающуюся всех его граней (вписанную сферу). Общий центр этих сфер называется центром правильного многогранника.

39*. Доказать, что число поворотов пространства, при которых правильный многогранник отображается сам на себя, вдвое больше числа его ребер. (При этом тождественное отображение пространства также следует считать поворотом — на угол 0°.)

40. Доказать, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$, где O — центр правильного многогранника, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — все его вершины, равна нулю.

41. Доказать, что сумма расстояний от внутренней точки правильного многогранника до плоскостей его граней не зависит от выбора точки.

42. Построить октаэдр по данной его диагонали.

43. Доказать, что центры граней каждого правильного многогранника служат вершинами другого правильного многогранника, причем центры граней этого второго многогранника являются вершинами третьего многогранника, гомотетичного исходному. Два типа правильных многогранников, связанных указанным построением, называются *двойственными* по отношению друг к другу.

44. Доказать, что из восьми вершин куба можно двумя способами выбрать четыре вершины так, чтобы они оказались вершинами правильного тетраэдра. Вычислить отношение объема такого тетраэдра к объему куба. Вычислить также объем фигуры, являющейся пересечением этих двух тетраэдров, и объем фигуры, являющейся их объединением. (Считать, что длина ребра куба равна a.)

45*. Какие четыре из восьми граней октаэдра нужно продолжить, для того чтобы в пересечении четырех полупространств, определяемых полученными плоскостями и содержащими октаэдр, получился правильный тетраэдр? Каково отношение площадей поверхностей и объемов тетраэдра и октаэдра?

46*. В додекаэдр вписать куб так, чтобы все восемь вершин куба являлись вершинами додекаэдра. Сколько решений имеет задача?

47. Пользуясь решением предыдущей задачи, построить по данному кубу описанный около него додекаэдр.

48*. Пересечь октаэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник. Вычислить площадь этого шестиугольника, если ребро октаэдра имеет длину a.

49*. На каждой из шести граней куба найти по две точки так, чтобы эти точки оказались вершинами икосаэдра, вписанного в куб.

50*. На каждом из 12 ребер октаэдра найти по точке так, чтобы эти точки оказались вершинами икосаэдра, вписанного в данный октаэдр.

51*. Рассмотрим сферу, касающуюся всех ребер правильного многогранника, и через середину каждого ребра проведем прямую, перпендикулярную этому ребру и радиусу сферы, соединяющему ее центр с серединой ребра. Доказать, что все эти прямые содержат каждая по ребру правильного многогранника, двойственного к данному (эти многогранники имеют общую сферу, касающуюся их ребер).

52*. Доказать, что любые два правильных многогранника одного и того же вида подобны между собой: каждый из них конгруэнтен многограннику, гомотетичному другому.

§ 8. Тела вращения: цилиндр, конус, шар. Задачи на все разделы стереометрии.

1. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы прямую призму можно было вписать в цилиндр?

2. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы цилиндр можно было вписать в прямую призму?

3. Цилиндр рассечен плоскостью, не параллельной основаниям и их не пересекающей. Какие измерения нужно произвести, чтобы вычислить объем одной из отсеченных фигур?

4. Фигура получена вращением прямоугольника около оси, параллельной одной из его сторон и лежащей в плоскости прямоугольника, но его не пересекающей. Доказать, что объем этой фигуры равен произведению площади прямоугольника на длину окружности, описываемой при вращении центром прямоугольника.

5. Цилиндр называется равносторонним, если его высота равна диаметру основания. В правильный тетраэдр с ребром a вписать равносторонний цилиндр так, чтобы одно из оснований цилиндра содержалось в одной из граней тетраэдра, а окружность второго основания касалась трех других граней. Вычислить объем и площадь боковой поверхности этого цилиндра.

6. В куб с ребром a вписать равносторонний цилиндр так, чтобы ось цилиндра содержала диагональ куба, а окружности оснований цилиндра касалась граней куба. Вычислить объем этого цилиндра.

7. Диаметр основания цилиндра увеличили вдвое и одновременно уменьшили вдвое его высоту. Как изменились площадь боковой поверхности и объем цилиндра?

8*. Пусть точки A, B, C не принадлежат одной прямой. Что из себя представляет множество точек пространства, расстояния от которых до плоскости $\alpha = (ABC)$ не превышают данной величины h и проекции которых на прямые BC, CA, AB принадлежат одной прямой?

9. Доказать, что в сечении боковой поверхности цилиндра плоскостью, не перпендикулярной оси цилиндра и не пересекающей его основания, получается эллипс. Указать наибольший и наименьший диаметры этого эллипса. Как построить это сечение, если дано изображение цилиндра, а секущая плоскость задана линией ее пересечения с плоскостью основания цилиндра и точкой пересечения с его осью?

10. Что из себя представляет множество точек, находящихся на данных расстояниях от плоскости α и от прямой l, наклонной к этой плоскости?

11. Два цилиндра, имеющие равные радиусы оснований, расположены так, что их оси пересекают друг друга под прямым углом. Нарисовать фигуру, получившуюся в пересечении этих цилиндров. Вычислить ее объем, если радиусы цилиндров равны k.

12. Вершина конической поверхности вращения совпадает с началом O прямоугольной системы координат $Oxyz$, ось вращения совпадает с положительным направлением оси Oz, луч, вращением которого получается поверхность, образует с осью Oz угол φ. Написать уравнение этой поверхности в координатах.

13. Построить коническую поверхность вращения, имеющую своими образующими три данные прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости. Сколько решений имеет задача? Имеют ли получившиеся конические поверхности общие образующие?

14*. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы данный выпуклый четырехгранный угол мог быть вписан в коническую поверхность вращения так, чтобы ребра угла были образующими конической поверхности?

15*. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы в данный выпуклый четырехгранный угол могла быть вписана коническая поверхность вращения так, чтобы угол и коническая поверхность пересекались в точности по четырем образующим поверхности — лежащим в гранях угла?

16. На изображении конуса построить его сечение плоскостью, заданной линией ее пересечения с плоскостью основания конуса и точкой пересечения с его осью.

17. В каком случае площадь треугольника, получающегося в сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, имеет наибольшую величину?

18. В конус высоты h и с радиусом основания R вписать цилиндр с максимальной площадью боковой поверхности и найти эту площадь.

19. Дана сфера радиуса R. На расстоянии, равном $2R$ от центра сферы, взята точка S и из нее проведены все прямые, касающиеся сферы (т. е. имеющие с ней ровно одну общую точку). Что из себя представляет объединение этих касательных? Вычислить площадь поверхности, составленной из отрезков касательных от точки S до точек касания.

20. Доказать, что для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать сферу, касающуюся оснований и каждой образующей конуса, необходимо и достаточно, чтобы длина высоты конуса была средним пропорциональным между диаметрами верхнего и нижнего основания конуса: $2R:h=h:2r$ (Здесь r — радиус верхнего основания, R — радиус нижнего основания, h — высота конуса.)

21*. При помощи циркуля и линейки построить диаметр данного материального (например, деревянного) шара.

22*. Все четыре стороны пространственного четырехугольника (см. § 6, задача 15) касаются сферы. Доказать, что четыре точки касания принадлежат одной плоскости.

23. Рассмотрим гексаэдр (шестигранник), все грани которого — четырехугольники, вписуемые в окружность. Доказать, что существует единственная сфера, проходящая через все 8 вершин этого многогранника.

24*. Что из себя представляет множество точек пространства, не содержащееся в одной плоскости, не совпадающее со всем пространством, и такое, что через каждые три его точки проходит окружность, содержащаяся в этом множестве?

25. Даны четыре попарно не пересекающиеся сферы равных радиусов с центрами, не принадлежащими одной плоскости. а) Сколько существует сфер, касающихся одновременно всех четырех сфер? б) Как построить эти сферы?

26. Что из себя представляет множество середин всех хорд, которые получаются в пересечении данного шара со всеми прямыми, проходящими через данную точку? Рассмотреть случаи, когда общая точка прямых находится вне сферы, принадлежит сфере, лежит внутри сферы.

27. Что из себя представляет множество центров окружностей, которые получаются в пересечении сферы со всевозможными плоскостями, проходящими через данную прямую l?

28. В сферу радиуса R вписать правильный тетраэдр (описать построение). Найти объем этого тетраэдра.

29. Вписать в сферу радиуса R куб и найти его объем.

30. Около сферы радиуса R описать правильный тетраэдр и найти его объем.

31. Около сферы радиуса R описать правильный октаэдр и найти его объем.

32. Три образующие конуса содержатся в прямых — осях прямоугольной системы координат. В этот конус вписана сфера, радиус которой равен R. Вычислить боковую поверхность конуса.

33. Пересечение сферы с двугранным углом, ребро которого проходит через центр сферы, называется *сферическим двуугольником*. Ограничивающие его две полуокружности называются его *сторонами*, величина двугранного угла, равная величине угла между касательными, проведенными к полуокружностям в точке их пересечения, называется *величиной угла двуугольника*. Доказать, что: а) если величины углов двух двуугольников на одной сфере равны, то сами двуугольники конгруэнтны, б) исходя из того, что конгруэнтные сферические двуугольники имеют равные площади, вывести для площади двуугольника формулу: $S_\alpha = 2R^2\alpha$, где R — длина радиуса сферы, α — радианная мера угла двуугольника.

34. *Сферическим треугольником* называется пересечение сферы и трехгранного угла с вершиной в центре сферы (или часть сферы, ограниченная тремя дугами больших кругов) (рис. 6). Вычислить площадь сферического треугольника ABC, рассматривая его как пересечение трех двуугольников: одного с вершиной A и соответствующим углом величины α, другого с вершиной B и углом величины β и третьего с вершиной C и углом величины γ.

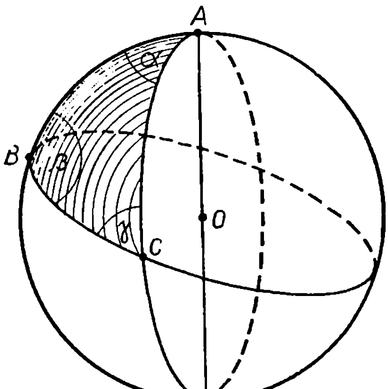


Рис. 6

35*. Доказать, что если грани тетраэдра равновелики (т. е. имеют равные площади), то описанная около него и вписанная в него сферы концентрические.

36. Каждое ребро куба разделено на три конгруэнтные части. Доказать, что полученные двадцать четыре точки деления принадлежат одной сфере. Вычислить площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна a.

37. Гранями параллелепипеда с ребрами длины a являются ромбы с острым углом 60°. Вычислить объем вписанного в параллелепипед шара.

38. Два конгруэнтных шара вписаны в противоположные трехгранные углы куба и касаются друг друга. Вычислить объемы шаров, если длина ребра куба равна a.

39*. Вывести формулу Симпсона[1]: если площадь $S(x)$ сечения пространственной фигуры плоскостью P_x, проведенной перпендикулярно некоторой координатной прямой Ox через точку с координатой x, выражается многочленом от переменной x не выше второй степени, то объем фигуры можно вычислить по формуле: $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_m+S_n)$, где h — высота фигуры, S_0 — площадь непустого сечения с наименьшей координатой $x=x_0$, S_n — площадь непустого сечения с наибольшей координатой $x=x_1$, S_m — площадь сечения с координатой $x=\frac{1}{2}(x_0+x_1)$. Проверить справедливость этой формулы на уже известных формулах для объемов.

---

[1] Томас Симпсон (1710—1761) — английский математик.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 1. 1. Три точки, не принадлежащие одной прямой, могут по отношению к данной прямой принимать два и только два возможных положения: 1) все три принадлежат одной из полуплоскостей, определяемых данной прямой. В этом случае ни один из отрезков не пересекается прямой; 2) две точки принадлежат одной из упомянутых полуплоскостей, третья — другой. В этом случае прямая пересекает два отрезка, соединяющих эту третью точку с двумя первыми, и не пересекает отрезок между двумя первыми точками.

2. Задача решается методом математической индукции.

1. Утверждение задачи справедливо для одной прямой: одну полуплоскость можно закрасить одной краской, другую — другой.

2. Допустим, что требуемую раскраску можно осуществить для любого разбиения плоскости n прямыми.

Рассмотрим разбиение плоскости $(n+1)$ прямыми. Первые n из них разбивают плоскость так, что согласно допущению, для этого разбиения существует нужная двухцветная раскраска. Теперь в одной полуплоскости, определяемой $(n+1)$-й прямой, сохраним прежнюю раскраску, а в другой — изменим на противоположную, т. е. краски поменяем местами. Тогда внутри каждой полуплоскости раскраска будет правильной, а вдоль новой прямой каждой краске с одной стороны будет соответствовать другая окраска с другой стороны. Итак, и при разбиении плоскости любыми $n+1$ прямыми плоскость можно раскрасить требуемым образом.

Согласно принципу математической индукции предложение задачи доказано.

3. Число областей, на которые разбивается плоскость n прямыми, обозначим $F(n)$. Заметим теперь, что всякая новая прямая при пересечении с n прежними прямыми разделится n точками на $n+1$ промежутков: $n-1$ отрезков и 2 луча. Каждый из этих промежутков разделит одну из $F(n)$ областей на две части, поэтому число областей плоскости увеличится на $n+1$. Отсюда мы получим рекуррентную («сбегающую») формулу:

$$F(n+1) = F(n) + n + 1.$$

Последовательно применяя ее, получим:

$$F(n) = F(n-1) + n$$
$$F(n-1) = F(n-2) + n - 1$$
$$F(n-2) = F(n-3) + n - 2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F(2) = F(1) + 2$$
$$F(1) = F(0) + 1$$
$$F(0) = 1.$$

Суммируя эти равенства, получим:

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

(Мы воспользовались известной формулой:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.)$$

4. Согласно предыдущей задаче три прямые делят плоскость на 7 областей: одна — внутренняя область треугольника ABC, три — внутренние точки трех углов, вертикальных с углами треугольника, три — внутренние точки областей, прилегающих к сторонам треугольника. Если точка P лежит внутри треугольника ABC, то луч AP, идущий внутри угла BAC, пересекает все отрезки с концами на сторонах этого угла, в частности отрезок BC (ибо точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AP). Если точка P лежит в одном из углов, вертикальных с углами треугольника, например вертикальном с углом BAC, то по этой же причине луч PA пересечет отрезок BC. Если, наконец, точка P лежит в области, прилегающей к стороне треугольника, например к стороне BC, то точки B и C лежат по разные стороны от (AP) и поэтому прямая AP пересечет отрезок BC.

5. Пусть точки A и B находятся в одной полуплоскости относительно l. Имеем: $(BA) \cap l = M$, $(BA') \cap l = N$. Прямые MA и MA', а также (AN) и $(A'N)$ симметричны относительно l. Но $(MA) \cap (NA') = B$, поэтому $(MA') \cap (NA) = B'$ — две пары взаимно симметричных прямых пересекаются в двух взаимно симметричных точках. Отсюда и вытекает требуемое построение. Если прямая AB не пересекает ось (в пределах чертежа) l, то можно воспользоваться вспомогательной точкой C, расположив ее так, чтобы и прямая CA и прямая CB пересекались с прямой l. Найдя точку C', симметричную C, с ее помощью мы можем построить точку B'.

6. а) Положим, что точки A и B находятся в одной и той же полуплоскости относительно прямой l. Пусть точка B' симметрична точке B относительно l, $(AB') \cap l = C$. Треугольник ABC

имеет наименьший периметр, так как $|AC|+|CB|=$ $=|AC|+|CB'|=|AB'|$, а для любой другой точки C', принадлежащей прямой l, получаем $|AC'|+|C'B|=$ $=|AC'|+|C'B'|>|AB'|=$ $=|AC|+|CB|$. Если точки A и B находятся в разных полуплоскостях относительно прямой l, то искомый треугольник вырождается в отрезок AB. Если $(AB)\perp l$, то искомый треугольник также вырождается в отрезок.

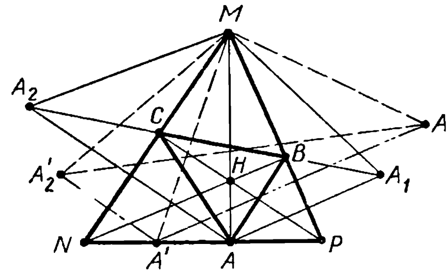


Рис. 7

б) Если точка A находится внутри острого угла, то находим точки A' и A'', симметричные точке A относительно сторон угла. Точки пересечения прямой $A'A''$ со сторонами угла являются вершинами B и C искомого треугольника. Действительно, периметр этого треугольника равен длине отрезка $A'A''$, а для любых других точек B' и C' на тех же сторонах угла периметр треугольника $AB'C'$ будет равен длине ломаной $A'B'C'A''$, но $|A'B'|+$ $+|B'C'|+|C'A''|>|A'A''|=|AB|+|BC|+|CA|$.

Для прямого и тупого угла это построение неосуществимо (почему?).

в) Пусть MNP данный остроугольный треугольник (рис. 7). Возьмем на стороне $[NP]$ произвольную точку A' и найдем точки A_1' и A_2', симметричные точке A' относительно сторон $[MP]$ и и $[MN]$. Согласно п. б) отрезок $A_1'A_2'$ определяет минимальную для данного положения точки A' длину $|A_1'A_2'|$ периметра треугольника $A'B'C'$ с вершинами $B'\in[MP]$, $C'\in[MN]$ (строить его мы не будем). Нам остается теперь выбрать точку A' так, чтобы длина $|A_1'A_2'|$ была наименьшей. Рассмотрим $\triangle A_1'A_2'M$. В нем, как легко видеть из построения, имеем: $|MA_1'|=|MA'|=|MA_2'|$ и $\widehat{A_1'MA_2'}=2\widehat{NMP}$. Поэтому все подобным образом построенные равнобедренные треугольники, имея конгруэнтные углы при вершине, подобны между собой. Из этих треугольников нужно выбрать треугольник с наименьшими сторонами. Но длина боковых сторон этих треугольников равна расстоянию от точки M до выбранной нами точки на отрезке NP (у нас — точка A'). Из всех точек отрезка NP ближе всех к точке M находится точка A — основание высоты MA треугольника MNP. Это и есть вершина искомого треугольника. Вершины B и C находим уже известным построением.

Предлагаем читателю ответить на вопрос: почему такое построение не выполнимо, если данный треугольник прямоугольный или тупоугольный?

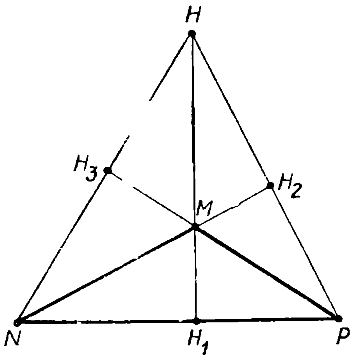


Рис. 8

7. В предыдущей задаче мы вписали в данный остроугольный треугольник MNP треугольник ABC минимального периметра. Будем считать известным следующее: три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке; каждые две биссектрисы внешних углов пересекаются в одной и той же точке с одной биссектрисой внутреннего угла; биссектриса внутреннего угла и внешнего угла при той же вершине взаимно перпендикулярны. На рис. 7 (PM) и (NM) — биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC и они пересекаются в точке M. Но через эту же точку проходит и (AM), следовательно, (AM) — биссектриса внутреннего угла треугольника ABC при вершине A. Так как $(PN) \perp (AM)$, то (PN) есть биссектриса внешнего угла при вершине A. Эта биссектриса пересекается с внешней биссектрисой угла B в точке P. Поэтому (CP) есть биссектриса внутреннего угла C и, значит, $(CP) \perp (MN)$. Точно так же мы докажем, что (NB) — биссектриса внутреннего угла B и $(NB) \perp (MP)$. Итак, три высоты треугольника MNP: $[MA]$, $[NB]$, $[PC]$ — суть биссектрисы внутренних углов ортоцентрического треугольника ABC и поэтому пересекаются в одной и той же точке H, называемой ортоцентром треугольника MNP.

Если треугольник MNP — прямоугольный, $NMP = 90°$, то его высоты (они же катеты) пересекаются в точке M и через эту же точку проходит и высота, проведенная к гипотенузе.

Положим теперь, что $N\widehat{M}P > 90°$ (рис. 8). Высоты $[NH_3]$ и $[PH_2]$ пересекутся в какой-то точке H, причем $N\widehat{H}P < 90°$, так как $N\widehat{M}P + N\widehat{H}P = 180°$. Отсюда следует, что $\triangle NHP$ — остроугольный (углы H_3NP и H_2PN — острые как углы при гипотенузах прямоугольных треугольников). Но в остроугольном треугольнике NHP, согласно уже доказанному, высоты $[NH_2]$, $[PH_3]$ и третья высота $[HH_1]$ должны пересечься в одной точке, именно точке M. Таким образом, три высоты $[MH_1]$, $[NH_3]$ и $[PH_2]$ в тупоугольном треугольнике MNP пересекаются в одной и той же точке H.

8. Любые четыре вершины данного n-угольника определяют четырехугольник, диагонали которого дают одну точку пересечения. Следовательно, общее число точек попарного пересечения диагоналей равно числу сочетаний из n элементов по 4, т. е.

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

(Например, для шестиугольника имеем:

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.)$$

9. Обозначим через x число искомых треугольников. По условию задачи эти треугольники не имеют общих внутренних точек, поэтому сумма всех внутренних углов x треугольников равна $180^\circ x$. Но эту же сумму можно вычислить и по-другому. В эту сумму входят все внутренние углы n-угольника, что дает $180^\circ (n-2)$, и все углы с общими вершинами в m данных точках, что составляет $360^\circ m$.

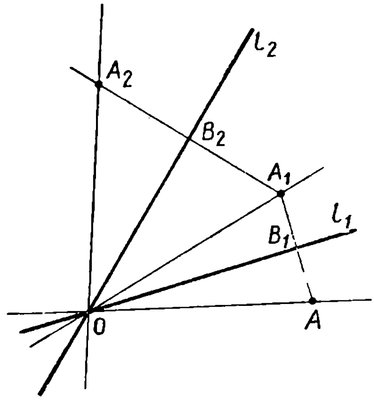


Рис. 9

Таким образом получаем равенство:

$$180^\circ x = 360^\circ m + 180^\circ (n-2),$$

откуда $x = 2m + n - 2$.

10. Согласно решению задачи 4 точка P может оказаться в одной из семи областей, на которые разбивают плоскость прямые AB, AC, BC. Во всех этих случаях какая-нибудь из прямых PA, PB, PC пересечет прямую BC, CA или AB соответственно. Пусть, например, (PA) пересекает (BC) в точке M. Тогда на соответствующей прямой $B'C'$ нетрудно построить точку M', удовлетворяющую условиям $|M'B'| = |MB|$ и $|M'C'| = |MC|$. После этого проводим прямую $A'M'$ и от точки M' в соответствующем направлении откладываем отрезок длины $|M'P'| = |MP|$. Тем самым находим точку P'.

11. а) Пусть оси симметрии l_1 и l_2 пересекаются в точке O (рис. 9). Симметрия относительно оси l_1 отображает точку A на точку A_1, а симметрия относительно оси l_2 — точку A_1 на точку A_2. Рассмотрим острый угол B_1OB_2 между осями l_1 и l_2 и положим, что направление поворота от l_1 к l_2 положительно. Тогда, учитывая направление углов, при любом положении точки A будем иметь равенство:

$$\widehat{AOB_1} + \widehat{B_1OA_1} + \widehat{A_1OB_2} + \widehat{B_2OA_2} = \widehat{AOA_2} = \alpha. \qquad (1)$$

Замечая, что $\widehat{AOB_1} = \widehat{B_1OA_1}$ и $\widehat{A_1OB_2} = \widehat{B_2OA_2}$, мы заключаем, что

$$\widehat{B_1OA_1} + \widehat{A_1OB_2} = \widehat{B_1OB_2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Итак, на основании свойств осевой симметрии мы имеем:

$$|OA| = |OA_1| = |OA_2| \text{ и } \widehat{AOA_2} = 2\widehat{B_1OB_2} = \alpha.$$

(Проверьте справедливость равенства (1) для различных положений точки A относительно осей l_1 и l_2.) Полученное отображение оставляет неподвижной точку O, а остальные точки плоскости, сохраняя постоянное расстояние от O, перемещаются так, что соответствующие углы AOA_2 имеют одну и ту же величину. Согласно определению это будет поворот около точки O на угол α.

б) пусть $l_1 \| l_2$. Осевая симметрия S_{l_1} отображает точку A на точку A_1, осевая симметрия S_{l_2} отображает точку A_1 на точку A_2. Положим, что $(AA_1) \cap l_1 = M_1$, $(A_1A_2) \cap l_2 = M_2$. Поскольку

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{A_1M_2} + \overrightarrow{M_2A_2} = \overrightarrow{AA_2} = \vec{m} \qquad (2)$$

и

$$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_1A_1}, \quad \overrightarrow{A_1M_2} = \overrightarrow{M_2A_2},$$

то, беря в сумме (2) только два средних члена, получим:

$$\overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{A_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\vec{m}}{2}.$$

Итак, точка A отображается на точку A_2 так, что вектор $\overrightarrow{AA_2}$ один и тот же для любой точки A: перпендикулярен осям l_1 и l_2 и по длине равен удвоенному расстоянию между осями. Итак, наша композиция есть параллельный перенос $\vec{m} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$.

12. а) Пусть мы имеем поворот на угол α с центром O, где $\alpha \leqslant 180°$. Проведем через точку O две оси l_1 и l_2: одну — произвольно, а другую так, чтобы величина угла между осями была равна $\frac{\alpha}{2}$. Тогда, согласно доказанному в задаче 11 а), композиция двух осевых симметрий с осями l_1 и l_2 дает нужный поворот.

б) Пусть дан вектор $\vec{m}$. Проведем ось симметрии l_1 перпендикулярно направлению вектора $\vec{m}$, а ось симметрии l_2 параллельно l_1 на расстоянии от нее, равном $\frac{|\vec{m}|}{2}$, и притом так, чтобы направление перпендикуляра от l_1 к l_2 совпадало с направлением $\vec{m}$. Тогда, как уже было доказано в задаче 11 б), композиция осевых симметрий с осями l_1 и l_2 даст перенос на вектор $\vec{m}$.

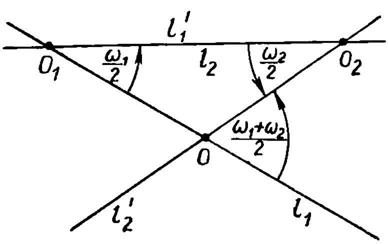


Рис. 10

13. Пусть даны повороты с центрами O_1 и O_2 и углами ω_1 и ω_2 соответственно (рис. 10). Разложим первый поворот на симметрии с осями l_1 и l_1', причем за ось l_1' выберем прямую O_1O_2. Второй поворот разложим на симметрии с осями l_2 и l_2', в качестве l_2 возьмем также (O_1O_2). В последовательной композиции симметрий S_{l_1},

$S_{l'_1}$, S_{l_2}, $S_{l'_2}$ симметрии с совпадающими осями $S_{l'_1}$ и S_{l_2} дадут тождественное отображение, а композиция оставшихся симметрий S_{l_1} и $S_{l'_2}$ дает либо поворот, если оси пересекаются в точке O, либо перенос, если $l_1 \| l'_2$. В первом случае, по свойству внешнего угла треугольника O_1O_2O, получим, что этот угол равен $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, т. е. угол композиции — угол поворота — будет $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ (знаки углов ω_1 и ω_2 берутся с учетом направления поворотов).

Во втором случае, при $l_1 \| l'_2$, т. е. при $\omega_1 + \omega_2 = 0°$ (или $\pm 360°$), композиция есть параллельный перенос.

14. Пусть центр квадрата, построенного на стороне $[BC]$ треугольника, есть точка O_1, на стороне $[CA]$ — точка O_2, на стороне $[AB]$ — точка O_3. При повороте на $90°$ вокруг O_1 точка B перейдет в точку C, при повороте на $90°$ вокруг O_2 точка C перейдет в точку A и, наконец, при повороте на $90°$ вокруг O_3 точка A перейдет в точку B. Итак, в результате композиции трех поворотов вокруг центров O_1, O_2, O_3 точка B перейдет последовательно в точку C, в точку A и, наконец, вернется в исходное положение. Значит, B есть неподвижная точка, т. е. центр поворота, получающегося в результате композиции трех рассмотренных поворотов. Поэтому для построения точки B нужно сначала найти композицию поворотов вокруг O_1 и O_2 (оба на $90°$), т. е. построить центр и угол результирующего поворота (заметим, что этот центр есть середина $[AB]$), а затем найти композицию полученного поворота с поворотом вокруг центра O_3. Центр последней композиции и есть точка B.

15. Пусть симметрия с центром O_1 отображает точку A на точку A_1; тогда $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{O_1A_1}$. Симметрия с центром O_2 отображает A_1 на A_2. Следовательно, $\overrightarrow{A_1O_2} = \overrightarrow{O_2A_2}$. Складывая все эти векторы, получим:

$$\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{A_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2} = \overrightarrow{AA_2}.$$

Используя указанное выше равенство векторов, можем записать:

$$\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{A_1O_2} = \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2}, \text{ или } \overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Итак, мы получили, что результирующим преобразованием будет параллельный перенос $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Обратно: если мы имеем параллельный перенос $\vec{m}$, то, взяв один из центров симметрии произвольно, другой центр расположим так, чтобы выполнялось равенство:

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}\vec{m}.$$

Согласно доказанному композиция симметрий с центрами O_1 и O_2 совпадает с переносом $\vec{m}$.

16. Если число центральных симметрий четно и равно $2n$ (n— натуральное число), то наша композиция есть композиция n попарных композиций, т. е. согласно задаче 15 композиция n переносов. Поскольку композиция переносов есть перенос, композиция четного числа центральных симметрий является переносом.

Пусть теперь мы имеем три симметрии с центрами O_1, O_2, O_3. Композиция первых двух симметрий есть перенос, который можно заменить композицией новых симметрий с центрами O_1' и O_2'— лишь бы выполнялось равенство $\overrightarrow{O_1'O_2'} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Выберем эти точки так, чтобы центр O_2' совпал с центром O_3. Но тогда композиция симметрий относительно O_2' и O_3 будет тождественным отображением, и композиция всех трех наших центральных симметрий будет центральной симметрией с центром в точке O_1'. Отсюда уже нетрудно вывести, что композиция любого нечетного числа центральных симметрий является просто центральной симметрией.

17. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5—данные середины сторон. Рассмотрим центральные симметрии относительно этих точек. Первая из них отображает первую вершину пятиугольника на вторую, вторая отображает вторую вершину на третью и т. д. Наконец, пятая симметрия отображает пятую вершину на первую. Итак, первая вершина есть неподвижная точка композиции рассматриваемых симметрий, т. е. центр результирующей симметрии (см. задачу 16). Построив этот центр, мы найдем первую вершину пятиугольника, а затем и остальные.

18. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ данные одинаково ориентированные треугольники; укажем, как найти поворот или параллельный перенос, отображающий A на A_1, B на B_1.

Пусть симметрия с осью l_1 отображает A на A_1 и B на какую-то точку B' (как построить ось l_1?). Выполним теперь симметрию с осью l_2, отображающую B' на B_1. Так как $|A_1B_1| = |A_1B'|$, то $A_1 \in l_2$. Если прямые AB и A_1B_1 не параллельны, то оси l_1 и l_2 пересекаются: $l_1 \cap l_2 = O$. Композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями, как было показано в задаче 11, есть поворот вокруг точки пересечения осей. Итак, в этом случае построен поворот с центром O, отображающий A на A_1 и B на B_1.

Если же $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то, как известно, при этом и $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ и нужное преобразование есть параллельный перенос $\vec{m} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

Поскольку повороты и параллельные переносы сохраняют ориентацию треугольников, а треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы одинаково, то точка C в обоих случаях отображается на точку C_1.

19. Пусть оси трех симметрий l_1, l_2, l_3 проходят через точку O. Композиция двух первых симметрий есть поворот, который можно заменить композицией других симметрий с осями l'_1 и l'_2, проходящими через ту же точку O и пересекающимися под тем же углом. Возьмем в качестве l'_2 ось l_3. Поскольку композиция симметрий с двумя совпадающими осями l'_2 и l_3 есть тождественное отображение, наша композиция будет симметрией с осью l'_1. (Путем аналогичных рассуждений нетрудно убедиться, что в случае $l_1 \| l_2 \| l_3$ композиция соответствующих симметрий также будет осевой симметрией.)

20. Пусть три оси симметрии l_1, l_2, l_3 не проходят через одну точку, причем, скажем, оси l_1 и l_2 пересекаются. Как и в предыдущей задаче, заменим оси l_1 и l_2 другими осями l'_1 и l'_2, но при этом ось l'_2 выберем перпендикулярной оси l_3. Тогда нашу композицию можно заменить композицией осевой симметрии l'_1 и поворота на 180° вокруг точки $O = l'_2 \cap l_3$, т. е. центральной симметрии с центром O. Теперь эту центральную симметрию мы заменим композицией двух осевых симметрий со взаимно перпендикулярными осями l''_2 и l'_3, причем ось l''_2 проведем параллельно оси l'_1. Тогда композиция осевых симметрий с осями $l'_1 \| l''_2$ будет переносом, и рассматриваемая композиция трех осевых симметрий представлена в виде композиции параллельного переноса и осевой симметрии, причем направление переноса параллельно оси симметрии.

Заметим, что если точка A переносом отображается на точку A_1, а потом симметрией относительно параллельной оси точка A_1 отображается на точку A', то ось симметрии проходит через середину отрезка AA' (докажите!). (Случай, когда $l_1 \| l_2$ (тогда l_2 и l_3 пересекаются), разберите самостоятельно.)

21. Применим к треугольнику $A_1B_1C_1$ осевую симметрию, такую, чтобы точка A_1 отобразилась на точку A_2. Полученный треугольник $A_2B'_1C'_1$ будет одинаково ориентирован с треугольником $A_2B_2C_2$, и преобразовать их друг в друга можно поворотом вокруг точки A_2. А так как поворот представляется в виде композиции двух осевых симметрий, то, значит, перемещение, отображающее треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник $A_2B_2C_2$, представляется в виде композиции трех осевых симметрий. Как было доказано выше (см. задачи 19, 20), при любом расположении трех осей такая композиция будет либо одной осевой симметрией, либо скользящей симметрией. И в том и в другом случае середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной и той же прямой — оси симметрии.

22. Пусть в данном разностороннем треугольнике ABC $|AB| > |AC|$. Проведем через вершину A прямую, которая пересечет $[BC]$ в точке D. Могут ли оказаться конгруэнтными треуголь-

ники ABD и ACD? Будем рассматривать запись $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ как указание на то, что $[AB] \cong [AC]$, $[BD] \cong [CD]$, $[AD] \cong [AD]$, $\angle BAD \cong \angle CAD$, $\angle ABD \cong \angle ACD$, $\angle ADB \cong \angle ADC$. В данном случае конгруэнтность $[AB] \cong [AC]$ противоречит условию $|AB| > |AC|$. Посмотрим возможность других сочетаний конгруэнтности. Если $\triangle ABD \cong \triangle ADC$, то $\angle ABD \cong \angle ADC$, но это противоречит тому, что внешний угол ADC должен быть больше внутреннего ABD. Если $\triangle ABD \cong \triangle CAD$, то $|AB| = |CA|$, это противоречит условию $|AB| > |AC|$. Если $\triangle ABD \cong \triangle CDA$, то опять окажется, что $\angle ABD \cong \angle CDA$. Если $\triangle ABD \cong \triangle DAC$, то окажется, что внешний угол ADB конгруэнтен углу DCA, а должно быть $\widehat{ADB} > \widehat{DCA}$. Наконец, если $\triangle ADB \cong \triangle DCA$, то опять $\angle ADB \cong \angle DCA$. Итак, во всех случаях конгруэнтность треугольников невозможна.

23. Решение сводится к тому, чтобы данный треугольник разрезать на симметричные части, тогда каждую из таких фигур можно перевернуть изнанкой вверх и уложить на прежнее место. Можно предложить два варианта решения.

1) Проведем биссектрисы трех углов треугольника ABC. Они пересекаются в точке K. Обозначим через X, Y, Z проекции точки K на стороны $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ соответственно. Тогда треугольник можно разрезать на три симметричных четырехугольника: $AYKZ$, $BZKX$, $CXKY$.

2) Пусть BC — наибольшая сторона треугольника. Тогда проекция вершины A на $[BC]$ — точка P лежит между точками B и C. Найдем середины $[AB]$ и $[AC]$ — точки M и N. Соединив M и N с P, получим три симметричные фигуры: четырехугольник $AMPN$ и два равнобедренных треугольника BMP и CNP. (Симметричность этих фигур следует доказать.) Некоторые треугольники, например прямоугольные, можно разбить всего на две симметричные части — треугольники.

24. а) Если O — центр симметрии полосы, M — точка на одной из граничных прямых, то симметричная точка M' лежит на другой граничной прямой (докажите!). Поскольку O — середина $[MM']$, точка O равноудалена от прямых — границ полосы. Обратно, легко показать, что каждая точка O, равноудаленная от граничных прямых, является центром симметрии полосы. Остается заметить, что множество точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть прямая, параллельная им и равноудаленная от этих прямых. Эта прямая называется *осью* соответствующей полосы. Очевидно, ось полосы есть в то же время и ось симметрии, отображающей полосу на себя. Заметим также, что середина любого *поперечного отрезка* полосы, т. е. отрезка с концами на граничных прямых полосы, принадлежит этой оси.

б) Пусть оси двух полос не параллельны. Тогда пересечением полос будет четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т. е. параллелограмм. В силу доказанного в п. а) точка пересечения осей полос есть центр симметрии пересечения полос, т. е. центр симметрии параллелограмма. Каждая диагональ параллелограмма есть поперечный отрезок обеих полос, и потому середины диагоналей совпадают с центром симметрии параллелограмма. Отсюда следует конгруэнтность противоположных сторон, противоположных углов, треугольников, на которые диагонали разбивают параллелограмм.

Если оси пересекающихся полос перпендикулярны друг другу, то пересечением полос будет прямоугольник—параллелограмм с двумя осями симметрии, совпадающими с осями полос. Отсюда следует конгруэнтность его диагоналей.

Если пересекающиеся полосы конгруэнтны друг другу, то при повороте вокруг центра параллелограмма на угол, равный углу между осями, одна полоса отображается на другую. Поскольку центр равноудален от всех сторон параллелограмма, его диагонали служат в данном случае биссектрисами углов и осями симметрии параллелограмма. Мы получили ромб — параллелограмм с конгруэнтными сторонами и взаимно перпендикулярными диагоналями — осями его симметрий. Если пересекающиеся полосы конгруэнтны, а их оси взаимно перпендикулярны, то в пересечении полос получается квадрат.

25. Все построения, предлагаемые в этой задаче, основаны на свойствах ромба, получающегося от пересечения двух конгруэнтных полос. Построения выполнены на рисунках 11 — 17. Толстыми линиями показаны

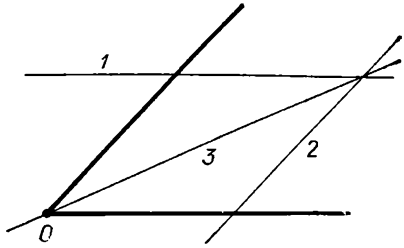


Рис. 11

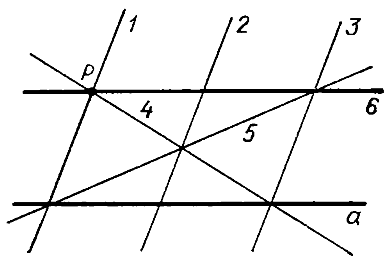


Рис. 12

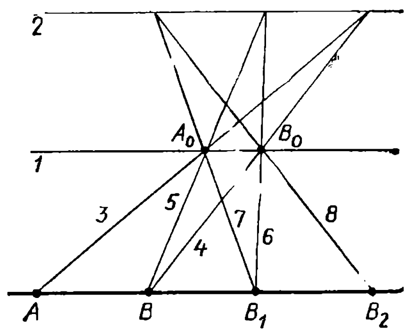


Рис. 13

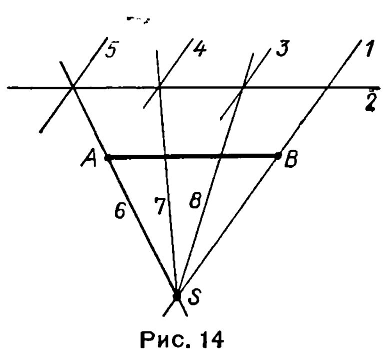


Рис. 14

данные и искомые элементы, тонкими линиями изображены вспомогательные прямые построения. Цифры при каждой линии указывают порядок построения.

26. С помощью чертежного угольника можно проводить прямые линии и перпендикуляры к ним. Кроме того, если расположить угольник так, чтобы две данные точки лежали на его катетах, то вершина прямого угла угольника будет лежать на окружности, построенной на данном отрезке как на диаметре.

Порядок построения биссектрисы данного угла таков.

1) Обозначим через A вершину угла; из произвольной точки B, принадлежащей одной из сторон угла, проводим перпендикуляр (BC) к другой стороне. Получим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C.

2) Дополним треугольник ABC до прямоугольника $ACBC'$.

3) Находим точку O пересечения диагоналей $[AB]$ и $[CC']$ и через нее проводим прямую l перпендикулярно катету $[BC]$. Этот перпендикуляр пройдет через середину $[BC]$.

4) Располагаем угольник так, чтобы точки A и B лежали на его катетах, и, «скользя» по этим точкам, перемещаем угольник до тех пор, пока его вершина попадет на перпендикуляр l. Полученная точка M лежит на искомой биссектрисе $[AM)$, так как M есть середина дуги окружности, описанной около треугольника ABC.

27. Обозначим через A недоступную точку пересечения двух данных прямых. Пересечем

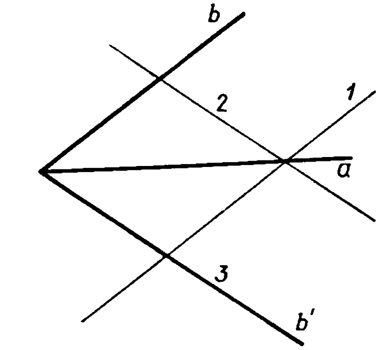


Рис. 15

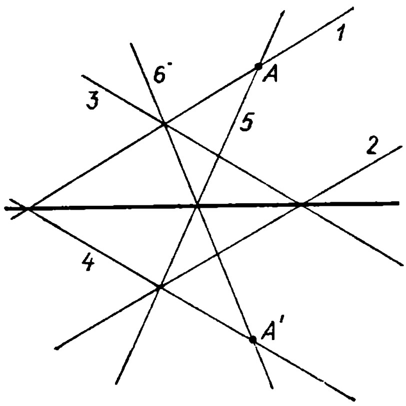


Рис. 16

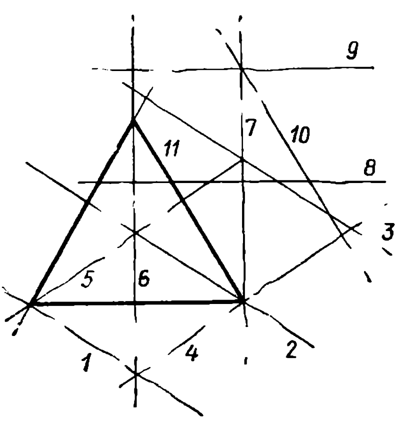


Рис. 17

эти прямые произвольной третьей прямой и получим точки B и C. Искомая биссектриса угла A проходит через точки пересечения биссектрис двух внутренних и двух внешних углов треугольника ABC при вершинах B и C. Эти биссектрисы легко построить при помощи двусторонней линейки (рис. 11).

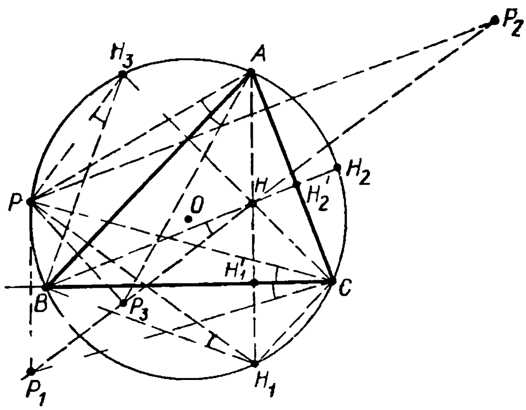


Рис. 18

28. Обозначим через A недоступную точку пересечения данных прямых. Проведем через P перпендикуляр к одной из этих прямых и обозначим через B точку пересечения этого перпендикуляра с другой прямой. Потом проведем через P перпендикуляр ко второй прямой и обозначим через C точку его пересечения с первой прямой. Мы получим, что P есть ортоцентр треугольника ABC. Поэтому перпендикуляр, проведенный из P к прямой BC, будет третьей высотой треугольника и, значит, пройдет через вершину A.

29. а) Рассмотрим треугольник ABC (рис. 18), его высоты пересекаются в точке H — ортоцентре. Продолжая высоты AH, BH, CH до их пересечения с окружностью, получим на окружности соответственно точки H_1, H_2, H_3. По свойству вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, имеем: $H_1\widehat{BC} = H_1\widehat{AC}$. Из прямоугольных треугольников AHH_2' и BHH_1' получим: $H_1\widehat{AC} = H_2\widehat{BC}$. Итак, $[BC)$ — биссектриса угла HBH_1. Аналогично докажем, что $[CB)$ — биссектриса угла HCH_1. Итак, четырехугольник $BHCH_1$ симметричен относительно (BC), следовательно, и точки H и H_1 симметричны относительно (BC).

б) Пусть P — точка описанной окружности, не совпадающая ни с A, ни с B, ни с C, точки P_1, P_2, P_3 симметричны P относительно (BC), (AC), (AB) соответственно. Докажем, что точки P_1, P_3, H принадлежат одной прямой. В силу симметрии $B\widehat{H}P_1 = B\widehat{H_1}P$, и так как углы BH_1P и BAP вписанные и опираются на одну дугу, то $B\widehat{H_1}P = B\widehat{A}P$. Точно так же доказывается, что $B\widehat{H}P_3 = B\widehat{H_3}P$ и $B\widehat{H_3}P = B\widehat{A}P$. Следовательно, $B\widehat{H}P_1 = B\widehat{H}P_3$ и точки P_1, P_3, H принадлежат одной прямой. Аналогично докажем, что точки P_2, P_3, H принадлежат одной прямой, откуда и следует, что все четыре точки P_1, P_2, P_3, H принадлежат одной прямой. Заметим, что при гомотетии с центром P и с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ точки P_1, P_2, P_3 переходят в проекции точки P на стороны треугольника. Прямая, на которой лежат эти проекции (образ прямой P_1, P_2, P_3), называется прямой Симпсона[1].

30. Пусть окружности, проходящие через точки A', B, C' и A', C, B', пересеклись еще в точке P (они уже имеют общую точку — A'). Соединим точку P с точками A', B', C'. Обозначим через α, β, γ величины углов при вершинах A, B, C в треугольнике ABC. Тогда по свойству углов вписанного четырехугольника получим:

$$\beta + \widehat{C'PA'} = \pi, \quad \gamma + \widehat{A'PB'} = \pi.$$

Далее, $\widehat{B'PC'} = 2\pi - \widehat{C'PA'} - \widehat{A'PB'} = 2\pi - \pi + \gamma - \pi + \beta$, т. е. $\widehat{B'PC'} = \beta + \gamma$.

Отсюда следует, что $\alpha + \widehat{B'PC'} = \alpha + \beta + \gamma = \pi$. Поэтому около четырехугольника $AB'PC'$ можно описать окружность. Описанная окружность, пройдя через точки A, B', C', пройдет и через точку P.

31. а) При пересечении четырех прямых получилось четыре треугольника ABC, AEF, BFD и CDE (рис. 19). Применим выводы предыдущей задачи к треугольнику ABC и к трем точкам на его сторонах: $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ и $F \in (AB)$. Отсюда сразу следует, что окружности, описанные около треугольников AEF, BDF, CDE, пересекутся в одной и той же точке P. Но на сторонах треугольника BDF также лежат точки: $A \in (BF)$, $C \in (BD)$, $E \in (DF)$. Поэтому окружности, описанные около треугольников CDE, AEF, ABC, пересекутся тоже в одной точке. Этой точкой будет та же точка P, так как в ней пересекаются окружности CDE и AEF.

б) Обозначим через O_1, O_2, O_3 соответственно центры окружностей, проходящих через точки A, P, E, F; B, F, P, D; C, E, P, D. Докажем, что четырехугольник $O_1O_2O_3P$ — вписуемый. Так как линия центров двух окружностей перпендикулярна их общей хорде, то $\widehat{O_2} + \widehat{FPD} = \pi$. Но $\widehat{FPD} = \widehat{O_1PO_3}$, так как в треугольниках FPD и O_1PO_3 $\widehat{F} = \widehat{O_1}$, $\widehat{D} = \widehat{O_3}$ (сравните величины дуг, на которые эти углы опираются).

Следовательно, $\widehat{O_2} + \widehat{O_1PO_3} = \pi$, и поэтому окружность, про-

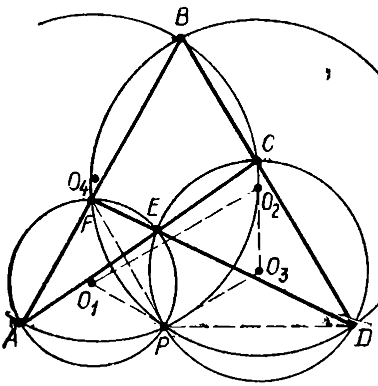


Рис. 19

[1] Р. Симпсон (1687—1768) — шотландский геометр.

ходящая через центры O_1, O_2, O_3, пройдет и через точку P. Аналогично доказывается, что и окружность, проходящая через точки O_1, O_2, O_4 (где O_4 — центр окружности, проходящей через точки A, B и C), пройдет тоже через P.

в) Обозначим H_1, H_2, H_3, H_4 — ортоцентры треугольников ABC, AEF, BFD, CDE, а буквами P_1, P_2, P_3, P_4 обозначим точки, симметричные точке P относительно прямых BC, CA, AB, DE (эти точки и ортоцентры на чертеже не показаны).

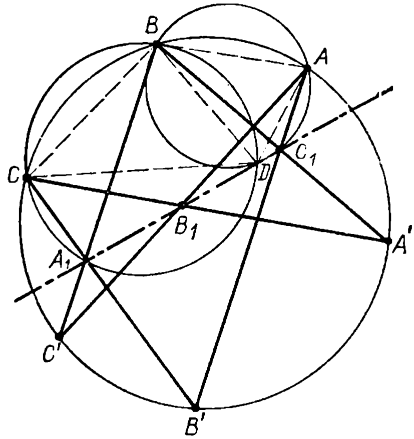


Рис. 20

Применяя к треугольнику ABC выводы задачи 29, получим, что точки P_1, P_2, P_3, H_1 принадлежат одной и той же прямой. Теперь те же выводы применим к треугольнику AEF, в котором $(AE) = (AC)$, $(AF) = (AB)$, $(EF) = (DE)$; получим, что точки P_2, P_3, P_4 и H_2 принадлежат одной прямой. Такими же рассуждениями докажем, что той же прямой принадлежат и точки H_3 и H_4.

32. Докажем, что окружности, описанные около треугольников BCA_1, CAB_1, ABC_1, пересекаются в одной точке D (рис. 20). Пусть окружности BCA_1 и ABC_1 пересекаются в точке D (общую точку B они уже имеют). По свойству вписанных углов имеем:

$$\widehat{ADB} = \widehat{AC_1B} = \frac{\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{A'B'}}{2}, \quad \widehat{BDC} = \widehat{BA_1C} = \frac{\overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{B'C'}}{2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим: $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \widehat{ADC} = \frac{\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{A'C'}}{2} = \widehat{AB_1C}$. Это значит, что окружность, описанная около $\triangle CAB_1$, тоже пройдет через точку D. Установив это, обозначим: $\widehat{BAB'} = \alpha$, $\widehat{BCB'} = \gamma$, $\alpha + \gamma = \pi$ (противоположные углы вписанного четырехугольника). На том же основании $\widehat{BDC_1} = \pi - \alpha$, $\widehat{BDA_1} = \pi - \gamma$, поэтому $\widehat{BDC_1} + \widehat{BDA_1} = \widehat{C_1DA_1} = \pi - \alpha + \pi - \gamma = \pi$, т. е. точки A_1, C_1, D принадлежат одной прямой. Аналогично доказывается, что точки B_1, C_1, D принадлежат одной прямой, откуда и следует, что точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

§ 2. **1.** Допустим, что эта сумма есть вектор $\vec{m}$. Повернем наш правильный n-угольник около его центра на угол $\frac{2\pi}{n}$. Тогда многсугольник отобразится сам на себя, поэтому при этом повороте сумма векторов $\overrightarrow{OA_k}$ должна остаться прежней. Это возможно лишь в том случае, когда $\vec{m}=\vec{0}$.

2. Если $C\in(AB)$, то $\overrightarrow{AC}=z\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=z(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, откуда получаем выражение $\overrightarrow{OC}$ через $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OC}=(1-z)\overrightarrow{OA}+$ $+z\overrightarrow{OB}$. Осталось заметить, что упомянутая сумма коэффициентов есть $(1-z)+z=1$.

Обратно, если $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, где $x+y=1$, то $x=1-y$ и $\overrightarrow{OC}=(1-y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, откуда $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ или $\overrightarrow{AC}=$ $=y\cdot\overrightarrow{AB}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AC}$ коллинерен вектору $\overrightarrow{AB}$ и поэтому точка C принадлежит прямой AB.

3. Пусть ABC — данный треугольник, M — середина $[BC]$, N — середина $[AC]$, P — точка пересечения медиан AM и BN. Введем обозначения: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$. Тогда $\overrightarrow{AC}=2\vec{n}$, $\overrightarrow{AM}=$ $=x\vec{p}$. Вектор $\overrightarrow{AM}$ есть полусумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем равенство: $x\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{b}+2\vec{n})$, откуда $\vec{p}=\frac{1}{2x}\vec{b}+\frac{1}{x}\vec{n}$. Точки B, P, N принадлежат одной прямой, поэтому $\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}=1$ и $x=$ $=\frac{3}{2}$. Этим однозначно определяется положение точки P (центроида треугольника) на медиане $[AM]$: две другие медианы пересекают $[AM]$ в одной точке.

4. Так как $(ABC)=k$, то $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}=k$, или $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}=k\right)\Rightarrow(\overrightarrow{OA}-$ $-\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OC})\Rightarrow((k-1)\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\Rightarrow\left(\vec{C}=\dfrac{k\vec{B}-\vec{A}}{k-1}\right)$.

5. Рассмотрим единичные векторы $\dfrac{\vec{b}}{b}$ и $\dfrac{\vec{c}}{c}$ (здесь $b=|\vec{b}|$, $c=$ $=|\vec{c}|$). Ввиду того что их длины равны, вектор $\dfrac{\vec{b}}{b}+\dfrac{\vec{c}}{c}$ — их сумма — направлен по биссектрисе угла A, т. е. по вектору $\vec{n}$. Итак, мы имеем равенство:

$$\vec{n}=x\left(\frac{\vec{b}}{b}+\frac{\vec{c}}{c}\right).$$

Откладывая векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{n}$ от точки A согласно выводам задачи 2, будем иметь:

$$\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=x\frac{b+c}{bc}=1,$$

откуда $x=\dfrac{bc}{b+c}$.

Итак,

$$\vec{n} = \frac{bc}{b+c}\left(\frac{\vec{b}}{b} + \frac{\vec{c}}{c}\right) = \frac{c\vec{b} + b\vec{c}}{b+c}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\vec{c} - \vec{n} = \frac{c(\vec{c} - \vec{b})}{b+c}, \quad \vec{b} - \vec{n} = \frac{b(\vec{b} - \vec{c})}{b+c}.$$

Следовательно, $(BCN) = \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}} = \frac{\vec{c} - \vec{n}}{\vec{b} - \vec{n}} = -\frac{c}{b} = -\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}$.

6. Задача решается так же, как и предыдущая, только вектор $\frac{\vec{b}}{b}$ нужно заменить противоположным $-\frac{\vec{b}}{b}$. Тогда получим: $\vec{n'} = \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{c-b}$, $(BCN') = \frac{c}{b}$.

7. Если Q — точка пересечения медиан $[AM]$, $[BN]$, $[CK]$ треугольника ABC, O — произвольное начало, то, поскольку $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (см., например, задачу 3), а $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, можно записать: $\vec{Q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = \vec{A} + \frac{2}{3}\left[(\vec{B} - \vec{A}) + \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{B})\right] = (1 - \frac{2}{3})\vec{A} + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2})\vec{B} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{C} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$, что и требовалось установить.

8. Согласно указанной в задаче формуле имеем:

$$(m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OP} = m_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}. \tag{1}$$

Положим, что с заменой точки O на O' произойдет и замена P на P', тогда мы получим: $(m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{O'P'} = m_1(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}) + \ldots + m_n(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_n})$. Вычитая это равенство из равенства (1), будем иметь: $(m_1 + \ldots + m_n)(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P'}) = (m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OO'}$, откуда $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OO'}$, или $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$; значит, $P' = P$. В частности, в случае двух точек имеем:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Если в простое отношение $(A_1A_2P) = \frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PA_2}} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OP}}$ вместо $\overrightarrow{OP}$ подставить правую часть равенства (2), то после элементарных преобразований найдем: $(A_1A_2P) = -\frac{m_2}{m_1}$.

9. Ввиду однородности материала можно предположить, что массы сторон треугольника сосредоточены в их серединах и пропорциональны их длинам: $a = |BC|$, $b = |CA|$ и $c = |AB|$. Середины сторон $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ треугольника ABC обозначим соответственно A', B', C'. Тогда согласно формуле определения центра масс получим:

$$\vec{P} = \frac{a\vec{A'} + b\vec{B'} + c\vec{C'}}{a + b + c}.$$

Чтобы выразить $\vec{P}$ через $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, воспользуемся формулами:

$$\vec{A'} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}, \quad \vec{B'} = \frac{\vec{C} + \vec{A}}{2}, \quad \vec{C'} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $\vec{P}$, найдем:

$$\vec{P} = \frac{(b + c)\vec{A} + (c + a)\vec{B} + (a + b)\vec{C}}{2(a + b + c)}.$$

Для построения точки P нужно исходить из того, что в вершинах A', B', C' треугольника $A'B'C'$ находятся массы a, b и c. Согласно выводам задачи 8 центр тяжести точек B и C лежит на отрезке BC и делит его в отношении $\frac{c}{b}$. Но длина $|A'B'|$ равна $\frac{c}{2}$, а длина $|A'C'|$ равна $\frac{b}{2}$, и отсюда следует, что центр тяжести точек B' и C' делит этот отрезок в том же отношении, в каком его делит конец биссектрисы из вершины A'. Поэтому центр тяжести треугольника $A'B'C'$ лежит на биссектрисе этого угла. Аналогично доказывается, что он лежит и на биссектрисе угла B'. Поэтому искомый центр тяжести, т. е. точка P, совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника $A'B'C'$.

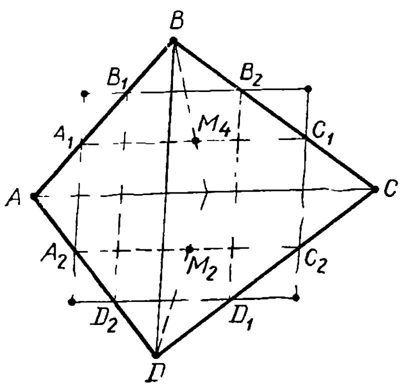


Рис. 21

10. Если $ABCD$ — данный четырехугольник, то по общей формуле радиус-вектор центроида есть

$$\vec{P} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}}{4}.$$

Вместе с тем, обозначая через M_1, M_2, M_3, M_4 центроиды треугольников BCD, ACD, ABD и ABC, мы получим, что P есть точка пересечения прямых M_1M_3 и M_2M_4.

11. Для данного четырехугольника (рис. 21) $ABCD$ со-

храним те же обозначения центроидов, как и в предыдущей задаче: M_2 и M_4 — центроиды треугольников ACD и ABC соответственно. Обозначим через A_1 и A_2 точки деления на сторонах AB и AD, ближайшие к вершине A; через B_1 и B_2 — точки деления на сторонах BA и BC, ближайшие к вершине B; через C_1 и C_2 — точки деления на сторонах CB и CD, ближайшие к вершине C; наконец, через D_1 и D_2 — точки деления на сторонах DC и DA, ближайшие к вершине D. Так как $(B_1B_2) \parallel (A_1C_1) \parallel (AC)$ и $(D_1D_2) \parallel (A_2C_2) \parallel (AC)$, то $(D_1D_2) \parallel (B_1B_2)$. Аналогично получаем, что $(A_1A_2) \parallel (C_1C_2)$. Итак, четыре прямые $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$, пересекаясь, образуют параллелограмм. Центроид M_2 треугольника ACD находится на середине отрезка A_2C_2. Центроид M_4 треугольника ABC находится на середине отрезка A_1C_1. Центр тяжести четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой M_2M_4, которая проходит через центр параллелограмма, так как (M_2M_4) совпадает с осью полосы между прямыми A_1A_2 и C_1C_2. Аналогично доказывается, что через центр параллелограмма проходит и прямая M_1M_3, где M_1 и M_3 центроиды треугольников ABD и BCD соответственно. Отсюда следует, что центроид четырехугольника совпадает с центром построенного параллелограмма.

12. Указанную фигуру можно разбить на два прямоугольника. Прямая, проходящая через их центры, проходит через центр тяжести фигуры. Разбивая ту же фигуру на два прямоугольника по-другому, получим другую прямую, проходящую через их центры. Точка пересечения этих прямых и есть центр тяжести фигуры.

13. Если гомотетия с центром S и коэффициентом k отображает точку A на A', то $(\vec{A}' - \vec{S}) = k\,(\vec{A} - \vec{S})$, откуда:

$$\vec{A}' = k\vec{A} + (1 - k)\vec{S}.$$

14. Пусть точки A_1 и B_1 гомотетией с центром S_1 и коэффициентом k_1 отображаются соответственно на точки A_2 и B_2. Тогда получим: $(A_1A_2) \cap (B_1B_2) = S_1$ и $\overrightarrow{A_2B_2} = k_1\,\overrightarrow{A_1B_1}$. Вторая гомотетия с центром S_2 и коэффициентом k_2 отображает A_2 на A_3 и B_2 на B_3, причем $(A_2A_3) \cap (B_2B_3) = S_2$ и $\overrightarrow{A_3B_3} = k_2\overrightarrow{A_2B_2}$. Так как $(A_1B_1) \parallel (A_2B_2)$ и $(A_2B_2) \parallel (A_3B_3)$, то и $(A_1B_1) \parallel (A_3B_3)$. Итак, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ коллинеарны. Положим, что прямые A_1A_3 и B_1B_3 пересекаются и пусть $(A_1A_3) \cap (B_1B_3) = S_3$. Далее из равенства $\overrightarrow{A_2B_2} = k_1\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_3B_3} = k_2\overrightarrow{A_2B_2}$ получим: $\overrightarrow{A_3B_3} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Итак, существует гомотетия, преобразующая A_1 в A_3 и B_1 в B_3 с каким-то центром S_3 и коэффициентом $k_3 = k_1 \cdot k_2$. Покажем, что центры трех гомотетий S_1, S_2 и S_3 лежат на одной и той же прямой. Это следует из того, что при гомотетии только прямые, проходящие через центр, инвариантны, т. е. преобразуются сами в

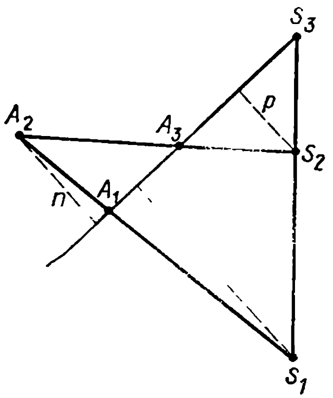


Рис. 22

себя. Прямая S_1S_2 инвариантна и при первом, и при втором преобразовании; значит, она инвариантна и при композиции, и поэтому $S_3 \in (S_1S_2)$.

Чтобы определить положение центра S_3 по отношению к центрам S_1 и S_2, рассмотрим схему расположения данных точек. На рисунке 22 обозначения точек соответствуют нашей композиции двух гомотетий с центрами S_1, S_2 и результирующей гомотетии с центром S_3.

Обозначим соответственно через m, n, p расстояния от точек S_1, A_2, S_2 до прямой S_3A_1. Принимая точки A_1, A_3, S_3 за центры гомотетии, получим:

$$\frac{\overrightarrow{A_1S_1}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = -\frac{m}{n}; \quad \frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_3S_2}} = -\frac{n}{p}; \quad \frac{\overrightarrow{S_3S_1}}{\overrightarrow{S_3S_2}} = \frac{m}{p}.$$

Преобразуем эти выражения:

$$\frac{\overrightarrow{A_1S_1}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{S_1A_1}}{\overrightarrow{A_2A_1}} = \frac{\overrightarrow{S_1A_1}}{\overrightarrow{S_1A_1} - \overrightarrow{S_1A_2}} = \frac{1}{1-k_1} = -\frac{m}{n},$$

$$\frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_3S_2}} = \frac{\overrightarrow{A_2A_3}}{\overrightarrow{S_2A_3}} = \frac{\overrightarrow{S_2A_3} - \overrightarrow{S_2A_2}}{\overrightarrow{S_2A_3}} = \frac{k_2-1}{k_2} = -\frac{n}{p}.$$

Наконец:

$$\frac{\overrightarrow{S_3S_1}}{\overrightarrow{S_3S_2}} = \frac{m}{p} = -\frac{m}{n}\cdot -\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{k_2-1}{k_2(1-k_1)}.$$

Если окажется, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_3B_3}$, то мы имеем: $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3}$, — и композиция гомотетий является параллельным переносом $\vec{m} = \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3}$. Инвариантная прямая S_1S_2 сонаправлена с вектором переноса.

15. Пусть мы имеем окружности с несовпадающими центрами O_1 и O_2 и разными радиусами $r_1 > r_2$. Проведем радиус-вектор $\overrightarrow{O_1A_1}$, а также радиус-вектор $\overrightarrow{O_2A_2}$, сонаправленный с первым. Гомотетия с центром $S_1 = (O_1O_2) \cap (A_1A_2)$ и коэффициентом $k_1 = \frac{\overrightarrow{O_2A_2}}{\overrightarrow{O_1A_1}} = \frac{r_2}{r_1}$ отображает первую окружность на вторую, так как, когда точка A_1 пробегает первую окружность, точка A_2 остается на постоянном расстоянии от O_2, ибо

$$|\overrightarrow{O_2A_2}| = k_1|\overrightarrow{O_1A_1}| = k_1r_1.$$

Если провести радиус-вектор $\overrightarrow{O_2A_2'}$, противонаправленный вектору $\overrightarrow{O_1A_1}$, то $\frac{\overrightarrow{O_2A_2'}}{\overrightarrow{O_1A_1}} = -\frac{r_2}{r_1}$, и мы получим гомотетию с центром $S_1' = (O_1O_2) \cap (A_1A_2')$ и отрицательным коэффициентом $k_1' = -\frac{r_2}{r_1}$. Если дана еще третья окружность с центром O_3 и радиусом r_3 (рис. 23), то и она двояко гомотетична с первой и второй окружностью. Замечая, что композиция преобразований первой окружности во вторую и второй — в третью отображает первую окружность в третью, мы приходим к выводу, что центры таких гомотетий лежат по три на одной прямой. Ввиду того что коэффициент результирующей гомотетии равен произведению коэффициентов образующих гомотетий, мы заключаем: композиция гомотетий одинаковых знаков дает гомотетию с положительным коэффициентом, разных знаков — с отрицательным коэффициентом. Имеющиеся у нас шесть гомотетий с центрами S_1, S_1', S_2, S_2', S_3, S_3' (буквами со штрихами отмечены центры гомотетий с отрицательным коэффициентом) расположены по три на четырех прямых $(S_1S_2S_3)$, $(S_1S_2'S_3')$, $(S_2S_1'S_3')$ и $(S_3S_1'S_2')$ (см. рис. 23). Эти прямые называются осями гомотетии трех окружностей.

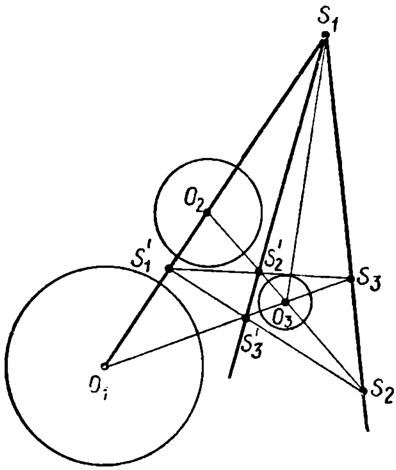


Рис. 23

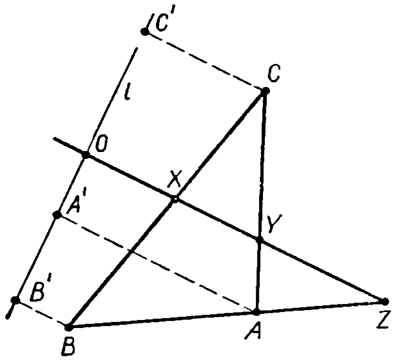


Рис. 24

16. Необходимость условия. Пусть прямая пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках X, Y, Z (рис. 24). Проведем прямую l перпендикулярно прямой XZ. Она пересечет последнюю в точке O. Обозначим через A', B', C' проекции точек A, B и C на прямую l. Так как параллельные прямые на произвольных секущих определяют соответственно пропорциональные отрезки, то получим:

$$\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OC'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OA'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OB'}} = 1. \qquad (1)$$

Заметим, что согласно предложению задачи 1 из § 1 (аксиома Паша) секущая прямая либо пересекает две и только две стороны треугольника, либо не пересекает ни одной. В первом случае два из сомножителей произведения (1) отрицательны, а один положителен. Во втором — все три положительны. Значит, произведение всегда положительно.

Достаточность условия. Пусть нам дано, что

$$\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} = 1,$$

и положим, что прямая XY пересекает прямую AB в точке Z'. Тогда по доказанному получим:

$$\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{Z'A}}{\overrightarrow{Z'B}} = 1,$$

откуда $\frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{Z'A}}{\overrightarrow{Z'B}}$. Но точка, делящая отрезок в данном отношении, единственна, поэтому $Z' = Z$.

17. Внешняя биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам (см. задачу 5). Подставив соответствующие значения длин отрезков в выражение $\frac{|MB|}{|MC|} \cdot \frac{|NC|}{|NA|} \cdot \frac{|PA|}{|PB|}$, убедимся, что эти отношения удовлетворяют условиям теоремы Менелая.

18. Пусть ACB — данный угол, окружность с центром O' — данная, окружность с центром O — искомая (рис. 25). Примем точку касания S окружностей за центр гомотетии, преобразующей эти окружности друг в друга. Эта же гомотетия преобразует угол ACB в угол $A'C'B'$, в котором стороны $A'C'$ и $C'B'$ касаются данной окружности, и потому их легко построить, так как $(A'C') \parallel (AC)$ и $(C'B') \parallel (CB)$. Пересечение прямой CC' с данной окружностью дает центр гомотетии S. Центр O искомой окружности найдется как точка пересечения прямой $O'S$ с биссектрисой данного угла.

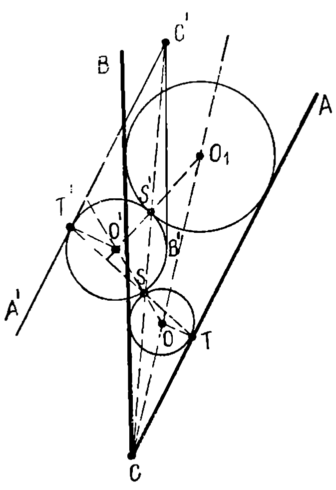


Рис. 25

Второе решение найдите самостоятельно, принимая за центр гомотетии вторую точку пересечения прямой CC' с окружностью.

19. Пусть ABC и $A'B'C'$ — данные подобные треугольники, и некоторое преобразование подобия отображает точку A на точку A' и точку B на точку B', (AB) не параллельна $(A'B')$. (Если бы имела место

параллельность, то преобразование привелось бы к гомотетии, что уже рассмотрено в задаче 14.) Заметим, что если треугольники подобны и одинаково ориентированы, то у них конгруэнтны и одинаково ориентированы соответственные углы. А отсюда следует, что все пары соответственных сторон обоих треугольников образуют друг с другом углы одной и той же величины, которая однозначно определена углом между направлениями $[AB)$ и $[A'B')$ (рис. 26). Нам нужно найти в плоскости такую точку S, чтобы выполнялось равенство $\widehat{ASA'} = \widehat{BSB'} = \omega$, где ω есть величина угла между $[AB)$ и $[A'B')$. Для отыскания S строим на $[AA']$ и $[BB']$ окружности, на дуги которых опираются вписанные углы данной величины. Построение упрощается, если учесть, что точка $P = (AB) \cap (A'B')$ принадлежит этим окружностям. Полученная точка S удовлетворяет условию $\widehat{ASA'} = \widehat{BCB'} = \omega$. Она единственна, так как ни одна точка, не совпадающая с ней, этому условию не удовлетворяет (проверьте!). Найдя точку S, повернем около нее первый треугольник на угол ω так, чтобы точка A оказалась на прямой SA', а точка B — на прямой SB'. В результате мы получим треугольники, получающиеся друг из друга гомотетией с центром S и коэффициентом $k = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Точка S называется центром подобия исходных треугольников.

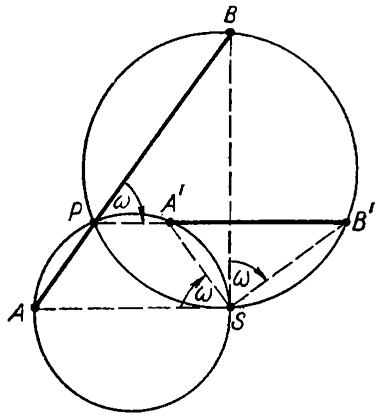


Рис. 26

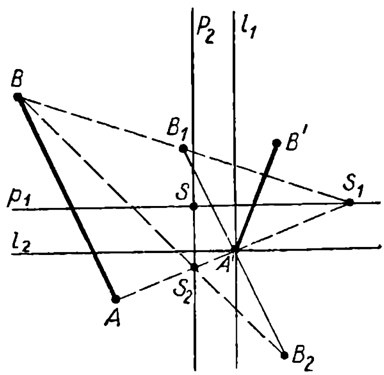


Рис. 27

20. Как и в предыдущей задаче, преобразование подобия определяется соответствием двух пар точек: A отображается на A' и B на B' (рис. 27), только в данном случае ориентация треугольника меняется на обратную. Поэтому, если ко второму треугольнику применить осевую симметрию, то ориентация треугольников станет одинаковой. Если при этом добиться еще того, чтобы соответственные отрезки стали параллельны, то фигуры станут гомотетичными. Чтобы осуществить такое преобразование, проведем через A' ось симметрии l_1 параллельно биссектрисе угла между прямыми AB и $A'B'$. Тогда отрезок $A'B'$ отображается относительно этой оси на отрезок $A'B_1$, $(A'B_1) \parallel (AB)$ и треугольники станут гомотетичными с центром $S_1 = (AA') \cap (BB_1)$. Прямая $p_1 \perp l_1$, проходящая через S_1, есть инвариантная прямая и симметрии, и гомотетии. Но можно провести и другую ось симметрии l_2 через точку A', параллельную биссектрисе другого угла между (AB) и $(A'B')$. Эта симметрия отображает $[A'B']$ на $[A'B_2]$, и опять $(A'B_2) \parallel (AB)$. Мы получим новую гомотетию с центром $S_2 = (AA') \cap (BB_2)$. Новая инвариантная прямая $p_2 \perp l_2$ проходит через S_2. Точка $S = p_1 \cap p_2$ есть неподвижная точка композиции преобразований: симметрии относительно p_1 или p_2 и гомотетии с центром S. Единственность точки S обусловлена тем, что при замене оси l_1 другою осью симметрии, параллельной l_1, точка A' сместится в новое положение A'' (причем $(A'A'') \perp l_1$) и центр гомотетии S_1 сместится в точку S_1'. Но так как $\frac{|AS_1|}{|AA'|} = \frac{|AS_1'|}{|AA''|}$, то $(S_1S_1') \parallel (A'A'')$, т. е. $(S_1S_1') \perp l_1$ и $S_1' \in p_1$. Итак, прямая p_1 одна и та же при любом выборе l_1; то же относится и к прямой p_2, и, значит, точка $S = p_1 \cap p_2$ определяется однозначно.

21. Пусть в данной трапеции $ABCD$ $(AD) \parallel (BC)$, $(AB) \cap (CD) = S$, $|AD| > |BC|$, $(BD) \cap (AC) = P$. Примем точку S за центр гомотетии, отображающей B на A и C на D. При этом прямая BD отображается на параллельную ей прямую a, проходящую через точку A, а прямая AC отображается на параллельную ей прямую b, проходящую через точку D. Пусть $a \cap b = P'$. Точка пересечения прямых AC и BD — точка P — отображается при этом на точку пересечения прямых a и b — точку P'. Прямые PP' и AD — диагонали параллелограмма — пересекаются в точке M — середине отрезка AD. Обратная теорема легко доказывается рассуждением от противного.

22. Построения а) и б) основаны на применении двух теорем предыдущей задачи.

в) Проведем диаметр $[AB]$. Центр окружности O — его середина. Через произвольную точку M окружности предыдущим построением проводим хорду $[MN] \parallel (AB)$. Пусть $(AM) \cap (BN) = S$. В силу симметрии окружности $(SO) \perp (AB)$. Этим определяется второй диаметр, перпендикулярный к (AB), концы которого с точками A и B определяют вершины квадрата.

г) Как в предыдущем построении, проводим хорду $[MN]$, параллельную диаметру $[AB]$. Через точки M и N проводим диаметры $[MM']$ и $[NN']$, тогда $(M'N') \parallel (AB)$. Прямые MN и $M'N'$ определяют полосу, в которой (AB) — ось, она же и ось симметрии прямоугольника $MNN'M'$.

д) Построенная полоса с ее осью в пересечении с любой прямой определяет отрезок с его серединой, что дает возможность производить при помощи только линейки первые два построения.

23. а) Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Примем начало O за центр гомотетии с коэффициентом k, тогда получим: $k\vec{r} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$.

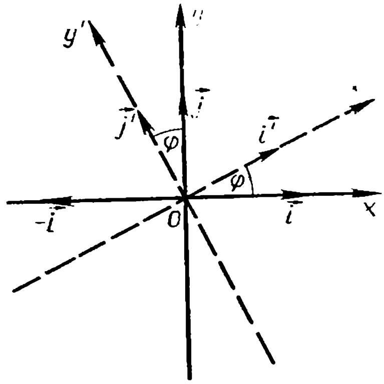


Рис. 28

б) Рассмотрим сумму $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$. Пусть $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\overrightarrow{MN} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Обозначим через M_x и N_x проекции точек M и N на ось Ox, M_y и N_y — проекции M и N на ось Oy. Тогда получим: $\overrightarrow{ON_x} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xN_x}$, или $x\vec{i} = x_1\vec{i} + x_2\vec{i} = (x_1 + x_2)\vec{i}$. Значит, $x = x_1 + x_2$. Аналогично $y = y_1 + y_2$.

24. Имеем равенство: $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$. Подставляя сюда $\overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}$; $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, получим: $(a + x')\vec{i} + (b + y')\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Поэтому $x = x' + a$, $y = y' + b$, откуда: $x' = x - a$, $y' = y - b$.

25. а) Рассмотрев проекции векторов $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ на Ox и Oy, получим (рис. 28): $\vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$; $\vec{j}' = \vec{j}\cos\varphi - \vec{i}\sin\varphi$.

б) Для данного вектора r будем иметь:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = x'(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) + y'(\vec{j}\cos\varphi - \vec{i}\sin\varphi).$$

Сравнивая коэффициенты при векторах, получим:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Из этих уравнений найдем:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

26. Преобразовав систему координат Oxy поворотом на угол α в систему координат $Ox'y'$, получим:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha \quad \text{и} \quad \vec{j}' = \vec{j}\cos\alpha - \vec{i}\sin\alpha.$$

Повернув систему $Ox'y'$ на угол β, получим:

$$\vec{i}'' = \vec{i}'\cos\beta + \vec{j}'\sin\beta; \quad \vec{j}'' = \vec{j}'\cos\beta - \vec{i}'\sin\beta.$$

Однако систему $Ox''y''$ можно получить сразу, поворотом системы Oxy на угол $(\alpha+\beta)$; тогда получаем:

$$\begin{aligned}\vec{i}'' &= \vec{i}\cos(\alpha+\beta)+\vec{j}\sin(\alpha+\beta);\\ \vec{j}'' &= \vec{j}\cos(\alpha+\beta)-\vec{i}\sin(\alpha+\beta).\end{aligned} \qquad (*)$$

Подставим теперь в первую из формул для $\vec{i}''$ выражения для $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получим:

$$\vec{i}''=(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha)\cos\beta+(\vec{j}\cos\alpha-\vec{i}\sin\alpha)\sin\beta. \qquad (**)$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в формулах (*) и (**), получаем основные формулы тригонометрии:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

(При этом выводе не накладывается никаких ограничений ни на знаки, ни на величины углов α и β.)

27. Мы имеем:

$$((ABC)=\lambda)\Rightarrow(\overrightarrow{CA}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}),\ \text{т. е. }\vec{A}-\vec{C}=\lambda(\vec{B}-\vec{C}),$$

откуда $\vec{C}=\dfrac{\lambda\vec{B}-\vec{A}}{\lambda-1}$.

Пусть даны точки: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x;\ y)$. Тогда из выведенной формулы получаем

$$x\vec{i}+y\vec{j}=\frac{\lambda x_2\vec{i}+\lambda y_2\vec{j}-x_1\vec{i}-y_1\vec{j}}{\lambda-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при ортах, находим:

$$x=\frac{\lambda x_2-x_1}{\lambda-1};\quad y=\frac{\lambda y_2-y_1}{\lambda-1}.$$

28. Свойства а), б) и в) доказываются, исходя из определения скалярного произведения векторов из того, что $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ и $\cos 90^\circ=0$.

г) Пусть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ (рис. 29). Умножим скалярно все векторы на вектор $\vec{m}$ и получим: $\vec{m}\vec{a}=ma'$, $\vec{m}\vec{b}=mb'$, $\vec{m}\vec{c}=mc'$. Здесь $m=|\vec{m}|$, a', b', c' — длины проекций векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ на направление вектора $\vec{m}$, взятые с соответствующими знаками. Так как проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых, то $c'=a'+b'$, поэтому $\vec{m}\vec{a}+\vec{m}\vec{b}=ma'+mb'=m(a'+b')=$ $=mc'=\vec{m}\vec{c}$.

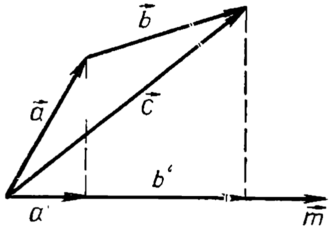


Рис. 29

Итак, $\vec{m}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{m}\vec{c}$, что и требовалось.

29. а) Для доказательства теоремы косинусов и синусов возводим в скалярный квадрат обе части равенства $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ в треугольнике ABC. Получим: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$. Отсюда, применяя формулу $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, находим:

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}}{2bc}=\frac{2\Delta}{bc},$$

где $\Delta=\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}$.

Аналогично $\sin\beta=\frac{2\Delta}{ca}$, $\sin\gamma=\frac{2\Delta}{ab}$. И наконец,

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=a:b:c.$$

б) Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, где $ABCD$ — параллелограмм, $\vec{m}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{n}=\overrightarrow{BD}$, то $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$.

Возводя в скалярный квадрат обе части этих равенств и складывая их по частям, получим: $m^2+n^2=2a^2+2b^2$.

30. а) Для доказательства тождества достаточно раскрыть все скобки и произвести сложение.

б) Пусть в треугольнике ABC высоты, проведенные из вершин B и C, пересеклись в точке H. Обозначим: $\overrightarrow{HA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{HB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{HC}=\vec{c}$. Тогда в силу перпендикулярности векторов получим: $\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})=0$ и $\vec{c}(\vec{a}-\vec{b})=0$.

Итак, в доказанном тождестве два слагаемых равны нулю, значит, и третье слагаемое равно нулю, $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})=0$, но отсюда следует, что $(HA)\perp(BC)$, т. е. что (HA) есть третья высота треугольника.

31. Обозначим через a, b, c, d длины сторон данного четырехугольника $PQRS$ (рис. 30) и соответственно через A, B, C, D — середины сторон; пусть m и n — длины диагоналей, M и N — их середины. Обозначим также $|AC|=p$, $|BD|=q$, $|MN|=t$. Используя свойство средней линии треугольника, убеждаемся, что $ABCD$, $AMCN$ и $BMDN$ — параллелограммы. Применяя к ним формулу, выражающую связь между длинами сторон и диагоналей, выведенную в задаче 29, получим:

в параллелограмме $ABCD$ $\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{2}=p^2+q^2$,

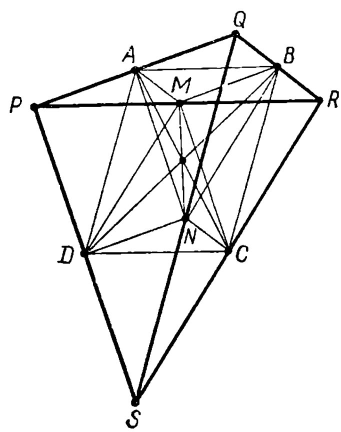


Рис. 30

в параллелограмме $AMCN$ $\frac{b^2}{2}+\frac{d^2}{2}=p^2+t^2$,

в параллелограмме $BMDN$ $\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}=q^2+t^2$.

Складывая два последних равенства, получим:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=p^2+q^2+2t^2.$$

Заменяя в правой части сумму p^2+q^2 ее значением из первого равенства, найдем:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=\frac{m^2+n^2}{2}+2t^2.$$

И окончательно:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4t^2.$$

32. а) Обозначим через m_a длину медианы $[AM]$ треугольника ABC. Проведя через вершины B и C прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника, получим параллелограмм, стороны которого имеют длины b и c, а диагонали — длины $2m_a$ и a, где a, b, c — длины сторон треугольника. Применяя формулу, выведенную в задаче 29,б, получим:

$$(4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2)\Rightarrow\left(m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right).$$

б) Согласно формуле из решения задачи 5 (§ 2) имеем:

$$\vec{n}=\frac{b\vec{c}+c\vec{b}}{b+c}.$$

Возведя скалярно в квадрат обе части равенства, получим:

$$n^2=\frac{2b^2c^2+2bc\cdot\vec{b}\vec{c}}{(b+c)^2}. \qquad (1)$$

Но из треугольника ABC мы имеем

$$(a^2=b^2+c^2-2\vec{b}\vec{c})\Rightarrow(2\vec{b}\vec{c}=b^2+c^2-a^2).$$

Подставляя это значение в формулу (1), получим:

$$n^2=\frac{2b^2c^2+bc\,(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=bc\,\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}.$$

Аналогично для длины n биссектрисы внешнего угла получаем:

$$n^2=bc\,\frac{a^2-(c-b)^2}{(c-b)^2}.$$

33. Пусть $\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$; $\vec{r}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$. Так как $\vec{i}^2=\vec{j}^2=1$, $\vec{i}\vec{j}=0$, перемножая $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, получим:

$$\vec{r}_1\vec{r}_2=x_1x_2+y_1y_2.$$

34. а) Так как в случае перпендикулярности векторов $\vec{r}_1\vec{r}_2 = 0$, то условие перпендикулярности выразится формулой:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

б) Для определения расстояния между точками возведем скалярно в квадрат разность $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\vec{d}^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = ((x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j})^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Для определения длины r вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i}$ можно записать: $\vec{r}^2 = r^2 = x^2 + y^2$, откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для определения угла φ между векторами запишем:

$$\vec{r}_1\vec{r}_2 = r_1r_2\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2;$$
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1r_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

35. Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{r} - \vec{p}$ перпендикулярны, имеем: $(\vec{r} - \vec{p})\vec{p} = 0$. Отсюда, в силу того что $\vec{p} = p\vec{e}$, получаем:

$$\vec{r}\vec{e} = p.$$

Здесь $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{e} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$. Перемножив, будем иметь:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p.$$

Если в этом уравнении $p = 0$, то это означает, что прямая проходит через начало координат, образуя с осью Ox угол, равный $\varphi + 90°$. Если $p \neq 0$, $\varphi = 0$, то уравнение принимает вид: $x = p$ — это уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей на расстоянии p от начала координат. При $\varphi = 90°$ имеем: $y = p$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей на расстоянии p от начала координат. Наконец, уравнения $y = 0$ и $x = 0$ являются уравнениями осей Ox и Oy.

36. Уравнение вида $\vec{r}\vec{a} = m$ есть уравнение прямой, так как, полагая $\vec{a} = a\vec{e}$, где $a = |\vec{a}|$, мы можем переписать его в виде $a\vec{r}\vec{e} = m$, откуда $\vec{r}\vec{e} = \frac{m}{a}$, или $\vec{r}\vec{e} = p$. При этом следует иметь в виду, что $p \geqslant 0$, поэтому, если окажется, что $m < 0$, то для согласования знаков правой и левой части уравнения необходимо орт $\vec{e}$ заменить противоположным. Полагая $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, из соотношения $\vec{r}\vec{a} = m$ получим уравнение: $x_1x + y_1y - m = 0$. Обозначим x_1 через A, y_1 через B и $-m$ через C, получим общее уравнение прямой в координатах:

$$Ax + By + C = 0.$$

37. Чтобы доказать, что любое линейное уравнение вида $Ax + By + C = 0$, есть уравнение прямой. перенесем C в правую часть и положим, что $-C \geqslant 0$. Если C этому условию не удовлетворяет, то у каждого члена уравнения изменим знак на противоположный. Теперь положим: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{a} = A\vec{i} + B\vec{j}$, $-C = m \geqslant 0$. В результате получим уравнение:

$$\vec{r}\vec{a} = m. \qquad (1)$$

Чтобы вычислить $a = |\vec{a}|$, возведем скалярно в квадрат выражение для $\vec{a}$ в координатах, получим: $(a^2 = A^2 + B^2) \Rightarrow \Rightarrow (a = \sqrt{A^2 + B^2})$. Разделив обе части уравнения (1) на a, приведем его к нормальному виду: $\vec{r}\vec{e} = p$, где $p = \frac{m}{a} \geqslant 0$, $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\vec{j}$. Полагая $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\varphi$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\varphi$, получим числа, определяющие угол φ; уравнение теперь приводится к форме $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$.

38. Положим, что при подстановке в левую часть рассматриваемого уравнения координат x_1, y_1 данной точки M мы получили число k:

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p = k.$$

Перенося p в правую часть уравнения, получим:

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi = p + k.$$

Если x_1 и y_1 считать переменными, то получим уравнение прямой, параллельной данной и содержащей точку M, но находящейся от начала координат на расстоянии $p + k$. Это значит, что расстояние от точки M, принадлежащей второй прямой, до первой прямой равно $|k|$, так как $|k|$ — это расстояние между нашими параллельными прямыми. Если $k > 0$, то вторая прямая дальше от начала координат, чем первая, и точки M, O находятся по разные стороны от прямой. Если $k < 0$, то точки M и O находятся по одну сторону от прямой.

39. а) Решая систему уравнений двух прямых исключением одной из переменных, найдем для координат $(x_1;\ y_1)$ точки пересечения этих прямых формулы:

$$x_1 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \quad y_1 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Выражения, находящиеся в числителях и знаменателях полученных дробей, удобно записывать в виде квадратной схемы, называемой определителем:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Итак:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Система уравнений прямых не имеет решения, если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. В этом случае прямые параллельны.

Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то $A_1B_2 = A_2B_1$ и $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Отсюда следует, что в случае параллельности прямых коэффициенты при переменных x и y пропорциональны.

Так как направление перпендикуляров к прямым определяется векторами $\vec{a}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j}$ и $\vec{a}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j}$, то угол между прямыми равен углу между векторами. Этот угол определяется формулой (см. задачу 34):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$ и значит

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Это — условие перпендикулярности прямых.

б) Приведя оба уравнения к нормальному виду, находим:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0 \text{ и } x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0.$$

Приравнивая их друг к другу, получим соотношение:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2.$$

Этому уравнению, являющемуся уравнением прямой, удовлетворяют только такие точки $(x; y)$, которые равноудалены от обеих прямых (см. задачу 38). Следовательно, это и есть уравнение биссектрисы угла между данными прямыми. Изменив в одном из исходных уравнений все знаки на противоположные, получим уравнение второй биссектрисы между теми же прямыми.

40. Если точка M $(x_1; y_1)$ принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т. е.

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим:

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ — общее уравнение прямой, проходящей через данную точку.

Если прямая должна проходить еще и через точку $N(x_2; y_2)$, то и ее координаты x_2, y_2 должны удовлетворять полученному уравнению:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

6

Итак, мы имеем два соотношения:

$$A(x-x_1)=-B(y-y_1),$$
$$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1).$$

Почленным делением их друг на друга получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{или} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0.$$

Это уравнение задает прямую, проходящую через точки M и N.

41. Найдя координаты точки пересечения второй и третьей прямой (см. задачу 39), получим следующие формулы:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Если мы хотим, чтобы и первая прямая проходила через эту точку, координаты точки должны удовлетворять и первому уравнению, т. е.

$$A_1\cdot\frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}+B_1\cdot\frac{\begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}+C_1=0.$$

Иначе:

$$A_1\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}+B_1\begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}+C_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}=0.$$

Выражение в левой части записывается в виде определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, три прямые проходят через одну и ту же точку при условии

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

42. Пусть $\vec{r}$ — переменный вектор. Величина расстояния $|\vec{r}-\vec{c}|$ постоянна и равна радиусу R окружности. Отсюда получаем:

$$(\vec{r}-\vec{c})^2=R^2.$$

Это уравнение окружности с центром $C\,(\overrightarrow{OC}=\vec{c})$ и радиусом R. Если $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$; $\vec{c}=a\vec{i}+b\vec{j}$, то $\vec{r}-\vec{c}=(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}$, и поэтому уравнение окружности в координатной форме имеет вид: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Если центр лежит на оси Ox, то $b=0$, и тогда получим:

$$(x-a)^2+y^2=R^2.$$

Если центр лежит на Oy, то $a=0$, и тогда получим:

$$x^2+(y-b)^2 \quad R^2.$$

Если центр совпадает с началом координат, то $a=0$ и $b=0$, и уравнение принимает вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Если окружность проходит через начало координат, то расстояние от начала координат до центра равно радиусу $R^2 \cdot\ a^2+b^2$. Подставив это значение в каноническое уравнение окружности, получим:

$$x^2-2ax+y^2-2bx=0.$$

Это уравнение окружности, проходящей через начало координат.

43. Если раскрыть скобки в каноническом уравнении окружности, то получим:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-R^2=0.$$

По сравнению с общим уравнением второго порядка это уравнение имеет две особенности: 1) равны коэффициенты при x^2 и y^2; 2) отсутствует член, содержащий xy. Рассмотрим общее уравнение с такими свойствами $kx^2+ky^2+2mx+2ny+p=0$ и попробуем привести его к уравнению окружности. Деля обе части на k, получим:

$$x^2+y^2+2\frac{m}{k}x+2\frac{n}{k}y+\frac{p}{k}=0.$$

Положим $\frac{m}{k}=-a$, $\frac{n}{k}=-b$ и прибавим и вычтем a^2 и b^2; получим: $(x-a)^2+(y-b)^2+\frac{p}{k}-a^2-b^2=0$. В случае, когда $a^2+b^2-\frac{p}{k}>0$, можно положить $a^2+b^2-\frac{p}{k}=R^2$, и тогда получаем уравнение окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Если же $a^2+b^2-\frac{p}{k}<0$, то никакая точка $(x;\ y)$ не удовлетворяет нашему уравнению. Случай $a^2+b^2-\frac{p}{k}=0$ рассмотрите самостоятельно.

44. Чтобы доказать тождество, нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Рассмотрим теперь окружность с центром C и радиусом R (рис. 31); пусть $[AB]$ — ее диаметр, M — произвольная точка плоскости. В обозначениях задачи имеем:

$$\overrightarrow{MC}=\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{CA}=\vec{r}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}.$$

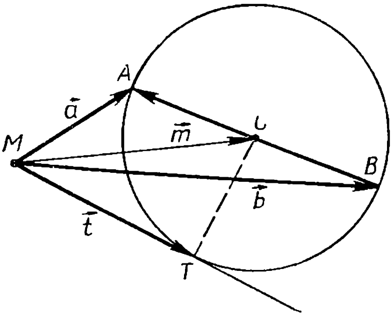


Рис. 31

Непосредственно из доказанного тождества следует, что $\vec{a}\vec{b} = m^2 - R^2$, что можно записать в виде p^2 или $-p^2$.

45. Если в уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ подставим x_1 и y_1 — координаты произвольной точки M, то получим: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-R^2=m^2-R^2=\pm p^2$, так как сумма двух первых членов в левой части уравнения дает квадрат расстояния между точками $M(x_1;\ y_1)$ и $C(a;\ b)$. Знак перед p^2 определяется знаком разности m^2-R^2, а последний в свою очередь определяется величиной расстояния m. Если (MT) — касательная к окружности, T — точка касания (рис. 31), то из прямоугольного треугольника CMT получаем:

$$|MT|^2=|CM|^2-|CT|^2=m^2-R^2=p^2, \text{ откуда } |MT|=p.$$

46. а) Приравнивая левые части уравнений двух окружностей, получим:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-R_2^2,$$

или

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+R_2^2-R_1^2=0.$$

Это уравнение задает прямую — радикальную ось двух окружностей. Согласно задаче 45, точки $M(x;\ y)$, удовлетворяющие этому уравнению, имеют одну и ту же степень относительно обеих окружностей. Уравнение линии центров этих окружностей имеет вид (см. задачу 40):

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}-\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=0.$$

Коэффициенты при x и y в уравнении радикальной оси и в уравнении линии центров удовлетворяют условию

$$A_1A_2+B_1B_2=0, \text{ так как } \frac{2(a_2-a_1)}{a_2-a_1}-\frac{2(b_2-b_1)}{b_2-b_1}=2-2=0.$$

Итак, радикальная ось перпендикулярна линии центров окружностей (начертите радикальные оси при различных положениях двух окружностей: пересекающихся, касающихся и не имеющих общих точек).

б) Пусть мы имеем три окружности с центрами O_1, O_2, O_3. Если радикальные оси двух пар окружностей — первой и второй, второй и третьей — пересеклись в точке S, то эта точка имеет одну и ту же степень относительно всех трех окружностей. Поэтому точка S должна принадлежать и радикальной оси третьей и первой окружностей.

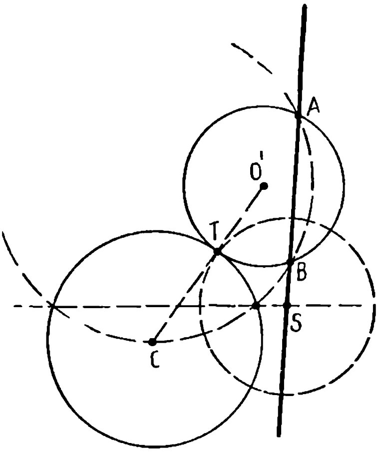


Рис 32

47. В уравнении вида $K_1 + tK_2 = 0$, где K_1 и K_2 — сокращенные обозначения левых частей уравнений двух окружностей, коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и равны $1+t$. В этом уравнении отсутствует член, содержащий xy. Следовательно, уравнение

$$K_1 + tK_2 = 0$$

при каждом t задает окружность, точку или пустое множество.

Если окружности, заданные уравнениями $K_1 = 0$ и $K_2 = 0$, пересекаются, то координаты их общей точки обращают в нуль и все уравнения пучка, т. е. все окружности имеют две общие точки — это случай эллиптического пучка. Если окружности K_1 и K_2 касаются, то в той же точке касаются друг друга и все остальные окружности (докажите!) — пучок параболический. Если, наконец, окружности K_1 и K_2 не имеют общих точек, то не имеют общих точек и все окружности этого пучка (докажите!) — пучок гиперболический.

48. Пусть нам дана окружность с центром O и две точки A и B (рис. 32). Все окружности, проходящие через точки A и B, имеют общую радикальную ось (AB). Этому же пучку окружностей принадлежит и искомая окружность с центром O', касающаяся данной окружности. Положим, общая касательная этой и данной окружностей пересекает (AB) в точке S. Эта точка будет радикальным центром всех окружностей пучка и данной окружности (см. задачу 46б)). Построить эту точку можно, пересекая данную окружность любой окружностью пучка. Полученная общая хорда окружностей в пересечении с (AB) и определит точку S. Проведя из S касательную к данной окружности, построим точку касания T. Центром O' искомой окружности будет точка пересечения прямой OT и оси симметрии точек A и B. Так как из точки S к данной окружности можно провести две касательные, то задача имеет два решения.

49. Если окружности касаются друг друга внешним образом, то длина отрезка между их центрами равна сумме радиусов. На рисунке 33 даны окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов r_1 и r_2. Множество центров окружностей радиуса r, касающихся первой из них, представляет собой окружность с центром O_1 радиуса $r_1 + r$. Центр искомой окружности находится и на другой

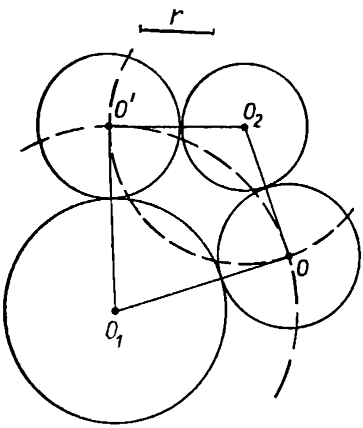


Рис. 33

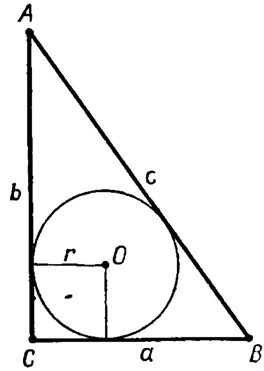


Рис. 34

окружности — с центром O_2 радиуса $r_2 + r$. Точки пересечения окружностей радиусов $r_1 + r$ и $r_2 + r$ и являются центрами двух окружностей, касающихся (внешним образом) двух данных окружностей.

§ 3. 1. Условие необходимо. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой (рис. 34). Поэтому длины отрезков касательных к вписанной окружности, проведенных из вершины C, равны r — радиусу этой окружности. Известно, что длины отрезков касательных от вершины треугольника до точек касания равны полупериметру треугольника минус длина противолежащей стороны. Отсюда мы получаем: $r = p - c$. Но в прямоугольном треугольнике гипотенуза в то же время есть диаметр описанной окружности. Поэтому получаем:

$$r = p - 2R$$

или

$$2R + r = p. \qquad (1)$$

Условие достаточно. Поскольку $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4rp}$ (здесь S — площадь треугольника), из соотношения $2R + r = p$ получаем:

$$\frac{abc}{2rp} + r = p,$$

$$abc + 2r^2p = 2rp^2.$$

Так как $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, то

$$r^2p = (p-a)(p-b)(p-c). \qquad (2)$$

Поэтому:

$$2rp^2 = 2(p-a)(p-b)(p-c) + abc,$$
$$4r^2p^4 = 4(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 +$$
$$+ 4(p-a)(p-b)(p-c)abc + a^2b^2c^2.$$

Заменяя опять r^2p выражением из формулы (2), получим:

$$4p^3(p-a)(p-b)(p-c) - 4(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 -$$
$$- 4(p-a)(p-b)(p-c)abc = a^2b^2c^2,$$
$$4(p-a)(p-b)(p-c)(p^3 - (p-a)(p-b)(p-c) -$$
$$- abc) = a^2b^2c^2. \qquad (3)$$

Но

$$p^3 - (p-a)(p-b)(p-c) - abc =$$
$$= p^3 - p^3 + (a+b+c)p^2 - (bc+ca+ab)p + abc - abc =$$
$$= (a+b+c)p^2 - (bc+ca+ab)p.$$

Поэтому из соотношения (3) находим:

$$4p(p-a)(p-b)(p-c)((a+b+c)p - (bc+ca+ab)) = a^2b^2c^2.$$

Согласно формуле площади треугольника

$$4p(p-a)(p-b)(p-c) = 4S^2 = \frac{1}{4}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 +$$
$$+ 2c^2a^2 + 2a^2b^2).$$

Заменяя p на $\frac{1}{2}(a+b+c)$, получаем:

$$\frac{1}{4}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - (bc+ca+ab) \right. = a^2b^2c^2,$$
$$(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2)(a^2+b^2+c^2) = 8a^2b^2c^2,$$
$$-a^6 - b^6 - c^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^2c^4 + b^4c^2 +$$
$$+ c^2a^4 + c^4a^2 - 2a^2b^2c^2 = 0,$$
$$a^2(-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + c^4) - b^6 - c^6 +$$
$$+ 2a^2b^4 - a^4b^2 + b^2c^4 + b^4c^2 + c^2a^4 - 2a^2b^2c^2 = 0,$$
$$a^2(-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + c^4) + b^2(-b^4 - a^4 + 2a^2b^2 + c^4) -$$
$$- c^2(c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2) = 0.$$

Но $c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 = c^4 - (a^2 - b^2)^2 = (c^2 + b^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)$.

Окончательно получим:

$$(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Равенство нулю любого из этих сомножителей означает, что в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других. Из теоремы, обратной теореме Пифагора (или из теоремы косинусов), выводим, что треугольник прямоугольный.

2. Заметим прежде всего, что из всех треугольников, вписанных в окружность и построенных на данной хорде, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник, вершина которого совпадает с серединой большей из двух дуг, стягиваемых этой хордой. (Докажите!)

Рассмотрим теперь произвольный вписанный разносторонний треугольник. В этом треугольнике есть угол меньший 60° — величины $60^\circ - \alpha$. Перенесем вершину этого угла в середину соответствующей дуги и получим равнобедренный треугольник большей площади, углы при основании которого имеют величину по $60^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Теперь, приняв одну из боковых сторон треугольника за основание, перенесем вершину угла в $60^\circ + \frac{\alpha}{2}$ в середину дуги и получим новый равнобедренный треугольник, еще большей площади, с углами в $60^\circ - \frac{\alpha}{4}$ при основании. С этим треугольником повторим ту же операцию и т. д. Мы получим последовательность треугольников с возрастающими площадями и углами при вершине в $60^\circ - \alpha$, $60^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $60^\circ - \frac{\alpha}{4}$, $60^\circ + \frac{\alpha}{8}, \ldots$, вообще $60^\circ - \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Можно показать, что эта последовательность треугольников в естественном смысле имеет предел — некоторый треугольник, причем равносторонний, поскольку $60^\circ - \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 60^\circ$ при $n \to \infty$. Это рассуждение показывает, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, равносторонний имеет наибольшую площадь.

3. Покажем, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах сетки всегда есть рациональное число, если за единицу измерения длин принята сторона квадрата сетки. Проведем через вершины треугольника прямые по линиям сетки и заключим треугольник внутрь прямоугольника, площадь которого — целое число (нарисуйте). Площадь треугольника равна разности между площадью прямоугольника и суммой площадей прямоугольных треугольников, дополняющих данный треугольник до прямоугольника. Длины катетов этих треугольников суть целые числа, поэтому их площади рациональны. Следовательно, и площадь рассматриваемого треугольника с вершинами в узлах сетки есть число рациональное. Площадь же равностороннего треугольника равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — длина его сторон, а если две вершины треугольника находятся в узлах сетки, то число a^2 целое. Следовательно, число S — иррациональное и, значит, третья вершина треугольника с узлом сетки совпасть не может.

4. Пусть треугольник ABC вписан в окружность с центром O и в него вписана окружность с центром I (рис. 35). Пусть бис-

сектриса $[AI)$ пересекается с описанной окружностью в точке M. Мы имеем: $\widehat{MIB} = \widehat{MBI} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, где $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$; следовательно, $|MB| = |MI|$. Степень точки I относительно описанной окружности равна $d^2 - R^2 = |IA| \cdot |IM|$ (см. § 2, задача 44). Обозначим через B' проекцию точки I на (AC) и проведем диаметр $[MN]$. Тогда получим: $\triangle AIB' \sim \triangle NBM$, так как они прямоугольные и $\widehat{MNB} = \widehat{IAB'}$. Следовательно:

$$\frac{|MB|}{|IB'|} = \frac{|MN|}{|IA|},$$

откуда: $2rR = |MB| \cdot |IA| = |IM| \cdot |IA| = d^2 - R^2$.

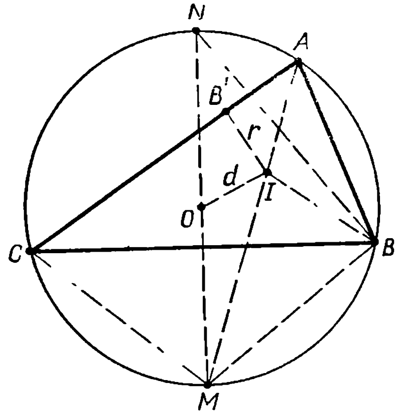


Рис. 35

Итак, $d^2 = R^2 + 2Rr$, что и требовалось установить.

5. Решение этой задачи вполне аналогично решению предыдущей задачи, нужно только доказать, что $|I_aM| = |MB|$ и $\triangle AI_aB'' \sim \triangle NBM$ (I_a — центр вневписанной окружности, B'' — его проекция на (BC)).

6. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 отображаются одна на другую при гомотетии с положительным коэффициентом и центром S (рис. 36). Пусть окружность с центром O касается их внешним образом в точках T_1 и T_2. Наша секущая определяет пары A_1, B_2 и A_2, B_1 антигомологичных точек. Проведем еще одну (произвольную) секущую (на рис. 36 взята линия центров O_1O_2) и возьмем на ней пару антигомологичных точек N_1 и M_2. Докажем, что окружность, проходящая через точки A_2, B_1, N_1, пройдет и через точку M_2. Так как $(M_1A_1) \parallel (M_2A_2)$, то $\widehat{M_1A_1B_1} + \widehat{B_1A_2M_2} = \pi$; с другой стороны, по свойству вписанного четырехугольника, $\widehat{M_1A_1B_1} + \widehat{M_1N_1B_1} = \pi$. Следовательно, $\widehat{B_1A_2M_2} = \widehat{M_1N_1B_1}$, поэтому около четырехугольника $B_1N_1M_2A_2$ можно описать окружность. Таким образом, окружность, проведенная

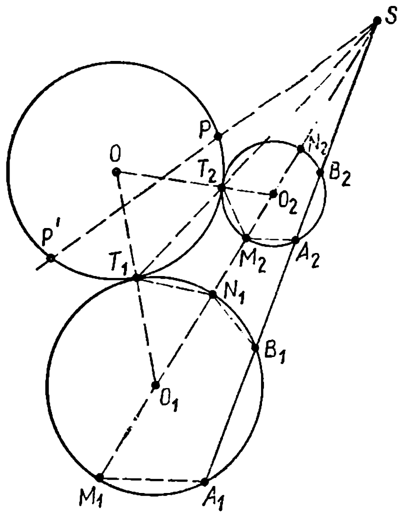


Рис. 36

через точки A_2, B_1, N_1, пройдет и через точку M_2. Отсюда и вытекает утверждение *а*).

б) Докажем, что около четырехугольника $T_1T_2M_2N_1$ тоже можно описать окружность. Обозначим через α, β и γ величины углов при вершинах треугольника O_1O_2O. Тогда получим: $N_1\widehat{T_1}T_2 = \pi - \frac{\pi-\alpha}{2} - \frac{\pi-\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$; $T_2\widehat{M_2}O_2 = \frac{\pi-\beta}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, т. е. $T_2\widehat{M_2}O_2 = N_1\widehat{T_1}T_2$. Следовательно, четырехугольник $T_1T_2M_2N_1$ вписуемый, и секущая (ST_1) пересекается с окружностью с центром в O_2 в той же точке T_2, что и окружность, проходящая через точки T_1, N_1, M_2. Отсюда и из п. а) и следует требуемое.

7. Предположим, что на рисунке 36 нам даны только окружности с центрами O_1 и O_2 и точка P, через которую должна пройти окружность, касающаяся данных окружностей.

Из предыдущей задачи мы знаем, что центр гомотетии S лежит на радикальной оси окружностей, из которых одна проходит через точки T_1, T_2, M_2, N_1, а другая с искомым центром O пересекается с первой в точках T_1 и T_2. Центр S имеет одинаковую степень относительно обеих окружностей, поэтому если прямая SP пересекает искомую окружность еще в точке P', то получим:

$$|SP| \cdot |SP'| = |SM_2| \cdot |SN_1|,$$

откуда:

$$|SP'| = \frac{|SM_2| \cdot |SN_1|}{|SP|}.$$

Определив положение точки P', мы приведем задачу к задаче 48 из § 2 о проведении через две данные точки окружности, касательной к данной окружности.

Для гомотетии с положительным коэффициентом задача имеет два решения. Еще два решения получим, если аналогичным образом проведем анализ в случае гомотетии с отрицательным коэффициентом, отображающей данные окружности друг на друга.

8. Рассмотрим сначала случай, когда вершина A_3 совпадает с началом координат, а точки A_1 и A_2 расположены так, что $A_1\widehat{O}X < A_2\widehat{O}X$. Тогда, если S — площадь треугольника, φ — угол между $\vec{r_1} = \overrightarrow{OA_1}$ и $\vec{r_2} = \overrightarrow{OA_2}$, то $S = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\varphi$, где $r_1 = |\vec{r_1}|$, $r_2 = |\vec{r_2}|$.

Если $\vec{r_1}$ образует с осью Ox угол α, а $\vec{r_2}$ — угол β, то $\varphi = \beta - \alpha$ и $S = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)$. Но $r_1\cos\alpha = x_1$, $r_2\cos\beta = x_2$, $r_1\sin\alpha = y_1$, $r_2\sin\beta = y_2$, и поэтому мы можем записать:

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что если $\alpha > \beta$, то наша формула дает величину площади треугольника OA_1A_2 со знаком минус.

Легко увидеть, что площадь S треугольника $A_1A_2A_3$ с произвольно расположенными вершинами будет равна алгебраической сумме площадей $S_{\triangle OA_1A_2} + S_{\triangle OA_2A_3} + S_{\triangle OA_3A_1}$, взятых со знаками, как выше (рис. 37). Следовательно,

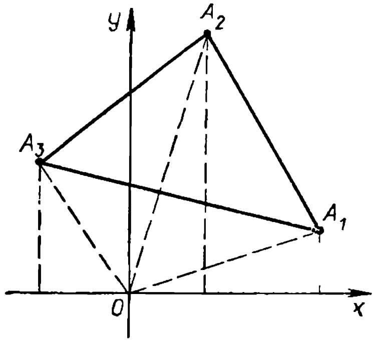


Рис. 37

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right),$$

или в виде определителя третьего порядка:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

9. Для площади S n-угольника совершенно так же, как и для треугольника, получается формула:

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

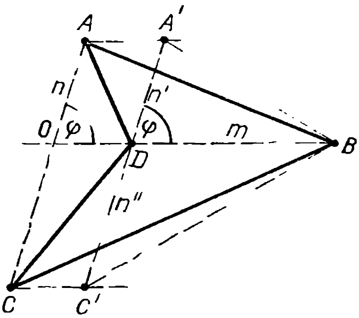


Рис. 38

10. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с диагоналями $|BD| = m$ и $|AC| = n$, пересекающимися в точке O, и углом между ними φ (рис. 38). Пусть при параллельном переносе $\overrightarrow{OD}$ точки A и C отображаются на A' и C'. Тогда получаем:

$$S_{ADB} = S_{A'BD} = \frac{1}{2} mn' \sin\varphi;$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{2} mn'' \sin(\pi - \varphi) = \frac{1}{2} mn'' \sin\varphi$$

(здесь $n' = |A'D|$, $n'' = |B'D|$).

Складывая, находим:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(mn' + mn'')\sin\varphi = \frac{1}{2} m(n' + n'')\sin\varphi,$$

и окончательно:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} mn \sin\varphi.$$

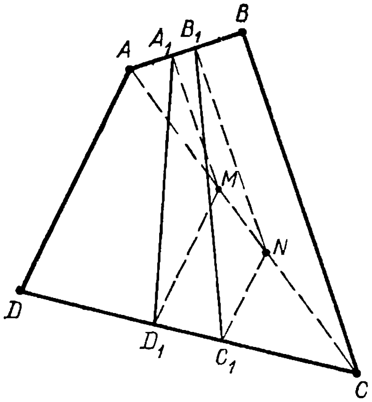


Рис. 39

11. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD разделены на пять конгруэнтных частей: $|A_1B_1| = \frac{1}{5}|AB|$; $|C_1D_1| = \frac{1}{5}|CD|$; $A_1B_1C_1D_1$ — выделенный участок (рис. 39). Проведем диагональ AC и разделим ее на пять конгруэнтных частей. Средние точки деления M и N соединим соответственно с A_1 и D_1, с B_1 и C_1. Мы имеем:

$$S_{AB_1N} = \frac{9}{25}S_{ABC},\quad S_{AA_1M} = \frac{4}{25}S_{ABC},$$

поэтому:

$$S_{A_1B_1NM} = \frac{9}{25}S_{ABC} - \frac{4}{25}S_{ABC} = \frac{1}{5}S_{ABC}.$$

Аналогично докажем, что $S_{C_1D_1NM} = \frac{1}{5}S_{ACD}$. Отсюда следует, что $S_{A_1B_1NC_1D_1M} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$. Рассмотрим площадь $S_{A_1B_1NC_1D_1}$. Если от нее отнять $S_{A_1MD_1}$, то получим площадь $S_{A_1B_1NC_1D_1M}$; если от той же площади отнять $S_{B_1C_1N}$, то получим площадь $S_{A_1B_1C_1D_1}$. Докажем, что $S_{A_1MD_1} = S_{B_1NC_1}$. Имеем:

$$S_{A_1MD_1} = \frac{1}{2}|MA_1| \cdot |MD_1| \sin A_1\widehat{M}D_1.$$

$$S_{B_1NC_1} = \frac{1}{2}|B_1N| \cdot |NC_1| \sin B_1\widehat{N}C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}|BC| \cdot \frac{2}{5}|AD| \sin B_1\widehat{N}C_1 = \frac{3}{25}|BC|\,|AD| \sin B_1\widehat{N}C_1.$$

Но $B_1\widehat{N}C_1 = A_1\widehat{M}D_1$, и поэтому эти площади равны друг другу. Таким образом получаем: $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1NC_1D_1M} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$, — агроном был прав.

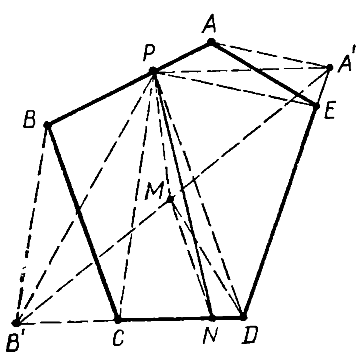


Рис. 40

12. Пусть данная точка P находится на стороне AB пятиугольника $ABCDE$ (рис. 40). Соединим точку P с вершинами C и E и перенесем вершину B параллельно прямой PC в точку B' на прямой CD, а вершину A перенесем параллельно (PE) в точку A' на прямой DE. Этим мы преобразуем пятиугольник $ABCDE$ в равновеликий ему четырехугольник $PB'DA'$

(поясните). Найдем середину M диагонали $[A'B']$. Очевидно, ломаная PMD делит четырехугольник на две равновеликие части. Теперь перенесем точку M параллельно (PD) в точку N на стороне CD. Отрезок PN делит и четырехугольник $PA'DB'$ и данный пятиугольник на две равновеликие части.

[Все построения в этом решении основаны на преобразовании треугольника в равновеликий путем перенесения одной из его вершин параллельно противоположной стороне. Поэтому, например,

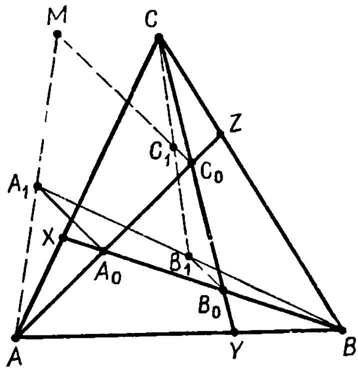


Рис. 41

$$S_{PBC} = S_{PB'C}, \text{ где } B' \in (CD).]$$

13. Попытаемся построить внутри треугольника ABC такой треугольник $A_0B_0C_0$, в котором точка A_0 лежала бы на середине $[AC_0]$, точка B_0 — на середине $[BA_0]$, точка C_0 — на середине $[CB_0]$. Допустим, что нужный треугольник уже построен (рис. 41), и пусть $X = (AC) \cap (A_0B)$, $Y = (AB) \cap (B_0C)$, $Z = (BC) \cap (C_0A)$. Применим теорему Менелая (см. задачу 16 из § 2) к треугольнику ACC_0 и секущей XA_0B_0. Получим: $(ACX)(CC_0B_0)(C_0AA_0) = 1$, т. е. $\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_0C}}{\overrightarrow{B_0C_0}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_0C_0}}{\overrightarrow{A_0A}} = 1$. Но $\frac{\overrightarrow{B_0C}}{\overrightarrow{B_0C_0}} = 2$, $\frac{\overrightarrow{A_0C_0}}{\overrightarrow{A_0A}} = 1$, поэтому $\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{1}{2}$. Итак, для точки X имеем: $2|XA| = |XC|$ (аналогично для точек Y и Z); отсюда и следует построение треугольника $A_0B_0C_0$.

Возьмем теперь произвольную точку M, которая движется к точке A, на полпути (в точке A_1) поворачивает и движется к точке B, на полпути (в точке B_1) поворачивает и движется к точке C, на полпути (в точке C_1) поворачивает обратно к точке A и т. д. По свойству средней линии треугольника

$$\overrightarrow{A_1A_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC_0},\ \overrightarrow{B_1B_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_0} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MC_0},\ \overrightarrow{C_1C_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B_0} = \frac{1}{8}\overrightarrow{MC_0}$$

и т. д., т. е. точка движется все ближе и ближе к контуру треугольника $A_0B_0C_0$.

Пусть площадь треугольника $A_0B_0C_0$ равна S_0, а площадь треугольника ABC — S. Мы имеем: $(S_{AA_0B_0} = S_0 = S_{AB_0B}) \Rightarrow (S_{AA_0B} = 2S_0)$. Аналогично $S_{BB_0C} = 2S_0$ и $S_{CC_0A} = 2S_0$. Итак, $7S_0 = S$, откуда $S_0 = \frac{1}{7}S$.

14. Доказательство утверждения задачи основано на следующей теореме: расстояние от любой точки окружности до прямой,

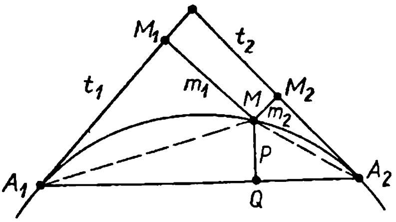


Рис. 42

пересекающей окружность, есть среднее пропорциональное между расстоянием от той же точки до касательных, проведенных к окружности в точках пересечения ее с прямой.

Докажем ее. Пусть $[A_1A_2]$ — хорда окружности, t_1 и t_2 — касательные, проходящие через точки A_1 и A_2, M — точка на одной из дуг A_1A_2 (рис. 42). Расстояния от точки M до t_1 и t_2 обозначим через m_1 и m_2, до (A_1A_2) — через p. Пусть M_1 и M_2 проекции точки M на касательные, Q — проекция M на (A_1A_2). Из того, что $\angle MA_1M_1 \cong \angle MA_2Q$ и $\angle MA_1Q \cong \angle MA_2M_2$ (посмотрите, на какие дуги они опираются), и из того, что углы при вершинах M_1, M_2, Q — прямые, следует, что $A_1M_1MQ \sim A_2QMM_2$; следовательно, $m_1 : p = p : m_2$, $p^2 = m_1m_2$. Совершенно так же доказывается эта теорема в случае, если точка M лежит на второй дуге A_1A_2.

Теперь, обозначая через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ расстояния от точки окружности до сторон вписанного n-угольника, а через $m_1, m_2, \ldots m_n$ — расстояния от нее до касательных, находим:

$$p_1^2 = m_1m_2;\ p_2^2 = m_2m_3,\ \ldots,\ p_{n-1}^2 = m_{n-1}m_n,\ p_n^2 = m_nm_1.$$

Перемножая почленно все эти равенства, получим:

$$p_1^2p_2^2 \ldots p_{n-1}^2p_n^2 = m_1^2m_2^2 \ldots m_{n-1}^2m_n^2;$$
$$p_1p_2 \ldots p_{n-1}p_n = m_1m_2 \ldots m_{n-1}m_n.$$

15. Выполнив построение, указанное в условии задачи (рис. 43,) мы получим n-угольник и два $2n$-угольника. Если $[AB]$ — сторона n-угольника (на рис. 43 $n = 4$), M — вершина $2n$-угольника, то в треугольнике AMB отрезок A_1B_1 есть средняя линия, поэтому $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$. Периметр n-угольника равен $n|AB|$, периметр второго $2n$-угольника равен $2n|A_1B_1| = n|AB|$, т. е. периметры этих многоугольников равны.

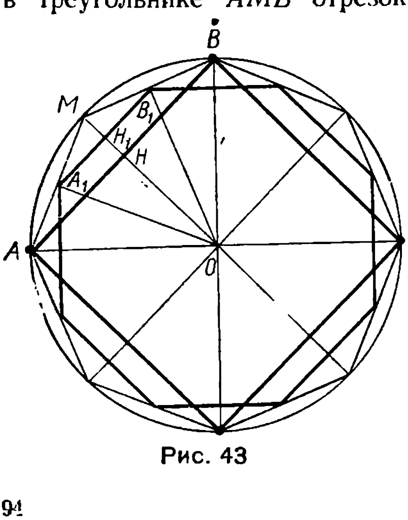


Рис. 43

Пусть $|OB| = |OM| = r_1$ и $|OH| = h_1$ — радиус описанной окружности и апофема n-угольника, $|OB_1| = r_2$ и $|OH_1| = h_2$ — радиус и апофема $2n$-угольника. Учитывая, что $|MH_1| = |H_1H|$, получим:

$$h_2 = \frac{r_1 + h_1}{2}. \qquad (1)$$

Из подобных треугольников OA_1M и OH_1A_1 находим:

$$r_2^2 = h_2 r_1, \text{ т. е.}$$

$$r_2 = \sqrt{h_2 r_1}. \qquad (2)$$

16. Рассуждения, которыми мы пользовались в предыдущей задаче, очевидно, можно применить к выводу аналогичных формул перехода от любого правильного вписанного многоугольника к многоугольнику с тем же периметром и удвоенным числом сторон, а формулы (1) и (2) из предыдущей задачи дают:

$$h_{p+1} = \frac{h_p + r_p}{2} \qquad (3)$$

и

$$r_{p+1} = \sqrt{h_{p+1} r_p}. \qquad (4)$$

Так как всегда $r_p > h_p$, то $h_p < h_{p+1} < r_p$. Из этих неравенств также следует, что $h_{p+1} < r_{p+1} < r_p$.

Итак, мы имеем две монотонные последовательности: возрастающую $h_1 < h_2 < \cdots < h_p < h_{p+1} < \cdots$ и убывающую $r_1 > r_2 > \cdots > r_p > r_{p+1} > \cdots$. В силу неравенства $h_p < r_p$ обе последовательности — ограниченные, поэтому, по теореме Вейерштрасса, они имеют предел. Положим, $\lim\limits_{p\to\infty} h_p = h$, $\lim\limits_{p\to\infty} r_p = r$. Ввиду того что разность $r_p - h_p$ при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника стремится к нулю (поясните), мы заключаем, что последовательности апофем и радиусов имеют общий предел: $h = r$.

17. Будем исходить из квадрата с периметром, равным 2. При этих условиях получим $h_1 = \frac{1}{4}$, $r_1 = h_1\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Дальнейшие вычисления удобно записывать в такую таблицу:

p	$h_p \left(h_{p+1} = \frac{h_p + r_p}{2}\right)$	$r_p \left(r_{p+1} = \sqrt{h_{p+1} r_p}\right)$
1	0,2500000	0,353554
2	0,3017767	0,326406
3	0,3142086	0,3203641
4	0,3172863	0,3188214
5	0,3180538	0,3184372
6	0,3182455	0,3183413
7	0,3182934	0,3183173
8	0,3183053	0,3183111
9	0,3183095	0,3183102
10	0,3183098	0,3183098

Итак, $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$, откуда получается: $\pi = 3{,}1415926\ldots$

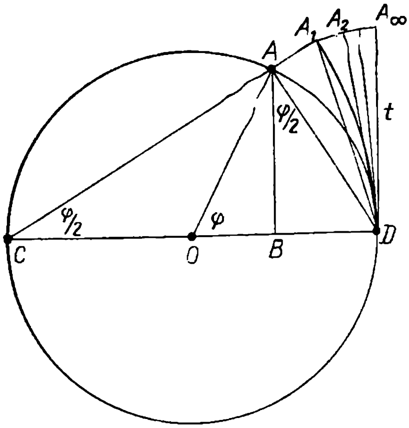


Рис. 44

18. Длина дуги DA окружности радиуса r с центральным углом величиной φ (в радианной мере) выражается формулой: $\smile{DA} = r\varphi$ (рис. 44). Дуге DA_1 соответствует вдвое больший радиус, но вдвое меньшая величина угла. Поэтому длины дуг DA и DA_1 равны между собой. Имеем также: $\widehat{ADA_\infty} = \frac{\varphi}{2}$, $\widehat{A_1DA_\infty} = \frac{\varphi}{4}$, поэтому $[DA_1)$ есть биссектриса угла ADA_∞. (Здесь A_∞ — точка, принадлежащая касательной t.)

19. Построение точек A_1, A_2, A_3, ... можно осуществить, не проводя окружностей. Достаточно провести биссектрису угла между хордой дуги и касательной, а потом через конец дуги провести перпендикуляр к хорде. Пересечение этого перпендикуляра с биссектрисой и определит конец новой дуги.

20. Проведем $[AB] \perp [CD]$ (рис. 44). Получим:

$$|AB| = r\sin\varphi;\quad |AD| = \frac{|AB|}{\cos\frac{\varphi}{2}};\quad |A_1D| = \frac{|AD|}{\cos\frac{\varphi}{4}};\quad |A_2D| = \frac{|A_1D|}{\cos\frac{\varphi}{8}}$$

и т. д. Подставляя эти формулы одна в другую, мы и получим формулу Эйлера.

Если в этой формуле положить $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то будем иметь:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\quad \cos\frac{\pi}{32} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

и т. д. Подставив эти значения в формулу Эйлера, получим формулу Виета:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots$$

21. а) На рисунке 45 показано, как разрезать на соответственно конгруэнтные части два равновеликих параллелограмма с конгруэнтными основаниями (наклонные линии разреза первого параллелограмма параллельны сторонам второго параллелограмма).

Заметим для дальнейшего, что отношение равносоставленности транзитивно, т. е. две фигуры, равносоставленные с одной

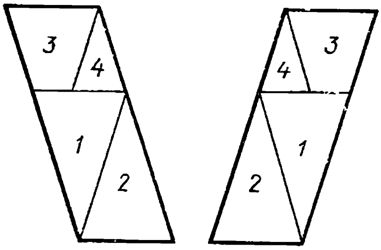


Рис. 45

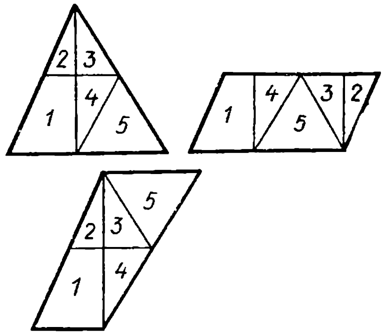


Рис. 46

и той же третьей фигурой, равносоставлены между собой. Докажите это, проведя рассуждения, проиллюстрированные на рисунке 46. Соответственно конгруэнтные части на нем помечены одинаковыми номерами.

б) Строим третий параллелограмм, равновеликий двум данным, так, чтобы одна из его сторон была конгруэнтна стороне первого параллелограмма, а другая — стороне второго параллелограмма. Согласно вышесказанному (и доказанному в п. а)), все три фигуры равносоставлены.

в) Задача имеет много решений. Два из них показаны на рисунках 47 и 48.

г) Построим сначала сторону квадрата как среднее пропорциональное двух сторон прямоугольника. После этого построим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза конгруэнтна большей стороне прямоугольника, а катет — стороне квадрата (рис. 49), и применим построение, изображенное на рисунке 48.

д) Разрезав треугольник на две части по его высоте, сложим из него прямоугольник, который предыдущим построением разделим на части, из которых можно сложить квадрат. Более

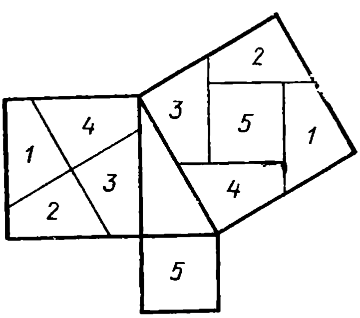


Рис. 47

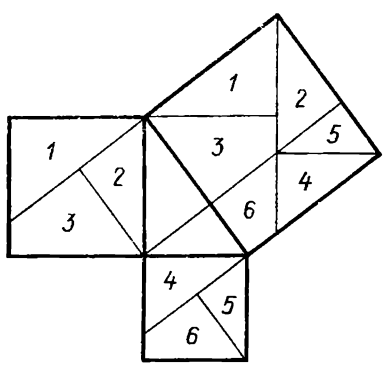


Рис. 48

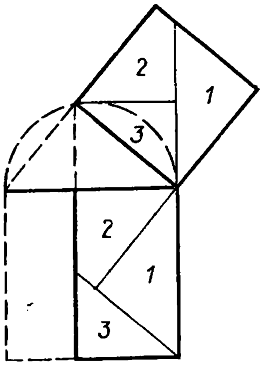


Рис. 49

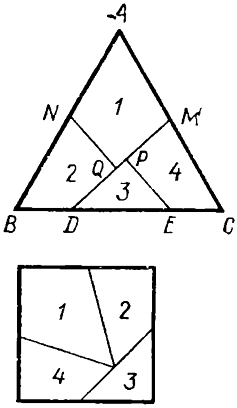


Рис. 50

экономное и симметричное построение дано на рисунке 50. Порядок построения таков:

1) находим сторону равновеликого квадрата a как среднее пропорциональное между высотой треугольника ABC и половиной его стороны и строим этот квадрат;

2) находим середины M и N сторон $[AC]$ и $[AB]$ треугольника ABC и из точки M как из центра описываем дугу радиуса a — находим точку D на стороне $[BC]$: $|MD| = a$;

3) от точки D на стороне BC отложим $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$;

4) из точек N и E проводим перпендикуляры $[NQ]$ и $[EP]$ к прямой MD.

22. Рассматривая гомотетию с центром S, отображающую точку P на какую-то другую точку $P' \in c$, получим: $\left(\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}\right)$. Далее, поскольку $m = |SP| \sin(\widehat{c, a})$, $n = |SP| \times$ $\times \sin(\widehat{c, b})$, то $(abc) = \frac{m}{n} = \frac{\sin(\widehat{c, a})}{\sin(\widehat{c, b})}$.

23. Мы рассмотрим случай, когда прямые x, y, z пересекаются в точке S, причем $S \notin a \cup b \cup c$. Обозначим через m, n и p расстояния от точки S до прямых a, b и c. Если S лежит внутри треугольника ABC, то

$$(bcx) = -\frac{n}{p}, \quad (cay) = -\frac{p}{m}, \quad (abz) = -\frac{m}{n};$$

значит,

$$(bcx)(cay)(abz) = -1,$$

Проверьте, что такое же значение это произведение будет иметь и в случае, когда точка в S лежит вне треугольника. Обратно: если дано, что $(bcx)(cay)(abz) = -1$, то, полагая $x \cap y = S$, допустим, что $(CS) = z' \neq z$. Тогда получим:

$$(bcx)(cay)(abz') = -1.$$

Но отсюда следует, что $(abz') = (abz)$, и поэтому $z' = z$, так как существует единственная прямая, расстояние от точек которой до двух данных прямых находится в данном отношении. Случай параллельных прямых x, y, z рассмотрите самостоятельно.

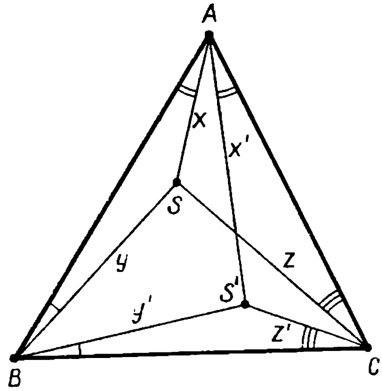


Рис. 51

24. Пусть

$$(bcx)(cay)(abz) = \frac{\sin(\widehat{x,b})}{\sin(\widehat{x,c})} \cdot \frac{\sin(\widehat{y,c})}{\sin(\widehat{y,a})} \cdot \frac{\sin(\widehat{z,a})}{\sin(\widehat{z,b})} = -1. \qquad (1)$$

Поскольку, в силу симметрии $(\widehat{x',b}) = (\widehat{x,c})$, $(\widehat{x',c}) = (\widehat{x,b})$, то справедливо равенство $(bcx)(bcx') = 1$. Аналогичное равенство имеет место и для остальных отношений. Поэтому из (1) следует, что $(bcx')(cay')(abz') = -1$, т. е. прямые x', y', z' либо проходят через одну и ту же точку S' (рис. 51), либо параллельны друг другу.

25. В силу конгруэнтности углов с соответственно параллельными сторонами, имеем: $(\widehat{a',y'}) = (\widehat{x,b})$, $(\widehat{a',z'}) = (\widehat{x,c})$, $(\widehat{b',z'}) = (\widehat{y,c})$, $(\widehat{b',x'}) = (\widehat{y,a})$, $(\widehat{c',x'}) = (\widehat{z,a})$ и $(\widehat{c',y'}) = (\widehat{z,b})$. Отсюда следует, что:

$$(y'z'a')(z'x'b')(x'y'c') = \frac{\sin(\widehat{a',y'})}{\sin(\widehat{a',z'})} \cdot \frac{\sin(\widehat{b',z'})}{\sin(\widehat{b',x'})} \cdot \frac{\sin(\widehat{c',x'})}{\sin(\widehat{c',y'})} =$$

$$= \frac{\sin(\widehat{x,b})}{\sin(\widehat{x,c})} \cdot \frac{\sin(\widehat{y,c})}{\sin(\widehat{y,a})} \cdot \frac{\sin(\widehat{z,a})}{\sin(\widehat{z,b})} = (bcx)(cay)(abz) = -1.$$

26. Пусть расстояния от точки $X \in (BC) = a$ до прямых $AC = b$ и $AB = c$ равны n и p. Обозначив величины углов треугольника ABC при вершинах A, B, C соответственно через α,

β и γ, а прямые XA, YB и ZC соответственно через x, y, z, получим:

$$|XB| = \frac{p}{\sin\beta}, \quad |XC| = \frac{n}{\sin\gamma}, \quad \left((bcx) = \frac{n}{p}\right) \Rightarrow \left(\frac{p}{n} = \frac{1}{(bcx)}\right).$$

Следовательно, $(BCX) = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{(bcx)}$. Аналогично имеем:

$$(CAY) = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{1}{(cay)}; \quad (ABZ) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{(abz)}.$$

Почленно перемножая эти равенства, получаем:

$$(BCX)(CAY)(ABZ) = \frac{\sin\gamma\sin\alpha\ \sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma\ \sin\alpha} \cdot \frac{1}{(bcx)(cay)(abz)}.$$

Итак, $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$. Обратное предложение доказывается рассуждением от противного.

27. Легко видеть, что $|AN| = |AP| = p - a$, $|BP| = |BM| = p - b$, $|CM| = |CN| = p - c$, где p — полупериметр треугольника ABC, а a, b, c — длины его сторон. Отсюда получаем:

$$(BCM)(CAN)(ABP) = \left(-\frac{p-b}{p-c}\right) \cdot \left(-\frac{p-c}{p-a}\right)\left(-\frac{p-a}{p-b}\right) = -1.$$

Следовательно, прямые AM, BN и CP пересекаются в одной точке (объясните, почему они не могут быть попарно параллельными).

28. Из свойств степени точки относительно окружности (или из подобия соответствующих треугольников) имеем: $|AY| \cdot |AY'| = |AZ| \cdot |AZ'|$, $|BZ| \cdot |BZ'| = |BX| \cdot |BX'|$, $|CX| \cdot |CX'| = |CY| \times \times |CY'|$. Раскрывая выражения $(BCX)(CAY)(ABZ)$ и $(BCX') \times \times (CAY')(ABZ')$ и перемножая их, в силу выписанных выше равенств получим, что произведение равно 1, поэтому из соотношения $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$ следует, что $(BCX')(CAY')(ABZ') = -1$, и прямые AX', BY', CZ' пересекаются в одной точке (объясните, почему они не параллельны).

29. Пусть нам даны два репера: OXY, где $|OX| = |OY|$, и $O'X'Y'$, где $|O'X'| = |O'Y'|$. Эти два репера представляют собою две подобные и одинаково ориентированные фигуры. Согласно утверждению задачи 19 из § 2 существует точка S, являющаяся центром соответствующего преобразования подобия. Пусть координаты точки S в первой системе координат будут $(x; y)$, во второй — $(x'; y')$, и пусть S_x — проекция точки S на Ox, $S_{x'}$ — проекция S на $O'x'$. Из подобия имеем:

$$\frac{|OS_x|}{|O'S_{x'}|} = \frac{|OX|}{|O'X'|}; \quad \frac{|OS_x|}{|OX|} = \frac{|O'S_{x'}|}{|O'X'|}, \text{ откуда } x = x'.$$

Аналогично доказывается, что и $y = y'$.

[Отсюда, например следует, что если мы наложим друг на друга две карты одной и той же местности, выполненные в разных масштабах, то всегда найдется точка на меньшей карте, попавшая в ту же самую точку на большей карте!]

30. Если точка E — проекция A на (CD), то $|CE| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$ (рис. 52). В то же время, по свойству сторон описанного четырехугольника, $2|AD| = |AB| + |CD|$, откуда $|AD| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$, поэтому $|AD| = |EC|$ и в силу подобия треугольников MND и ACD, $|MD| = |FN|$. Положим: $|MD| = a$, $|DN| = b$, $|MN| = c$, $\widehat{MND} = \alpha$, $\widehat{DMN} = \beta$, $\widehat{MDN} = \gamma$. Тогда будем иметь: $b = a + a\cos\gamma = a(1 + \cos\gamma) = 2a\cos^2\frac{\gamma}{2}$, $c = \frac{a}{\cos\alpha}$.

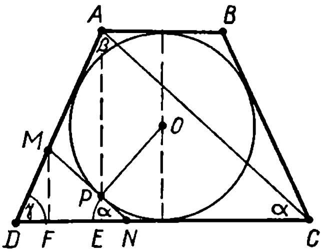


Рис. 52

По свойству вневписанной окружности $|PM| = p - a$; $|PN| = p - b$;

$$2p = a + b + c = a + 2a\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{a}{\cos\alpha};$$

$$p = \frac{a}{2} + a\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{a}{2\cos\alpha};$$

$$p - a = -\frac{a}{2} + a\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{a}{2\cos\alpha};$$

$$p - b = \frac{a}{2} - a\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{a}{2\cos\alpha};$$

$$\frac{p-a}{p-b} = \frac{-1 + 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\cos\alpha}}{1 - 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\gamma\cos\alpha + 1}{1 - \cos\gamma\cos\alpha};$$

$$\frac{p-a}{p-b} = \frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{m} = \frac{\cos\gamma\cos\alpha + 1}{1 - \cos\gamma\cos\alpha};$$

$$m\cos\gamma\cos\alpha + m = 1 - \cos\gamma\cos\alpha; \quad \cos\gamma\cos\alpha = \frac{1-m}{1+m} (*).$$

Далее, $(|MF| = a\sin\gamma = a\,\mathrm{tg}\,\alpha) \Rightarrow (\sin\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha) \Rightarrow (1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \sin^2\gamma + 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha + 1\right)$. Но из $(*)$ следует: $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1+m}{1-m}\cos\gamma$; $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^2\cos^2\gamma\right) \Rightarrow \left(\sin^2\gamma + 1 = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^2 \times \cos^2\gamma\right) \Rightarrow \left(\frac{1+\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma} = \frac{(1+m)^2}{(1-m)^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{2}{2\sin^2\gamma} = \frac{(1+m)^2 + (1-m)^2}{(1+m)^2 - (1-m)^2} = \frac{2 + 2m^2}{4m}\right)$.

Окончательно, получим: $\sin^2\gamma = \frac{2m}{1+m^2}$. Зная γ, из соотношения $\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\gamma$ найдем α, а затем и все углы трапеции.

31. Пусть окружность, построенная на диаметре $[AM]$, пересекает сторону $[BC]$ в точке P, а окружность, построенная на

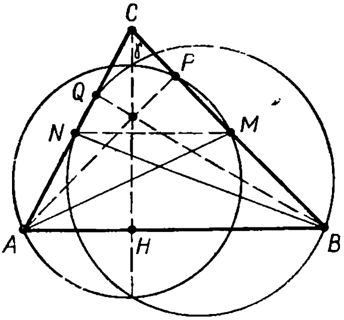


Рис. 53

диаметре $[BN]$, пересекает сторону $[AC]$ в точке Q (рис. 53). Так как углы APM и BQN опираются на диаметры $[AM]$ и $[BN]$, то $[AP]$ и $[BQ]$ — высоты треугольника ABC. Степень точки C относительно первой окружности равна $p_1^2 = |CM|\,|CP| = \frac{a}{2}\cdot b\sin\gamma$, где $\gamma = \widehat{ACB}$. Степень той же точки относительно второй окружности равна $p_2^2 = |CN|\cdot|CQ| = \frac{b}{2}a\sin\gamma$.

Итак, $p_1^2 = p_2^2 = \frac{ab}{2}\sin\gamma$; значит, C принадлежит радикальной оси данных окружностей. Но радикальная ось перпендикулярна линии центров (O_1O_2), которая параллельна основанию (объясните). Поэтому радикальная ось совпадает с высотой треугольника CH. Эта высота делит основание треугольника на части:

$$|HA| = h\operatorname{ctg}60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}};\quad |HB| = h\operatorname{ctg}45^\circ = h \quad (\text{здесь } h = |HC|).$$

Итак, $|HB|:|HA| = \sqrt{3}$. В таком же отношении высота делит и среднюю линию.

32. Ответ дан на рисунке 54. Ломаная симметрична, число ее звеньев четное, но не кратное 4 (почему?). Такой ломаной, состоящей из 315 звеньев, не существует. (Попробуйте построить такую же ломаную из 6 звеньев, из 14 звеньев.)

33. Пусть ABC — данный разносторонний треугольник (рис. 55). Пусть прямая MA — искомая, т. е. если обозначить через p_1 и S_1 периметр и площадь треугольника ABM, через p_2 и S_2 — периметр и площадь треугольника

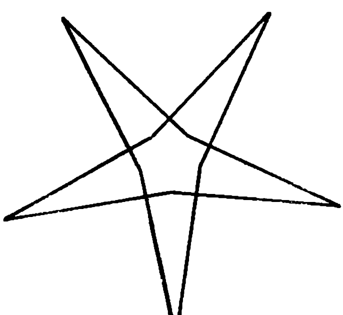


Рис. 54

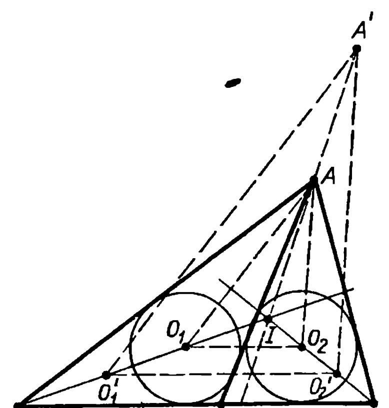


Рис. 55

ACM, то $S_1 : S_2 = p_1 : p_2$. Но $S_1 = p_1 r_1$, $S_2 = p_2 r_2$, где r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей. Поэтому

$$(S_1 : S_2 = p_1 : p_2) \leftrightarrow (r_1 p_1 : r_2 p_2 = p_1 : p_2) \leftrightarrow (r_1 = r_2).$$

Итак, задача сводится к разбиению треугольника на два треугольника с конгруэнтными вписанными окружностями. Центры этих окружностей O_1 и O_2 должны лежать на биссектрисах углов B и C, а в силу равенства $r_1 = r_2$ линия центров $(O_1O_2) \parallel (BC)$. Далее имеем: $O_1\widehat{A}M = \frac{1}{2} B\widehat{A}M$, $O_2\widehat{A}M = \frac{1}{2} C\widehat{A}M$; $O_1\widehat{A}O_2 = O_1\widehat{A}M + M\widehat{A}O_2 = \frac{1}{2} B\widehat{A}C$. Этими условиями определяется построение. На произвольном отрезке, параллельном (BC), с концами O'_1 и O'_2 на биссектрисах углов B и C строим треугольник, гомотетичный треугольнику O_1O_2A относительно центра I — точки пересечения биссектрис. Для этого на отрезке $O'_1O'_2$ строим дугу, вмещающую угол, равный $\frac{1}{2} B\widehat{A}C$, и в ее пересечении с (IA) находим точку A'. Гомотетия, отображающая A' на A, отображает точки O'_1, O'_2 на искомые точки O_1 и O_2. Теперь строим окружности с центрами O_1 и O_2, касающиеся (AB) и (AC) соответственно. Касательная (AM) к первой окружности определяет угол $O_1\widehat{A}M = \frac{1}{2} B\widehat{A}M$.

$$M\widehat{A}O_2 = O_1\widehat{A}O_2 - O_1\widehat{A}M = \frac{1}{2} B\widehat{A}C - \frac{1}{2} B\widehat{A}M = \frac{1}{2} M\widehat{A}C.$$

Следовательно, (AO_2) — биссектриса угла MAC, и, значит, (AM) касается и второй окружности.

34. Проведем прямые $a \parallel (MA)$, $b \parallel (MB)$, $c \parallel (MC)$ и $d \parallel (MD)$, не пересекающие данный четырехугольник. Задача сводится к тому, чтобы в данный четырехугольник вписать другой четырехугольник, стороны которого были бы параллельны данным прямым a, b, c, d.

Через точку $A_1 \in [AD]$ (рис. 56) проведем $a_1 \parallel a$ и найдем $B_1 = [AB] \cap a_1$. Через точку B_1 проведем $b_1 \parallel b$, найдем $C_1 = [BC] \cap b_1$, через точку C_1 проведем $c_1 \parallel c$, через точку A_1 проведем $d_1 \parallel d$. Пусть $c_1 \cap d_1 = P_1$. Проделаем еще раз такую же операцию и получим точки A_2, B_2, C_2, прямые $a_2 \parallel a$, $b_2 \parallel b$, $c_2 \parallel c$, $d_2 \parallel d$ и точку $P_2 = c_2 \cap d_2$. Еще раз проделав то же самое, получили бы точки A_3,

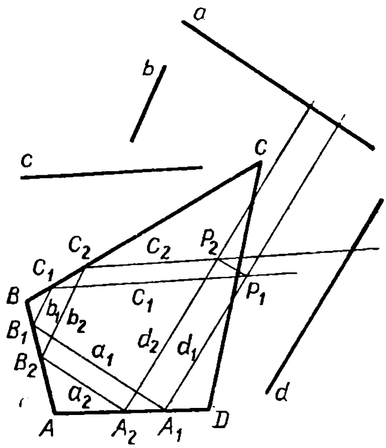


Рис. 56

B_3, C_3 и прямые a_3, b_3, c_3, d_3. По свойству пропорциональности отрезков, высекаемых параллельными прямыми на секущих, точки A_3, B_3, C_3 делят отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в одном и том же отношении, и в том же самом одинаковом отношении прямые c_3 и d_3 разделят отрезок P_1P_2, т. е. точка $P_3 = c_3 \cap d_3$ будет принадлежать прямой P_1P_2, которая, таким образом, есть множество точек пересечения пар прямых — c_1, d_1; c_2, d_2; c_3, d_3 и т. д. (поясните). Следовательно, искомая вершина вписанного четырехугольника есть точка пересечения $P = (P_1P_2) \cap (CD)$.

Выясните условия, при которых задача имеет решение.

35. Если задан периметр $2p$ и площадь q^2, то, исходя из формулы $q^2 = rp$ или из пропорции $r:q = q:p$, нетрудно построить r — радиус окружности, вписанной в искомый треугольник. Как известно, полупериметр p есть расстояние от вершины треугольника A до точек касания вневписанной окружности с продолжениями сторон $[AB]$ и $[AC]$. Впишем в угол окружность радиуса r и по точкам касания построим вневписанную окружность. Искомая сторона отсекаемого треугольника будет общей внутренней касательной к обеим окружностям, которую нетрудно построить (как?). Задача неразрешима, если эти окружности пересекутся.

36. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Применив к нему композиции параллельных переносов $\overrightarrow{AC}$, а также $\overrightarrow{CA}$, получим «ленту» из четырехугольников, вершины которых расположены на трех параллельных прямых. После этого применим к полученной ленте композиции переносов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$.

В результате вся плоскость окажется разбитой на конгруэнтные друг другу четырехугольники (нарисуйте).

37. Такой точки не существует. Для доказательства рассмотрим произвольную точку P, принадлежащую выпуклому многоугольнику $A_1A_2 \ldots A_n$. Среди прямых, содержащих стороны многоугольника, выберем ближайшую к точке P — пусть это будет прямая A_2A_3. Если допустить, что проекция точки P на (A_2A_3) не принадлежит $[A_2A_3]$, но, скажем, лежит на $[A_2A_3)$, то, очевидно, расстояние от точки M до следующей прямой A_3A_4 меньше расстояния от P до (A_2A_3), что противоречит выбору (A_2A_3).

Эта задача имеет следующую механическую интерпретацию. Представим себе, что склеена легкая картонная коробка с основанием в форме данного многоугольника (рис. 57) и в точке P закреплен груз, масса которого значительно превосходит массу коробки. Поставив такую коробку боком на горизонтальную плоскость, мы видим, что если проекция P' точки P на (AB) попадает на продолжение отрезка AB, то сила тяжести груза заставит ко-

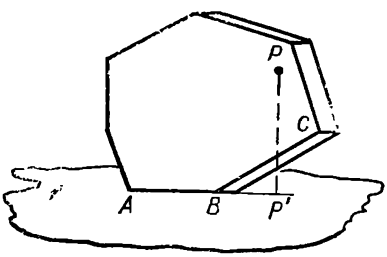


Рис. 57

робку повернуться и стать на плоскость стороной $[BC]$. Если проекция точки P окажется и на продолжении $[BC]$, то коробка вновь повернется и станет на следующую сторону и т. д. Поэтому, если бы проекции груза все время попадали на продолжение сторон в одном и том же направлении, то движение продолжалось бы вечно.

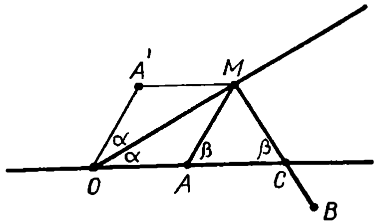


Рис. 58

Поскольку таких самодвижущихся коробок не бывает, точки, обладающей свойством, указанным в задаче, не существует!

38. Допустим, что задача решена и точка M искомая (рис. 58). Обозначим через β величины углов при основании равнобедренного треугольника AMC. Тогда $\widehat{M} = \pi - 2\beta$. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой OM. Вычислим $\widehat{A'MB}$. Так как $\angle MAC$ — внешний угол треугольника OAM, то $\widehat{OMA} = \beta - \alpha$, а $\widehat{A'MA} = 2\beta - 2\alpha$. Поэтому

$$\widehat{A'MB} = 2\beta - 2\alpha + \pi - 2\beta = \pi - 2\alpha.$$

Такую же величину имеет угол, смежный с углом AOA'; $\widehat{AOA'} = 2\alpha$. Следовательно, достаточно на $[A'B]$ построить дугу, вмещающую вписанный угол $\pi - 2\alpha$: пересечение этой дуги со стороной угла даст точку M.

Действительно, если точка M найдена таким построением и $\widehat{A'MB} = \pi - 2\alpha$, то, обозначая углы при основании треугольника β и β', получим: $\widehat{OMA} = \beta - \alpha$, $\widehat{A'MA} = 2\beta - 2\alpha$, $\widehat{AMB} = \pi - 2\alpha - 2\beta + 2\alpha = \pi - 2\beta$, и наконец, $\beta' = \pi - \pi + 2\beta - \beta = \beta$. Итак, углы при основании треугольника конгруэнтны и треугольник — равнобедренный.

39. Соединим точки M и D (рис. 59) и обозначим углы треугольника MBD соответственно α, β, γ. Обозначим $|OL| = m$; $|OL| = |LC| - |OC|$. В треугольнике EOF имеем: $|OE| = R\cos\alpha$, $|OF| = \frac{R}{2}$, $\widehat{EOF} = \alpha + 2\gamma$. Отсюда получаем:

$$|EF|^2 = R^2\cos^2\alpha + \frac{R^2}{4} - R^2\cos\alpha\cos(\alpha + 2\gamma).$$

$$\alpha + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma + \gamma - \beta = \pi + \gamma - \beta, \text{ поэтому}$$

$$\cos(\alpha + 2\gamma) = -\cos(\gamma - \beta)$$

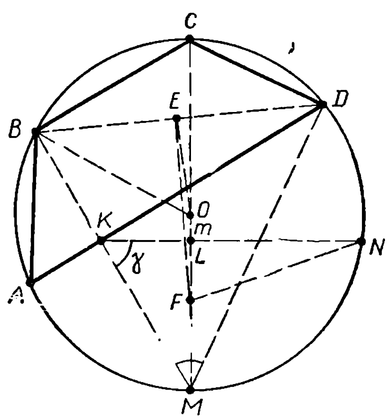


Рис. 59

и, значит,

$$|EF|^2 = R^2\cos^2\alpha + \frac{R^2}{4} + R^2\cos\alpha\cos(\gamma-\beta) =$$
$$= R^2 - R^2\sin^2\alpha + \frac{R^2}{4} + R^2\cos\alpha\cos(\gamma-\beta) =$$
$$= \frac{5R^2}{4} - R^2(\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos(\gamma-\beta)) =$$
$$= \frac{5R^2}{4} - R^2(1-\cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) =$$
$$= \frac{5R^2}{4} - R^2(1-\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma) - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

Но $\cos\alpha = \cos(\pi-(\beta+\gamma)) = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$. Следовательно,

$$|EF|^2 = \frac{5R^2}{4} - R^2(1-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

Заметим теперь, что $|MK| = |MD|\cos\alpha$, $|MD| = 2R\sin\beta$, поэтому $|MK| = 2R\cos\alpha\sin\beta$. Так как $\widehat{MKN} = \gamma$, то $|ML| = |MK|\sin\gamma = 2R\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$ и, значит, $m = R - |ML| = R(1-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)$. Итак, $|EF|^2 = \frac{5}{4}R^2 - Rm$. Так как $m = \frac{9}{8}R - R = \frac{1}{8}R$, то окончательно получаем:

$$|EF|^2 = \frac{5}{4}R^2 - \frac{1}{8}R^2 = \frac{9}{8}R^2;\quad |EF| = \frac{3\sqrt{2}}{4}R.$$

40. Построим на отрезках OP и OQ как на диаметрах окружности (рис. 60). Первая из них пересечет хорду $[ED]$ в точке K, вторая пересечет хорду $[CF]$ в точке L. Углы OKE и OLC — прямые (они опираются на диаметры), поэтому $(OK) \perp (DE)$ и

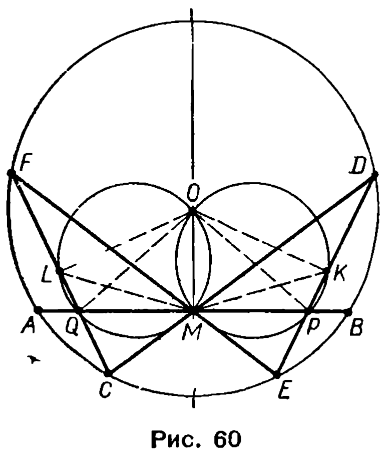


Рис. 60

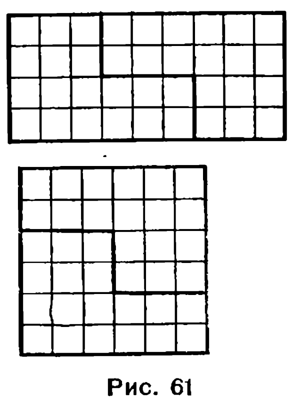


Рис. 61

$(OL) \perp (CF)$; значит, K и L—середины хорд $[DE]$ и $[CF]$ и потому $[MK]$ и $[ML]$ являются медианами треугольников MDE и MCF. В силу равенства вписанных углов эти треугольники подобны, поэтому в них конгруэнтны соответствующие углы между медианой и стороной: $\widehat{MKP} = \widehat{MLQ}$. Но $\widehat{MKP} = \widehat{MOP}$, $\widehat{MLQ} = \widehat{MOQ}$, следовательно, $\widehat{MOP} = \widehat{MOQ}$. Отсюда следует, что (OM) — ось симметрии точек P и Q (напомним, что $(OM) \perp (PQ)$), и, следовательно, $|MP| = |MQ|$ и $|AP| = |BQ|$.

41. На рисунке 61 показан разрез прямоугольника ломаной. [Чтобы решить аналогичную задачу в общем случае (разрезание на две части), необходимо выяснить, при каких условиях такой разрез допускает квадрат.]

42. Внутренние точки квадрата, в которых сходятся стороны нескольких треугольников, должны служить концами не менее чем пяти сторон, следовательно, треугольников не менее пяти. На рисунке 62 показано решение. На сторонах квадрата построено четыре полуокружности. Из двух точек, взятых внутри квадрата, но вне этих полуокружностей, исходит по пять лучей. Так как указанные точки находятся вне полуокружностей, то все треугольники будут остроугольными.

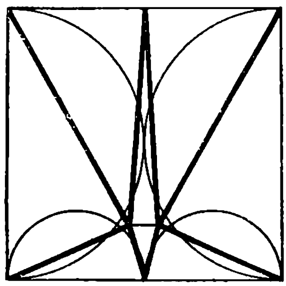


Рис. 62

43. Найдем сначала минимальную систему путей, связывающих между собой два селения и центр квадрата. Эта задача сводится к тому, чтобы внутри треугольника AOB (рис. 63) найти точку, сумма расстояний которой от трех вершин треугольника была бы минимальной. Возьмем внутри треугольника AOB произвольную точку M и повернем треугольник MOB вокруг точки B на $60°$ против часовой стрелки. Тогда точка O перейдет в точку O' и точка M — в точку M'. Так как $|O'M'| = |OM|$, $|MB| = |M'B|$, то длина ломаной $O'M'MA$ равна сумме расстояний от M до вершин A, B, O. Эта сумма будет наименьшей, если соответствующая ломаная является отрезком AO'. Итак, искомая точка P для минимальной суммы расстояний должна лежать на отрезке AO', так же как и соответствующая ей точка P'. Так как $\widehat{OPP'} = 60°$, то $\widehat{OPA} = \widehat{OPB} = 120°$. Минимальная же система путей, связывающих вершины квадрата, получается добавлением к по-

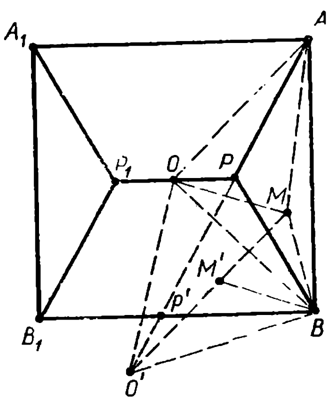


Рис. 63

строенной системе ее образа при симметрии относительно центра квадрата (докажите самостоятельно).

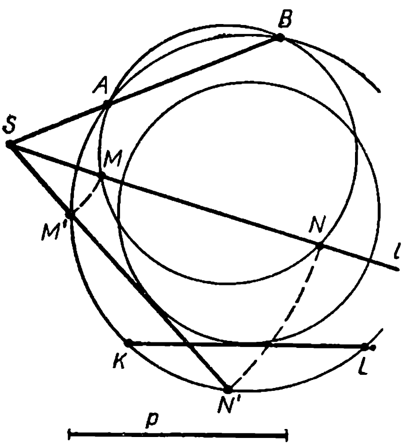


Рис. 64

44. Пусть l — данная прямая, A и B — данные точки, p — длина хорды, которую нужно построить (рис. 64). $(AB) \cap l = S$, а искомая окружность пересекает прямую l в точках M и N. Тогда по свойству степени точки относительно окружности получим: $|SA| \cdot |SB| = |SM| \cdot |SN|$.

Нам достаточно определить расстояния $|SM|$ и $|SN|$. Для этого проведем через точки A и B окружность радиусом, бо́льшим $\frac{p}{2}$, и на этой окружности отложим хорду $[KL]$ длины p. Рассмотрим окружность, концентрическую с построенной и касающуюся прямой KL. Если из точки S провести касательную к внутренней окружности, то эта касательная пересечет внешнюю окружность в точках M' и N', и $|M'N'| = |KL| = p$ (почему?) Итак, мы получим: $|SM'| \cdot |SN'| = |SA| \cdot |SB|$. Если же на l отложить $|SM| = |SM'|$ и $|SN| = |SN'|$, то получим $|SM| \cdot |SN| = |SA| \cdot |SB|$. Поэтому окружность, проходящая через точки A, B, M, пройдет и через точку N, причем $|MN| = p$.

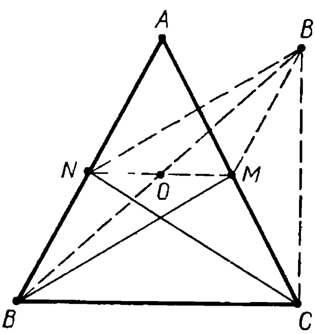


Рис. 65

45. Условие необходимо. Пусть в треугольнике ABC (рис. 65) $|AB| = |AC|$, $[BM]$ и $[CN]$ — биссектрисы. Тогда симметрия относительно биссектрисы угла A отображает точку B на точку C, а точку C на точку B. Симметричны также (AB) и (AC) и биссектрисы $[BM)$ и $[CN)$, поэтому симметричны и соответствующие точки пересечения M и N. Итак, $|BM| = |CN|$.

Условие достаточно. Пусть $|BM| = |CN|$. Докажем, что $|AB| = |AC|$.

Допустим обратное: $|AB| > |AC|$; тогда, обозначая величины углов B и C соответственно β и γ, получим $\gamma > \beta$. Сравним треугольники BMC и CNB. У них сторона $[BC]$ общая, $|BM| = |CN|$, $\frac{\gamma}{2} > \frac{\beta}{2}$. Но если у треугольников две пары сторон конгруэнтны друг другу, а углы между ними не равны, то против большего угла лежит и бо́льшая сторона. Поэтому $|BN| > |CM|$. Пусть точка B' симметрична точке B относительно точки O — середины $[MN]$, тогда $|MB'| = |BN|$, следовательно, $|MB'| > |CM|$, $\widehat{MB'N} = \frac{\beta}{2} < \frac{\gamma}{2}$. Рассмотрим треугольник $NB'C$. Он равнобедренный, так как $|CN| = |BM| = |NB'|$. Поэтому у него должны быть равны величины углов при основании. Но в данном случае мы имеем: $\widehat{NB'C} = \frac{\beta}{2} + \beta'$, $\widehat{NCB'} = \frac{\gamma}{2} + \gamma'$, где $\beta' = \widehat{MB'C}$, $\gamma' = \widehat{MCB'}$; $\frac{\beta}{2} < \frac{\gamma}{2}$ и $\beta' < \gamma'$, так как в треугольнике $MB'C$ $|MC| < |MB'|$, поэтому $\widehat{NB'C} < \widehat{NCB'}$. Мы пришли к противоречию: у равнобедренного треугольника величины углов при основании не равны.

К такому же противоречию мы придем, если допустим, что $|AC| > |AB|$. Итак, мы получаем, что $|AB| = |AC|$, т. е. треугольник — равнобедренный.

46. В настоящее время известно несколько решений этой довольно трудной задачи. Приведем наиболее элементарное из них.

Пусть мы имеем n произвольных точек: $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Наибольшее возможное число прямых равно числу сочетаний из этих n точек по две, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим теперь пары «точка — прямая», в которых каждая из n точек сочетается с прямой, не проходящей через эту точку. Так как для каждой из n точек прямых, проходящих через оставшиеся $n-1$ точек, может быть не более $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то число таких пар «точка — прямая» может быть не более $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

Для каждой из этих пар «точка — прямая» рассмотрим расстояние от точки до прямой и выберем из этих расстояний наименьшее. Обозначим соответствующую точку через P_1, а прямую через (P_2P_3) (рис. 66). Пусть P_1' — проекция P_1 на (P_2P_3). Допустим, что существует точка $P_4 \in (P_2P_3)$. Из трех точек P_2, P_3, P_4 по крайней мере две лежат на прямой по одну сторону от точки P_1'. Пусть это будут точки P_3 и P_4, причем P_3 находится между P_1' и P_4. Тогда расстояние от точки P_3 до (P_1P_4) будет меньше $|P_1P_1'|$, так как расстояние от точки одного катета в прямоугольном треугольнике $P_1P_1'P_4$ до гипотенузы всегда меньше длины другого катета. Итак, $|P_3P_3'| < |P_1P_1'|$, это противоречит выбору пары $(P_1, (P_2P_3))$. Следовательно, прямая P_2P_3 не содержит других точек из данного

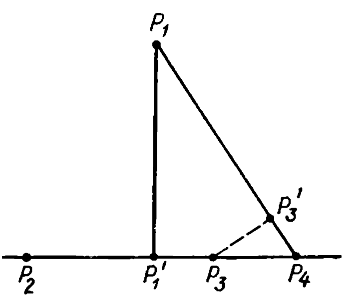


Рис. 66

множества. (Заметим, что в рассмотренной ситуации точка P_1' лежит между P_2 и P_3, так как в противном случае мы могли бы повторить уже приведенное рассуждение и расстояние $|P_1P_1'|$ оказалось бы не минимальным.)

Эта задача была впервые предложена английским математиком Сильвестром (1814—1897). Идея приведенного здесь доказательства принадлежит американскому математику Келли[1].

§ 4. 1. Задача решается аналогично задаче 3 из § 1. На вопрос: на сколько отдельных частей разбивают плоскость n прямых, если каждые две из них имеют общую точку, а каждые три общей точки не имеют? — Там был получен ответ: $F_2(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Пусть теперь n плоскостей разбивают пространство на $F_3(n)$ частей. Пересекая пространство еще одной $(n+1)$-й плоскостью, мы ряд из этих частей разделим на два куска. Так как n плоскостей на $(n+1)$-й плоскости определяют n прямых, то число разделенных $(n+1)$-й плоскостью частей пространства равно $F_2(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Следовательно,

$$F_3(n+1) = F_3(n) + \frac{n(n+1)}{2} + 1, \qquad (*)$$

$$F_3(n) = F_3(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \text{ и т. д.}$$

Придадим этой формуле более симметричный вид. Преобразуем сначала выражение $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. Его можно записать так:

$$F_2(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{1} + 1.$$

Поскольку $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = C_n^2$, $\frac{n}{1} = C_n^1$, $1 = C_n^0$, тогда для числа областей при разбиении плоскости n прямыми получаем формулу:

$$F_2(n) = C_n^2 + C_n^1 + C_n^0.$$

Естественно предположить, что для $F_3(n)$ можно написать аналогичную формулу:

$$F_3(n) = C_n^3 + C_n^2 + C_n^1 + C_n^0 =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1} + 1. \qquad (1)$$

Ее нетрудно проверить для $n = 0, 1, 2, 3$. Полагая, что она справедлива для n плоскостей, докажем, что она остается справедливой и для $n+1$ плоскостей. Для этого подставим в рекур-

[1] См.: Кокстер Г. Введение в геометрию. М., 1966, с. 106.

рентную формулу (*) значение $F_3(n)$ из формулы (1). Тогда получим:

$$F_3(n+1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{1}+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n}{1}+$$
$$+1=\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{1}+1.$$

Итак, формула осталась справедливой. Согласно принципу математической индукции формула (1) справедлива для любого n.

2. Прямая a и точка P определяют содержащую их плоскость α; прямая b и точка P определяют содержащую их плоскость β. Плоскости α и β, имея общую точку P, должны пересекаться по прямой l, которая может пересечь обе прямые a и b, в этом случае l и есть искомая прямая. Если окажется, что $l \parallel a$ или $l \parallel b$, то задача не имеет решения.

3. Условие необходимо. Пусть $a \parallel b$, причем $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$. Плоскость α, пересекающая a, пересечет и плоскость γ. Пусть $\alpha \cap \gamma = l$. Прямая l, пересекая одну из параллельных — a, должна пересечь и другую — b. Точка пересечения прямых l и b и будет единственной общей точкой плоскости α и прямой b.

Условие достаточно. Пусть любая плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b. Прямые a и b не могут быть пересекающимися, так как тогда существует плоскость, содержащая прямую a и не содержащая b. Прямые a и b не могут и скрещиваться, так как в этом случае можно было бы через одну из них провести плоскость, которая пересекала бы другую в одной точке. Итак, $a \parallel b$.

Пусть теперь $a \parallel b$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel c$. Пересечем прямую a произвольной плоскостью α. В силу доказанного, α пересечет и b, и на том же основании она пересечет и c. Итак, любая плоскость, пересекающая a, пересекает и c, значит, $a \parallel c$.

4. а) Так как плоскости треугольников различны, а точки X, Y, Z принадлежат одновременно обеим плоскостям, то все они лежат на линии пересечений этих плоскостей, и $X \in (YZ)$.

б) Прямые BC и $B'C'$ с общей точкой X определяют плоскость α, прямые CA и $C'A'$ определяют плоскость β, и прямые AB и $A'B'$ — плоскость γ. Тогда получаем: $\beta \cap \gamma = (AA')$, $\gamma \cap \alpha = (BB')$, $\alpha \cap \beta = (CC')$. Если какие-нибудь две из этих прямых пересекаются, например, $(AA') \cap (BB') = S$, то точка S принадлежит одновременно трем плоскостям, и потому через нее проходит и третья прямая CC'. Итак, в этом случае $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$. По той же причине если $(AA') \parallel (BB')$, то этим прямым параллельна и прямая CC'.

Обратно, если $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, то мы можем рассмотреть плоскости, определяемые прямыми BB' и CC', CC' и AA', AA' и BB'. В первой из них содержатся прямые BC и $B'C'$. Положим, что $(BC) \cap (B'C') = X$. Аналогично полагаем во второй плоскости $(CA) \cap (C'A') = Y$ и в третьей $(AB) \cap (A'B') = Z$. Точки

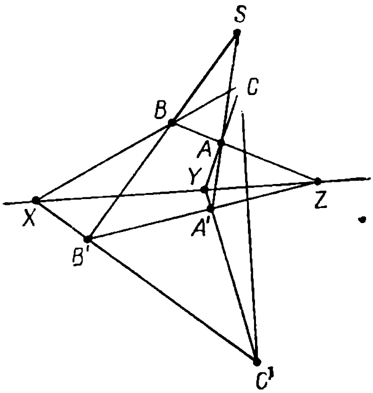


Рис. 67

X, Y, Z принадлежат одной прямой, так как все они принадлежат линии пересечения плоскостей (ABC) и $(A'B'C')$.

Рассуждение остается тем же, если окажется, что $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$. Если окажется, например, что $(BC) \parallel (B'C')$, то это значит, что $(BC) \parallel (B'C') \parallel (YZ)$. В случае, когда окажется еще и $(CA) \parallel (C'A')$, то будут параллельны и плоскости (ABC) и $(A'B'C')$.

5. а) Вне данной плоскости построим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 проходили соответственно через точки X, Y, Z, и далее применим к нему выводы предыдущей задачи.

Для построения треугольника $A_1B_1C_1$ берем вне плоскости δ данных треугольников ABC и $A'B'C'$ (рис. 67) произвольную точку A_1 и проводим прямые YA_1 и ZA_1. Плоскости (A_1YZ) принадлежит также и точка $X \in (YZ)$. На прямой A_1Z берем точку B_1 и проводим прямую B_1X, которая в пересечении с прямой YA_1 дает точку C_1 — третью вершину треугольника $A_1B_1C_1$. Из этого построения ясно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяют условиям первой теоремы из предыдущей задачи, и потому получаем: $(AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) = S_1$. Эту же теорему мы применим к треугольникам $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$ и потому будем иметь также, $(A'A_1) \cap (B'B_1) \cap (C'C_1) = S'_1$. Рассмотрим три плоскости: $\alpha = (AA'A_1)$, $\beta = (BB'B_1)$ и $\gamma = (CC'C_1)$. Мы имеем: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = (S_1S'_1) = l$. Положим, $l \cap \delta = S$; тогда $\alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta = S$. Отсюда следует: $\alpha \cap \delta = (AA')$, $\beta \cap \delta = (BB')$, $\gamma \cap \delta = (CC')$, следовательно, $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, так как все линии пересечения четырех плоскостей проходят через их общую точку S. Если бы оказалось, что $l \parallel \delta$, то отсюда следовало бы, что и $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$.

б) Допустим теперь обратное (рис. 67), т. е. что $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, и докажем, что тогда $X \in (YZ)$. Рассмотрим треугольники XBB' и YAA'. Для них $(BB') \cap (AA') = S$, $(XB') \cap (YA') = C'$, и $(XB) \cap (YA) = C$, причем $S \in CC'$. Применяя прямую теорему Дезарга, получим: $(AB) \cap (A'B') \cap (XY) = Z$. Итак, $X \in (YZ)$.

6. Обозначим точки пятивершинника цифрами: 1, 2, 3, 4, 5. Эти точки определяют 10 прямых: (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45) и 10 плоскостей: (123), (124), (125), (134), (135), (145), (234), (235), (245), (345). В пересечении этих прямых и плоскостей с секущей плоскостью получается 10 точек и

10 прямых. Чтобы доказать, что это есть конфигурация Дезарга, присвоим каждой точке на рисунке 67 соответствующий номер — пару цифр, следя за тем, чтобы в обозначениях точек на каждой прямой встречались три и только три различные цифры. Рассмотрим, например, такое соответствие (под каждой буквой, обозначающей точку — номер прямой пятивершинника, пересечение которой с рассматриваемой плоскостью дает эту точку):

$$\begin{matrix} A & A' & B & B' & C & C' & S & X & Y & Z \\ 12 & 13 & 24 & 34 & 25 & 35 & 23 & 45 & 15 & 14 \end{matrix}$$

Нетрудно проверить, что при этом каждой прямой конфигурации Дезарга действительно соответствуют только три различные цифры (например, для прямой $AA'S$ встречаются только цифры 1, 2, 3). Следовательно, прямые, получающиеся в пересечении нашей плоскости с плоскостями пятивершинника, действительно дают прямые конфигурации Дезарга.

7. а) Если провести одну плоскость через P и a, другую — через P и b, то прямая пересечения этих плоскостей l пройдет и через точку пересечения всех трех плоскостей, т. е. через точку $S = a \cap b$.

б) Пусть a, b и P лежат в одной плоскости (рис. 68). Пересечем a и b двумя секущими, не проходящими через точку P,— (AB) и $(A'B')$, причем $(AB) \cap (A'B') = Z$, $A \in a$ и $A' \in a$, $B \in b$ и $B' \in b$. На прямой PB возьмем точку Y и обозначим $(PA) \cap (ZY) = X$. Далее находим точку $(A'X) \cap (B'Y) = P'$. Мы получили конфигурацию Дезарга — треугольники PAB и $P'A'B'$ удовлетворяют нужным условиям: $(PA) \cap (P'A') = X$, $(PB) \cap (P'B') = Y$, $(AB) \cap (A'B') = Z$ и $X \in (YZ)$. Поэтому прямая PP' проходит через точку $S = (AA') \cap (BB')$.

8. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Через точку $A_1 \in a$ проведем прямую $a_1 \parallel b$. Пересекающиеся прямые a и a_1 определяют плоскость α, которой они принадлежат. На прямой a берем другую точку A_2 и через нее проводим $a_2 \parallel b$. Так как $b \parallel \alpha$, то $a_2 \subset \alpha$ (если бы прямая a_2 пересекалась с плоскостью α в одной точке, то α должна была бы пересекать и прямую b). Итак, все прямые, пересекающие a и параллельные b, лежат в плоскости α. Легко видеть, что любая точка $M \in \alpha$ принадлежит одной из рассматриваемых прямых, поэтому искомое множество совпадает с плоскостью α.

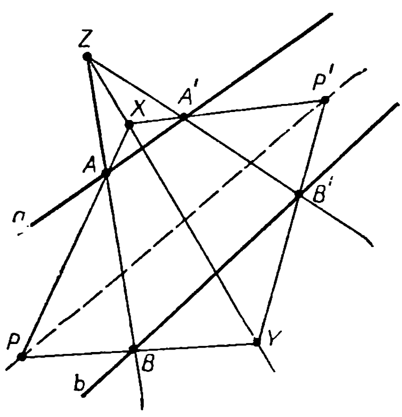


Рис. 68

9. Пусть прямые BC, CA и AB пересекают данную плоскость α соответственно в точках

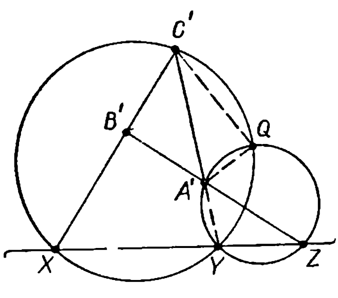


Рис. 69

X, Y, Z. Мы построим в плоскости α треугольник $A'B'C'$, конгруэнтный треугольнику MNP, и притом так, чтобы $X \in (B'C')$, $Y \in (C'A')$ и $Z \in (A'B')$. Тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ будут удовлетворять условиям первой теоремы из задачи 4, поэтому прямые AA', BB', CC' пройдут через искомую точку S.

Для построения треугольника $A'B'C'$ строим на отрезке YZ (рис. 69) как на хорде дугу, вмещающую угол, по величине равный углу NMP, а на отрезке XY — дугу, вмещающую угол, по величине равный углу MPN. Нам остается через Y провести такую секущую, чтобы ее отрезок между окружностями был конгруэнтен отрезку MP в данном треугольнике. Соединив A' и C' с точкой пересечения Q окружностей, увидим, что в треугольнике $A'C'Q$ нам известна $|A'C'|$ и величины углов при вершинах C' и A', так как известны величины дуг, на которые эти углы опираются. Построив треугольник $A'C'Q$, найдем $|QC'|$, что даст возможность построить точку C' и, значит, треугольник $A'B'C'$.

10. Условие необходимо. Пусть плоскость α параллельна плоскости β и прямая l имеет с плоскостью α только одну общую точку A. Возьмем в плоскости β произвольную точку B и через прямую l и точку B проведем плоскость γ, которая пересечет плоскости α и β по параллельным прямым a и b. Прямые l, a, b принадлежат плоскости γ, и прямая l пересекает прямую a в точке A. Как и в задаче 3, прямая l должна пересекать прямую b, а вместе с тем и плоскость β.

Условие достаточно. Если плоскости пересекаются, то существует прямая, лежащая в одной из них и пересекающая другую (в одной точке).

Пусть $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$. Докажем, что $\alpha \parallel \gamma$. Прямая l, пересекающая плоскость α, пересекает плоскость β, а, следовательно, и плоскость γ. Итак, всякая прямая, пересекающая плоскость α, пересекает и плоскость γ; значит, $\alpha \parallel \gamma$.

11. Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую $b' \parallel b$. На прямой b возьмем точку B и проведем через нее прямую $a' \parallel a$. Через прямые a и b' и через прямые b и a' можно провести плоскости α и β — это и будут искомые плоскости. Любая другая плоскость α', проходящая через прямую a, пересекла бы прямую b', а значит, и параллельную ей прямую b; следовательно, плоскость α и аналогично плоскость β определяются условием задачи однозначно.

12. Рассмотрим плоскости $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, пересеченные двумя прямыми l и l', $l \cap \alpha = A$, $l \cap \beta = B$, $l \cap \gamma = C$, $l' \cap \alpha = A'$, $l' \cap \beta = B'$, $l' \cap \gamma = C'$ (рис. 70).

Если l и l' скрещиваются, то через произвольную точку P на прямой l' проводим прямую $l_1 \parallel l$. Пусть $l_1 \cap \alpha = A_1$, $l_1 \cap \beta = B_1$, $l_1 \cap \gamma = C_1$. Прямые l и l_1 лежат в одной плоскости. Поэтому мы имеем: $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1)$. Аналогично $(A_1A') \parallel (B_1B') \parallel (C_1C')$. В силу параллельности прямых l и l_1 имеем: $|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, а по свойству отрезков, отсекаемых параллельными секущими на сторонах угла, $\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$. Заменим в правой части равенства длины $|A_1B_1|$ и $|B_1C_1|$ равными им длинами $|AB|$ и $|BC|$, получим:

$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

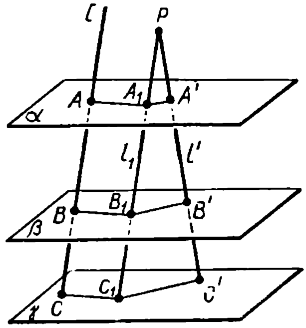


Рис. 70

[Из полученного свойства трех взаимно параллельных плоскостей $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ можно сделать важный вывод: плоскость β есть множество точек, делящих в данном отношении отрезки, соединяющие точки плоскости α с точками плоскости γ. Нетрудно доказать, что ни одна точка, не принадлежащая β, этим свойством не обладает.]

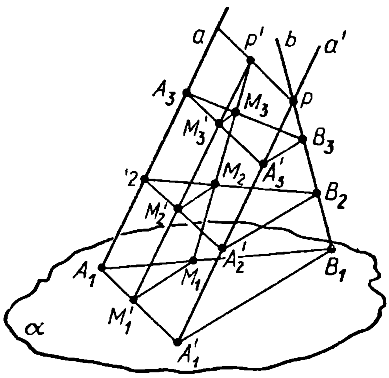


Рис. 71

13. Пусть прямая движется параллельно плоскости α и, пересекая прямые a и b, занимает последовательно положения (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), ... (рис. 71). Точка, делящая отрезки в одном и том же отношении, последовательно занимает положения M_1, M_2, M_3, ... Через точку P на прямой b проводим прямую $a' \parallel a$. Пусть точки A_1 и B_1 лежат в плоскости α, а прямая a' пересекает α в точке A_1'. Прямые, параллельные $A_1'B_1$, пересекают a' в точках A_2', A_3'. Так как плоскости $A_2A_2'B_2$ и $A_3A_3'B_3$ параллельны α, то $(A_2A_2') \parallel (A_3A_3') \parallel (A_1A_1')$. Далее проводим $(M_1M_1') \parallel (A_1'B_1)$, $(M_2M_2') \parallel (A_2'B_2)$ и $(M_3M_3') \parallel (A_3'B_3)$. Так как точки M_1', M_2', M_3' делят параллельные отрезки между параллельными прямыми — $[A_1A_1']$, $[A_2A_2']$, $[A_3A_3']$ — в одном и том же отношении, то эти точки принадлежат одной прямой. Вместе с тем мы имеем: $(M_1M_1') \parallel (M_2M_2') \parallel (M_3M_3')$. Длины же отрезков M_1M_1', M_2M_2', M_3M_3' пропорциональны длинам $|A_1'B_1|$, $|A_2'B_2|$, $|A_3'B_3|$, которые в свою очередь пропорциональны расстояниям $|PA_1'|$, $|PA_2'|$, $|PA_3'|$ или равным

им расстояниям $|P'M'_1|$, $|P'M'_2|$, $|P'M'_3|$. [P' — точка пересечения прямой $M'_1M'_2M'_3$ с прямой, проходящей через точку P параллельно $(A_1A'_1)$.] Поэтому точки M_1, M_2, M_3 принадлежат одной прямой и при движении нашей прямой AB точка, делящая отрезок AB в постоянном отношении, описывает прямую.

14. По свойству средней линии треугольника отрезки MP и QN параллельны $[AC]$ и по длине равны $\frac{|AC|}{2}$, поэтому $MPNQ$ параллелограмм и его диагонали $[MN]$ и $[PQ]$ пересекаются в точке O — их общей середине. Аналогично $PRQS$ тоже параллелограмм, и поэтому его диагональ $[RS]$ пройдет через точку O — середину PQ.

15. Построим плоскость α так, чтобы $a \subset \alpha$ и $\alpha \parallel c$ (см. задачу 11), и плоскость β, чтобы $b \subset \beta$ и $\beta \parallel c$. Если плоскости α и β пересекаются, $\alpha \cap \beta = l$, то $l \parallel a$ (почему?). Эта прямая l пересекает и a и b, так как если бы оказалось, например, что $l \parallel a$, то, учитывая параллельность l и c, мы получили бы, что $a \parallel c$, а это противоречит условию задачи. Таким образом, l и есть искомая прямая. Если окажется $\alpha \parallel \beta$, то задача не имеет решения.

16. Пусть отрезок MN (рис. 72) удовлетворяет условиям задачи. Проведем через точку N прямую, параллельную прямой a. Эта прямая пересечет плоскость γ в точке N'. Прямая $N'B$ есть пересечение плоскости γ с плоскостью, проходящей через b и параллельной прямой a. Так как $(AM) \parallel (NN')$ и $(MN) \parallel (AN')$, то $|AN'| = |MN| = d$. Отсюда следует построение:

1) Сначала строим плоскость β, проходящую через b и параллельную a. Эта плоскость пересечет плоскость γ по прямой BN' (точка N' пока не построена).

2) Радиусом d проводим в плоскости γ окружность с центром в A, которая пересечет найденную прямую в точке N'.

3) Через N' в плоскости β проводим прямую, параллельную a, и находим точку N.

4) В плоскости, определяемой параллельными прямыми a и NN', проводим $(MN) \parallel (AN')$.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

17. а) Точка P пересечения прямой AB с плоскостью α отыскивается как точка пересечения прямой AB с ее параллельной проекцией $(A'B')$ на плоскость α.

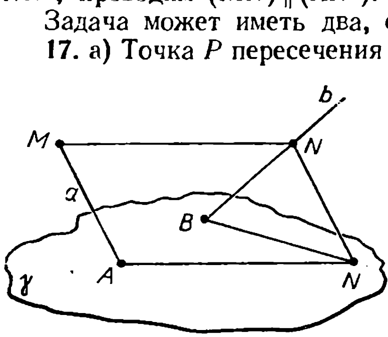


Рис. 72

б) Используя построение из п. а), находим точки X, Y, Z — следы прямых BC, CA и AB на плоскости α. Эти точки принадлежат как плоскости α, так и плоскости ABC, поэтому они принадлежат прямой, по которой пересекаются эти две плоскости.

18. Плоскость, проходящая через (PP') и q, имеет след $(P'Q')$ на плоскости α. Прямая $P'Q'$ пересекает l в точке M, которая принадлежит искомой плоскости. Прямая MP принадлежит и искомой плоскости и плоскости прямых PP' и q. Искомая точка Q есть пересечение прямых MP и q. (Нарисуйте чертеж.)

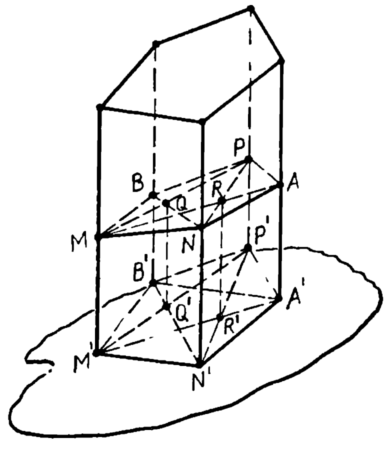


Рис. 73

19. Порядок построения таков:

1) Рассматриваем точки M', N', P' как параллельные проекции точек M, N, P (рис. 73) на плоскость основания. Проводим прямую MP и ее проекцию $M'P'$. Эта проекция пересекает диагональ основания $B'N'$ в точке Q', являющейся проекцией точки Q, лежащей на диагонали сечения $[MP]$.

2) Через точку Q' проводим прямую, параллельную боковым ребрам призмы, и в пересечении этой прямой с (MP) находим точку Q.

3) Прямая NQ пересекает ребро призмы в четвертой вершине сечения B.

4) Пятую вершину сечения находим таким же построением, пересекая диагональ $A'M'$ проекцией другой диагонали сечения $[N'P']$. (Находим точку R' — проекцию точки R на диагональ $[N'P']$; прямая NR в пересечении с боковым ребром дает пятую вершину сечения A.)

20. Построение осуществляется путем последовательного отыскания точек пересечения секущей плоскости с ребрами пирамиды. Например, точка Q на боковом ребре $[SC]$ может быть найдена таким построением:

1) Находим точку пересечения M прямой BC со следом плоскости l.

2) Проводим прямую MP, которая лежит в плоскости SBC и пересекает ребро $[SC]$ в искомой точке Q.

Подобным же образом находим остальные вершины сечения (рис. 74).

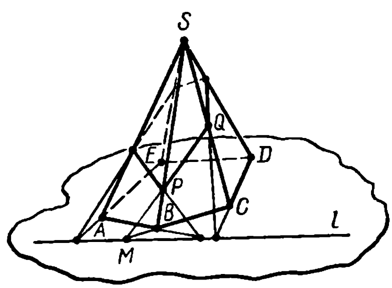


Рис. 74

21. Прямая $l = \beta \cap \gamma$ определяется следующим построением.

1) Пересечение следов $b \cap c$ дает точку P пересечения плоскостей: $P \in l$.

2) Прямая $B'C'$ — след плоскости, проходящей через (BB') и

(CC'). Находим точки пересечения $(B'C') \cap b = M$, $(B'C') \cap c = N$.

3) Прямые MB и NC лежат в данных плоскостях и в плоскости прямых BB' и CC'. Точка их пересечения $Q = (MB) \cap (NC)$ есть вторая общая точка обеих плоскостей. Итак, $(PQ) = l$.

Проделайте последовательно все построение на чертеже.

22. Идея построения заключается в том, чтобы найти линию пересечения плоскости β с плоскостью, содержащей параллельные прямые $(MM') \parallel (NN')$. Следом этой плоскости на основной плоскости является прямая $M'N'$. Точка $P = (M'N') \cap b$ есть общая точка двух плоскостей. Вторую их общую точку Q получим как точку пересечения проектирующей прямой с плоскостью β (построение задачи 18). Итак, (PQ) принадлежит плоскости β и плоскости прямых MM' и NN'. Пересечение прямых MN и PQ дает искомую точку.

23. Пусть E и F — точки, принадлежащие следу l плоскости β. Проводим прямые BE и BF и находим их проекции $(B'E)$ и $(B'F)$ на основной плоскости α. Через P' проводим прямые $e' \parallel (B'E)$ и $f' \parallel (B'F)$. Через P проводим прямые $e \parallel (BE)$ и $f \parallel (BF)$; $E' = e' \cap e$ и $F' = f' \cap f$. Точки E' и F' определяют след l' плоскости γ. Итак, эта плоскость вполне определена следом l' и точкой P. Плоскости γ и β параллельны, так как две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

24. Соединим точку P (рис. 75) с одной из вершин треугольника так, чтобы эта прямая пересекла другую сторону. Это всегда возможно (см. задачу 4 из § 1). Пусть, например, $(PA) \cap (BC) = M$. Ввиду того что при проектировании сохраняется отношение отрезков, принадлежащих одной прямой, мы на прямой $B'C'$ найдем точку M', удовлетворяющую соотношению $\frac{|C'M'|}{|C'B'|} = \frac{|CM|}{|CB|}$.

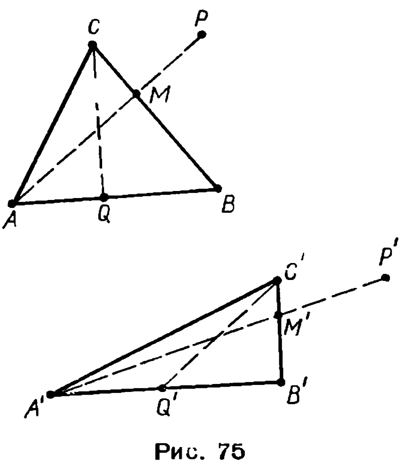


Рис. 75

Точно таким же построением на прямой $A'M'$ найдем точку P', удовлетворяющую равенству $\frac{|M'P'|}{|M'A'|} = \frac{|MP|}{|MA|}$.

Если $(CQ) \perp (AB)$, то проекцию основания — точку Q' — можно найти тем же построением.

25. Пусть параллелограмм $A'B'C'D'$ — проекция квадрата $ABCD$ (рис. 76). Центр квадрата O отображается на центр параллелограмма — O'. Вписанная окружность касается сторон квадрата в их серединах, которым соответствуют середины сторон параллелограмма $M'P'N'Q'$. Чтобы найти еще несколько точек, в которые проектируются точки окружности, заметим, что если F — середина $[AP]$, то гипотенузы прямоугольных треугольников AMN и ANF взаимно перпендикулярны (почему?) и, значит, точка их пересечения K лежит на окружности. Ее проекцию K' легко построить, так как F' есть середина $[A'P']$. Такие же точки построим на отрезках $N'B'$, $N'C'$ и $M'D'$. Через полученные 8 точек можно уже достаточно точно построить проекцию окружности — эллипс.

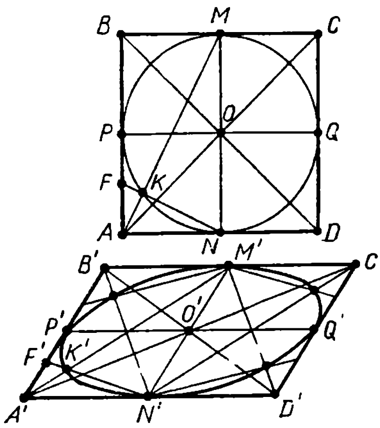


Рис. 76

26. В равностороннем треугольнике медианы совпадают с диаметрами описанной окружности, а их точка пересечения — с центром. Поэтому точка O' пересечения медиан проекции треугольника есть проекция центра окружности (рис. 77). Дальнейшее построение достаточно понятно по чертежу. Для облегчения построения в концах диаметров проведены проекции касательных к окружности.

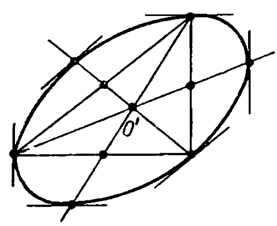


Рис. 77

27. Проекции несмежных вершин правильного шестиугольника являются в то же время проекциями вершин равностороннего треугольника. Как по ним построить недостающие вершины шестиугольника, видно из чертежа предыдущей задачи. Проекция вписанной окружности строится по проекциям шести точек касания.

28. Если через вершины A, B, C, D провести прямые, параллельные диагоналям квадрата, то получим изображение квадрата, стороны которого будут касаться вписанной в него окружности в точках, соответствующих A, B, C, D. Решение приводится к построению, выполненному к задаче 25. Вершины правильного вписанного восьмиугольника являются точками пересечения диагоналей нового квадрата с окружностью. Сделайте чертеж.

29. Пусть A, B, C, D — вершины верхнего основания. Тогда вершины A', B', C', D' нижнего основания мы будем рассматривать как проекции соответствующих вершин A, B, C, D на плоскость нижнего основания. Обозначим еще через N' проекцию N на $(B'C')$. Построение произведем в следующем порядке.

1) Находим пересечение (MN) со своей проекцией $(N'A')$ — точку E.

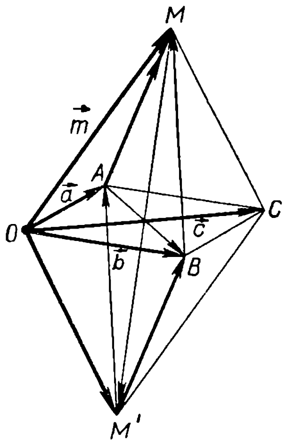


Рис. 78

2) Находим $(EP)\cap(A'D') = K$ и $(EP)\cap(B'C') = L$.

3) $(LN)\cap(CC') = R$; $(LN)\cap(BB') = S$.

4) $(SM)\cap(AB) = T$.

Сделайте все построения. Точки M, K, P, R, N, T определяют фигуру сечения — шестиугольник.

30. Сохраним те же обозначения, как и в предыдущей задаче. Порядок построения таков.

1) Находим проекции M', N', P' точек M, N, P на плоскости нижнего основания.

2) Находим след прямой MP на основной плоскости: $E = (MP)\cap(M'P')$, и аналогично точку $F = (MN)\cap(M'N')$.

Прямая EF — след плоскости MNP в плоскости основания. Точки пересечения плоскости MNP с ребрами параллелепипеда находятся построением, указанным в задаче 18.

§ 5. 1. а) Переместительность сложения векторов, сочетательность при умножении вектора на число и распределительные законы для умножения вектора на сумму чисел и числа на сумму векторов — все это доказывается точно так же, как и в плоскости, поскольку эти факты касаются не более чем двух векторов, которые можно считать векторами параллельной им плоскости.

Доказательство ассоциативности сложения тоже переносится без изменения, поскольку оно сводится к проверке соотношения $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$, которое очевидно.

б) Перестановочность скалярного умножения и сочетательность при умножении на число доказываются так же, как и раньше. Докажем распределительное свойство при скалярном умножении суммы векторов на вектор. Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OM}=\vec{m}$ (рис. 78); положим: $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Докажем, что

$$\vec{m}\vec{a}+\vec{m}\vec{b}=\vec{m}\vec{c}.$$

Рассмотрим параллелограмм $MAM'B$, в котором:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{M'B}=\vec{m}-\vec{a},\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{M'A}=\vec{m}-\vec{b},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM'}=\vec{m}-(\vec{c}-\vec{m})=2\vec{m}-\vec{c}.$$

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, то получим:

$$2(\vec{m}-\vec{a})^2+2(\vec{m}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2+(2\vec{m}-\vec{c})^2;$$

$$4m^2 + 2a^2 + 2b^2 - 4\vec{m}\vec{a} - 4\vec{m}\vec{b} =$$
$$= a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 4m^2 + c^2 - 4\vec{m}\vec{c};$$
$$a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{m}\vec{a} - 4\vec{m}\vec{b} = c^2 - 4\vec{m}\vec{c}.$$

Но так как $c^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b}$ (теорема косинусов), то получим: $-4\vec{m}\vec{a} - 4\vec{m}\vec{b} = -4\vec{m}\vec{c}$; $\vec{m}\vec{a} + \vec{m}\vec{b} = \vec{m}\vec{c}$, т. е.

$$\vec{m}\vec{a} + \vec{m}\vec{b} = \vec{m}(\vec{a} + \vec{b}).$$

2. Выбрав начало O, запишем:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_0} + t\vec{m},\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_0} + t\vec{n},$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$
$$= (\overrightarrow{OB_0} + t\vec{n}) - k((\overrightarrow{OB_0} + t\vec{n}) - (\overrightarrow{OA_0} + t\vec{m})) =$$
$$= \overrightarrow{OB_0} - k(\overrightarrow{OB_0} - \overrightarrow{OA_0}) + t(\vec{n} - k\vec{n} + k\vec{m}) = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{p}.$$

Легко видеть, вектор $\vec{p} = (1 - k)\vec{n} + k\vec{m}$ должен быть отличен от $\vec{0}$ и, следовательно, точка P движется по прямой с постоянной скоростью $\vec{p}$.

3. Построение можно провести в следующем порядке:

1) Через прямую m проводим плоскости $\beta \parallel n$ и $\gamma \parallel p$, причем допустим, что прямая p не параллельна плоскости β.

2) Через прямую n проводим α m и $\gamma' \parallel p$.

3) Через прямую p проводим $\alpha' \parallel m$ и $\beta' \parallel n$ (рис. 79).

4) Находим пересечения: $m' = \alpha \cap \alpha'$, $n' = \beta \cap \beta'$ и $p' = \gamma \cap \gamma'$. Получим прямые $m' \parallel m$, $n' \parallel n$ и $p' \parallel p$.

5) Находим точки пересечения: $A = n \cap p'$, $B = m \cap p'$, $C = m \cap n'$, $A' = n' \cap p$, $B' = m' \cap p$, $C' = m' \cap n$.

6) Находим точки пересечения: $D = \alpha \cap \beta' \cap \gamma$ и $D' = \alpha' \cap \beta \cap \gamma'$.

Этим завершается построение параллелепипеда. Решение единственно, так как плоскости α, β, γ, α', β', γ', в которых лежат грани параллелепипеда, однозначно определяются данными скрещивающимися прямыми. Если прямые m, n, p окажутся параллельными одной и той же плоскости, то получится, что $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma'$, $\alpha' = \beta'$ и $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$,— тогда задача не имеет решения.

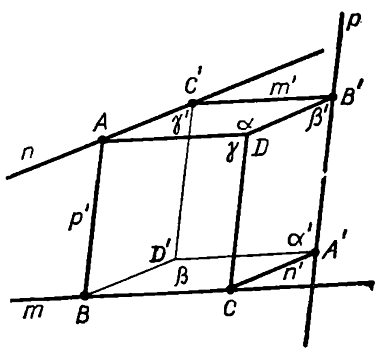


Рис. 79

4. Условие необходимо. Пусть даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$,

$\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ и $\vec{OD}=\vec{d}$. Если точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости, то векторы $\vec{a}-\vec{d}$, $\vec{b}-\vec{d}$, $\vec{c}-\vec{d}$ компланарны. Но тогда один из этих векторов можно представить как сумму двух векторов, коллинеарных с двумя другими. Пусть, например, мы имеем: $\vec{a}-\vec{d}=m(\vec{b}-\vec{d})+n(\vec{c}-\vec{d})$. В этом равенстве суммы коэффициентов левой и правой части равны между собой, так как каждая из сумм равна нулю.

Условие достаточно. Пусть, например, мы имеем равенство:

$$m\vec{a}+n\vec{b}=p\vec{c}+q\vec{d},$$

и нам известно, что $m+n=p+q$. Из этого условия мы имеем: $m+n-p=q$, откуда получаем:

$$m\vec{a}+n\vec{b}=p\vec{c}+(m+n-p)\vec{d};$$
$$m(\vec{a}-\vec{d})+n(\vec{b}-\vec{d})=p(\vec{c}-\vec{d});$$
$$\vec{a}-\vec{d}=-\frac{n}{m}(\vec{b}-\vec{d})+\frac{p}{m}(\vec{c}-\vec{d}).$$

Следовательно, векторы $\vec{a}-\vec{d}$, $\vec{b}-\vec{d}$ и $\vec{c}-\vec{d}$ компланарны, откуда следует, что точки A, B, C, D, определяемые соотношениями $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$, $\vec{OD}=\vec{d}$, принадлежат одной плоскости.

5. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ обозначим $\vec{DA}=\vec{m}$, $\vec{DC}=\vec{n}$, $\vec{DD'}=\vec{p}$. Пусть Q — точка пересечения диагонали $[DB']$ параллелепипеда с плоскостью, проходящей через точки A, C, D' и $\vec{DQ}=\vec{q}$. Диагональ $\vec{DB'}=x\vec{q}$ есть сумма векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$. Отсюда получим:

$$\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}=x\vec{q}.$$

Так как точки A, C, D', Q принадлежат одной плоскости, то согласно выводам предыдущей задачи суммы численных коэффициентов левой и правой части последнего уравнения, связывающего соответствующие векторы, равны между собой. Поэтому $x=1+1+1=3$. Итак, плоскость ACD' отсекает от диагонали одну треть ее длины.

6. Предполагая, что точка P имеет массу (m_1+m_2), а положение ее определено формулой, данной в условии задачи, найдем центр масс системы точек P (с массой (m_1+m_2)) и A_3(с массой m_3), пользуясь той же формулой. Получим:

$$\vec{P}_3=\frac{\dfrac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2)+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1\vec{A}_1+m_2\vec{A}_2+m_3\vec{A}_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Предположим теперь, что центр масс системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ определяется по формуле:

$$\vec{P}_n = \frac{m_1\vec{A}_1 + m_2\vec{A}_2 + \cdots + m_n\vec{A}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что эта формула останется справедливой и для системы из $n+1$ точек. Согласно принципу математической индукции формула (1) справедлива при любом n. (В этом выводе мы считаем, что при отыскании центров масс систему масс можно заменить суммой этих масс, помещенной в центр масс системы.)

Независимость положения центра тяжести от выбора начала O доказывается так же, как и в случае плоскости (см. задачу 8, § 2).

7. Как это делалось в планиметрии, будем считать, что масса треугольника сосредоточена в его центроиде (точке пересечения медиан), причем масса каждой грани пропорциональна ее площади. Площадь основания (квадрата) примем за единицу, тогда площадь каждой боковой грани равна $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Радиусы-векторы центроидов боковых граней равны: $\frac{\vec{S}+\vec{A}_1+\vec{A}_2}{3}$; $\frac{\vec{S}+\vec{A}_2+\vec{A}_3}{3}$; $\frac{\vec{S}+\vec{A}_3+\vec{A}_4}{3}$; $\frac{\vec{S}+\vec{A}_4+\vec{A}_1}{3}$, радиус-вектор центра основания равен $\frac{\vec{A}_1+\vec{A}_2+\vec{A}_3+\vec{A}_4}{4}$.

Применяя теперь общую формулу центра масс, получим:

$$\vec{P} = \frac{\frac{4\vec{S}+2\vec{A}_1+2\vec{A}_2+2\vec{A}_3+2\vec{A}_4}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\vec{A}_1+\vec{A}_2+\vec{A}_3+\vec{A}_4}{4}}{\sqrt{15}+1};$$

$$\vec{P} = \frac{4\vec{S}\sqrt{15} + (2\sqrt{15}+3)(\vec{A}_1+\vec{A}_2+\vec{A}_3+\vec{A}_4)}{12(\sqrt{15}+1)}.$$

8. Боковые ребра правильной пирамиды имеют одну и ту же длину a. Обозначим соответствующие векторы через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; тогда ребру основания, противолежащему ребру a_1, соответствует вектор $\vec{a}_2 - \vec{a}_3$. Заметив еще, что углы между боковыми ребрами имеют одну и ту же величину φ, будем иметь:

$$\vec{a}_1(\vec{a}_2 - \vec{a}_3) = \vec{a}_1\vec{a}_2 - \vec{a}_1\vec{a}_3 = a^2\cos\varphi - a^2\cos\varphi = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения означает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2 - \vec{a}_3$, а значит, и соответствующие ребра перпендикулярны.

9. Положим, что точка O есть начало четырех радиус-векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$, равных по длине и образующих между

собой равные по величине углы. Как в предыдущей задаче, нетрудно доказать, что каждый из векторов перпендикулярен прямой, проходящей через концы любых двух других радиус-векторов, поэтому любой из этих четырех векторов перпендикулярен плоскости, проходящей через концы трех остальных радиус-векторов. В силу равенства длин векторов и углов между ними треугольники A_1OA_2, A_1OA_3, A_1OA_4, A_2OA_3, A_2OA_4, A_3OA_4 конгруэнтны между собой и, значит, треугольники $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ — равносторонние. Перпендикуляры, проведенные из каждой точки A_k к плоскости противолежащего равностороннего треугольника, пройдут через O и через центр этого треугольника (объясните). Если в каждой из точек A_1, A_2, A_3, A_4 поместить единичную массу, то точка O будет центром этих масс, так как центр масс лежит на каждой из прямых, соединяющих одну из точек с центром масс противоположного треугольника. По тем же причинам точка O делит в отношении $3:1$ расстояние от точки A_k до противоположной плоскости. Отсюда следует построение.

1) Через O проводим прямую a_1 и берем на ней точку A_1.

2) На прямой OA_1 от точки O в направлении, противоположном A_1, откладываем отрезок OO' длины $|OO'| = \frac{1}{3}|OA_1|$.

3) Через O' проводим плоскость, перпендикулярную прямой a_1, и на ней из точки O' проводим три луча a_2, a_3, a_4, образующие друг с другом углы по $120°$.

4) На луче a_2 находим точку A_2, такую, что $|OA_2| = |OA_1|$.

Аналогично на лучах a_3, a_4 находим точки A_3 и A_4. Векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ удовлетворяют условиям задачи. Это следует из конгруэнтности шести треугольников A_1OA_2, A_1OA_3, A_1OA_4, A_2OA_3, A_2OA_4, A_3OA_4. Общая величина углов φ между векторами определяется из равенства: $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$, откуда $\varphi \approx$ $\approx 109°28'16''$.

10. Не нарушая общности рассуждений, можно допустить, что $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = q$, а также, что $O \in p$. Возьмем $M \in p$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Если φ — величина угла между вектором $\vec{r}$ и векторами $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, то $\vec{r}\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = rq\cos\varphi - rq\cos\varphi = 0$. Значит, $p \perp (AB)$. Аналогично докажем, что $p \perp (BC)$. Следовательно, прямая p перпендикулярна плоскости ABC.

11. Обозначим $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, причем $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$, где r — радиус описанной около треугольника ABC окружности (с центром P). Обозначим еще: $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = q$, $\overrightarrow{PO} = \vec{p}$, $|\vec{p}| = p$. Мы имеем:

$$\overrightarrow{OA}^2 = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PO})^2, \text{ или } q^2 = r^2 + p^2 - 2rp\cos\varphi;$$

$\overrightarrow{OB}^2 = (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PO})^2$, или $q^2 = r^2 + p^2 - 2rp\cos\varphi'$. Отсюда следует, что $\varphi = \varphi'$, т. е. (OP) образует равные углы с (OA) и (OB). Но такой же угол (OP) образует и с (OC). На основании выводов предыдущей задачи получаем, что $(OP) \perp (ABC)$.

12. Пусть $a \parallel \gamma$, $b \perp a$. Обозначим через a' проекцию a на γ, через b' — проекцию b на γ. Если $a \subset \alpha$ и $a' \subset \alpha$, то $\alpha \perp \gamma$. Точно так же, если $b \subset \beta$ и $b' \subset \beta$, то $\beta \perp \gamma$. Поэтому если $l = \alpha \cap \beta$, то $l \perp \gamma$, следовательно, $l \perp a'$, $l \perp b'$. Но так как $a' \parallel a$ и $a \perp b$, то $a' \perp b$. Получаем $a' \perp l$, $a' \perp b$ и так как $l \subset \beta$, $b \subset \beta$, то $a' \perp \beta$. Но $b' \subset \beta$, следовательно, $a' \perp b'$.

Аналогично доказывается и обратное предложение: если $a' \perp b'$ и $a \parallel \gamma$, то $a \perp b$. Сделайте чертеж и самостоятельно проведите доказательство.

13. Если $p \perp \alpha$, то $p \perp l$. Но $l \subset \alpha$, следовательно $l = l'$. На основании предложения предыдущей задачи выводим: $p' \perp l'$.

14. Проводим в плоскости α прямую l. Эта прямая и точка P определяют плоскость, в которой проводим через точку P перпендикуляр (PA) к прямой l. Через точку A проводим в плоскости α перпендикуляр a к прямой l. Прямая a и точка P определяют плоскость β, в которой проводим перпендикуляр $(PQ) = p$ к прямой a. Теперь мы имеем: $(l \perp (PA), l \perp a) \Rightarrow (l \perp \beta) \Rightarrow (l \perp p)$. Итак, $(p \perp l,\ p \perp a,\ a \subset \alpha,\ l \subset \alpha) \Rightarrow (p \perp \alpha)$. Это построение применимо для точки P, не принадлежащей α. Если $P \in \alpha$, то по-прежнему проводим $l \subset \alpha$, $(PA) \perp l$. Через l и любую не принадлежащую плоскости α точку проводим плоскость, в которой через точку A проведем прямую $a \perp l$. Плоскость, определяемую прямыми a и AP, обозначим β. Проведем через точку P в плоскости β перпендикуляр p к прямой AP. Тогда получим: $(l \perp (AP),\ l \perp a) \Rightarrow (l \perp \beta) \Rightarrow (l \perp p)$. Итак, $(p \perp (AP),\ p \perp l) \Rightarrow (p \perp \alpha)$.

Единственность перпендикуляра следует из того, что через два различных перпендикуляра можно было бы провести плоскость γ, которая пересекла бы α по некоторой прямой b. Тогда в этой плоскости мы получили бы, что через одну точку P к прямой b проходят два перпендикуляра, что противоречит известному факту из планиметрии.

15. Пусть $(AS) \perp \alpha$, $S \subset \alpha$. Откладывая $[SA'] \cong [SA]$ на прямой AS по другую сторону от α, получим точку A'. Она единственная в силу единственности перпендикуляра.

Пусть теперь $M \in \alpha$. Плоскость $AA'SM$ пересекает α по прямой s, которая есть ось симметрии точек A и A' этой плоскости, так как $(AA') \perp s$ и $[SA] \cong [SA']$. Поэтому $|MA| = |MA'|$. Если $N \notin \alpha$ и, например, находится в одном полупространстве с точкой A, то $(A'N) \cap \alpha = P$; $P \in \alpha$; $|PA| = |PA'|$;

$$|AP| + |PN| > |AN|;\ |A'P| + |PN| > |AN|;\ |A'N| > |AN|.$$

Значит, N ближе к той из двух взаимно симметричных точек, с какой находится в одном из двух полупространств, определяемых плоскостью симметрии.

16. а) Это следует из равенства $|SA|=|SA'|$ и единственности перпендикуляра $(SA)=(SA')$.

б) Плоскость, проходящая через параллельные $(AA')\parallel(BB')$, пересекает плоскость симметрии по прямой s — оси симметрии точек A и A', B и B'. Поэтому $|AB|=|A'B'|$.

в) Если A, B, C лежат на одной прямой, причем B — между A и C, то $|AB|+|BC|=|AC|$. Но $|AB|=|A'B'|$, $|BC|=|B'C'|$ и $|AC|=|A'C'|$. Поэтому $|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$. Значит, A', B', C' лежат на одной прямой. Далее уже нетрудно доказать, что прямая отображается на прямую.

Пусть произвольно расположенные точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости. Симметрия относительно плоскости отображает их на точки A', B', C', D'. Пусть прямая AD пересекает BC в точке M. Прямая AD отображается на прямую $A'D'$, пересекающую $B'C'$ в точке M', на которую отображается точка M. Итак, точка D' принадлежит плоскости $A'B'C'$, т. е. точки A', B', C', D' также принадлежат одной плоскости. Отсюда уже нетрудно получить, что плоскость при симметрии отображается на плоскость.

г) По нашему определению симметрии, перпендикуляр к плоскости отображается симметрией на себя. Плоскость, перпендикулярную к плоскости симметрии, можно рассматривать как объединение прямых, перпендикулярных плоскости симметрии, и такая плоскость поэтому тоже отображается на себя.

17. Пусть в плоскости α проведены лучи OA и OA'. Проведем биссектрису ON угла AOA' и через точку O проведем перпендикуляр OP к плоскости α. Плоскость σ, проходящая через (OP) и $[ON)$, есть плоскость симметрии лучей OA и OA'. Это следует из того, что симметрия относительно σ отображает плоскость α на самое себя, а лучи OA и OA' отображаются друг на друга, будучи симметричными относительно биссектрисы $[ON)$. Поэтому каждая точка X луча OA отображается на симметричную ей точку X' луча OA'. Если луч $OM\subset\sigma$, то угол AOM отображается на симметричный с ним угол $A'OM$. Поэтому по свойству симметрии $\widehat{AOM}=\widehat{A'OM}$.

Обратно, из последнего равенства нетрудно вывести, что $[OM)\subset\sigma$.

18. Пусть точка B' симметрична точке B относительно плоскости α и $(AB')\cap\alpha=M$. Мы имеем: $|AM|+|MB|=|AB'|$, и, значит, длина пути AMB равна длине $|AB'|$. Для любой другой точки N в плоскости α $|AN|+|NB|=|AN|+|NB'|$; но это — длина ломаной ANB', которая больше $|AB'|$. Итак, ломаная AMB, построенная выше, и будет кратчайшей.

19. Найдем точку B', симметричную точке B относительно α, $(AB')\cap\alpha=M$. Имеем: $||AM|-|BM||=||AM|-|B'M||=|AB'|$. Для любой другой точки N в плоскости α будем иметь: $||AN|-|BN||=||AN|-|B'N||<|AB'|$, так как разность длин двух сторон треугольника всегда меньше третьей стороны (поясните). Итак, для построенной точки M разность $||AM| - |BM||$ — наибольшая из всех возможных. Задача не имеет решений, если $(AB') \parallel \alpha$.

20. Через точку P и прямые a и b проходят две плоскости — α и β. В первой из них через точку P проведем прямую $a' \parallel a$, во второй — $b' \parallel b$. Через прямые a' и b', пересекающиеся в точке P, проведем плоскость γ и через точку P построением, данным в задаче 14, проведем перпендикуляр p к плоскости γ. Итак, мы получили:

$$(p \perp a', \ a' \parallel a) \Rightarrow (p \perp a); \ (p \perp b', \ b' \parallel b) \Rightarrow (p \perp b).$$

21. Проведем через две скрещивающиеся прямые a и b две параллельные плоскости α и β. Плоскость γ, параллельная α и β и проходящая между α и β на одинаковых расстояниях от них, делит пополам всякий отрезок, проходящий между ними (см. задачу 12, § 4). Пусть A и B — концы данного отрезка, причем $A \in a$, $B \in b$. Проекции a' и b' прямых a и b на плоскость γ взаимно перпендикулярны, так как $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$. Если A' и B' — проекции A и B на γ, то середина M отрезка AB есть и середина отрезка $A'B'$. Величина $|A'B'|$ постоянна, так как $|A'B'|^2 = |AB|^2 - p^2$, где p — расстояние между плоскостями α и β. Итак, мы пришли к планиметрической задаче: отрезок $A'B'$ постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Какую линию описывает середина отрезка? Пусть $O = a' \cap b'$. Длина $|OM|$ постоянна, так как $[OM]$ — медиана прямоугольного треугольника $A'B'O$, длина которой равна половине длины гипотенузы $[A'B']$. Итак, точка M описывает окружность с центром O и радиусом $|OM| = \frac{1}{2}|A'B'|$.

22. Пусть $[PA] = [PB]$ — две наклонные, $[P'A]$ и $[P'B]$ — их проекции на плоскость. Треугольники ABP и ABP' — равнобедренные с общим основанием $[AB]$. В треугольнике ABP' проведем высоту $[P'M]$ и на луче $[MP')$ отложим отрезок MP_1, конгруэнтный высоте $[MP]$ треугольника ABP. Так как $|MP_1| > |MP'|$, то точка P' окажется внутри треугольника ABP_1; по свойству внешних углов в треугольнике имеем: $\widehat{AP'M} > \widehat{AP_1M}$, $\widehat{BP'M} > \widehat{BP_1M}$; почленно складывая эти неравенства, получим: $\widehat{AP'B} > \widehat{AP_1B}$; следовательно, $\widehat{AP'B} > \widehat{APB}$.

23. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 80) и проведем в нем диагонали $[AD']$ и $[DC']$. Чтобы найти расстояние между пря-

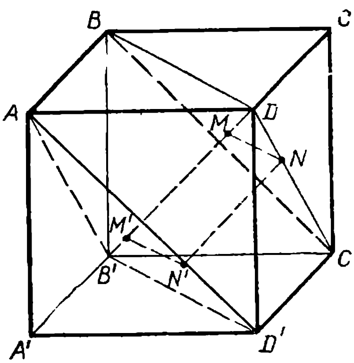


Рис. 80

мыми (AD') и (DC'), проведем через эти прямые две параллельные друг другу плоскости. Такими плоскостями являются $(AB'D')$ и (BDC'), так как $(AB') \parallel (DC')$ и $(BC') \parallel (AD')$. Эти плоскости пересекают перпендикулярную к ним диагональ куба $A'C$ в точках M и M' — центроидах треугольников $BC'D$ и $AB'D'$. Каждая из плоскостей отсекает $\frac{1}{3}$ диагонали (см. задачу 5), поэтому имеем:

$$|MM'| = \frac{1}{3}|A'C| = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.$$

Параллельным переносом отобразим $[MM']$ на отрезок $[NN']$, где $N \in [C'D]$, $N' \in [AD']$. Соответствующий вектор есть $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B'D'}$, так как центроид отстоит от основания треугольника на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ длины медианы. Таким образом, искомое расстояние равно $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

24. Пусть $\alpha \parallel \beta$ и точка A отображается при симметрии относительно плоскости α на точку A_1, а точка A_1 при симметрии относительно β отображается на точку A'. Так как $(AA_1) \perp \alpha$, $(A_1A') \perp \beta$, $\alpha \parallel \beta$, то точки A, A_1, A' принадлежат одной прямой. Положим, $(AA_1) \cap \alpha = S$, $(A_1A') \cap \beta = S'$. Тогда получим:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SA_1},\ \overrightarrow{A_1S'} = \overrightarrow{S'A'}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{A_1S'} + \overrightarrow{S'A'} = \overrightarrow{AA'}.$$

Если из этой суммы взять только два средних слагаемых, то согласно (1) получим:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = |\overrightarrow{SA_1}| + |\overrightarrow{A_1S'}| = \overrightarrow{SS'}.$$

Итак, рассматриваемая композиция симметрий есть параллельный перенос, т. е. вектор, направленный перпендикулярно плоскостям симметрий от первой плоскости ко второй и по длине вдвое больший расстояния между плоскостями.

Обратно, если дан параллельный перенос — вектор $\vec{m}$, то его можно заменить композицией симметрий относительно двух плоскостей, перпендикулярных направлению вектора и отстоящих друг от друга на расстоянии, равном $\frac{1}{2}|m|$.

25. Три взаимно перпендикулярные плоскости пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым, имеющим общую точку O. Направим по этим прямым три единичных вектора: $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Любой точке M соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$, который можно разложить по этим трем векторам, т. е. записать: $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} +$

$+b\vec{j}+c\vec{k}$. Очевидно, после отражения от плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{i}$, точка M перейдет в точку M_1, такую, что $\overrightarrow{OM_1}=-a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. После отражения от плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{j}$, получим радиус-вектор $\overrightarrow{OM_2}=-a\vec{i}-b\vec{j}+$ $+c\vec{k}$.

Наконец, после отражения от плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$, получим радиус-вектор $\overrightarrow{OM'}=-a\vec{i}-b\vec{j}-c\vec{k}=-\overrightarrow{OM}$.

Итак, при рассматриваемой композиции симметрий точка M отображается на точку M', такую, что $\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OM}$, а это означает, что M' получается из M центральной симметрией с центром в точке O.

Обратно, если дана центральная симметрия с центром O, то через эту точку O можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, последовательное отражение от которых, как доказано выше, приводит к центральной симметрии.

26. Гомотетия вполне определяется заданием двух параллельных отрезков $[AB]$ и $[A'B']$, если указано, что при гомотетии A отображается на A', B — на B'. Центр S гомотетии является пересечением $S=(AA')\cap(BB')$, коэффициент k преобразования есть отношение $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}=k$.

Когда точки A, B, A', B' принадлежат одной прямой, то, зная коэффициент k, мы можем из точек A и A' провести два параллельных луча, сонаправленных или противонаправленных в зависимости от знака коэффициента k, и на этих лучах отложить точки C и C', удовлетворяющие условию:

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{AC}}=k.$$

Положение центра в этом случае определяется пересечением $S=(AA')\cap(CC')$.

Рассмотрим теперь композицию двух гомотетий.

Положим, что первая гомотетия отображает $[A_1B_1]$ на $[A_2B_2]$, а вторая — $[A_2B_2]$ на $[A_3B_3]$. Ввиду того что $(A_1B_1)\parallel(A_2B_2)$ и $(A_2B_2)\parallel(A_3B_3)$, мы получим, что $(A_1B_1)\parallel(A_3B_3)$ и значит, существует гомотетия, преобразующая первый отрезок в третий. Можно показать, что эта гомотетия и будет композицией двух первых. Исключением является случай, когда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_3B_3}$. В этом случае композицией гомотетий будет параллельный перенос

$$\vec{m}=\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{B_1B_3}.$$

(Поэтому иногда рассматривают перенос как частный случай гомотетии — «нецентральной».) Центры данных гомотетий определяются как пересечения $S_1 = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$ и $S_2 = (A_2A_3) \cap (B_2B_3)$. Если их композиция будет гомотетией, то ее центр есть $S_3 = (A_1A_3) \cap (B_1B_3)$. Если $|A_2B_2| = k_1|A_1B_1|$ и $|A_3B_3| = k_2|A_2B_2|$, то $|A_3B_3| = k_2k_1|A_1B_1|$, т. е. коэффициент композиции равен $k_3 = k_2 \cdot k_1$. Центры S_1, S_2, S_3 принадлежат одной прямой, так как треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ удовлетворяют условиям пространственной или плоской теоремы Дезарга (см. задачи 4 и 5 из § 4).

27. Диагональное сечение каждого куба есть прямоугольник, в котором бóльшая сторона относится к меньшей как диагональ квадрата к его стороне. Построим такой прямоугольник и примем одну из его вершин за центр гомотетии. В качестве коэффициента гомотетии возьмем отношение длин диагоналей построенного прямоугольника к данной длине диагонали куба. Образ прямоугольника при этой гомотетии и есть диагональное сечение искомого куба. По известной длине ребра построить этот куб уже нетрудно.

28. Как и в предыдущей задаче, строим диагональное сечение произвольного куба, а потом осуществляем такую же гомотетию, только в качестве коэффициента гомотетии возьмем отношение разности между длинами его диагонали и стороны к заданной длине.

29. На основание пирамиды поставим произвольный куб так, чтобы диагонали его основания содержались в диагоналях основания пирамиды. В таком случае плоскости диагональных сечений куба и пирамиды совпадут. Если провести луч из центра основания точк и S через вершину куба A, то этот луч пересечет боковое ребро пирамиды в точке A'. Гомотетия с центром S, отображающая A в A', преобразует данный куб в искомый.

30. Доказательства свойств проекций вектора проводятся так же, как и в случае плоскости: используется свойство однозначности разложения вектора по трем неколлинеарным векторам и свойства гомотетии (см. задачу 23 из § 2.)

31. Пользуясь распределительным свойством скалярного умножения векторов, а также тем, что $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 0$, получаем: $\vec{r}_1\vec{r}_2 = r_1r_2\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Из этого равенства следует: $\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}$, где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Если векторы перпендикулярны, то $\varphi = 90°$ и $\cos\varphi = 0$, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Если векторы коллинеарны, то $\vec{r}_2 = \lambda\vec{r}_1$, $x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}$; $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda$.

Возводим скалярно в квадрат вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, получим квадрат расстояния между точками с соответствующими координатами: $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

32. Очевидно, мы имеем: $\frac{x_1}{r_1} = \cos\alpha$, $\frac{y_1}{r_1} = \cos\beta$, $\frac{z_1}{r_1} = \cos\gamma$. Взяв $|\vec{r_1}| = 1$, получим: $\vec{r_1} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$. Возводя скалярно в квадрат обе части равенства, найдем: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

33. Согласно формуле, полученной в предыдущей задаче, мы имеем:

$$\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1,$$

или

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1,\ \cos^2\gamma = \frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \gamma = 45° \text{ или } \gamma = 135°.$$

34. По условию задачи для искомой точки $M(x;\ y;\ z)$ имеем:

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM};$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4},$$

откуда:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},\quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

(Заметим, что точка M есть центр равных масс, помещенных в точках A, B, C, D.)

35. Мы уже знаем, что радиус-вектор $\vec{r_0}$ центра масс n точек A_1, A_2, ..., A_n с массами m_1, m_2, ..., m_n, определяемых радиус-векторами $\vec{r_1} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OA_2}$, ..., $\vec{r_n} = \overrightarrow{OA_n}$, выражается формулой: $\vec{r_0} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \ldots + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$ (см. задачу 6 § 5). Если выразить все радиус-векторы в координатах, то получим:

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k};\quad y_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k};\quad z_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

36. Будем считать, что масса ребра тетраэдра пропорциональна длине этого ребра и сосредоточена в его середине.

Длина ребра AB по формуле расстояния равна $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = r_{12}$. Аналогичные формулы получим для остальных ребер. Пронумеруем вершины A, B, C, D

тетраэдра цифрами 1, 2, 3, 4 и обозначим массу ребра $[1, 2]=[AB]$ символом $m_{12}=\rho r_{12}$. Аналогичным образом обозначим массы остальных ребер. Координаты середины ребра $[AB]$ определяются формулами:

$$x'_{12}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y'_{12}=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z'_{12}=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Аналогичные формулы мы имеем и для середин других ребер. Окончательно найдем:

$$x_0=\frac{m_{12}x'_{12}+m_{13}x'_{13}+m_{14}x'_{14}+m_{23}x'_{23}+m_{24}x'_{24}+m_{34}x'_{34}}{m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{23}+m_{24}+m_{34}}.$$

Подобные же формулы получим для y_0 и z_0. Подставив в эти формулы координаты точек A, B, C, D и пользуясь выше выведенными формулами для m_{pq} и x'_{pq}, вычислим координаты центра тяжести.

37. Координаты искомой точки имеют вид $(x, 0, 0)$. Пользуясь формулой для расстояния между точками, получим равенство:

$$(x_1-x)^2+y_1^2+z_1^2=(x_2-x)^2+y_2^2+z_2^2.$$

После раскрытия скобок и преобразований получим:

$$x=\frac{x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+z_2^2-z_1^2}{2(x_2-x_1)}.$$

38. Биссектриса угла xOy определяется вектором $\vec{r}_1=\vec{i}+\vec{j}$; биссектриса угла yOz определяется вектором $\vec{r}_2=\vec{j}+\vec{k}$. Рассмотрим скалярное произведение: $\vec{r}_1\vec{r}_2=(\vec{i}+\vec{j})(\vec{j}+\vec{k})=1=$ $=r_1r_2\cos\varphi$. Но $|r_1|=|r_2|=\sqrt{2}$.

Откуда $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$; $\varphi=60°$.

39. Поместим начало координат в центре основания куба, оси Ox и Oy направим по диагоналям основания, а длину половины диагонали основания примем за единицу. Тогда координаты четырех вершин будут такими: $(1, 0, \sqrt{2})$, $(0, 1, \sqrt{2})$, $(-1, 0, \sqrt{2})$, $(0, -1, \sqrt{2})$. По общей формуле для косинуса угла между векторами получим для векторов, идущих к соседним вершинам:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\varphi\approx 48°11'23''$.

Для векторов, направленных к противоположным вершинам,

$$\cos\varphi'=\frac{1\cdot(-1)+0\cdot 0+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ \text{ и }\ \varphi'\approx 70°31'44''.$$

40. Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы орта $\vec{e}$. Ввиду того что векторы $\vec{r}$ и $\vec{e}$ коллинеарны, из равенства $x\vec{i}+$

$+y\vec{j}+z\vec{k}=t\vec{i}\cos\alpha+t\vec{j}\cos\beta+t\vec{k}\cos\gamma$ получим: $x=t\cos\alpha$, $y=t\cos\beta$, $z=t\cos\gamma$; $\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$.

41. Систему уравнений $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ можно понимать как условие коллинеарности векторов $\vec{r}=(x, y, z)$ и $\vec{a}=(m, n, p)$, поэтому такая система задает прямую. Рассматривая орт $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{a}$, где $a=|\vec{a}|=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$, эту систему можно привести к требуемому виду $\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\beta}$, где

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\vec{e}=\frac{\vec{a}}{a}=\left(\frac{m}{a}, \frac{n}{a}, \frac{p}{a}\right).$$

Если какой-нибудь из коэффициентов m, n, p равен нулю, то это значит, что направляющий вектор $\vec{e}$ перпендикулярен соответствующей оси координат, а прямая лежит в одной из координатных плоскостей. Если два коэффициента равны 0, то прямая совпадает с одной из осей координат.

42. Вектор $\vec{r}-\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{e}$, следовательно: $(\vec{r}-\vec{a})=t\vec{e}$, где $t\in\boldsymbol{R}$. Переходя к координатам, найдем:

$$(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}=t\vec{i}\cos\alpha+t\vec{j}\cos\beta+t\vec{k}\cos\gamma,$$

или

$$x-x_1=t\cos\alpha,\ y-y_1=t\cos\beta,\ z-z_1=t\cos\gamma;$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}.$$

Таковы канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

43. Точно так же, как в задаче 41, по коэффициентам m, n, p вычислим направляющие косинусы и приведем уравнения к каноническому виду, полученному в предыдущей задаче. Итак, уравнения

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \quad (1)$$

задают прямую, проходящую через точку с координатами (x_1, y_1, z_1). Если прямая проходит через точку с координатами (x_2, y_2, z_2), то верны равенства:

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

44. Если прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны, направляющие косинусы — одни и те же, а коэффициенты, определяющие эти косинусы, должны быть пропорциональны. Отсюда условие параллельности:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

При перпендикулярности прямых скалярное произведение их направляющих векторов должно быть равно 0, поэтому получим:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Таково условие перпендикулярности.

45. По условию задачи $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ и уравнения принимают вид: $x = y = z$. Далее имеем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha \approx 54°44'8'' \text{ или } \alpha \approx 125°15'52''.$$

Координатные плоскости делят пространство на 8 октантов. Каждая из искомых прямых проходит через два октанта, и потому таких прямых 4.

46. Пусть m, n, p — коэффициенты искомой прямой. Условие перпендикулярности дает два уравнения:

$$2m + 3n - p = 0,$$
$$4m - n + 3p = 0.$$

Решая их, получим: $m : n : p = 4 : (-5) : (-7)$. Отсюда получаем уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-7}.$$

47. В данном случае угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равен 0 и $\cos\varphi = 1$. Скалярное произведение векторов поэтому равно $r_1r_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

48. Пусть $\vec{r}$ — переменный радиус-вектор. Так как вектор $(\vec{r} - \vec{p})$ перпендикулярен вектору $\vec{p}$, мы получаем уравнение: $(\vec{r} - \vec{p})\vec{p} = 0$; $\vec{r}\vec{e} = p$. Здесь $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{p} = p\vec{e}$, $\vec{e} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$. Записывая соотношение $\vec{r}\vec{e} = p$ в координатах, получим: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ — нормальное уравнение плоскости.

49. Уравнение $\vec{r}\vec{a} = m$ можно привести к виду $\vec{r}\vec{e} = p$, где $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$, $p = \frac{m}{a}$. Далее, заменив p на $p\vec{e}\cdot\vec{e}$, будем иметь:

$\vec{r}\vec{e} = \vec{pe} \cdot \vec{e}$; $(\vec{r} - \vec{pe})\vec{e} = 0$. Если $\vec{pe} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, то, ясно, последнее уравнение задает плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярную вектору $\vec{e}$.

Любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ можно записать в виде $\vec{r}\vec{a} = m$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (A, B, C)$, $m = -D$, и если $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, то это уравнение задает плоскость. Чтобы привести его к нормальному виду, достаточно разделить обе части на $a = |\vec{a}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

50. Коэффициенты при переменных в уравнениях плоскостей суть координаты векторов, перпендикулярных этим плоскостям, – нормальных векторов. Поэтому для параллельности плоскостей необходимым и достаточным условием является пропорциональность друг другу этих коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Для перпендикулярности плоскостей таким же условием является обращение в нуль скалярного произведения нормальных векторов:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

51. Для параллельности прямой и плоскости необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор прямой был перпендикулярен нормальному вектору плоскости: прямая, перпендикулярная перпендикуляру к плоскости, будет этой плоскости параллельна. Поэтому условие параллельности можно записать так:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

В случае перпендикулярности прямой и плоскости те же векторы должны быть коллинеарными, т. е. их координаты пропорциональны друг другу:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

52. Пользуясь выводами предыдущей задачи, заключаем, что коэффициенты m, n, p пропорциональны числам: 5, —3, 3. Отсюда получим уравнение:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{3}.$$

53. Равенство $x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p = p_1$ можно записать так:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = p + p_1.$$

При переменных x_1, y_1, z_1 — это уравнение плоскости, отстоящей от начала координат на расстояние $p + p_1$; следовательно, число $|p_1|$ есть расстояние между этой плоскостью и данной плоскостью, и поэтому $|p_1|$ есть расстояние от точки $M(x_1, y_1, z_1)$

до данной плоскости. Если $p_1 > 0$, то новая плоскость дальше от начала, чем прежняя, а данная точка и начало координат находятся по разные стороны от плоскости. При $p_1 < 0$ данная точка ближе к началу, чем плоскость, — они находятся по одну сторону от данной плоскости.

54. Обозначим символически левую часть нормального уравнения плоскости буквой P и само уравнение напишем в виде $P = 0$. Если P_1 и P_2 левые части двух нормальных уравнений плоскостей, то уравнение $P_1 = P_2$ или $P_1 - P_2 = 0$ есть уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных плоскостей. Это их биссекторная плоскость. Другую биссекторную плоскость дает уравнение: $P_1 + P_2 = 0$ (поясните!).

55. Все точки с координатами (x, y, z), равноудаленные от двух данных точек, удовлетворяют условиям:

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$14x - 49 + 2y - 1 + 8z - 16 = 6x - 9 + 10y - 25 + 4z - 4;$$
$$8x - 8y + 4z - 28 = 0;\ 2x - 2y + z - 7 = 0.$$

Приведем уравнение плоскости к нормальному виду. Так как $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$, нормальное уравнение примет вид: $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{z}{3} - \frac{7}{3} = 0$.

56. Подставив в данное уравнение $y = 0$ и $z = 0$, получим: $\frac{x}{a} = 1$; $x = a$, значит, плоскость пересекает ось Ox в точке $x = a$. Точки пересечения с осями Oy и Oz находятся точно так же. Если все коэффициенты A, B, C, D в уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ отличны от нуля, то, поделив обе части уравнения на D и полагая $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение в отрезках. (При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат; при $A = 0$ и $D \neq 0$ плоскость параллельна оси Ox и отсекает на осях Oy и Oz отрезки b и c. Если $A = B = 0$, то плоскость параллельна плоскости Oxy и отсекает на Oz отрезок c. Случаи равенства нулю коэффициентов A, B, C при $D \neq 0$ в других комбинациях разберите самостоятельно.)

57. Для того чтобы уравнение в отрезках привести к нормальному виду, разделим его на $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ (или, что все равно, умножим на нормирующий множитель: $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$).

Тогда расстояние p от начала координат до плоскости будет равно $p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$, откуда получим: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.

58. Искомая прямая одновременно параллельна обеим плоскостям. На основании выводов задачи 51 коэффициенты ее канонического уравнения должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} 3m + 4n - 2p = 0, \\ 2m + 3n - p = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$m : n : p = 2 : (-1) : 1.$$

Вместе с тем эта же прямая должна проходить через какую-нибудь общую точку обеих плоскостей. Чтобы найти такую точку, например, положим в уравнениях плоскостей $z = 0$ и получим систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решая ее, найдем: $x = 3$, $y = -1$. Отсюда находим искомые уравнения прямой: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

59. Координаты точки пересечения получим, решая совместно уравнения трех плоскостей: $x = -55$, $y = -11$, $z = 39$.

60. Из условия задачи получаем: $(\vec{r} - \vec{q})^2 = R^2$, следовательно, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

61. При $a = b = c = 0$ получим: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Если центр сферы, проходящей через начало координат, лежит на Ox, то координаты (a, b, c) центра суть $a = R$, $b = 0$, $c = 0$ и уравнение сферы принимает вид:

$$x^2 - 2Rx + y^2 + z^2 = 0.$$

62. По условию задачи имеем: $\vec{q}_1 = \vec{a}_1 - \vec{r}$, $\vec{q}_2 = \vec{a}_2 - \vec{r}$. Здесь $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$.

$$\vec{q}_1\vec{q}_2 = (\vec{a}_1 - \vec{r})(\vec{a}_2 - \vec{r}) = \vec{a}_1\vec{a}_2 - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{r} + \vec{r}^2 = 0.$$

Переходя к координатам, получим:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{r} = (x_1 + x_2)x + (y_1 + y_2)y + (z_1 + z_2)z,$$

$$\vec{a}_1\vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Положим для краткости: $x_1 + x_2 = 2x_0$, $y_1 + y_2 = 2y_0$, $z_1 + z_2 = 2z_0$. Тогда наше уравнение примет такой вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Чтобы получить отсюда каноническое уравнение сферы, прибавим и вычтем сумму $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2 = 0.$$

Последние члены уравнения преобразуем так:

$$\frac{4x_1x_2+4y_1y_2+4z_1z_2-x_1^2-x_2^2-2x_1x_2-y_1^2-y_2^2-2y_1y_2-z_1^2-z_2^2-2z_1z_2}{4}=$$

$$=-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)^2=-R^2.$$

Здесь R обозначает половину расстояния $|A_1A_2|$. Окончательно получим уравнение сферы: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$. Эта сфера имеет отрезок A_1A_2 своим диаметром.

63. Докажем обратное утверждение. Если плоскость имеет со сферой единственную общую точку M, то остальные точки плоскости лежат вне сферы (почему?). Следовательно, расстояние от остальных точек плоскости до центра сферы O больше радиуса $|OM|$, т. е. расстояние от центра сферы до рассматриваемой плоскости равно радиусу.

64. Вектор $(\vec{r}-\vec{r}_1)$ перпендикулярен вектору $(\vec{r}_1-\vec{q})$, и поэтому их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_1-\vec{q})=0$. Сложив это равенство по частям с равенством $(\vec{r}_1-\vec{q})^2=R^2$, получим:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_1-\vec{q})+(\vec{r}_1-\vec{q})^2=R^2,$$

$$(\vec{r}_1-\vec{q})(\vec{r}-\vec{r}_1+\vec{r}_1-\vec{q})=R^2,\quad (\vec{r}_1-\vec{q})(\vec{r}-\vec{q})=R^2.$$

Переходя от векторов к координатам, получим уравнение касательной плоскости к сфере в данной точке в координатах:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)(z-c)=R^2.$$

65. Поскольку $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}=\overrightarrow{MQ}$, то длина этого вектора равна m.

Вектор $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$ по длине равен половине длины диаметра, т. е. радиусу сферы. Поэтому $\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2=R^2$; следовательно, $\vec{a}\vec{b}=m^2-R^2$ (не зависит от выбора диаметра $[AB]$).

66. Если M — внешняя точка относительно сферы, то $m>R$ и степень положительна, если M — точка сферы, то $m=R$ и степень равна нулю, если M — внутренняя точка, то $m<R$ и степень отрицательна. Пусть $[AB]$ — диаметр сферы, (MB) пересекает сферу в точке P; тогда $(AP)\perp(MB)$ и $|MP|=a\cos\varphi$, где $a=|\vec{a}|$, $\varphi=\widehat{AMB}$. Поэтому, используя обозначения предыдущей задачи, получим:

$$\vec{a}\vec{b}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MP}.$$

Вектор $(\vec{r}_1 - \vec{q})$ по длине равен расстоянию от точки M до центра сферы, поэтому $(\vec{r}_1 - \vec{q})^2 - R^2 = m^2 - R^2$, т. е. действительно получается степень точки M относительно сферы.

67. Пусть мы имеем две сферы, определяемые уравнениями:

$$(\vec{r} - \vec{q}_1)^2 - R_1^2 = 0 \text{ и } (\vec{r} - \vec{q}_2)^2 - R_2^2 = 0.$$

Приравняв друг другу левые части этих уравнений, мы получим условие, которому должны удовлетворять точки, имеющие одну и ту же степень относительно обеих сфер. Преобразуя это уравнение, получим:

$$2\vec{r}(\vec{q}_2 - \vec{q}_1) = \vec{q}_2^{\,2} - \vec{q}_1^{\,2} + R_1^2 - R_2^2.$$

Это уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{q}_2 - \vec{q}_1$, параллельному линии центров сфер.

68. а) Если центры трех сфер не принадлежат одной прямой, то их радикальные плоскости не параллельны. Поэтому радикальные плоскости первой и второй сферы пересекаются с радикальной плоскостью второй и третьей сферы. Прямая их пересечения содержит все точки, имеющие одну и ту же степень относительно всех трех сфер, поэтому через ту же прямую пройдет и радикальная плоскость первой и третьей сферы. Полученная радикальная ось трех сфер перпендикулярна плоскости, проходящей через центры всех трех сфер (почему?).

б) Для четырех сфер радикальная ось первой, второй и третьей сферы в пересечении с радикальной плоскостью первой и четвертой сферы дает точку, которая имеет одну и ту же степень относительно всех четырех сфер. Это их радикальный центр. Через него проходят и радикальные плоскости и радикальные оси данных сфер.

69. Пусть σ_1 и σ_2 — неконцентрические сферы, радикальная плоскость которых — γ пересекает линию их центров l в точке O, имеющей степень λ относительно обеих сфер. Если сферы пересекаются, O — внутри сфер и $\lambda = -p^2$, если сферы касаются, O — точка касания и $\lambda = 0$, если они не имеют общих точек, O — внешняя точка и $\lambda = p^2$. Примем точку $Q \in l$ за центр сферы σ_3 с радиусом R, удовлетворяющим условию $\lambda = m^2 - R^2$, где $m = |OQ|$. Отрезок длины R нетрудно построить, пользуясь равенством $R^2 = m^2 - \lambda$, которое в зависимости от положения O принимает вид $R^2 = m^2 + p^2$, $R^2 = m^2$, $R^2 = m^2 - p^2$ (здесь должно быть $m > p$). Построив сферу σ_3 с центром Q и радиусом R, убедимся, что степень точки O относительно σ_3 такая же, как и для сфер σ_1 и σ_2. Но радикальная плоскость сфер σ_1 и σ_3 перпендикулярна l и проходит через O; значит, она совпадает с γ. Итак, существует бесконечное множество сфер, имеющих общую радикальную плоскость γ: пучок сфер. Если γ пересекает сферы ($\lambda < 0$) — пучок эллиптический, если γ касается сфер ($\lambda = 0$) —

пучок параболический, если γ не пересекает сфер ($\lambda > 0$) — пучок гиперболический.

70. Таким же способом, как и в предыдущей задаче, в плоскости центров трех сфер берем произвольный центр новой сферы и строим сферу, имеющую ту же радикальную ось, что и данные сферы. В результате получим связку сфер. В зависимости от того, пересекает ось эти сферы, касается их или не имеет с ними общих точек, связка называется эллиптической, параболической или гиперболической. Наконец, тем же построением можно найти сферу, имеющую данную степень относительно данного радикального центра. В зависимости от того, лежит ли радикальный центр внутри всех сфер, принадлежит ли им всем или лежит вне их, сферическая сеть также называется эллиптической, параболической или гиперболической.

§ 6. 1. Рассмотрим двугранный угол $\alpha l \beta$, и пусть $A \in \alpha$, A' проекция A на β, P — проекция A на l (в плоскости α). Треугольник $AA'P$ — прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Если $Q \in l$, то треугольник $AA'Q$ тоже прямоугольный с прямым углом при вершине A' и $|A'P| < |A'Q|$. Отложим на катете $[A'Q]$ отрезок $A'P'$ такой, что $|A'P'| = |A'P|$; получим: $\triangle AA'P' \cong \triangle AA'P$. По свойству внешнего угла треугольника имеем: $\widehat{AP'A'} > \widehat{AQA'}$, а потому $\widehat{APA'} > \widehat{AQA'}$, что и требовалось.

2. Так как луч света падает перпендикулярно ребру двугранного угла, то все отражения происходят в одной плоскости, перпендикулярной ребру (рис. 81). Так как после третьего отражения луч возвращается по прежнему пути, то при этом отражении он должен быть направлен перпендикулярно плоскости зеркала. Внешний угол равнобедренного треугольника A_1A_2O равен 2α (α — величина данного угла). Поэтому в прямоугольном треугольнике A_2A_3O один угол равен α, другой — 2α. Итак, $3\alpha = 90°$; $\alpha = 30°$.

3. Рассматриваемое множество точек содержится в каждой из двух плоскостей α и β, являющихся объединением проектирующих прямых. Если $\alpha \neq \beta$, то это множество, легко видеть, есть прямая $l = \alpha \cap \beta$. Случай $\alpha = \beta$ разберите самостоятельно.

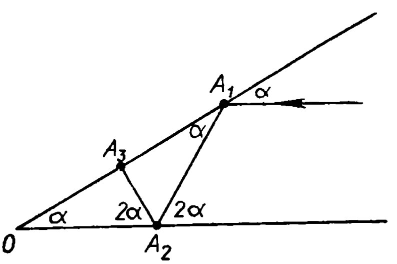


Рис. 81

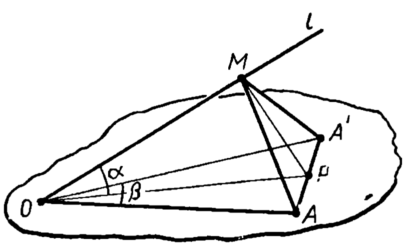


Рис. 82

4. На рисунке 82 имеем: l — ребро двугранного угла, $[OA)$ и $[OA')$ — пересечения его граней с данной плоскостью, $[OP)$ — биссектриса угла AOA'. Из точки P, принадлежащей биссектрисе $[OP)$, проведем перпендикуляр $[PM]$ к ребру l. Плоскость OPM является плоскостью симметрии прямых OA и OA', а $(AA') \perp (OP)$. Обозначим $|OP| = p$; тогда получим: $|PM| = p\sin\alpha$, $|AP| = p \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Обозначим через γ искомую величину линейного угла AMA', получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{|AP|}{|PM|} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

5. Проведем через точку P прямые AA', BB' и CC', соответственно параллельные данным прямым a, b и c. Точка P разделяет каждую из прямых AA', BB', CC' на два противоположных луча PA и PA', PB и PB', PC и PC'. Соответственно плоскости симметрии лучей PA и PB, PB и PC пересекаются по прямой l, через которую проходит и плоскость симметрии лучей PC и PA (почему?). Прямая l образует конгруэнтные углы с лучами PA, PB и PC. Эта же прямая l образует конгруэнтные углы и с противоположными лучами PA', PB' и PC'. Плоскость, проходящая через P перпендикулярно l, образует конгруэнтные углы с прямыми AA', BB', CC', а значит, и с прямыми a, b и c.

Еще одно решение получим, рассматривая лучи PA, PB и PC' и противоположные им лучи PA', PB' и PC. Еще два решения соответствуют тройкам лучей PB, PC и PA' (с противоположными PB', PC', PA) и PA, PC, PB' (с противоположными PA', PC', PB). Итак, существуют 4 плоскости, удовлетворяющие условию задачи.

6. Проводим через точку O плоскость, перпендикулярную данному лучу; в пересечении этой плоскости с другой гранью получим луч, перпендикулярный данному.

7. Через середину O отрезка AB и ребро l данного угла проведем плоскость и в этой плоскости строим отрезок OM длины $|OM| = \frac{1}{2}|AB|$, где $M \in l$. Таких точек M может быть две, одна или ни одной. Соединив точку M с A и B, получим треугольник, медиана которого равна половине стороны, к которой она проведена. Такой треугольник — прямоугольный; следовательно, угол AMB — прямой.

8. Рассмотрим один из двугранных углов, образуемых данными плоскостями α и β. Построим плоскость $\alpha' \parallel \alpha$ и находящуюся от α на данном расстоянии p. Пусть $\alpha' \cap \beta = b$; тогда $b \parallel l$, где $l = \alpha \cap \beta$. Построим также плоскость $\beta' \parallel \beta$ и находящуюся от β тоже на расстоянии p. Пусть $\beta' \cap \alpha = a$; опять-таки $a \parallel l$, поэтому $a \parallel b$. Прямые a и b — границы полосы, все точки которой удовлетворяют условию задачи. Действительно, возьмем произ-

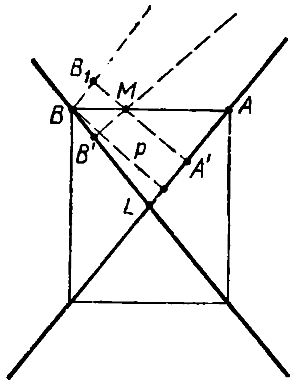


Рис. 83

вольную точку M, принадлежащую полосе, и проведем через нее плоскость γ, перпендикулярную прямой l. Тогда в сечении получится фигура, изображенная на рисунке 83. Здесь точка L — пересечение ребра l с плоскостью γ, прямые LA и LB — пересечение плоскостей α и β с плоскостью γ, отрезок AB — пересечение полосы с той же плоскостью. Перпендикуляры (MA') и (MB') к плоскостям α и β, проведенные из точки M, лежат в плоскости γ, т. е. в плоскости чертежа. Отложив на продолжении отрезка $A'M$ за точку M отрезок MB_1 длины $|MB_1| = |MB'|$, убедимся, что точка B_1 принадлежит прямой, проходящей через B параллельно (LA). Итак, $|MA'| + |MB'| = p$. Нетрудно доказать, что никакая точка внутри угла ALB, не принадлежащая отрезку AB, указанным в условии задачи свойством не обладает. Следовательно, если рассматривать только точки, принадлежащие рассматриваемому двугранному углу, то искомое множество есть полученная нами полоса. Требуемым свойством обладают точки еще трех полос, построенных аналогичным способом (на рис. 83 показаны их пересечения с плоскостью γ).

9. Пересекая всю фигуру плоскостью, перпендикулярной общему ребру l, получим в сечении линейные углы этих двугранных углов. Эти плоские углы имеют общую вершину и заполняют всю плоскость, поэтому сумма их величин равна 2π (или 360°).

10. Возьмем точку O на ребре двугранного угла и проведем через нее плоскость, перпендикулярную ребру. В пересечении граней с этой плоскостью получатся две стороны линейного угла данного двугранного угла. В той же плоскости будут находиться и внешние нормали угла, проведенные из точки O. В секущей плоскости получится фигура, изображенная на рисунке 84. На ней a и b — стороны линейного угла, a' и b' — соответствующие нормали. Так как $a' \perp a$ и $b' \perp b$, то $\widehat{a'Ob'} = \pi - \widehat{aOb}$ или $\widehat{a'Ob'} + \widehat{aOb} = \pi$, что и требовалось доказать.

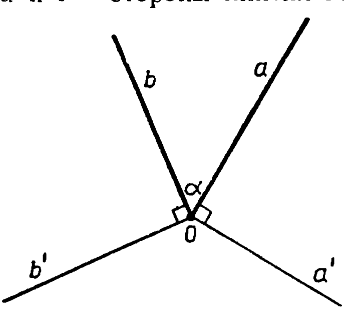


Рис. 84

11. Возьмем на данном луче произвольную точку A; пусть A' есть проекция этой точки на другую грань. Допустим, что искомый луч проведен, и построим на нем отрезок MB такой, что $|MB| = |MA|$. Тогда в равнобедренном треугольнике AMB известны две стороны и угол между ними, и его можно построить на отдельном чертеже. Нам будет тогда известна длина наклонной $|AB|$, а следовательно, и длина ее проекции $|A'B|$ на вторую грань. Искомая точка B должна лежать на окружности, с центром в точке A' и радиусом $|A'B|$, и в то же время на окружности с центром в точке M и радиусом $|MA|$. Построив точку B, мы определим искомый луч. Выясните, сколько решений может иметь задача.

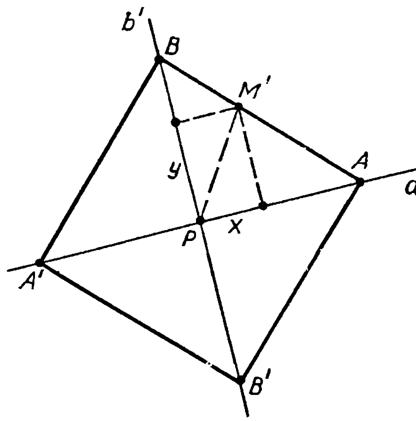


Рис. 85

12. Проведем через P прямые $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$. Эти прямые содержатся в плоскости α, параллельной обеим прямым. Пусть проекцией отрезка PM на плоскость α является отрезок PM' (рис. 85). Так как проекции отрезка PM на прямые a и b параллельны плоскости α, то они конгруэнтны своим проекциям на эту плоскость, а также конгруэнтны проекциям отрезка PM' на прямые a' и b'. Наша задача привелась к планиметрической: что из себя представляет множество точек M' в плоскости α, сумма расстояний от которых до двух взаимно перпендикулярных прямых a' и b' равна данному отрезку m?

Для решения этой задачи примем a' и b' за оси координат с началом в точке P. Тогда положение точки M' определится уравнением: $|x| + |y| = m$.

Это уравнение задает объединение четырех отрезков в четырех координатных четвертях, образующих квадрат (см. рис. 85). Следовательно, точка M находится на перпендикуляре к плоскости α, проведенном через одну из точек этих отрезков, и искомое множество точек представляет собой объединение 4 полос, плоскости которых перпендикулярны α.

13. Пусть данная прямая l пересекает данную плоскость α в точке O. Возьмем на l произвольную точку P и найдем ее проекцию P' на α. Пусть данный угол $\varphi < 90°$. Если искомая плоскость β построена, причем $\angle PMP'$ — линейный угол двугранного угла между α и β величиной φ, то в прямоугольном треугольнике PMP' нам известны длина катета $[PP']$ и острый угол φ. Построим такой треугольник на вспомогательном чертеже и найдем длину $|MP'|$. Теперь построим в плоскости α окружность с центром P', радиуса $|MP'|$: прямая $x = \alpha \cap \beta$ есть касательная из точки O к этой окружности, и искомая плоскость β проводится через прямые l и x. (Сколько решений может иметь задача?)

14. На ребрах трехгранного угла $Sabc$ отложим отрезки равной длины $|SA| = |SB| = |SC|$ и через точки A, B, C проведем

плоскость. Обозначим через S' проекцию точки S на эту плоскость.

а) Используя задачу 22 из § 5 и рассматривая случаи, когда проекция S' лежит внутри треугольника ABC, на одной из его сторон, вне треугольника, докажите, что во всех случаях сумма $\widehat{BSC}+\widehat{CSA}+\widehat{ASB}$ окажется меньше 2π.

б) В трехгранном угле $SABC$ продолжим ребро $[SA)$ за вершину S лучом SA'. Согласно только что доказанному предложению для трехгранного угла $SA'BC$ имеем:

$$\widehat{A'SB}+\widehat{A'SC}+\widehat{BSC}<2\pi. \qquad (1)$$

По свойству смежных углов $\widehat{A'SB}=\pi-\widehat{ASB}$, $\widehat{A'SC}=\pi-\widehat{ASC}$. Складывая эти равенства, получим:

$$\widehat{A'SB}+\widehat{A'SC}=2\pi-\widehat{ASB}-\widehat{ASC}.$$

Подставляя эту сумму в неравенство (1), находим: $2\pi-\widehat{ASB}-$ $-\widehat{ASC}+\widehat{BSC}<2\pi$, т. е. $\widehat{BSC}<\widehat{ASB}+\widehat{ASC}$.

15. Рассмотрим треугольники ABD и CBD (рис. 86). Углы при вершинах B и D в первом треугольнике обозначим через β_1 и δ_1, а углы при тех же вершинах во втором треугольнике обозначим через β_2 и δ_2. Тогда получим: $\widehat{BAD}+\beta_1+\delta_1=\pi$; $\widehat{BCD}+\beta_2+\delta_2=\pi$. Складывая почленно, найдем:

$$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}+(\beta_1+\delta_1)+(\beta_2+\delta_2)=2\pi. \qquad (1)$$

Применяя выводы предыдущей задачи к трехгранным углам $DABC$ и $BACD$, получим: $\beta_1+\beta_2>\widehat{ABC}$, $\delta_1+\delta_2>\widehat{ADC}$. Следовательно, из равенства (1) вытекает требуемое неравенство:

$$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}+\widehat{ADC}+\widehat{ABC}<2\pi.$$

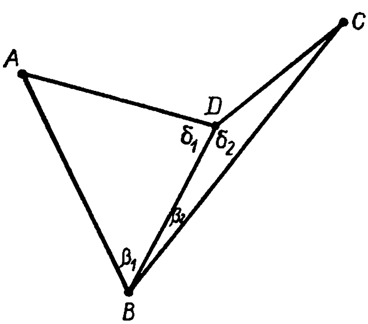


Рис. 86

16. Биссекторная полуплоскость одного из двугранных углов данного трехгранного угла есть множество точек, равноудаленных от плоскостей соответствующих граней, например, первой и второй и лежащих внутри этого двугранного угла. Биссекторная полуплоскость второй и третьей грани обладает аналогичным свойством. Имея общую точку (вершину S), эти полуплоскости пересекаются по лучу SA, являющемуся множеством точек, равноудаленных от всех трех граней (заметим, что поэтому через $[SA)$ проходит и биссекторная полуплоскость первой и третьей грани).

17. Плоскость симметрии ребер a и b пересекается с плоскостью симметрии ребер b и c по прямой S, которая и есть множество точек, равноудаленных от прямых, содержащих три ребра данного трехгранного угла. (Заметим, что через S проходит и плоскость симметрии ребер c и a.)

18. Примем вершину S трехгранного угла за центр гомотетии и будем один из треугольников сечения преобразовывать в другие треугольники, изменяя коэффициент гомотетии. При этом множества всех сходственных точек, т. е. множество центроидов, ортоцентров и т. д., будут представлять собой лучи, исходящие из точки S.

19. Эта задача — частный случай задачи 5. Приведем еще одно решение. Отложим на ребрах угла от вершины S конгруэнтные отрезки $[SA] \cong [SB] \cong [SC]$ и проведем плоскость ABC. Около треугольника ABC опишем окружность с центром O. Согласно выводу задачи 11 из § 5 прямая SO перпендикулярна к плоскости ABC. Поэтому прямоугольные треугольники SOA, SOB и SOC конгруэнтны. Отсюда следует, что $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO}$, т. е. плоскость ABC — искомая.

20. Пусть плоскость γ пересекает все грани трехгранного угла, образуя с этими гранями конгруэнтные двугранные углы. Проведем из вершины S перпендикуляры: $[SI]$ к плоскости γ и $[SM]$, $[SN]$, $[SP]$ к прямым пересечения γ с плоскостями граней. Углы SMI, SNI, SPI будут линейными углами конгруэнтных двугранных углов, поэтому прямоугольные треугольники SIM, SIN и SIP конгруэнтны. Следовательно, точка I равноудалена от плоскостей граней угла и согласно выводам задачи 15 принадлежит прямой l, являющейся пересечением биссекторных полуплоскостей двугранных углов данного трехгранного угла. Построив эту прямую, возьмем на ней произвольную точку I и проведем через нее плоскость, перпендикулярную к (IS). Это и будет искомая плоскость.

21. Пусть в угле $SABC$ плоские углы ASB и ASC конгруэнтны. Тогда ребро $[SA)$ образует конгруэнтные углы с ребрами $[SB)$ и $[SC)$ и, значит, принадлежит плоскости симметрии этих ребер. Проведем эту плоскость симметрии. Та же симметрия отображает друг на друга и двугранные углы при ребрах $[SB)$ и $[SC)$, так как при этом плоскость BSC отображается сама на себя, а плоскости ASB и ASC — друг на друга.

22. Пусть $OABC$ — ортогональный трехгранный угол. Вследствие перпендикулярности ребер все его двугранные углы являются прямыми.

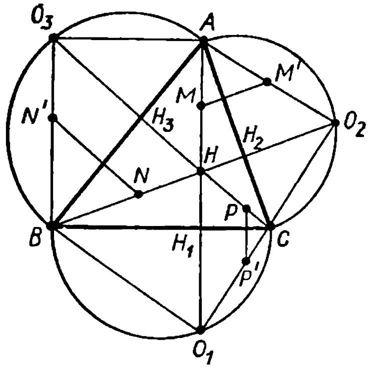


Рис. 87

а) Проекцией треугольника ABC на плоскость OBC является треугольник OBC. Высоты этих треугольников, проведенные из вершины A, имеют общее основание — точку $H_1 \in [BC]$, через которую проходит плоскость, перпендикулярная к (BC) и содержащая (AO). Так как OH_1 — высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, то точка H_1 находится между B и C. Отложим от точки H_1 на высоте $[H_1A]$ отрезок H_1O' длины $|H_1O'| = |H_1O|$. Так как $|H_1O| < |H_1A|$, то O' находится между H_1 и A. Поэтому O' находится внутри треугольника ABC, и потому $\widehat{BO'C} > \widehat{BAC}$; $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$ и, значит, угол A в треугольнике ABC — острый. Точно так же доказывается, что и другие углы в треугольнике ABC острые.

б) Мы уже видели, что плоскость AOH_1 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому перпендикуляр (OH) к (ABC) содержится в плоскости AOH_1, а точка $H \in (ABC)$ находится на высоте $[AH_1]$ треугольника ABC. То же относится и к другим высотам треугольника ABC. Таким образом, H — ортоцентр треугольника ABC.

23. Пусть ABC — треугольник, конгруэнтный данному, который должен получиться в сечении. Вычислим величины катетов прямоугольных треугольников BCO, CAO и ABO. Представим себе, что мы эти треугольники повернули около прямых BC, CA и AB и положили их на плоскость ABC, как показано на рисунке 87. На основании выводов предыдущей задачи высоты полученных прямоугольных треугольников служат продолжениями высот AH_1, BH_2 и CH_3. Вершины треугольников определим, построив на сторонах $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ как на диаметрах полуокружности. Докажем, что катеты, примыкающие к одной и той же вершине треугольника ABC, конгруэнтны. По свойству прямоугольного треугольника имеем:

$$|AO_2|^2 = |AC| \cdot |AH_2| = |AC| \cdot |AB| \cos \alpha,$$
$$|AO_3|^2 = |AB| \cdot |AH_3| = |AB| \cdot |AC| \cos \alpha, \quad (\alpha = \widehat{A}),$$

откуда

$$|AO_2| = |AO_3|.$$

Тем же способом докажем равенство длин и других катетов.

24. Пусть $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$. Докажем, что квадрат площади S треугольника ABC равен сумме квадратов площадей треугольников BCO, ABO и CAO, которые равны, соответственно $\frac{1}{4}b^2c^2$, $\frac{1}{4}a^2b^2$, $\frac{1}{4}c^2a^2$. Объем тетраэдра $OABC$ равен:

$$V = \frac{1}{6}abc. \qquad (1)$$

Но этот же объем выражается и формулой $V = \frac{1}{3}Sp$, где S — площадь треугольника ABC, p — расстояние от плоскости треугольника ABC до вершины O. Отсюда находим:

$$S = \frac{3V}{p};$$

$$S^2 = \frac{9V^2}{p^2}. \qquad (2)$$

Но согласно формуле из задачи 57 § 5

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}.$$

Подставляя в формулу (2) значение V из (1) и полученное значение $\frac{1}{p^2}$, найдем:

$$S^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2b^2c^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}{a^2b^2c^2};$$

$$S^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),$$

что и требовалось доказать.

25. а) Так как $a' \perp b$, $a' \perp c$, $b' \perp c$, $b' \perp a$, $c' \perp a$, $c' \perp b$, то, следовательно, $a \perp b'$, $a \perp c'$, $b \perp c'$, $b \perp a'$, $c \perp a'$. $c \perp b'$. Поэтому угол $Sabc$ — полярный к углу $Sa'b'c'$.

б) В задаче 10 была получена формула зависимости между величиной двугранного угла и угла между его внешними нормалями, из которой и следует, что величина двугранного угла α при ребре a и линейного угла $\widehat{b'Sc'}$ дают в сумме π.

26. Суммы величин плоских углов в трехгранном угле $Sa'b'c'$ удовлетворяют условию: $\widehat{b'Sc'} + \widehat{c'Sa'} + \widehat{a'Sb'} < 2\pi$; $\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi$. Здесь α, β, γ — величины двугранных углов в полярном с ним трехгранном угле $Sabc$. Отсюда получим: $\pi < \alpha + \beta + \gamma$.

27. а) Согласно задаче 22б ортоцентр H треугольника ABC и есть проекция точки O (см. рис. 87).

б) На том же чертеже, отложив от точек O_1, O_2, O_3 на отрезках $[O_2A]$, $[O_3B]$, $[O_1C]$ отрезки $[O_2M'] \cong [O_3N'] \cong [O_1P']$ и перенеся их на изображение ребер $[HA)$, $[HB)$, $[HC)$, как показано на рисунке 87, получим искомые точки M, N, P.

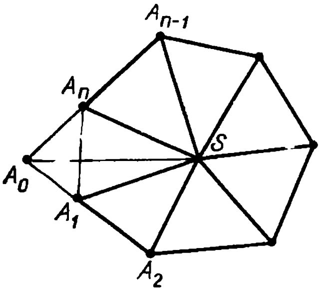


Рис. 88

28. а) В решении задачи 26 доказано, что сумма величин двугранных углов любого трехгранного угла больше π. Поэтому введенная величина всегда положительна.

б) Пусть плоскость SAM разбивает трехгранный угол $SABC$ на трехгранные углы $SAMB$ и $SAMC$. Положим, что сумма величин двугранных углов первого угла равна $\alpha' + \beta + \mu'$, а второго — $\alpha'' + \gamma + \mu''$ (где α', α'' прилегают к $[SA)$, μ', μ'' — к $[SM)$); тогда величины соответствующих трехгранных углов будут равны: $\alpha' + \beta + \mu' - \pi$ и $\alpha'' + \gamma + \mu'' - \pi$. Их сумма будет равна: $\alpha' + \alpha'' + \beta + \gamma + \mu' + \mu'' - 2\pi$. Но $\alpha' + \alpha'' = \alpha$ — двугранный угол при ребре SA, $\mu' + \mu'' = \pi$, следовательно, эта сумма равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$, т. е. величине трехгранного угла $SABC$.

29. Если через вершину S и одну из сторон многоугольника $A_1, A_2, \ldots, A_n$ провести плоскость, то в случае выпуклости многоугольника этот многоугольник, а вместе с ним и соответствующий многогранный угол окажутся в одном полупространстве относительно этой плоскости. Так как это будет иметь место для любой из сторон многоугольника, многогранный угол есть пересечение n полупространств.

30. Рассмотрим выпуклый n-гранный угол $SA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ (на рис. 88 показана его проекция на плоскость сечения). Предложение доказано для случая $n = 3$ (см. задачу 14а). Предполагая, что предложение справедливо для любого $(n-1)$-гранного угла, докажем, что оно будет справедливо и для n-гранного угла. Продолжим две грани n-гранного угла A_1SA_2 и $A_{n-1}SA_n$, они пересекутся по ребру $[SA_0)$. Для выпуклого угла такое построение всегда осуществимо. Мы получили выпуклый $(n-1)$-гранный угол с гранями A_0SA_2, A_2SA_3, $\ldots$, $A_{n-1}SA_0$. По предположению справедливо неравенство $A_0\widehat{S}A_2 + A_2\widehat{S}A_3 + \cdots + A_{n-1}\widehat{S}A_0 < 2\pi$. Поскольку $A_0\widehat{S}A_2 = A_0\widehat{S}A_1 + A_1\widehat{S}A_2$, $A_0\widehat{S}A_{n-1} = A_0\widehat{S}A_n + A_n\widehat{S}A_{n-1}$, получаем:

$$A_0\widehat{S}A_1 + A_1\widehat{S}A_2 + A_2\widehat{S}A_3 + \cdots + A_{n-1}\widehat{S}A_n + A_n\widehat{S}A_0 < 2\pi. \quad (1)$$

По свойству трехгранного угла имеем: $A_0\widehat{S}A_1 + A_0\widehat{S}A_n > A_1\widehat{S}A_n$, поэтому, заменяя в (1) сумму двух углов меньшим углом, мы получим:

$$A_1\widehat{S}A_2 + A_2\widehat{S}A_3 + \cdots + A_{n-1}\widehat{S}A_n + A_n\widehat{S}A_1 < 2\pi.$$

Согласно принципу математической индукции наше предложение доказано.

31. Пусть дан выпуклый четырехгранный угол $Sa_1a_2a_3a_4$. Плоскости граней a_1Sa_2 и a_3Sa_4 имеют общую точку S и потому пересекаются по некоторой прямой m. Точно так же плоскости граней a_2Sa_3 и a_4Sa_1 пересекаются по какой-то прямой n. Построив эти прямые, возьмем на ребре Sa_1 произвольную точку A и проведем из нее в плоскости грани a_1Sa_2 прямую, параллельную m. Из той же точки в плоскости грани a_1Sa_4 проведем прямую, параллельную n. Эти две прямые определяют плоскость, в сечении которой с данным четырехгранным углом получим параллелограмм (почему?).

Приведем еще одно решение. Проведем через пары ребер Sa_1 и Sa_3, Sa_2 и Sa_4 диагональные сечения. Они пересекутся по некоторой прямой l. Взяв на ней произвольную точку M, проведем через нее внутри угла a_1Sa_3 отрезок, который этой точкой делился бы пополам (как это сделать?). Такой же отрезок, проходящий через M, построим и внутри угла a_2Sa_4. Полученные два отрезка будут диагоналями параллелограмма искомого сечения. Построив одну такую секущую плоскость и проводя плоскости, параллельные найденной, мы получим сколько угодно сечений, дающих параллелограммы. (Где в этих решениях используется, что рассматриваемый четырехгранный угол — выпуклый?)

32. Требуемое разбиение на трехгранные углы получим, проводя все диагональные сечения многогранного угла через одно из его ребер.

33. Аддитивность величины многогранного угла нетрудно доказать, разбивая многогранные углы на трехгранные (см. предыдущую задачу) и рассматривая суммы величин трехгранных углов, как в задаче 28. Из такого же разбиения следует и положительность величины любого многогранного угла.

34. В ортогональном трехгранном угле три двугранных угла — прямые, и сумма их величин равна $\frac{3\pi}{2}$. Вычитая отсюда π, получим $\frac{\pi}{2}$ — величину ортогонального трехгранного угла.

Три взаимно перпендикулярные плоскости разбивают пространство на 8 трехгранных ортогональных углов. Сумма их величин равна $8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$. Из аддитивности следует, что такой будет и сумма величин любых многогранных углов с общей вершиной, заполняющих все пространство.

35. Шесть конгруэнтных между собой четырехгранных углов заполняют все пространство. Поэтому величина каждого из них равна $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Эта величина получилась от вычитания числа 2π (сумма углов квадрата) из суммы величин двугранных углов. Эта сумма равна $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$, а величина каждого двугранного угла,

следовательно, равна $\frac{2\pi}{3}$, или 120°. Плоские углы этих четырехгранных углов являются плоскими углами между диагоналями диагональных сечений куба. Тангенс угла между диагональю и большей стороной такого сечения равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$, сам угол приближенно равен 35°15′52″, а угол между диагоналями вдвое больше, т. е. приближенно равен 70°31′44″.

36. Пусть α, β, γ — величины плоских углов. Из произвольной точки S на плоскости проводим 4 конгруэнтных отрезка SA, SB, SC, SA' так, чтобы $\widehat{ASB}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{CSA'}=\gamma$. По отрезкам BC, CA' и AB построим $\triangle A_1B_1C_1$ — сечение искомого трехгранного угла. Центр O окружности, описанной около этого треугольника, есть проекция вершины трехгранного угла на плоскость $A_1B_1C_1$. Проводим из O перпендикуляр p к этой плоскости. В плоскости (A_1p) строим отрезок A_1S_1 длины $|SA|$, где $S_1\in p$. Полученная точка S_1 и есть вершина искомого угла (докажите).

Задача разрешима, если $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ и $\alpha+\beta>\gamma$, $\alpha+\gamma>\beta$, $\beta+\gamma>\alpha$.

37. Если даны величины двугранных углов, то этим определены величины плоских углов трехгранного угла, полярного с данным. Построив такой трехгранный угол (см. предыдущую задачу), проводим в вершине внешние нормали к его граням — получаем искомый трехгранный угол.

38. а) Пусть симметрия с осью s отображает A на A' и B на B' (рис. 89). Докажем, что $|AB|=|A'B'|$. Пусть $(BB')\cap s=N$. Проведем через N прямую, параллельную (AA'), и отложим от N симметричные отрезки NA_1 и NA_1' так, чтобы $|A_1A_1'|=|AA'|$. Плоскость прямых BB' и A_1A_1' перпендикулярна оси s (почему?). $AA_1A_1'A'$ — прямоугольник, так как $(AA_1)\parallel(A'A_1')$; $\triangle ABA_1\cong\triangle A'A_1'B'$, так как оба треугольника прямоугольные, причем $[A_1B]\cong[A_1'B']$ и $[AA_1]\cong[A'A_1']$. Следовательно, $|AB|=|A'B'|$ и осевая симметрия является перемещением пространства. Так же как в задаче о симметрии относительно плоскости (задача 16 § 5), доказывается, что прямая отображается на прямую, плоскость — на плоскость.

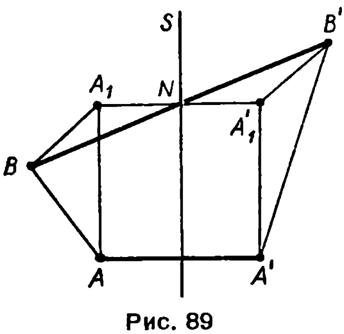


Рис. 89

б) Инвариантность прямых, пересекающих ось и перпендикулярных ей, а также плоскостей, перпендикулярных оси, непосредственно вытекает из способа получения симметричных друг другу точек.

39. а) Пусть мы имеем две оси симметрии s и s', причем $s\parallel s'$. Пусть первая симметрия отображает точку A на A_1, а вторая — точку A_1 на A'. Так как оси параллельны, а прямые AA_1 и A_1A'

им перпендикулярны, то три точки A, A_1, A' принадлежат плоскости, перпендикулярной обеим осям. Обозначим еще: $(AA_1) \cap s = M$, $(A_1A') \cap s' = M'$. Тогда по свойствам симметрии получим: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{A_1M'} = \overrightarrow{M'A'}$, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1M'} + \overrightarrow{M'A'} = \overrightarrow{AA'}$. Поэтому $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1M'} = \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$, или

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{MM'}.$$

Так как вектор $\overrightarrow{MM'}$ один и тот же для любой точки A, отображение $A \to A'$, являющееся композицией двух осевых симметрий, будет параллельным переносом $\vec{a} = 2\overrightarrow{MM'}$. Длина этого вектора в 2 раза больше расстояния между осями, направление — от первой оси ко второй перпендикулярно осям.

б) Обратно, если дан вектор $\vec{a}$, то проведем оси s и $s' = \frac{1}{2}\vec{a}(s)$. Тогда, согласно уже доказанному, композиция симметрий относительно этих двух осей является параллельным переносом.

40. а) Пусть $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \cap \beta = s$. Пусть первая симметрия отображает точку A на A_1, вторая — точку A_1 на A'. Так как $(AA_1) \perp s$ и $(A_1A') \perp s$, то точки A, A_1 и A' лежат в плоскости γ, перпендикулярной прямой s. В плоскости γ мы получим фигуру, как на рисунке 90. Здесь мы имеем: $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\gamma \cap s = O$, причем $a \perp b$, так как $\alpha \perp \beta$. Поскольку $|OA| = |OA_1| = |OA'|$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOA_1}$, $\widehat{A_1OC} = \widehat{COA'}$, $\widehat{BOA_1} + \widehat{A_1OC} = 90°$, где $B = (AA_1) \cap a$; $C = (A_1A') \cap b$, то, следовательно, $\widehat{AOB} + \widehat{BOA_1} + \widehat{A_1OC} + \widehat{COA'} = \widehat{AOA'} = 180°$. Итак, точки A, O, A' принадлежат одной прямой. $|OA| = |OA'|$ и $|AA'| \perp s$; значит, A и A' симметричны относительно s, т. е. композиция симметрий относительно α и β является осевой симметрией относительно прямой $s = \alpha \cap \beta$.

б) Обратно: если дана симметрия относительно оси s, то, проводя через s две взаимно перпендикулярные плоскости, мы убедимся, что композиция симметрий относительно этих плоскостей будет симметрией относительно s.

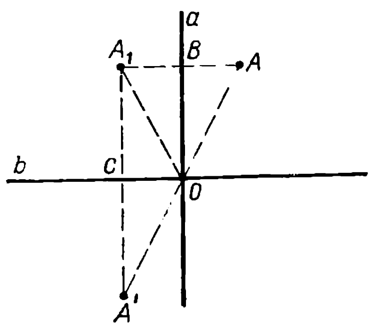


Рис. 90

41. Предположим сначала, что оси s_1 и s_2 двух симметрий пересекаются и $s_1 \perp s_2$. Разложим первую симметрию в композицию двух симметрий относительно плоскостей α_1 и β_1, причем $\alpha_1 \cap \beta_1 = s_1$ и $\alpha_1 \perp \beta_1$, и плоскости выберем так, чтобы β_1 проходила через s_2. Вторую симметрию разложим в такую же композицию симметрий относительно плоскостей α_2 и β_2, удовлетворяющих условиям: $\alpha_2 \cap \beta_2 = s_2$, $\alpha_2 \perp \beta_2$ и $s_1 \subset \alpha_2$. Заметим, что плоскости β_1 и α_2 совпадут, так как им обеим принадлежат оси s_1 и s_2. Поэтому при последовательном отражении от четырех плоскостей α_1, β_1, α_2, β_2 композиция второй и третьей симметрий даст тождественное отображение и композиция осевых симметрий с осями s_1 и s_2 совпадет с композицией симметрий относительно плоскостей α_1 и β_2. Эти плоскости перпендикулярны друг другу и пересекаются по прямой s, перпендикулярной прямым s_1 и s_2. Следовательно, композиция симметрий относительно прямых s_1 и s_2 есть симметрия относительно прямой s.

Нетрудно видеть, что и, обратно, всякую осевую симметрию можно представить в виде композиции осевых симметрий, оси которых пересекают данную ось в одной точке, перпендикулярны друг другу и данной оси.

Положим теперь, что взаимно перпендикулярные оси двух симметрий скрещиваются между собой. Тогда построим пересекающую их и перпендикулярную им прямую. Первую симметрию мы заменим композицией двух новых симметрий со взаимно перпендикулярными осями, причем в качестве одной из осей выберем общий перпендикуляр, а другую ось проведем параллельно второй из данных осей.

Тем самым наша композиция представлена в виде композиции уже трех преобразований: осевой симметрии относительно общего перпендикуляра и двух осевых симметрий с параллельными осями. Композиция двух последних симметрий есть параллельный перенос (см. задачу 39), причем перенос направлен вдоль общего перпендикуляра, а по величине (по длине) равен удвоенному расстоянию между исходными осями. Итак, рассматриваемая композиция сводится к композиции осевой симметрии и параллельного переноса в направлении оси симметрии. Это преобразование является аналогом скользящей симметрии в плоскости.

42. Если прямая a перпендикулярна оси поворота l, то через нее можно провести плоскость α, перпендикулярную l и пересекающую ось поворота в некоторой точке O. В плоскости α мы получим фигуру, показанную на рисунке 91. Пусть $(OA) \perp a$, $A \in a$. При повороте точка A отображается на A', точка M прямой a отображается на точку M', причем $|OM'| = |OM|$ и $\widehat{MOM'} = \widehat{AOA'} = \varphi$, где φ — величина угла поворота. Отсюда следует, что $\widehat{AOM} = \widehat{A'OM'}$, и, значит, $\triangle AOM \cong \triangle A'OM'$; $|A'M'| = |AM|$ и $(M'A') \perp (OA')$. Поэтому любая точка $M \in a$ отображается на точ-

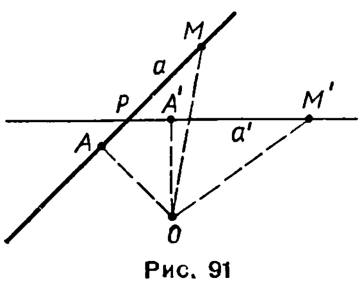


Рис. 91

ку $M' \in a'$, где a' — прямая, перпендикулярная (OA'). Угол между a и a' равен углу поворота (это внешний угол в четырехугольнике $AOA'P$, в котором углы при вершинах A и A' прямые, причем $\widehat{AOA'}$ — угол поворота.

43. а) Пусть α и β — данные плоскости, $\alpha \cap \beta = l$. Первая симметрия отображает точку A на A_1, вторая — точку A_1 на A'. Так как $(AA_1) \perp \alpha$, $(A_1A') \perp \beta$, то точки A, A_1, A' принадлежат плоскости γ, перпендикулярной l. Положим, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $l \cap \gamma = O$. Тогда имеем:

$$|OA| = |OA_1| = |OA'|, \ \widehat{AOa} = \widehat{aOA_1}, \ \widehat{A_1Ob} = \widehat{bOA'},$$

$$\widehat{AOa} + \widehat{aOA_1} + \widehat{A_1Ob} + \widehat{bOA'} = \widehat{AOA'}, \text{ откуда: } \widehat{aOA_1} + \widehat{A_1Ob} = \widehat{aOb} =$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{AOA'} \ \text{ и } \ \widehat{AOA'} = 2\widehat{aOb}.$$

Итак, на основании того, что $|OA'| = |OA|$ и $\widehat{AOA'} = 2\widehat{aOb}$, т. е. угол AOA' равен удвоенному углу между α и β, мы заключаем, что композиция отражений относительно двух плоскостей эквивалентна повороту, осью которого служит прямая пересечения плоскостей, а углом — удвоенный угол между плоскостями.

б) Обратно, из уже доказанного следует, что всякий поворот можно представить как композицию симметрий относительно двух плоскостей, проходящих через ось поворота и образующих друг с другом угол, вдвое меньший угла поворота.

Заметим, что отсюда вытекает, что поворот пространства отображает прямую на прямую и плоскость — на плоскость, причем сохраняет расстояние между точками, т. е. является перемещением пространства.

44. а) Пусть мы имеем две осевые симметрии с осями s_1 и s_2, пересекающимися в точке O и образующими друг с другом угол $\varphi = \widehat{s_1Os_2}$.

Разложим каждую из этих симметрий в композицию двух симметрий относительно плоскостей $\alpha_1 \perp \alpha_2$ и $\beta_1 \perp \beta_2$ соответственно. В качестве плоскостей α_2 и β_1 выберем плоскость s_1Os_2. Тогда композиция симметрий относительно совпадающих плоскостей α_2 и β_1 есть тождественное отображение и композиция оставшихся симметрий даст поворот с осью l, перпендикулярной к плоскости s_1Os_2 и проходящей через O, на угол, равный 2φ (см. предыдущую задачу).

б) Обратно, как и во всех разобранных выше случаях, очевидно, что каждый поворот эквивалентен композиции двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в точке на оси поворота и образуют друг с другом угол, вдвое меньший угла поворота.

45. Пусть даны повороты с осями l_1 и l_2, пересекающимися в точке O. Разложим оба поворота в композиции симметрий относительно плоскостей α_1 и α_2, β_1 и β_2. В качестве α_2 и β_1 выберем плоскость l_1Ol_2. Тогда композиция симметрий относительно α_2 и β_1

будет тождественным отображением, а композиция симметрий относительно α_1 и β_2 даст поворот относительно оси $l = \alpha_1 \cap \beta_2$, проходящей через точку O, причем угол поворота по величине вдвое больше угла между плоскостями α_1 и β_2.

46. Поворотом около оси l переведем точку B в плоскость, проходящую через точку A и прямую l и притом так, чтобы точки A и B' — образ B — были по разные стороны от прямой l. Кратчайший путь от A до B' есть отрезок AB', пересекающий l в точке M. Всякая другая точка $N \in l$ дает путь длины $|AN| + |NB'| > |AB'|$. Так как $|MB'| = |MB|$, то точка M — искомая.

47. Так как по условию $|OA| = |OA'|$ и $|OB| = |OB'|$, то плоскость симметрии α точек A и A' проходит через O. Соответствующая симметрия отображает A на A' и B на B_1, причем $|OB| = |OB_1| = |OB'|$. Так как $\widehat{A'OB'} = \widehat{A'OB_1}$, то плоскость симметрии β точек B' и B_1 проходит через прямую $A'O$, и эта симметрия отображает треугольник $A'OB_1$ на треугольник $A'OB'$. Следовательно, композиция симметрий относительно плоскостей α и β отображает треугольник AOB на треугольник $A'OB'$. Но композиция этих симметрий согласно задаче 43 а) есть поворот около оси $l = \alpha \cap \beta$.

48. Пусть $SABC$ — искомый трехгранный угол, SA', SB', SC' — биссектрисы углов BSC, CSA и ASB соответственно. Симметрия с осью SA' отображает (SB) на (SC). Симметрия с осью SB' отображает (SC) на (SA) и, наконец, симметрия с осью SC' отображает (SA) на (SB). Композиция этих трех осевых симметрий отображает прямую SB на самое себя, т. е. эта прямая есть неподвижная прямая композиции трех осевых симметрий. Поскольку каждая осевая симметрия есть поворот на $180°$, то мы имеем композицию трех поворотов, которая есть тоже поворот (это следует из задач 44 и 45). Итак, мы должны построить ось поворота, являющегося композицией трех данных осевых симметрий. Порядок построения такой.

1) Находим композицию симметрий с осями SA' и SB'. Ось поворота l перпендикулярна плоскости $A'SB'$ и проходит через S; угол поворота равен $2\widehat{A'SB'}$.

2) Находим композицию полученного поворота около оси l с симметрией относительно оси SC'. Вторую из плоскостей симметрий, на которые разлагается поворот с осью l, совмещаем с плоскостью lSC' и с ней же совмещаем первую из плоскостей симметрий, на которые разлагается симметрия с осью SC'. Симметрии относительно этих совпадающих плоскостей в композиции дают тождественное отображение. Следовательно, искомая ось поворота — ребро (SB) — есть пересечение первой и последней плоскостей симметрий. Ребра (SA) и (SC) получим как образы ребра (SB) при симметриях относительно осей SA' и SC'.

49. Повернем данный n-гранный угол на угол $\frac{2\pi}{n}$ относительно оси l. При этом каждое ребро совместится с соседним ребром и каждая грань — с соседней гранью. Отсюда следует конгруэнтность всех плоских углов и конгруэнтность всех двугранных углов.

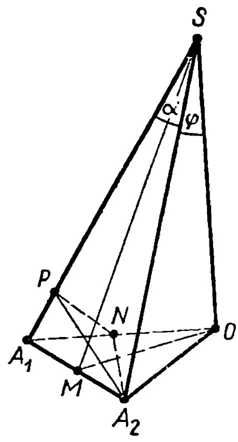


Рис. 92

50. Пусть все плоскости и все двугранные углы некоторого n-гранного угла конгруэнтны друг другу. При этом условии каждое ребро принадлежит плоскости симметрии двух соседних ребер. Эта симметрия преобразует друг в друга соседние ребра, а вследствие конгруэнтности двугранных углов при этих ребрах эти углы и заключающие их грани тоже будут симметричными. Далее, в силу конгруэнтности плоских углов этих граней, преобразуются друг в друга и следующие два ребра и т. д. Итак, эта плоскость есть плоскость симметрии всей фигуры. Но этим свойством обладает и плоскость симметрии, проходящая через соседнее ребро. Следовательно, правильный многогранный угол отображается на себя и при композиции указанных симметрий, которая является поворотом относительно прямой их пересечения. Рассматривая все плоскости симметрий данного угла, легко найти угол поворота — он будет равен $\frac{2\pi}{n}$.

51. Пересечем правильный n-гранный угол плоскостью, перпендикулярной оси симметрии этого угла, и выделим один из n «секторов» фигуры (рис. 92). В этой пирамиде $\widehat{A_1SO} = \widehat{A_2SO} = \varphi$, $\widehat{A_1SA_2} = \alpha$, $|SO| = h$, M — середина $[A_1A_2]$. Плоскость A_2PN перпендикулярна прямой A_1S, поэтому $\widehat{A_2PN} = \frac{\gamma}{2}$, где γ — искомая величина двугранного угла. Далее имеем: $(A_2P) \perp (A_1S)$, $(A_2N) \perp (A_1O)$ и $(PN) \perp (A_2N)$ и из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$|A_1O| = |A_2O| = h \operatorname{tg} \varphi;$$

$$|A_1S| = |A_2S| = \frac{h}{\cos \varphi};$$

$$|MA_1| = |MA_2| = |A_1O| \sin \frac{\pi}{n} = h \operatorname{tg} \varphi \sin \frac{\pi}{n};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|MA_1|}{|SA_1|} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \varphi; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \varphi;$$

$$|A_2N| = |OA_2| \sin \frac{2\pi}{n} = h \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \frac{2\pi}{n};$$

$$|A_2P| = |SA_2| \sin \alpha = \frac{h \sin \alpha}{\cos \varphi};$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{|A_2N|}{|A_2P|} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \frac{2\pi}{n} \cos \varphi}{\sin \alpha}; \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{2\pi}{n} \sin \varphi}{\sin \alpha}.$$

52. К плоскости произвольного квадрата $ABCD$ проведем перпендикуляр p через его центр. В плоскости, содержащей диагональ квадрата и прямую p, построим отрезок AS, где $S \in p$, длины, равной стороне квадрата. Четырехгранный угол $SABCD$ и есть искомый угол.

53. Возьмем на прямой a произвольную точку M, а на прямой a' от данной точки A' отложим $[M'A'] \cong [MA]$. Пусть α — плоскость симметрии точек A и A'. Пусть при симметрии относительно α точка M переходит в точку M_1. Так как при симметрии расстояние между точками сохраняется, то $|A'M_1| = |A'M'|$. Поэтому плоскость β симметрии точек M_1 и M' проходит через A' и отображает отрезок $A'M_1$ на отрезок $A'M'$. Итак, композиция симметрий относительно плоскостей α и β отображает A на A' и M на M' и, следовательно, прямую a на прямую a'. Композиция этих двух симметрий и есть искомый поворот (около оси $l = \alpha \cap \beta$).

54. Возьмем на прямой l произвольную точку O и проведем через нее две прямые: $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$. Из условия задачи следует, что прямые a_1 и b_1 образуют конгруэнтные углы с прямой l, и существует поворот, отображающий a_1 на b_1. (Чтобы найти угол поворота, проведем через O плоскость, перпендикулярную l, и построим проекции прямых a_1 и b_1 на эту плоскость. Угол между проекциями и есть угол поворота.) Этот поворот отображает прямую a_1 на прямую $a_1' = b_1$, а прямую a — на a', причем $a' \parallel a_1'$. Поскольку $a_1' = b_1$, $b_1 \parallel b$, то $a' \parallel b$, что и требовалось.

55. Обозначим центр гомотетии, определяемой отрезками A_iB_i и A_jB_j, через S_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. В решении задачи 26 из § 5 было доказано, что центры любых двух гомотетий и третьей гомотетии, являющейся их композицией, принадлежат одной прямой. Рассматривая гомотетию S_{13} как композицию гомотетий S_{12} и S_{23}, получим, что центры S_{12}, S_{23}, S_{13} принадлежат одной прямой. Аналогично доказывается то же самое про тройки центров (S_{12}, S_{24}, S_{14}), (S_{13}, S_{34}, S_{14}), (S_{23}, S_{34}, S_{24}). Рассмотрим четыре прямые, содержащие перечисленные тройки точек. Первая и вторая прямые имеют общую точку S_{12}, поэтому через эти две прямые можно провести плоскость α. В этой плоскости лежит и четвертая прямая, так как ей принадлежат точки S_{23} и S_{24}. Той же плоскости принадлежит и точка $S_{34} \in (S_{23}S_{34}S_{24})$. Наконец, третья прямая тоже содержится в плоскости α, так как она проходит через точки S_{13} и S_{41}. Мы получили в плоскости α конфигурацию из 6 точек и 4 прямых, причем каждой прямой принадлежат три точки, а через каждую точку проходят две прямые — так называемый полный четырехсторонник.

56. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобные треугольники, т. е. треугольники с соответственно конгруэнтными углами. Найдем гомотетию, которая отображала бы треугольник $A_2B_2C_2$ на треугольник, конгруэнтный $\triangle A_1B_1C_1$, причем точка A_2 отображалась бы на A_1. Центр такой гомотетии S должен принадлежать прямой A_1A_2,

а коэффициент гомотетии равен коэффициенту подобия данных треугольников — по этим данным можно построить S. Итак, мы получили два конгруэнтных треугольника с общей вершиной A_1. Теперь методом, указанным в решении задачи 47, находим поворот пространства, отображающий полученный из $A_2B_2C_2$ треугольник на треугольник $A_1B_1C_1$.

57. Пусть мы имеем сферы с центром O_1 радиуса R_1 и с центром O_2 радиуса R_2 $(R_1 > R_2)$. Возьмем на первой сфере произвольную точку A_1 вне прямой O_1O_2 и рассмотрим вектор $\overrightarrow{O_2A_2}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{O_1A_1}$ и по длине равный R_2. Тогда точка A_2 принадлежит второй сфере, и прямая A_1A_2 пересечет прямую O_1O_2 в центре S искомой гомотетии. Коэффициент гомотетии $k = \frac{\overrightarrow{O_2A_2}}{\overrightarrow{O_1A_1}} = \frac{R_2}{R_1}$. (Любая другая точка B_1 первой сферы при этой гомотетии отображается в точку B_2, такую, что $\frac{\overrightarrow{O_2B_2}}{\overrightarrow{O_1B_1}} = k$, поэтому $|O_2B_2| = R_2$. Отсюда выводится, что рассматриваемая гомотетия отображает первую сферу на вторую.)

Взяв вектор $\overrightarrow{O_2A_2}$, противонаправленный вектору $\overrightarrow{O_1A_1}$, аналогичным образом получим гомотетию с новым центром S' и отрицательным коэффициентом, равным $k = -\frac{R_2}{R_1}$. Если $O_1 = O_2$, то общий центр сфер является центром искомых гомотетий $\left(\text{с коэффициентами } k = \pm\frac{R_2}{R_1}\right)$.

58. Общая касательная плоскость двух сфер проходит через центр их гомотетии, так как радиусы, проведенные к точкам касания, параллельны, а прямая, проходящая через точки касания, проходит и через центр гомотетии (см. предыдущую задачу). Центры гомотетий трех сфер принадлежат плоскости их центров и совпадают с центрами гомотетий окружностей сечения сфер этой плоскостью. Поэтому плоскость, касающаяся всех трех сфер, проходит через оси гомотетий этих окружностей (см. задачу 15 из § 2).

Так как сферы симметричны относительно плоскости их центров, то через каждую ось гомотетии проходят пары взаимно симметричных плоскостей, касающиеся трех сфер.

Таким образом, пары симметричных плоскостей, касающиеся трех сфер, пересекаются по прямым, лежащим в плоскости центров и образующим конфигурацию из 4 прямых и 6 точек, по 3 точки на каждой прямой.

§ 7. 1. Если вершины призмы принадлежат сфере, то вершины каждого из ее оснований принадлежат двум конгруэнтным окружностям, получающимся в пересечении сферы плоскостями оснований призмы. Линия центров этих окружностей проходит через центр сферы и перпендикулярна плоскостям сечения (объясните). Отсюда следует, что вписанная призма **необходимо** должна быть прямой (почему?), а основаниями ее должны служить многоугольники, вписуемые в окружность.

Условие **достаточно**. Если призма удовлетворяет сформулированным условиям, то окружности, описанные около ее оснований, конгруэнтны. Линия центров этих окружностей параллельна боковым ребрам (почему?). Середина O этой линии есть центр описанной сферы, так как эта точка равноудалена от всех вершин (докажите!).

2. Если сфера вписана в призму, то высота призмы равна диаметру сферы. Плоскость, проходящая через центр сферы перпендикулярно ребрам призмы, дает в сечении призмы многоугольник, в который вписана окружность большого круга сферы. (Поясните подробно.)

Отсюда получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы в призму можно было вписать сферу: 1) Сечением призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам призмы, должен быть многоугольник, в который можно вписать окружность. 2) Высота призмы должна быть равна диаметру этой окружности. (Покажите, что при этих условиях действительно существует вписанная в призму сфера.)

3. При указанном условии все стороны оснований параллелепипеда должны быть конгруэнтны между собой, что выводится из конгруэнтности боковых граней (поясните). Следовательно, основаниями параллелепипеда, равно как и его боковыми гранями, должны быть конгруэнтные ромбы. Итак, все 12 ребер параллелепипеда конгруэнтны. Если параллелепипед отличен от куба, то два угла ромба должны быть острыми. Для построения такого параллелепипеда по его граням рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 93). При вершине A построим трехгранный угол, все плоские углы которого конгруэнтны углу BAD (см. задачу 36 из § 6). Затем отложим на третьем ребре этого трехгранного угла отрезок AA' длины $|AA'| = |AB|$ и через вершины B, C и D проведем ребра $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ так, чтобы $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$. Этим построение закончено. Трехгранные углы при вершинах A и C' — правильные, и параллелепипед имеет оси симметрии (AC') и (CA') (докажите!).

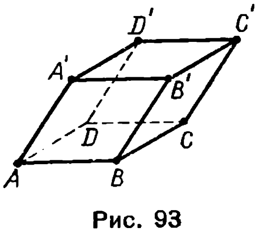


Рис. 93

4. Решение аналогично построению задачи 41 из § 3. Прежде всего проводим ступенчатый разрез по грани 8×27, как в упомянутой задаче, — преобразуем эту грань в прямоугольник со сторонами 12×18. Далее опять по ломаной делаем сквозной разрез по грани 8×18, преобразующий после перекладывания эту грань

в квадрат 12×12. В результате параллелепипед преобразуется в куб с ребром 12.

5. Каждый параллелепипед можно диагональным сечением разрезать на две конгруэнтные треугольные призмы с равными объемами. Поскольку объем параллелепипеда равен произведению площади любой его грани на расстояние от нее до противоположной грани, то объем каждой из призм равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от нее до противоположного ребра. Поскольку всякую треугольную призму можно дополнить конгруэнтной с нею призмой до параллелепипеда, то объем любой треугольной призмы можно вычислить указанным способом.

6. Для доказательства достаточно применить формулу о сумме квадратов сторон параллелограмма сначала к двум диагональным сечениям параллелепипеда, а затем к двум его основаниям.

7. На рисунке 94 даны две проекции куба: в одной (*а*) проектирующие прямые параллельны диагонали куба, в другой (*б*) — параллельны его ребру.

Можно построить по первой проекции вторую, если заметить, что на первой проекции диагонали граней, перпендикулярные направлению проектирующих прямых, проектируются без искажения, т. е. с сохранением длины, и построить по диагонали квадрата его сторону. На чертеже показано, что вторая проекция целиком помещается внутри первой, так как окружность, описанная из центра O на проекции (*а*) радиусом, равным половине диагонали квадрата (*б*), помещается внутри окружности, вписанной в шестиугольник на проекции (*а*) (подтвердите это вычислениями). Итак, если проделать сквозное отверстие по пунктирным линиям проекции (*а*) в направлении проектирующих прямых, то получим дыру, через которую может пройти конгруэнтный куб.

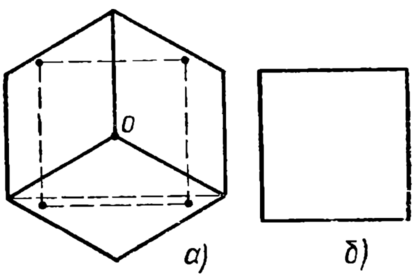


Рис. 94

8. Пересечем тетраэдр $ABCD$ плоскостью, проходящей через ребро $|AB|$ и точку M на ребре $|CD|$ (рис. 95). У треугольников ABD, ABC и ABM общее основание, поэтому для сравнения их площадей достаточно сравнить высоты, проведенные к стороне AB. Для этого спроектируем их

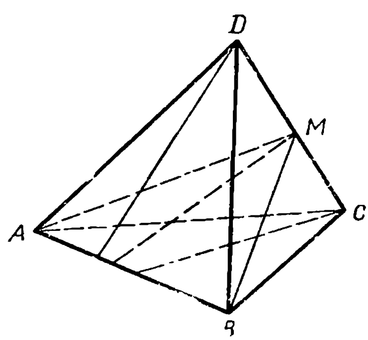


Рис. 95

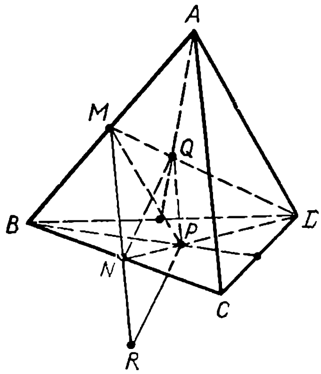


Рис. 96

на плоскость, перпендикулярную (AB). Так как все высоты параллельны плоскости проекции, то их длина в проекции остается неизменной. Обозначая через A' общую проекцию точек A и B на эту плоскость, а через C', M', D' — проекции точек C, M, D, мы увидим, что к прямой $C'D'$ проходят три наклонные $[A'C']$, $[A'M']$ и $[A'D']$. При этом M' лежит между C' и D'. Если из трех наклонных, проведенных из одной точки, одна лежит между двумя другими, то она короче по крайней мере одной из них (докажите!). Следовательно, высота треугольника ABM меньше высоты одного из двух треугольников ABC или ABD и, значит, площадь ABM меньше площади по крайней мере одной из граней ABC или ABD. Остальные случаи пересечения тетраэдра с плоскостью приводятся к рассмотренному. Разберите их самостоятельно.

9. Пусть a длина ребер тетраэдра, тогда $|MP| = \frac{a}{2}$, так как это медиана прямоугольного треугольника ABP (рис. 96). Аналогично $|NQ| = \frac{a}{2}$, а также $|MN| = \frac{a}{2}$. В треугольнике MND точки P и Q делят стороны в отношении $2:3$, поэтому $|PQ| = \frac{2}{3}|MN| = \frac{a}{3}$. Отложим на продолжении отрезка MN за точку N отрезок NR длины $|NR| = |PQ|$; получим параллелограмм $PQNR$, в котором $|PQ| = |NR| = \frac{a}{3}$ и $|NQ| = |PR| = \frac{a}{2}$, а угол $\widehat{MPR}$ равен углу между прямыми MP и NQ. Заметим, что $|MR| = |MN| + |NR| = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5}{6}a$. Из треугольника MRP имеем:

$$|MR|^2 = |MP|^2 + |PR|^2 - 2|MP| \cdot |PR| \cos\varphi,$$

где $\varphi = \widehat{MPR}$, т. е.

$$\frac{25}{36}a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\cos\varphi, \quad \cos\varphi = -\frac{7}{18}.$$

Отсюда находим: $\varphi \approx 112°53'06''$.

10. Если пересечь тетраэдр плоскостью, параллельной двум его противоположным ребрам, то в сечении получится параллелограмм (почему?). Возьмем на ребре AB тетраэдра $ABCD$ произвольную точку M и через нее проведем $(MN) \parallel (AD)$ и $(MP) \parallel (BC)$; $[MN]$ и $[MP]$ — стороны параллелограмма сечения. Отложим на продолжении $[MN]$ за точку N отрезок $[MQ] \simeq [MP]$. Прямая AQ пересекает ребро BD в точке Q'. Примем A за центр гомотетии, отображающий Q на Q'. Тогда точка P отобразится на P', M — на M'. При этом $(M'Q') \parallel (AD)$, $(M'P') \parallel (BC)$ и $|M'P'| = |M'Q'|$. Сечение тетраэдра плоскостью $M'P'Q'$ будет ромбом (докажите!).

11. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с высотой h. Пусть точка P внутри него находится на расстоянии a от плоскости BCD, на расстоянии b от плоскости ACD, на расстоянии c от плоскости ABD и на расстоянии d от плоскости ABC. Обозначим через S площадь грани тетраэдра. Объем всего тетраэдра равен сумме объемов четырех тетраэдров, основаниями которых служат четыре грани тетраэдра $ABCD$, а общей вершиной — точка P. Тогда получим:

$$\left(\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}Sa + \frac{1}{3}Sb + \frac{1}{3}Sc + \frac{1}{3}Sd\right) \Rightarrow (a + b + c + d = h).$$

12. Совместим (некоторым перемещением пространства) второй тетраэдр с первым так, чтобы конгруэнтные трехгранные углы O и O' совпали. Пусть $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$ — длины ребер первого тетраэдра, $|OA'| = a'$, $|OB'| = b'$, $|OC'|$, c' — длины соответственных ребер второго тетраэдра. Объем первого тетраэдра $V = \frac{1}{3}Sh$, объем второго $V' = \frac{1}{3}S'h'$. Предполагая, что основания суть треугольники OBC и $O'B'C'$, получим: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $S' = \frac{1}{2}b'c'\sin\alpha$, где $\alpha = \widehat{BOC}$. Высоты же $[AH]$ и $[A'H']$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости оснований $(OBC) = (O'B'C')$, и из подобных треугольников OAH и $OA'H'$ получим: $\frac{h'}{h} = \frac{a'}{a} = \frac{|A'H'|}{|AH|}$. Таким образом, отношение объемов наших тетраэдров равно:

$$\frac{V'}{V} = \frac{h'b'c'\sin\alpha}{hbc\sin\alpha} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{b'c'}{bc} = \frac{a'b'c'}{abc},$$

что и требовалось доказать.

13. Предположим сначала, что отрезок AB неподвижен, а перемещается только отрезок CD. При этом площадь треугольника ACD остается постоянной, так как постоянна длина $|CD|$ и расстояние от точки A до прямой CD не изменяется. Постоянна и высота тетраэдра, так как постоянно расстояние от точки B до плоскости, определяемой прямой CD и точкой A. Итак, объем тетраэдра $BDAC$ не меняется, то же рассуждение доказывает и неизменность объема при перемещении отрезка AB.

Для вычисления объема такого тетраэдра отобразим параллельным переносом отрезок AB на отрезок $A'B'$, такой, что его середина совпадает с серединой отрезка CD. Аналогичным образом отобразим $[CD]$ на $[C'D']$ так, чтобы середина $[C'D']$ совпала с серединой $[AB]$. Мы получим конгруэнтные параллелограммы $AC'BD'$ и $A'CB'D$ с соответственно параллельными сторонами, которые можно рассматривать как два основания параллелепипеда. Объем этого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту h, равную расстоянию между прямыми AB и CD. Поскольку площадь основания равна $\frac{1}{2} mn \sin \varphi$ (задача 10 § 3), для объема получим формулу:

$$V = \frac{1}{2} mnh \sin \varphi.$$

Чтобы найти объем тетраэдра $ABCD$, нужно отсюда вычесть объемы четырех пирамид: $AA'CD$, $BB'CD$, $DD'AB$ и $CC'AB$. Объем каждой из них равен $\frac{1}{3}$ произведения половины площади основания параллелепипеда на высоту h, т. е. он равен $\frac{1}{12} mnh \times$ $\times \sin \varphi$, а объем всех четырех равен $\frac{1}{3} mnh \sin \varphi$. Итак, объем тетраэдра равен:

$$\frac{1}{2} mnh \sin \varphi - \frac{1}{3} mnh \sin \varphi = \frac{1}{6} mnh \sin \varphi.$$

14. Каждый из отделяемых тетраэдров гомотетичен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его объем равен $\frac{1}{8}$ объема тетраэдра. Так как всего удалено 4 тетраэдра, попарно не имеющих общих внутренних точек, то, значит, удалена половина объема. Поэтому и объем оставшегося тела равен половине объема данного тетраэдра.

15. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (рис. 97), M — середина $[AB]$, N — середина $[CD]$, $(MPNQ)$ — секущая плоскость. Одна из получившихся частей тетраэдра составлена из четырехугольной пирамиды $AMPNQ$ и тетраэдра $DANQ$, другая часть — из четырехугольной пирамиды $BMPNQ$ и тетраэдра $CBNP$. Объемы четырехугольных пирамид равны, так как у них общее основание и равные высоты — расстояния от точек A и B до плоскости сечения одинаковы в силу равенства $|MA| =$ $= |MB|$. Докажем равенство объемов тетраэдров, для чего найдем отношения их объемов к объему всего тетраэдра, используя предложение задачи 12.

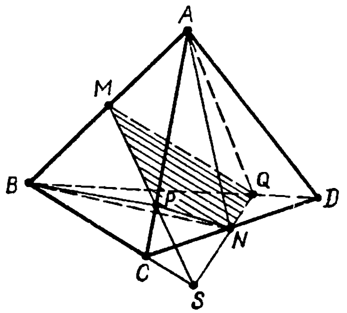


Рис. 97

Для тетраэдра $DANQ$ это отношение равно:

$$\frac{|DA| \cdot |DN| \cdot |DQ|}{|DA| \cdot |DC| \cdot |DB|} = \frac{|DQ|}{2|DB|}.$$

Для тетраэдра $CBNP$ получим:

$$\frac{|CB| \cdot |CN|\ |CP|}{|CB| \cdot |CD| \cdot |CA|} = \frac{|CP|}{2|CA|}.$$

Для доказательства равенства объемов тетраэдров остается доказать равенство отношений $\frac{|DQ|}{|DB|}$ и $\frac{|CP|}{|CA|}$. Применяя теорему Менелая (см. задачу 16 из § 2) к треугольнику ABC и секущей (MP), получим: $(ABM)(BCS)(CAP) = 1$. Применяя ту же теорему к треугольнику BCD и секущей (NQ), получим: $(BCS)(CDN)(DBQ) = 1$. В этих произведениях имеем: $(BCS) = (BCS)$, $(ABM) = (CDN)$, и, следовательно, $(CAP) = (DBQ)$, откуда: $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|QD|}{|QB|}$. Итак, объемы частей, полученные в результате рассечения тетраэдра плоскостью $(MPNQ)$, равны друг другу.

16. Пусть S — площадь основания призмы, h — ее высота, P — данная точка. Если из призмы удалить все пирамиды с вершиной P и боковыми гранями призмы в качестве оснований, то останутся две пирамиды с вершиной P и основаниями, совпадающими с основаниями призмы. Объем одной из них равен $\frac{1}{3} Sh_1$, объем другой — $\frac{1}{3} Sh_2$, а сумма объемов равна $\frac{1}{3} S(h_1 + h_2) = \frac{1}{3} Sh$, так как $h_1 + h_2 = h$. Отсюда следует, что сумма объемов n удаленных пирамид равна $\frac{2}{3}$ объема призмы. (Величина суммы не зависит от положения точки P.)

17. Допустим, что отрезки мы обозначили так, что $m < n < p$. Отложим от точек B и C отрезки $|BB_1| = |CC_1| = m$ (рис. 98). Искомый объем есть сумма двух объемов: наклонной призмы с основанием ABC и ребром $|AA'| = m$ и четырехугольной пирамиды с вершиной A' и основанием $B_1B'C'C_1$. Первый из этих объемов по известной теореме равен произведению площади перпендикулярного сечения, т. е. S, на длину бокового ребра m: $V_1 = Sm$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания — трапеции $B_1B'C'C_1$ — на расстояние от точки A' до плоскости основания. Площадь трапеции равна: $\frac{n - m + p - m}{2} \cdot k$, где k — расстояние между b и c, равное основанию треугольника в перпендикулярном сечении. Отсюда получим:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n + p - 2m}{2} \cdot k \cdot h.$$

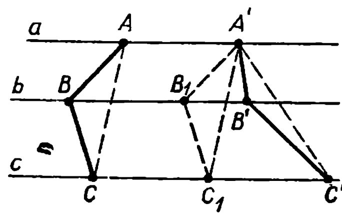


Рис. 98

Поскольку высота пирамиды h является высотой треугольника в перпендикулярном сечении, $kh = 2S$ и $V_2 = \frac{n+p-2m}{3} S$. Складывая V_1 и V_2, получим:

$$V = V_1 + V_2 = Sm + S\frac{n+p-2m}{3};$$

$$V = \frac{(m+n+p)S}{3}.$$

Из формулы следует, что объем не изменится при перемещении отрезков данных длин m, n и p по прямым a, b, c.

18. Пусть дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Легко видеть, что середины ребер CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$ и BC находятся на равных расстояниях от точек A и C' — концов диагонали куба, поэтому все они лежат в плоскости симметрии точек A и C', являясь вершинами правильного шестиугольника (докажите!). При повороте куба на 60° около диагонали AC' этот шестиугольник совместится сам с собой и будет содержаться в пересечении кубов (исходного и повернутого). Пересечением же кубов будет объединение двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием — рассматриваемым шестиугольником. Вычислив его площадь и длину диагонали куба, найдем искомый объем: $V = \frac{3a^3}{4}$.

19. В школьном курсе доказывается, что площадь ортогональной проекции плоского многоугольника равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус величины двугранного угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

При проектировании боковых граней правильной n-угольной пирамиды на плоскость основания получим: если площадь одной грани равна S, то площадь ее проекции $S' = S\cos\alpha$, где α — величина угла между боковой гранью и плоскостью основания. Поскольку объединение всех проекций боковых граней совпадает с основанием, то, умножая это равенство на n, получим: $nS' = nS\cos\alpha$, откуда $nS = \frac{nS'}{\cos\alpha}$, что и требовалось доказать.

20. Если сфера описана около пирамиды, то основанием пирамиды служит вписуемый многоугольник, а центр сферы находится на равных расстояниях от всех вершин многоугольника и от вершины пирамиды.

Обратно: если основание пирамиды — вписуемый многоугольник, то, проводя через центр описанной около него окружности перпендикуляр к плоскости основания и отыскав на этом перпендикуляре точку, равноудаленную от вершины пирамиды и вершины основания, получим центр сферы, описанной около пирамиды. Заметим, что для треугольной пирамиды, т. е. для тетраэдра, указанное условие выполняется всегда.

21. Все грани описанной пирамиды равноудалены от центра вписанной сферы. В этой точке пересекаются биссекторные полуплоскости всех двугранных углов пирамиды.

Обратно: существование общей точки всех биссекторных плоскостей пирамиды есть достаточное условие существования вписанной в нее сферы. Это условие всегда выполнимо для правильных пирамид и для треугольных (тетраэдров) (докажите!).

22. Разобьем такой многогранник на пирамиды, основаниями которых служат грани многогранника, а общей вершиной — центр вписанной сферы. Если площади граней равны $S_1, S_2, \ldots, S_n$, то объем многогранника есть $V=\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\cdots+\frac{1}{3}S_nR=$ $=\frac{1}{3}R(S_1+S_2+\cdots+S_n)$, что и требовалось доказать.

23. Пересекая пирамиду плоскостью, параллельной основанию, получим пирамиду, гомотетичную данной с центром в вершине пирамиды. Площади подобных друг другу многоугольников относятся как квадраты длин сходственных сторон. В данном случае последнее отношение равно отношению квадратов высот исходной и гомотетичной пирамид, т. е. если расстояние от плоскости сечения до вершины равно x, а высота исходной пирамиды равна h, то $\frac{S'}{S}=\frac{x^2}{h^2}$. Это отношение равно $\frac{1}{2}$, если $x^2=\frac{h^2}{2}$, т. е. $x=\frac{h}{\sqrt{2}}$. (Можно сказать, что расстояние x есть длина стороны квадрата с диагональю длины h.)

24. Пусть некоторый многогранник имеет n граней, и в него вписана сфера. Тогда на каждой грани существует единственная точка касания сферы с этой гранью. Соединив каждую из m вершин этой грани с точкой касания, получим m плоских углов с вершиной в точке касания, которые мы назовем «центральными». Так как сумма «центральных углов» при каждой точке касания равна 2π, то сумма их по всем n граням многогранника равна $2\pi n$.

Допустим теперь, что часть граней закрашена синим цветом так, что закрашенные грани не являются соседними. Каждое ребро многогранника лежит в плоскости симметрии двух точек касания на соседних гранях. Поэтому каждому закрашенному «центральному треугольнику» соответствует симметричный с ним не закрашенный синим центральный треугольник. Следовательно, если закрашено n' граней, то закрашенные углы дают в сумме $2n'\pi$, причем по крайней мере такую же сумму должны дать и не закрашенные синим углы. Однако если число не закрашенных синим цветом граней n'' будет меньше n', то сумма соответствующих углов будет $2n''\pi<2n'\pi$, что противоречит только что доказанному. Следовательно, если $n'>\frac{1}{2}n$ (т. е. $n'>n''$), то многогранник не может быть описанным около сферы.

Что касается примера с кубом, то здесь нас подводят пространственные представления. Оказывается, сечения, касающиеся сферы, настолько «глубоко проникают внутрь» куба, что плоскости

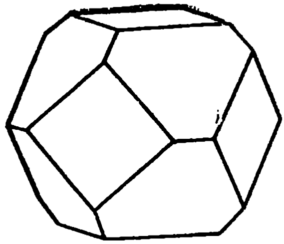


Рис. 99

сечения пересекают друг друга и «оставшийся» от куба многогранник имеет вид, изображенный на рисунке 99.

25. Обозначим через a длину стороны верхнего основания, через b — длину стороны нижнего основания пирамиды ($a < b$). Сфера, касающаяся ребер пирамиды, пересекает боковую грань (равнобедренную трапецию) по окружности, вписанной в эту грань. По свойству сторон описанного четырехугольника боковые стороны этой трапеции имеют длину $\frac{a+b}{2}$, откуда легко найти, что апофема усеченной пирамиды равна $\sqrt{ab}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается оснований в их центрах, а боковых граней — в точках на их апофемах. Проводя сечение через центр вписанной сферы и апофему пирамиды, в сечении получим окружность, касающуюся оснований и одной из боковых сторон трапеции — сечения пирамиды плоскостью. Проведем в плоскости сечения касательную к этой окружности, симметричную с апофемой относительно высоты пирамиды, проходящей через центр сферы, и получим окружность, вписанную в равнобедренную трапецию. Основания этой трапеции, легко видеть, равны $\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\frac{b}{\sqrt{3}}$, поэтому ее высота (диаметр вписанной окружности) равна $\sqrt{\frac{ab}{3}}$. Поскольку апофема пирамиды, т. е. высота боковой грани, равна $\sqrt{ab}$, синус двугранного угла между боковой гранью и основанием равен $\sin\alpha = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3ab}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha \approx 35°15'52''$.

26. Двенадцать граней ромбического додекаэдра (рис. 100) представляют собою ромбы, одна диагональ которых равна a, а другая — $a\sqrt{2}$ (почему?). Площадь каждого ромба равна $a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$, а площадь поверхности всего додекаэдра равна $6a^2\sqrt{2}$. Далее, так как каждая из 6 рассматриваемых пирамид, построенных на гранях куба, симметрична с пирамидой с тем же основанием и вершиной в центре куба, то сумма объемов этих шести пирамид равна объему куба, а объем додекаэдра вдвое больше объема куба, т. е. равен $2a^3$.

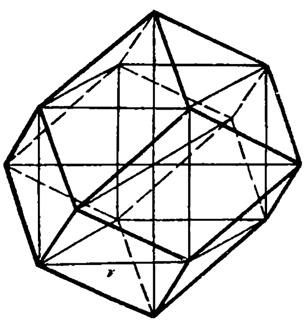


Рис. 100

27. Суммируя числа сторон по всем граням, мы при этом каждое ребро

учтем дважды, так как любое ребро принадлежит сразу двум граням.

28. Суммируя числа ребер по всем вершинам, мы каждое ребро учтем дважды, так как любое ребро соединяет две вершины.

29. Число плоских углов в m-угольной грани равно m, поэтому число всех плоских углов определяется той же суммой, как в задаче 27, а потому равно $2a$.

30. Пронумеруем грани многогранника индексами $i = 1, 2, \ldots, f$ и обозначим через m_i число сторон i-й грани. Тогда сумма всех плоских углов выразится формулой:

$$S = \sum_{i=1}^{f} \pi (m_i - 2) = \pi \sum_{i=1}^{f} m_i - 2\pi f.$$

Но из задачи 27 мы имеем: $\sum_{i=1}^{f} m_i = 2a$, поэтому $S = 2\pi (a - f)$.

31. Из формулы $2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots$, полагая $a = 7$, получим:

$$14 = 3f_3 + 4f_4 + \cdots. \qquad (1)$$

Число граней многогранника не может быть меньше четырех:

$$f_3 + f_4 + \cdots \geqslant 4, \qquad (2)$$

значит, многогранник может иметь только треугольные и четырехугольные грани, так как, имея хотя бы одну k-угольную грань, где $k \geqslant 5$, мы не могли бы подобрать значения чисел f_3 и f_4, которые могли бы удовлетворить условию (2) и соотношению (1) (объясните подробно). Итак, мы имеем соотношение $3f_3 + 4f_4 = 14$. Легко видеть, оно удовлетворяется только значениями $f_3 = f_4 = 2$, т. е. многогранник с семью ребрами может иметь только по две треугольные и четырехугольные грани. Пусть $ABCD$ — одна из граней, P — не принадлежащая ей вершина. ABP и BCP — две треугольные грани. Мы уже имеем 7 ребер: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[PB]$, $[CP]$. Поэтому второй четырехугольник должен иметь вершинами точки A, P, C, D, а ребрами — $[AP]$, $[CP]$, $[DA]$ и $[CD]$. Но тогда точка P должна принадлежать плоскости (ACD), что противоречит выбору вершины P. Итак, многогранника с семью ребрами не существует.

32. Сумма величин многогранных углов с общей вершиной S, опирающихся на грани многогранника и заполняющих все пространство, равна 4π (см. § 6, задача 34). Эту же сумму можно получить, вычитая из суммы двугранных углов всех многогранных углов сумму внутренних (плоских) углов всех граней, на которые эти углы опираются. Двугранные углы группируются «пучками» около лучей, идущих от S к вершинам, и сумма двугранных углов в таком пучке равна 2π (ср. с задачей 9 из § 6). Так как число вершин равно p, то общая сумма двугранных углов равна $2\pi p$. Сумма же плоских углов всех граней равна $2\pi (a - f)$, как было

показано в задаче 30. Таким образом, мы получаем: $2\pi p - 2\pi(a - f) = 4\pi$, откуда: $p + f - a = 2$.

33. Допустим, что существует такой выпуклый многогранник, в котором нет ни одной треугольной грани и ни одного трехгранного угла. Это значит, что в формулах из задач 27 и 28 можно положить $f_3 = p_3 = 0$, получим:

$$2a = 4f_4 + 5f_5 + \cdots,$$
$$2a = 7p_4 + 5p_5 + \cdots.$$

Так как $f_4 + f_5 + \cdots = f$ и $p_4 + p_5 + \cdots = p$, то $2a \geqslant 4f$ и $2a \geqslant 4p$, $4f + 4p \leqslant 4a$; $f + p - a \leqslant 0$, что противоречит теореме Эйлера. Значит, такого многогранника не существует, что и требовалось доказать.

34. а) Допустим, что в формуле задачи 27 дано: $f_3 = f_4 = f_5 = 0$. Тогда получим: $2a = 6f_6 + 7f_7 + \cdots$, $2a \geqslant 6f$. С другой стороны, из формулы задачи 28, применяя выводы предыдущей задачи, получим:

$$p_3 \neq 0,\ 2a \geqslant 3p,\ 4a \geqslant 6p.$$

Складывая неравенства $6f \leqslant 2a$ и $6p \leqslant 4a$, находим: $6f + 6p \leqslant 6a$, $f + p - a \leqslant 0$, что противоречит теореме Эйлера.

б) Если $p_3 = p_4 = p_5 = 0$, то $f_3 \neq 0$, и дальше повторяем рассуждения, аналогичные приведенным выше.

35. В задаче 30 была получена формула для суммы всех плоских углов многогранника: $S = 2\pi(a - f)$. Поскольку по теореме Эйлера $p - 2 = a - f$, то получаем: $S = 2\pi(p - 2)$.

36. Пусть грани правильного многогранника суть правильные n-угольники, а многогранные углы при вершинах — правильные m-гранные углы; очевидно, $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$. Разобьем пространство на f конгруэнтных друг другу правильных n-гранных углов с общей вершиной S так, что около каждого ребра $[SA)$ группируется по m углов. Тогда величина каждого из этих f многогранных углов равна $\frac{4\pi}{f}$. Поскольку эта величина есть разность между суммой величин его двугранных углов и числом $\pi(n - 2)$, сумма всех двугранных углов n-гранного угла равна $\frac{4\pi}{f} + \pi(n - 2) = \frac{4 + nf - 2f}{f}\pi$. Один же двугранный угол имеет величину в n раз меньшую, т. е. $\frac{4 + nf - 2f}{nf}\pi$.

С другой стороны, так как при каждом из p ребер наших n-гранных углов имеется по m конгруэнтных двугранных углов, то величина каждого из них равна $\frac{2\pi}{m}$. Таким образом,

$$\frac{2\pi}{m} = \frac{4 + nf - 2f}{nf}\pi;$$
$$2nf + 2mf - mnf = 4m;$$
$$f = \frac{4m}{2m + 2n - mn}. \qquad (1)$$

Так как $f > 0$, $m > 0$, то из (1) $2m + 2n - mn > 0$,

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} > 1. \tag{2}$$

Итак, рассматриваемое разбиение пространства на конгруэнтные многогранные углы возможно лишь при условии, что числа $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$ удовлетворяют неравенству (2). Очевидно, возможны только пять случаев: 1) $m = 3$ и $n = 3$: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} > 1$. Из (1) получим $f = 4$, многогранник ограничен 4 треугольниками — это тетраэдр. Соответствующие значения чисел a и p получим из формул задач 27 и 28: для тетраэдра $a = 6$, $p = 4$.

2) При $m = 3$, $n = 4$ получим: $\frac{2}{3} + \frac{2}{4} > 1$, $f = 6$. Многогранник ограничен шестью квадратами — это гексаэдр или куб. Здесь $a = 12$, $p = 8$.

3) При $m = 4$, $n = 3$ получим также $\frac{2}{4} + \frac{2}{3} > 1$; $f = 8$. Многогранник ограничен восемью треугольниками — это октаэдр. В нем $a = 12$, $p = 6$.

4) При $m = 3$, $n = 5$ имеем: $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} > 1$; $f = 12$. Многогранник ограничен двенадцатью пятиугольниками — это додекаэдр. В нем $a = 30$, $p = 20$.

5) $m = 5$, $n = 3$; $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} > 1$, $f = 20$. Многогранник ограничен 20 треугольниками — это икосаэдр. В нем $a = 30$, $p = 12$.

При $m = 4$ и $n = 4$ имеем: $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$, и неравенство (2) не выполняется. При дальнейшем увеличении значений m и n выражение в левой части неравенства (2) становится еще меньше, и оно опять-таки не может быть справедливым. Можно показать, что любой правильный многогранник можно получить описанной конструкцией, и наши рассмотрения показывают, что в пространстве существует только пять видов правильных многогранников.

37. В тетраэдре имеется четыре оси симметрии третьего порядка, проходящие через вершины и центры противоположных граней, и три оси второго порядка, проходящие через середины противоположных ребер. Остальные правильные многогранники имеют следующие оси симметрии.

Гексаэдр (куб):

3 оси 4-го порядка проходят через центры противоположных граней,

4 оси 3-го порядка — через противоположные вершины,

6 осей 2-го порядка — через середины противоположных ребер.

Октаэдр:

3 оси 4-го порядка проходят через противоположные вершины,

4 оси 3-го порядка — через центры противоположных граней,

6 осей 2-го порядка — через середины противоположных ребер.

Додекаэдр:

6 осей 5-го порядка проходят через центры противоположных граней,

10 осей 3-го порядка — через противоположные вершины,

15 осей 2-го порядка — через середины противоположных ребер.

Икосаэдр:

6 осей 5-го порядка проходят через противоположные вершины,

10 осей 3-го порядка — через центры противоположных граней,

15 осей 2-го порядка — через середины противоположных ребер.

38. Поскольку правильный многогранник составлен из f конгруэнтных правильных пирамид с общей вершиной S, а в правильной пирамиде вершина равноудалена от всех вершин основания и от середин всех ребер основания, причем высоты всех f пирамид равны между собой, то отсюда следует, что точка S равноудалена от всех вершин, от всех ребер и от всех граней многогранника. Следовательно, S является центром: 1) описанной сферы, 2) сферы, касающейся всех ребер, 3) вписанной сферы (поясните).

39. Поворот пространства около оси, при котором многогранник отображается на себя, назовем просто *поворотом многогранника*. Если многогранник правильный, то фиксированное его ребро $[AB]$ можно отобразить на любое ребро $[A'B']$ из общего числа a двумя поворотами многогранника: при одном A отображается на A', B — на B', при другом — A на B', B на A'. Следовательно, общее число поворотов равно $2a$. (Аналогичные рассмотрения с гранями и вершинами дают для числа поворотов формулы nf и mp, где m и n — те же, что и в задаче 36; конечно, для правильных многогранников $mf = mp = 2a$.)

40. Допустим, что сумма указанных векторов есть вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$. Рассмотрим поворот многогранника около одной из его осей симметрии, не параллельной $\vec{m}$. Тогда, с одной стороны, рассматриваемая сумма не должна измениться; с другой стороны, вектор $\vec{m}$ повернется и преобразуется в новый вектор $\vec{m}' \neq \vec{m}$. Это противоречие показывает, что $\vec{m} = \vec{0}$.

41. Пусть точка P находится на расстояниях $h_1, h_2, \ldots, h_f$ от плоскости f граней правильного многогранника. Разбивая многогранник на f пирамид с общей вершиной P и с основаниями — гранями многогранника, получим, что объем многогранника равен $V = \frac{Q}{3}(h_1 + h_2 + \cdots + h_f)$, где Q — площадь грани многогранника. Следовательно, сумма $h_1 + h_2 + \cdots h_f = \frac{3V}{Q}$ не зависит от положения точки P.

42. Строим три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке — центре будущего октаэдра. От центра во всех направлениях откладываем шесть конгруэнтных отрезков. Их концы и будут вершинами искомого октаэдра.

43. Луч, идущий из центра правильного многогранника к любой из его вершин, есть ось симметрии m-го порядка правильного m-гранного угла. При повороте около этой оси на угол $\frac{2\pi}{m}$ совмещаются друг с другом и прилегающие к вершине грани, а также центры соответствующих правильных n-угольников. Поэтому эти центры являются вершинами правильного многогранника, имеющего m-угольные грани и n-гранные углы (см. задачу 36). Двойственными правильными многогранниками являются куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Тетраэдр двойствен самому себе.

44. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ диагонали граней $[AC]$, $[CD']$, $[D'A]$, $[AB']$, $[B'C]$, $[B'D']$ служат ребрами правильного тетраэдра, а остальные 6 диагоналей граней — ребрами другого правильного тетраэдра. Объем одного из этих тетраэдров получим, вычитая из объема куба объемы четырех пирамид, у которых основанием служит половина грани куба, а высотой — ребро куба. Объем такой пирамиды равен $\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3$, поэтому объем тетраэдра равен: $a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 \quad \frac{1}{3}a^3$.

Пересечением рассматриваемых тетраэдров является октаэдр, вершинами которого служат центры граней куба. Этот октаэдр можно получить, отрезая от одного из тетраэдров четыре тетраэдра с ребром вдвое меньшей длины. Объем каждого из этих четырех тетраэдров в 8 раз меньше объема большого тетраэдра, и, значит, объем оставшегося октаэдра равен половине объема тетраэдра, т. е. $\frac{1}{6}a^3$.

Объем же многогранника, являющегося объединением тетраэдров, получим, приставляя к одному из тетраэдров четыре тетраэдра с вдвое меньшим ребром (по одному на каждую грань); при этом добавлении объем тетраэдра увеличится в полтора раза, т. е. станет равен: $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

45. В предыдущей задаче был рассмотрен октаэдр, вписанный в тетраэдр. Тетраэдр этот можно получить, продолжая четыре не смежные и не противоположные грани октаэдра. Как уже доказано в предыдущей задаче, объем получившегося тетраэдра вдвое больше объема октаэдра. Каждая грань этого тетраэдра составлена из четырех треугольников, конгруэнтных граням октаэдра, поэтому площадь одной грани тетраэдра равна половине площади всей поверхности октаэдра, а площадь всей поверхности тетраэдра вдвое больше площади всей поверхности октаэдра.

46. Рассмотрим додекаэдр с центром S (рис. 101). Ввиду конгруэнтности граней конгруэнтны и их диагонали: $[AB] \cong [BC] \cong [CD] \cong [DA]$. В правильной треугольной пирамиде $PABQ$ ребро $[PQ]$ перпендикулярно ребру основания $[AB]$ (см. задачу 8 из § 5). Но $(PQ) \parallel (AD) \parallel (BC)$ и, значит, $ABCD$ — квадрат. Точно так же

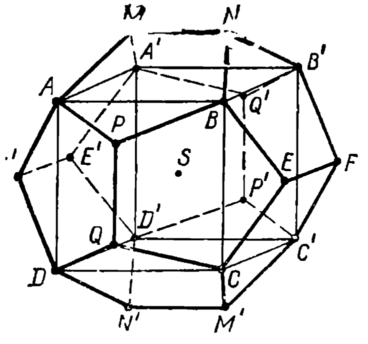


Рис. 101

докажем, что $ABB'A'$, $BCC'B'$, $A'B'C'D'$ и $ADD'A'$ тоже квадраты. Итак, многогранник $ABCDC'D'A'B'$ — куб, ребрами которого служат диагонали додекаэдра.

Если в пятиугольнике $AMNBP$ взять другую диагональ $[AN]$, то получим квадрат $ANEQ$, который есть грань куба $ANEQC'N'E'Q'$. Исходя из трех остальных диагоналей $[BM]$, $[MP]$ и $[NP]$, получим еще три куба: $BMF'QD'M'FQ'$, $MPDE'M'P'B'E$ и $NPCFN'P'A'F'$. Нетрудно убедиться в том, что каждая диагональ каждой грани додекаэдра является стороной одного и только одного из этих кубов. Следовательно, таких кубов ровно пять (60 диагоналей граней распределяются по 12 на 5 кубов).

47. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 101). Для построения додекаэдра нужно построить его ребро a, зная, что ребро квадрата d служит диагональю правильного пятиугольника. Две диагонали, исходящие из одной вершины, образуют со стороной правильного пятиугольника равнобедренный треугольник с углом при вершине 36° и углами при основании по 72°. Поэтому, проведя биссектрису одного из углов при основании, отделим от треугольника треугольник, подобный данному. Из подобия получим: $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$ (длина всего отрезка d относится к большей его части a так же, как a относится к меньшей части $d-a$ — деление отрезка d на такие части a и $d-a$ называется «делением в крайнем и среднем отношении» или «золотым сечением»). Решая получившееся квадратное уравнение:

$$a^2 + ad - d^2 = 0, \qquad (1)$$

получим: $a = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + d^2}$.

Для построения a надо начертить прямоугольный треугольник с катетами d и $\frac{d}{2}$ и от его гипотенузы отсечь отрезок длины $\frac{d}{2}$. Построив отрезок длины a, затем надо поместить его над плоскостью $ABB'A'$ так, чтобы он занял положение $[MN]$. Точкам M и N соответствуют симметричные им точки M' и N', причем длина $|MM'|$ равна диагонали куба: $|MM'| = d\sqrt{3}$. Так как $|MN| = a$, то $|MN'|^2 = 3d^2 - a^2$ (из прямоугольного треугольника MNN'). Таким образом, $|MN'|^2 = 3d^2 - a^2 = d^2 + 2d^2 - a^2$; из квадратного уравнения (1) имеем: $2d^2 = 2a^2 + 2ad$, поэтому $|MN'|^2 = d^2 + 2ad + a^2 = (d+a)^2$, $|MN'| = d + a$. Следовавательно, отрезок MN находится на расстоянии $\frac{a}{2}$ от плоскости грани $ABB'A'$. Проекции точек M и N на эту плоскость находятся на средней линии грани на расстоянии $\frac{a}{2}$ от ее середины. Итак, положение вершин M, N, M', N' нам известно.

Если A принять за начало координат, ось x направить по прямой AB, ось y — по (AA'), ось z — перпендикулярно к ним, то координаты точки M будут $\left(\frac{d-a}{2}; \frac{d}{2}; \frac{a}{2}\right)$, поэтому, используя, что $d^2 - ad = a^2$, получим:

$$|AM|^2 = \frac{d^2 - 2ad + a^2 + d^2 + a^2}{4} = \frac{2(d^2 - ad) + 2a^2}{4};$$

$$|AM|^2 = \frac{2a^2 + 2a^2}{4} = a^2.$$

Итак, $|AM| = |MN| = |NB| = a$. Аналогичным вычислением установим по координатам $\left(\frac{d+a}{2}, \frac{d}{2}, \frac{a}{2}\right)$ точки N, что $|AN| = |AB| = d$, а по координатам $\left(\frac{d}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{d-a}{2}\right)$ точки P, получим, что $|PN| = |PM| = d$. Итак, точки A, M, N, B, P являются вершинами правильного пятиугольника. Отсюда следует, что и все остальные точки, построенные аналогичным образом, являются вершинами правильных пятиугольников — граней додекаэдра.

48. Ось симметрии октаэдра третьего порядка проходит через центры двух противоположных граней. Пусть ABC — одна из них, A', B', C' — вершины второй грани, симметричные с соответствующими вершинами первой относительно центра S октаэдра. Так как плоскости граней ABC и $A'B'C'$ параллельны, то середины ребер $[AB']$, $[BC']$, $[CA']$, $[AC']$, $[BA']$ и $[CB']$ лежат в одной и той же плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр октаэдра. При этом отрезки, соединяющие середины этих ребер, конгруэнтны между собой и по длине равны половине ребра октаэдра. (Например, середины $[AB']$ и $[AC']$ являются концами отрезка длины $\frac{|B'C'|}{2}$ — средней линии треугольника $AB'C'$.)

Итак, эти точки являются вершинами правильного шестиугольника, так как они лежат в одной плоскости на равных расстояниях друг от друга и от центра октаэдра.

49. Поместим на средних линиях граней куба по одному отрезку одинаковой длины m с концами на равных расстояниях от ребер. Расположим отрезки и выберем их длину так, чтобы, соединяя концы отрезка одной грани с концом отрезка на другой грани, получить равносторонний треугольник. На рисунке 102 на передней грани куба помещен отрезок $[MN]$. На боковой грани — $[PQ]$. Определим, при каком значении m будем иметь

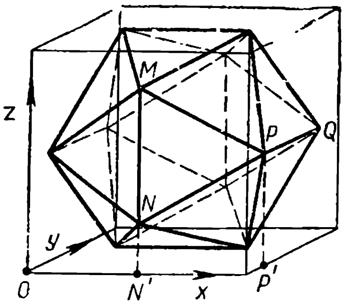


Рис. 102

$|MN| = |PM| = |PN|$, если ребро куба имеет длину a. Примем одну из вершин куба за начало координат O, а оси Ox, Oy, Oz направим по ребрам куба. Тогда будем иметь: $N = N\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a-m}{2}\right)$, $P = P\left(a; \frac{a-m}{2}; \frac{a}{2}\right)$. Вычислим расстояние $|NP|$ и потребуем, чтобы оно равнялось m. Получим уравнение:

$$|NP|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(a-m)^2}{4} + \frac{m^2}{4} = m^2;$$

$$\frac{a^2 + a^2 - 2am + m^2 + m^2 - 4m^2}{4} = 0;$$

$$m^2 + am - a^2 = 0.$$

Мы получили уже знакомое уравнение «золотого сечения». Построив, как в задаче 47, по отрезку длины a отрезок длины m и поместив такие отрезки на шести гранях куба, получим 12 вершин икосаэдра.

50. Рассмотрим октаэдр (рис. 103) с гранью ABC и противоположной гранью $A'B'C'$ (вершины, симметричные относительно центра октаэдра, обозначены одной и той же буквой). Длину ребра октаэдра обозначим через m. Располагая одну из граней икосаэдра MNP на грани октаэдра, мы должны разделить все ребра грани в одном и том же отношении так, чтобы ребра икосаэдра имели одну и ту же длину a. Обозначим через p бóльшую часть ребра октаэдра при таком делении. В треугольнике ANP имеем: $|NP| = a$, $|AP| = p$, $|AN| = m - p$, и по теореме косинусов

$$a^2 = p^2 + (m-p)^2 - 2p(m-p)\cos 60°;$$

$$a^2 = p^2 + (m-p)^2 - mp + p^2 = 3p^2 - 3mp + m^2. \quad (1)$$

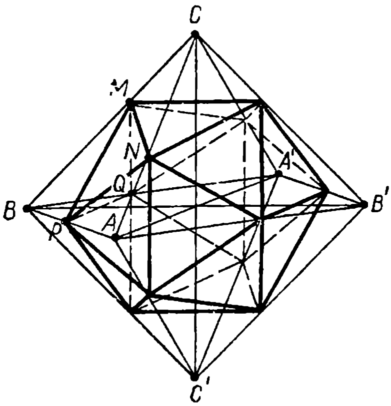


Рис. 103

В треугольнике ABA' точки P и Q делят стороны $[AB]$ и $[A'B]$ в одном и том же отношении, $|AB| = |A'B| = m$, $|AA'| = m\sqrt{2}$, $|PQ| = a$. В силу подобия получим:

$$\frac{a}{m\sqrt{2}} = \frac{m-p}{m}; \quad a = (m-p)\sqrt{2};$$

$$a^2 = 2m^2 + 2p^2 - 4mp.$$

Сравнивая найденное значение a^2 со значением a^2 из (1), получим уравнение: $3p^2 - 3mp + m^2 = 2m^2 + 2p^2 - 4mp$;

$$p^2 + mp - m^2 = 0.$$

Мы вновь получили уравнение «золотого сечения». Деля в этом отношении все ребра октаэдра, мы получим 12 вершин искомого икосаэдра.

51. Проведем через центр правильного многогранника и центр его грани ось симметрии n-го порядка. Прямые, проходящие через середины ребер этой грани и перпендикулярные ребру, лежат в плоскости симметрии многогранника, проходящей через проведенную ось и середину ребра. Кроме того, эти прямые перпендикулярны радиусу касающейся сферы и образуют равные по величине углы с плоскостью грани. Вследствие этого все они пересекаются с осью симметрии в одной и той же точке и образуют правильный n-гранный угол. Вместе с тем каждый из этих перпендикуляров, образуя такой же по величине угол с соседней гранью, пересекает и другую ось симметрии, построенную по соседней грани, т. е. является ребром «соседнего» n-гранного угла. В результате мы получим f вершин с n-гранным углом при каждой вершине, причем все эти вершины соединены ребрами, ограничивающими грани правильного многогранника. Действительно, все новые вершины находятся на равных расстояниях от центра, а оси симметрии образуют друг с другом равные по величине углы и являются ребрами m-гранных углов, опирающихся на правильные m-угольники. Итак, мы получили правильный многогранник с m-угольными гранями и с n-гранными углами, т. е. многогранник, двойственный данному.

52. Из метода построения правильного многогранника, описанного в задаче 36, следует, что каждый многогранник из его центра S можно разбить на f правильных многогранных углов, заполняющих все пространство. Эти углы у одноименных многогранников конгруэнтны. Поэтому, совмещая перемещением пространства центры двух правильных одноименных многогранников друг с другом, мы можем совместить друг с другом и каждую пару конгруэнтных между собой многогранных углов. После этого уже нетрудно доказать, что два таких многогранника гомотетичны с центром гомотетии в общем центре многогранников.

§ 8. 1. Прямая призма, вписанная в цилиндр, имеет с ним равные высоты, причем основание призмы — вписуемый многоугольник.

Обратно: если основанием прямой призмы служит вписуемый многоугольник, то, описав около него окружность, получим основание цилиндра, образующими боковой поверхности которого служат ребра призмы.

2. Если прямая призма описана около цилиндра, основанием ее должен служить многоугольник, в который можно вписать окружность.

Обратно: если основанием прямой призмы служит многоугольник, в который можно вписать окружность, то, вписав такую окружность, мы принимаем соответствующий круг за основание цилиндра. Образующие его боковой поверхности перпендикулярны плоскости основания. Те из них, которые проходят через точки касания окружности, вписанной в многоугольник основания, со сторонами многоугольника, лежат в плоскостях боковых граней, так как призма — прямая.

3. Пусть ось цилиндра пересекает плоскость сечения в точке P. Проведем через точку P плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Эта плоскость пересечет плоскость сечения по прямой l. Если принять прямую l за ось симметрии, то отсеченная перпендикулярной плоскостью часть скошенного цилиндра («копыто») после этой симметрии дополнит скошенный цилиндр до цилиндра с высотой $|OP|$. Отсюда следует, что объем скошенного цилиндра равен произведению площади основания на длину отрезка оси от центра основания до точки ее пересечения с секущей плоскостью.

4. Пусть прямоугольник имеет стороны длины a и b. Пусть ось вращения l параллельна стороне длины a и находится от центра прямоугольника на расстоянии r. Тогда объем тела вращения будет равен разности объемов двух цилиндров: одного — с радиусом основания $r+\frac{b}{2}$ и высотой a, другого — с радиусом основания $r-\frac{b}{2}$ и той же высотой a. Получим:

$$V=\pi\left(r+\frac{b}{2}\right)^2 a-\pi\left(r-\frac{b}{2}\right)^2 a,$$

$$V=\pi a\left(r^2+rb+\frac{b^2}{4}-r^2+rb-\frac{b^2}{4}\right)=ab\cdot 2\pi r.$$

5. Поместим равносторонний цилиндр внутрь тетраэдра так, чтобы его основание совместилось с основанием тетраэдра, а ось — с высотой тетраэдра. Пересечем теперь всю фигуру плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту тетраэдра. Тогда в плоскости сечения мы получим фигуру, изображенную на рисунке 104. Здесь $[MP]$—ребро тетраэдра, $[MN]$ — высота основания, $[NP]$ — высота боковой грани, O — общий центр оснований тетраэдра и цилиндра, $A'B'C'D'$ — квадрат в сечении цилиндра. Луч OA' пересекает (NP) в точке A. Примем O за центр гомотетии, отображающей A' на A. Применяя эту гомотетию к цилиндру, мы получим цилиндр с сечением $ABCD$, причем окружность его верхнего основания будет касаться всех граней тетраэдра — в точке A

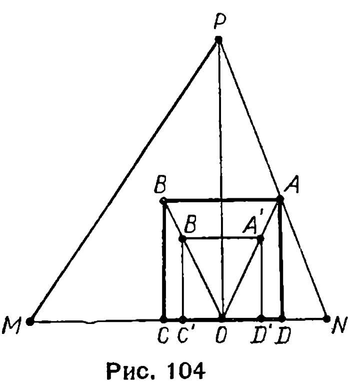


Рис. 104

и в соответствующих точках на двух других гранях. Для вычисления площади боковой поверхности и объема равностороннего цилиндра достаточно знать лишь его радиус r. Площадь боковой поверхности есть $S = 4\pi r^2$; объем — $V = 2\pi r^3$. Для определения r используем подобие треугольников PON и ADN. Имеем:

$$\frac{|AD|}{|PO|} = \frac{|DN|}{|ON|}. \qquad (1)$$

Здесь $|AD| = 2r$; $|PO|^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$. Далее, $|PO| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $|DN| = |ON| - |OD| = \frac{a}{2\sqrt{3}} - r$. Из равенства (1) получаем:

$$r = \frac{a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{6}.$$

6. Поместим равносторонний цилиндр так, чтобы ось цилиндра совпала с диагональю куба, а центр куба находился на равных расстояниях от оснований цилиндра. Проведем через эту диагональ куба диагональное сечение и получим в нем фигуру, изображенную на рисунке 105. Примем центр куба за центр гомотетии, отображающей точку A' на A; при этой гомотетии из нашего цилиндра получится как раз цилиндр, вписанный в куб. Чтобы найти радиус цилиндра r, рассмотрим подобные треугольники AMQ и MNP. Получим:

$$\frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AQ|}{|MP|}; \qquad (1)$$

здесь $|MQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r$, $|PN| = a\sqrt{2}$, $|AQ| = r$, $|MP| = a$. Из равенства (1) найдем: $\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r}{a\sqrt{2}} = \frac{r}{a}$, $a\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{2})$, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{2})}$. Зная радиус, вычислим площадь боковой поверхности и объем цилиндра по формулам (см., например, решение предыдущей задачи).

7. Длина окружности основания цилиндра увеличилась вдвое и вдвое уменьшилась высота, значит площадь боковой поверхности осталась неизменной. При увеличении вдвое радиуса основания его площадь увеличивается вчетверо, а при уменьшении при этом высоты вдвое объем цилиндра увеличивается вдвое.

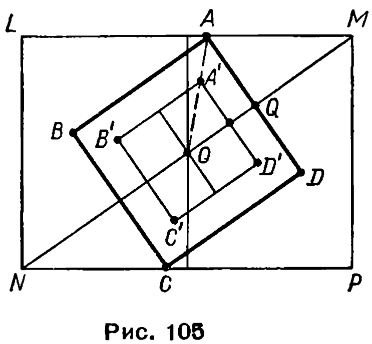


Рис. 105

8. Пусть P' проекция точки P на плоскость σ (рис. 106), A, B и C — данные точки, A', B', C' — проекции точки P на прямые BC, CA и AB. Так как прямые PA', PB', PC' перпендикулярны (BC), (CA), (AB), то перпендикулярны им и их проекции (почему?). Четырехугольники $P'A'CB'$ и $P'B'C'A$, вписуемые в окружность (окружности эти можно построить на отрезках $P'C$ и AP' как на диаметрах). Поэтому $B'\widehat{A'}C = B'\widehat{P'}C$ и $B'\widehat{C'}P' = B'\widehat{A}P'$. Отсюда следует, что и $A'\widehat{P'}C' = C\widehat{P'}A$. Но $A'\widehat{P'}C' + \widehat{ABC} = \pi$, так как два угла в четырехугольнике $A'P'C'B$ — прямые. Значит, и $C\widehat{P'}A + \widehat{ABC} = \pi$, т. е. P' лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Следовательно, множество точек P образует боковую поверхность цилиндра, основанием которого служит полученный круг, а высота равна $2h$ (по условию расстояние точек от P до α не больше h).

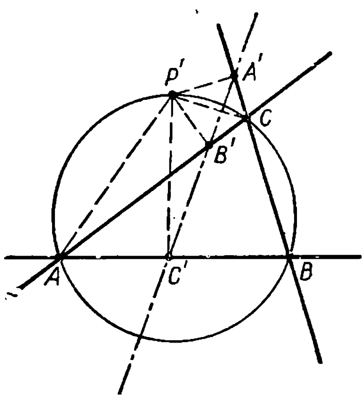


Рис. 106

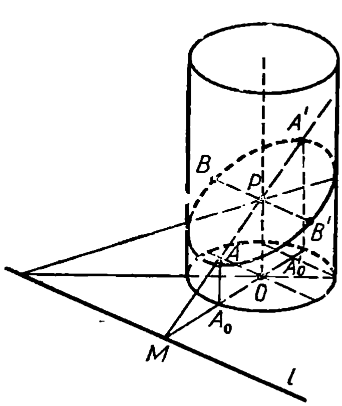


Рис. 107

9. Фигуру в пересечении боковой поверхности цилиндра с произвольной плоскостью можно рассматривать как параллельную проекцию окружности основания на плоскость сечения: проектирующими прямыми являются образующие боковой поверхности. Следовательно, это сечение — эллипс. Диаметр окружности, параллельный плоскости сечения, проектируется в диаметр эллипса, имеющий такую же длину. Перпендикулярный к нему диаметр окружности имеет проекцию большей длины, так как ее длина равна длине диаметра, деленной на косинус угла между диаметральной прямой и плоскостью сечения. Легко показать, что этот диаметр имеет наибольшую длину из всех диаметров эллипса.

Построение рассматриваемого сечения поверхности цилиндра показано на рисунке 107. Здесь l — прямая пересечения секущей плоскости с плоскостью основания; P — точка пересечения плоскости сечения с осью цилиндра; $[A_0A_0']$ — диаметр окружности основания, M — пересечение (A_0A_0') с l, A и A' — концы диаметра эллипса, получившиеся от пересечения (MP)

с соответствующими образующими цилиндра. Таким построением можно получить любое количество точек эллипса.

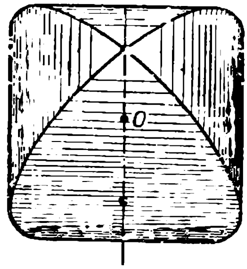


Рис. 108

10. Множество точек, находящихся на данном расстоянии от прямой l, есть цилиндрическая поверхность вращения с осью l. Множество точек, находящихся на данном расстоянии от α, две параллельные плоскости. Пересечением этих множеств являются два эллипса (см. предыдущую задачу).

11. Обозначим через O точку пересечения осей цилиндров (рис. 108). Секущая плоскость, параллельная осям и проходящая на расстоянии x от точки O, дает в пересечении с цилиндрами полосы шириной $2\sqrt{R^2-x^2}$, а в пересечении с рассматриваемым телом — квадрат. Площадь этого сечения равна $S(x)=4R^2-4x^2$. Так как эта площадь есть квадратичная функция от x, то для вычисления объема можно применить формулу Симпсона (см. ниже задачу 39): $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_m+S_n)$. Здесь $S_0=S_n=0$, $S_m=4R^2$, $h=2R$, поэтому $V=\frac{2R}{6}\cdot 16R^2$; $V=\frac{16}{3}R^3$. Ответ можно получить и непосредственным интегрированием функции площади сечения $S(x)$.

12. Пусть точка $M(x; y; z)$ находится на расстоянии r от оси Oz. Тогда $x^2+y^2=r^2$, так как точка M' — проекция M на Oxy — находится от точки O на расстоянии r. Но $r=z\operatorname{tg}\varphi$. Поэтому уравнением конической поверхности будет соотношение $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi=0$.

13. Пусть S — данная точка, в которой пересекаются прямые AA', BB', CC'. Из точки S исходят 6 лучей: SA, SA', SB, SB', SC и SC'. Для каждой тройки этих лучей, например SA, SB, SC, можно построить прямую, точки которой равноудалены от этих лучей (см. решение задачи 5 из § 6). Эта прямая есть ось конической поверхности, образующими которой являются лучи SA, SB, SC. Таких конических поверхностей можно построить четыре (если считать одинаковыми центрально симметричные конические поверхности, имеющие общую вершину и ось). Каждая из данных прямых является общей образующей всех четырех конических поверхностей.

14. Пусть выпуклый четырехгранный угол вписан в коническую поверхность вращения. Так как ось вращения l лежит в плоскости симметрии каждой пары образующих, двугранные углы, образуемые плоскостью грани и двумя плоскостями, проходящими через ось и соседние ребра, конгруэнтны друг другу. Обозначим через α, β, γ, δ величины двугранных углов при ребрах четырехгранного угла, а через α', α'', β', β'', γ', γ'', δ', δ'' — величины частей этих углов, полученных от деления их плоскостями, про-

ведеными через ребра и ось конической поверхности. Чтобы сделать картину наглядной, пересечем поверхность плоскостью, перпендикулярной оси. Тогда получим фигуру, изображенную на рисунке 109. Здесь O — точка на оси, A, B, C, D — точки на ребрах. Рассмотрим сначала случай (а), когда ось лежит внутри угла. Тогда получим: $\alpha + \gamma = \alpha' + \alpha'' + \gamma' + \gamma''$, $\beta + \delta = \beta' + \beta'' + \delta' + \delta''$. Но $\alpha' = \delta''$, $\alpha'' = \beta'$, $\gamma' = \beta''$ и $\gamma'' = \delta'$. Итак, $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Случаи (б) и (в) рассматриваются подобным образом: во всех случаях будет выполнено условие $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (докажите). Следовательно, это условие необходимо.

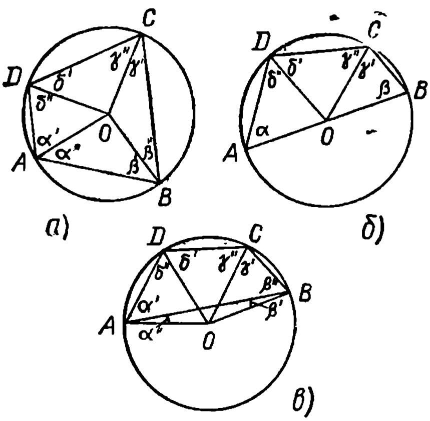


Рис. 109

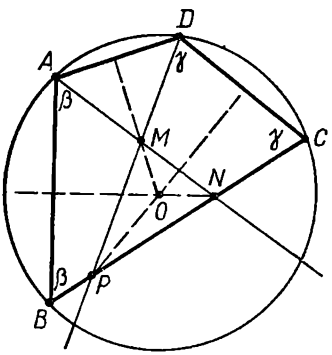


Рис. 110

Пусть теперь нам дано, что в выпуклом четырехгранном угле с вершиной S равны суммы: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Допустим сначала, что не все углы α, β, γ, δ равны между собой, и положим, что $\alpha > \beta$; тогда $\gamma < \delta$. Рассмотрим аналогичное сечение (рис. 110), на котором A, B, C, D — точки на ребрах четырехгранного угла. Построим внутри угла α угол, равный по величине β, а внутри δ — угол, равный по величине γ. Пусть (SM) — пересечение новых плоскостей, (SP) — пересечение плоскостей SDM и SBC, SN — пересечение плоскостей SAM и SBC. Трехгранные углы $SABN$ и $SCDP$ симметричны ввиду конгруэнтности углов при гранях SAB и SCD. Симметричен также и трехгранный угол $SADM$, так как конгруэнтны углы при ребрах $[SA)$ и $[SD)$: $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ (из основного условия). Итак, плоскость симметрии ребер $[SA)$ и $[SB)$ пройдет через ребро $[SN)$, плоскость симметрии ребер $[SC)$ и $[SD)$ пройдет через ребро $[SP)$, плоскость симметрии ребер $[SA)$ и $[SD)$ пройдет через ребро $[SM)$. В то же время эти три плоскости — плоскости симметрии трехгранного угла $SNMP$ и потому пересекаются по одной прямой SO, точки которой равноудалены от всех четырех ребер: $[SA)$, $[SB)$, $[SC)$, $[SD)$. В случае равенства двугранных углов достаточность условия доказывается проще, рассмотрением плоскостей симметрий этого четырехгранного угла.

15. Пусть коническая поверхность вращения вписана в четырехгранный угол $SABCD$. Пересекая фигуру плоскостью, перпендикулярной оси вращения l, получим в сечении фигуру, изображенную на рисунке 111. Точки A, B, C, D принадлежат ребрам; O — проекция вершины S на эту плоскость; m, n, p, q — проекции образующих, по которым коническая поверхность касается граней угла. Каждый плоский угол четырехгранного угла этими образующими разбивается на два угла. Каждое ребро лежит в плоскости симметрии двух соседних образующих, откуда получаем равенства:

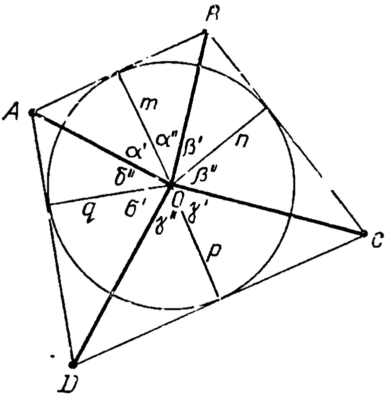


Рис. 111

$$\alpha'' = \beta', \ \beta'' = \gamma', \quad (1)$$
$$\gamma'' = \delta', \ \delta'' = \alpha'.$$

Сравним суммы плоских углов:

$$\widehat{ASB} + \widehat{CSD} = \alpha' + \alpha'' + \gamma' + \gamma'';$$
$$\widehat{BSC} + \widehat{DSA} = \beta' + \beta'' + \delta' + \delta''.$$

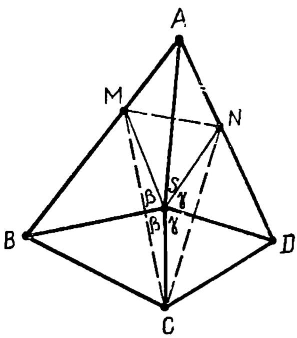


Рис. 112

Принимая во внимание равенства (1), видим, что эти суммы равны между собой. В этом состоит необходимое условие того, чтобы коническая поверхность вращения вписывалась в четырехгранный угол. Для доказательства достаточности этого условия рассмотрим четырехгранный угол $SABCD$ (рис. 112), в котором $\widehat{ASB} + \widehat{CSD} = \widehat{BSC} + \widehat{DSA}$. Докажем, что существует ось l, проходящая через S и равноудаленная от четырех граней. Эта ось является и осью вращения конической поверхности. Положим $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSD} = \gamma$, $\widehat{DCA} = \delta$. Пусть $\alpha > \beta$; тогда $\gamma < \delta$. Построим внутри угла α угол, равный по величине β, а внутри угла δ — угол, равный по величине γ: $\widehat{BSM} = \beta$, $\widehat{DSN} = \gamma$. Так как $\alpha - \beta = \delta - \gamma$, то $\widehat{MSA} = \widehat{NSA}$. Плоскость симметрии трехгранного угла $SBCM$ проходит через ребро $[SB)$, плоскость симметрии трехгранного угла $SCDN$ проходит через ребро $[SD)$, плоскость симметрии трехгранного угла $SAMN$ проходит через ребро $[SA)$. Одновременно те же самые плоскости являются плоскостями симметрии трехгранного угла $SMNC$, и поэтому все они пересекаются по одной прямой l, все точки которой равноудалены от четырех

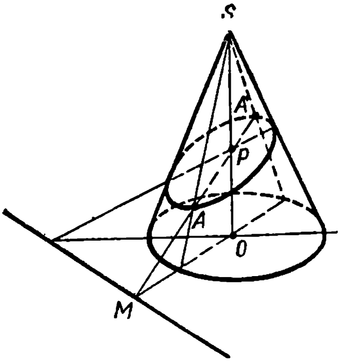


Рис. 113

граней данного угла: l и есть ось конической поверхности, вписанной в этот угол.

В случае, когда все четыре плоских угла конгруэнтны друг другу, искомая ось l есть прямая пересечения диагональных плоскостей четырехгранного угла.

16. Задача решается тем же способом, какой мы применяли при построении сечения цилиндра (задача 9). Построение показано на рисунке 113.

17. Если в осевом сечении конуса угол между образующими не превышает 90°, то этот угол будет наибольшим из углов между образующими. Следовательно, наибольшей является и площадь этого (осевого) сечения, так как эта площадь равна половине произведения квадрата длины образующей на синус угла между образующими. Если же указанный угол тупой, то наибольшая площадь сечения получится, когда угол между образующими — прямой ($\sin 90° = 1$). Чтобы построить такое сечение, нужно в окружности основания конуса провести хорду, длина которой равна диагонали квадрата, стороной которого является длина образующей, и провести сечение через вершину конуса и эту хорду.

18. Если цилиндр вписан в конус так, что одно его основание лежит в основании конуса, а другое касается его боковой поверхности, то в осевом сечении конуса мы получим равнобедренный треугольник со вписанным в него прямоугольником. Пусть расстояние от вершины конуса до верхнего основания цилиндра равно x, а радиус основания цилиндра равен r. Тогда из подобия треугольников получим пропорцию:

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{h};\ r = \frac{Rx}{h}.$$

Боковая поверхность цилиндра S вычисляется по формуле: $S = 2\pi r h'$, где $h' = h - x$; следовательно,

$$S = 2\pi \frac{Rx}{h}(h - x) = -2\pi \frac{Rx^2}{h} + 2\pi R x.$$

Мы получили квадратичную функцию от x, наибольшее значение которая принимает при $x = \frac{h}{2}$.

Итак, цилиндр с максимальной боковой поверхностью получится тогда, когда верхнее основание цилиндра будет проходить через середину высоты конуса.

19. Все касательные имеют общую точку и находятся на одном и том же расстоянии от центра сферы. Следовательно, объединение этих касательных является конической поверхностью вращения. Длина образующей l от точки S до точек касания вычисляется по теореме Пифагора: $l^2 = 4R^2 - R^2$, $l = R\sqrt{3}$.

Радиус r соответствующего конуса равен:

$$r = l \sin 30^\circ = \frac{l}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Площадь S боковой поверхности определяется по формуле:

$$S = \pi r l, \quad S = \frac{3\pi R^2}{2}.$$

20. Если в усеченный конус вписана сфера, то, произведя сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, мы получим в сечении равнобедренную трапецию со вписанной в нее окружностью. Диаметр окружности есть высота конуса, основания трапеции равны диаметрам оснований конуса: $2r$ и $2R$. По свойству сторон описанного четырехугольника боковые стороны трапеции дают в сумме $2R + 2r$, поэтому каждая из них имеет длину $R + r$. Отсюда нетрудно найти высоту трапеции: $h^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$. Итак, эта высота, а также и диаметр сферы есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований. Это **необходимое** условие для существования сферы, вписанной в усеченный конус.

Обратно, положим, что в равнобедренной трапеции высота $h^2 = 4Rr$, где R и r — половины длин оснований. Тогда боковая сторона a трапеции определяется по теореме Пифагора:

$$a^2 = 4Rr + (R - r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 = (R + r)^2.$$

Итак, $a = R + r$, а сумма двух боковых сторон равна $2R + 2r$. В данной трапеции суммы длин противоположных сторон равны между собой, следовательно, в эту трапецию можно вписать окружность. Радиус окружности будет и радиусом сферы, вписанной в усеченный конус, удовлетворяющий условию: $h^2 = 4Rr$.

21. Отметим на шаре точку P и из нее как из центра опишем по поверхности шара произвольную окружность. На полученной окружности отметим три точки A, B, C. Потом на плоскости (на листе бумаги) построим треугольник $A'B'C'$, конгруэнтный треугольнику ABC, и опишем окружность около треугольника $A'B'C'$. Таким образом нам будут известны расстояния $|PA| = r$ и $|A'P'| = r'$, где P' — проекция точки P на плоскость ABC (r' есть радиус окружности, описанный около треугольника $A'B'C'$). Зная это, мы можем построить треугольник $A_1P_1P_1'$ по гипотенузе r и катету r'. Продолжив (P_1P_1'), получим прямую, соответствующую диаметру шара; потом через точку A_1 проводим прямую, перпендикулярную (A_1P_1), — ее пересечение с прямой P_1P_1' определяет точку Q_1, которой на шаре соответствует точка Q.

диаметрально противоположная P. Тем самым диаметр шара построен — он равен $|P_1Q_1|$.

22. Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник: из каждой его вершины исходят две стороны, касающиеся сферы. Точки касания сферы с прямыми AB, BC, CD, DA обозначим буквами P, Q, R, T соответственно. Проведем через две такие касательные из одной вершины плоскость, которая пересечет сферу по окружности; те же касательные будут касательными и к окружности, поэтому они конгруэнтны друг другу и симметричны относительно прямой, соединяющей данную вершину с центром полученной окружности. Вместе с тем они симметричны и относительно плоскости, проходящей через эту прямую и центр сферы. Так как это справедливо и для всех остальных вершин четырехугольника, то мы можем, так же как и для описанного четырехугольника на плоскости, доказать, что и у этого четырехугольника суммы длин противоположных сторон равны между собой:

$$|AB|+|CD|=|BC|+|DA|. \qquad (1)$$

Предположим сначала, что не все стороны конгруэнтны друг с другом — пусть $|AB|>|BC|$; тогда $|CD|<|DA|$. Отложим на прямой BA от точки B $[BM]\cong[BC]$, а на (DA) от точки D — $[DN]\cong[DC]$. Тогда на основании (1) получим: $[AM]\cong[AN]$. Точки M и C лежат на симметричных касательных, и поэтому их плоскость симметрии проходит через центр сферы. Точно так же пройдут через центр сферы плоскости симметрии пар точек C и N, M и N. Те же плоскости являются и плоскостями симметрии вершин треугольника MNC; следовательно, все они проходят через одну и ту же прямую l, проходящую через центр сферы и перпендикулярную к плоскости MNC.

Тогда в силу конгруэнтности отрезков касательных получим: $(PT)\parallel(MN)$, $(PQ)\parallel(MC)$, $(RT)\parallel(NC)$, откуда и следует, что точки P, Q, R, T принадлежат одной плоскости, параллельной плоскости MNC.

23. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — гексаэдр, в котором $ABCD$ — грань, $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ — ребра. Через $ABCD$ проходит окружность. Эта окружность и точка A' вне плоскости $ABCD$ определяют сферу. Эта сфера пересечет плоскость ABA' по окружности, которая пройдет через точки ABA' и по условию и через B'. Применяя те же рассуждения к грани $BCC'B'$, получим, что она пройдет и через точку C'. Так же докажем, что сфера пройдет и через точку D'. Сфера эта однозначно определяется любыми четырьмя вершинами гексаэдра, не принадлежащими одной грани.

24. Возьмем три произвольные точки A, B, C данного множества. Этому же множеству принадлежит и любая точка окружности, проходящей через A, B и C. Пусть D — еще одна точка того же множества, $D\notin(ABC)$. Окружность, проходящая через

B, C и D, тоже содержится в этом множестве. Поскольку $D \notin (ABC)$, плоскости обеих окружностей пересекаются по прямой BC. Плоскость, проходящая через центры рассматриваемых окружностей и середину отрезка BC, перпендикулярна обеим плоскостям (почему?). Этой плоскости принадлежат два перпендикуляра, проведенные из центров окружностей к их плоскостям. Перпендикуляры пересекаются в точке O, равноудаленной от всех точек окружностей и потому являющейся центром сферы, проходящей через точки A, B, C, D. Этой сфере принадлежат и точки обеих окружностей. Любая точка P этой сферы вместе с точками B и D определяет окружность, проходящую по сфере и пересекающую каждую из двух наших окружностей. Так как эта окружность проходит через три точки данного множества, то она принадлежит ему всеми своими точками и, в частности, точкой P. Итак, все точки сферы принадлежат данному множеству. Чтобы доказать, что это множество точек и сфера совпадают, допустим, что множеству принадлежит точка M, не принадлежащая сфере. Тогда через точку M, произвольную точку пространства N и одну из точек сферы можно провести окружность. Эта окружность, проходя через M, пересекает сферу в двух точках, и потому все точки окружности, в том числе и N, должны принадлежать нашему множеству. Поскольку N — произвольная точка пространства, наше множество должно совпадать со всем пространством. Поскольку по условию задачи это не так, рассматриваемое множество совпадает со сферой.

25. а) Касание сфер может быть двоякого рода: 1) внешнее касание, когда сферы лежат одна вне другой и расстояние между их центрами равно сумме радиусов; 2) внутреннее касание, когда одна сфера находится внутри другой и расстояние между центрами равно разности радиусов.

Сфера S, касающаяся данных четырех сфер, может занимать по отношению к ним следующие положения: 1) все 4 сферы касаются сферы S извне; 2) все 4 сферы касаются сферы S изнутри; 3) 3 сферы касаются извне, одна — изнутри (4 положения); 4) 3 сферы касаются изнутри, одна — извне (4 положения); 5) 2 сферы касаются изнутри, две извне (6 положений). Всего для касающейся сферы получаем 16 различных возможностей.

б) Укажем построение в каждом из случаев.

1. Пусть сфера с центром O радиуса R касается извне четырех сфер с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 и одного радиуса r. Представим, что радиусы r четырех сфер уменьшились на одну и ту же длину и на ту же длину увеличился радиус R. Так как расстояния между центрами не изменились, касание сфер сохраняется. Доведем радиусы сфер до нуля, тогда сферы «выродятся» в точки O_1, O_2, O_3, O_4, а радиус касательной сферы станет равен $R+r$. Задача свелась к проведению сферы через 4 данные точки. Построив эту сферу, уменьшим ее радиус на длину r, получится искомая сфера, касающаяся данных четырех сфер.

2. Если радиус сферы, проходящей через точки O_1, O_2, O_3, O_4, увеличить на r, то получим сферу внутренним образом, касающуюся четырех сфер.

3. Аналогичным образом «стягиваем» три сферы внешнего касания в их центры; тогда четвертая касающаяся сфера будет иметь радиус $2r$. Задача свелась к построению сферы, проходящей через данные точки и касающейся данной сферы. Для этого проводим через 3 точки окружность и через центр проводим перпендикуляр к ее плоскости. На этом перпендикуляре должен быть центр касательной сферы. Проведем плоскость через эту прямую и центр четвертой сферы. Задача свелась к планиметрической: через две данные точки (это точки пересечения полученной плоскости с окружностью, проходящей через центры трех сфер) провести окружность, касающуюся данной окружности (см. задачу 49 из § 2).

4. В этом случае три сферы опять стягиваются в точки, а дальнейшее построение остается тем же, как в предыдущем случае.

5. В этом положении две сферы стягиваются в две точки, радиусы двух других сфер удваиваются. Центр касающейся сферы лежит в плоскости симметрии двух точек и в плоскости симметрии двух сфер. Так как 4 центра данных сфер не лежат в одной плоскости, то указанные плоскости симметрий пересекаются по некоторой прямой l. Любая сфера с центром на прямой l и проходящая через одну из точек O_1 или O_2 в силу симметрии проходит и через другую, а если она касается одной из сфер, то она касается и другой. Мы опять пришли к той же задаче: через две данные точки провести сферу, касающуюся данной сферы. Для ее решения можно воспользоваться тем же планиметрическим построением.

26. Проведем плоскость через центр шара O и общую точку S рассматриваемых прямых. В сечении получим семейство прямых, проходящих через S и пересекающих круг с центром O. Если P— середина одной из получающихся хорд, то $(OP) \perp (PS)$ и поэтому P принадлежит окружности, построенной на отрезке OS как на диаметре. В пространстве этой окружности соответствует сфера F с диаметром OS. Если точка S лежит внутри сферы G, ограничивающей данный шар, то множество точек P есть сфера F, если S принадлежит сфере G, то множество точек P есть сфера F, касающаяся сферы G в точке S с выкинутой точкой S. Наконец, если S лежит вне сферы G, то множество точек P есть пересечение сферы F с данным шаром.

27. Задача решается так же, как и предыдущая, — рассмотрением изображения в плоскости, проведенной через центр данной сферы перпендикулярно прямой l. Центры окружностей сечения образуют окружность, расположенную внутри сферы, если прямая пересекает данную сферу. Эти центры образуют окружность без одной точки, если прямая l касается сферы, и, наконец, образуют дугу окружности, если прямая l не имеет общих точек с данной сферой (концы этой дуги суть точки касания двух плоскостей рассматриваемого семейства с данной сферой).

28. Центр O правильного тетраэдра делит его высоту в отношении $1:3$. Центр описанной сферы совпадает с центром тетраэдра. Поэтому для построения тетраэдра, вписанного в сферу, выбираем какой-нибудь ее диаметр и на расстоянии $\frac{1}{3}R$ от центра проводим перпендикулярную к нему плоскость. Впишем в окружность пересечения этой плоскости со сферой равносторонний треугольник ABC, вершины которого соединим с дальним от точек A, B, C концом S выбранного диаметра. Докажем, что правильная треугольная пирамида $SABC$ есть правильный тетраэдр. Обозначим через O' центр окружности сечения. Например, вычисляя степень точки O' относительно сферы, получим:

$$\frac{2R}{3}\cdot\frac{4R}{3}=|O'A|^2; \quad |O'A|=\frac{2R\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Откуда } |AB|=\frac{2R\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора:

$$|SA|^2=|O'S|^2+|O'A|^2=\frac{16R^2}{9}+\frac{8R^2}{9}=\frac{24R^2}{9};$$

$$|SA|=\frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Итак, стороны оснований по длине равны боковым ребрам, т. е. тетраэдр $SABC$ правильный. Площадь его основания равна:

$$\frac{1}{2}|AB|^2\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{24R^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2R^2\sqrt{3}}{3},$$

а объем

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}R\cdot\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}=\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}.$$

29. Диаметр сферы, описанной около куба, равен диагонали куба: $2R=a\sqrt{3}$. Поэтому ребро вписанного куба нетрудно построить (например, как радиус окружности, описанной около правильного треугольника со сторонами, равными $2R$). Зная величину ребра, проводим диаметральное сечение сферы и в получившуюся окружность вписываем прямоугольник со стороной a и диагональю $2R$. Получаем четыре вершины куба. Еще четыре вершины получим в сечении, перпендикулярном первому. Объем полученного куба выразится формулой:

$$V=\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$$

30. Чтобы описать около сферы правильный тетраэдр, впишем в нее правильный тетраэдр и через его вершины проведем плоскости, параллельные противоположным граням. Эти плоскости перпендикулярны радиусам, идущим к вершинам, и поэтому касаются сферы. В пересечении этих четырех плоскостей получится тетраэдр, подобный данному, так как при повороте на углы $\frac{2\pi}{3}$ около осей симметрий вписанного тетраэдра касающиеся плоскости совмещаются друг с другом, т. е. все грани и многогранные углы описанного тетраэдра конгруэнтны. Расстояние от центра этого тетраэдра до его грани втрое больше того же расстояния для вписанного тетраэдра. Значит, его объем в 27 раз больше объема вписанного тетраэдра: $V = 8R^3\sqrt{3}$ (см. задачу 28).

31. Три диагонали октаэдра взаимно перпендикулярны. Обозначим через a половину диагонали, через r — радиус вписанной сферы, через O — общий центр октаэдра и вписанной сферы. Если принять диагонали за оси координат, точку O — за начало координат, то каждая грань октаэдра будет отсекать на осях отрезки длиной a. Поэтому расстояние r от грани до начала выражается формулой:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{r^2};\quad a^2=3r^2;\quad a=r\sqrt{3}\ \text{(см. задачу 57 из § 5).}$$

(Другой способ получить это состношение — формула $V_0=\frac{1}{3}S_0\cdot r$, где V_0 и S_0 — объем и площадь полной поверхности октаэдра.)

Длину a нетрудно построить (например, как длину стороны правильного треугольника, вписанного в круг радиуса r). Наконец, чтобы около данной сферы описать октаэдр, проведем через центр сферы O три взаимно перпендикулярные прямые и отложим на них от точки O отрезки длины a. Так мы получим все 6 вершин октаэдра. Объем его равен:

$$V=4\cdot\frac{1}{3}a^2a=\frac{4}{3}a^3=\frac{4}{3}r^3\cdot 3\sqrt{3}=4r^3\sqrt{3}.$$

32. Введем обозначения: a — длина образующей конуса, h его высота, R' — радиус основания, φ — угол между образующей и высотой. Используя соотношение между длиной отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат, и расстоянием от плоскости до начала координат (см. задачу 57 из § 5), получим:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{h^2};\quad \frac{3}{a^2}=\frac{1}{h^2};\quad 3h^2=a^2;\quad a=h\sqrt{3}.$$

Отсюда: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$.

В осевом сечении конуса мы получим фигуру, изображенную на рисунке 114. Выразим образующую, высоту и радиус основания конуса через радиус R вписанной сферы:

$$h = |SO| + |OO'| = \frac{R}{\sin\varphi} + R = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + R;$$

$$a = h\sqrt{3} = \frac{3R}{\sqrt{2}} + R\sqrt{3};$$

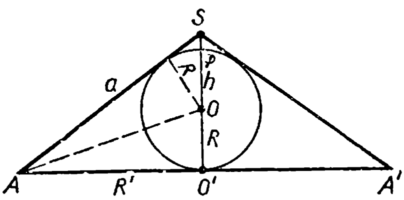


Рис. 114

$$R' = h\,\mathrm{tg}\,\varphi = h\sqrt{2} = R\sqrt{3} + R\sqrt{2}.$$

Итак, боковая поверхность конуса равна:

$$S_б = \pi R^2\frac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}};\quad S_б = \pi R^2\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

33. а) Два двуугольника с равными углами отображаются один на другой композицией поворотов около осей, проходящих через центр сферы: сначала поворотом вокруг оси, перпендикулярной диаметрам двуугольников, совмещаются эти диаметры, потом поворотом около получившегося общего диаметра совмещаются и сами двуугольники. б) Двуугольники одной сферы, имеющие равные углы, конгруэнтны между собой, поэтому имеют равные площади. Следовательно, если обозначить через S_α площадь двуугольника с углом радианной меры α, то площадь S_α пропорциональна α (поясните). Рассматривая площадь всей сферы как $S_{2\pi}$, из сказанного получаем пропорцию:

$$\frac{S_\alpha}{\alpha} = \frac{4\pi R^2}{2\pi};\quad S_\alpha = 2R^2\alpha.$$

34. На рисунке 6 изображена полусфера, площадь поверхности которой равна $2\pi R^2$. Эта полусфера разбивается на три двуугольника с площадями S_α, S_β, S_γ. При этом двуугольники S_α и S_β целиком содержатся в полусфере, а двуугольник S_γ — «частями»: сферическим треугольником ABC и дополнительной частью центрально симметричного с ним двуугольника, конгруэнтной с «недостающей» частью S_γ. При этом треугольник ABC содержится в каждом из этих двуугольников. Следовательно, чтобы получить площадь поверхности полусферы, можно из суммы площадей трех сферических двуугольников вычесть удвоенную площадь треугольника ABC, отсюда получим:

$$2\pi R^2 = 2R^2\alpha + 2R^2\beta + 2R^2\gamma - 2S_\Delta;$$
$$S_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Заметим, что $\alpha + \beta + \gamma$ есть сумма величин двугранных углов трехгранного угла $OABC$, которая всегда больше π, что соответствует положительности площади сферического треугольника. Разность $\sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется *избытком сферического*

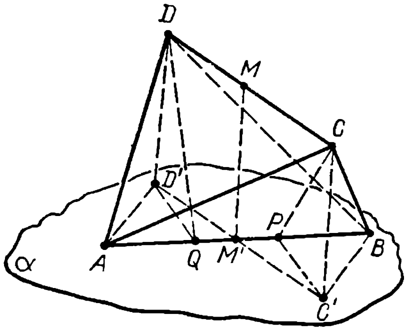


Рис. 115

треугольника. Формула площади сферического треугольника записывается через избыток в виде: $S_\Delta = \sigma R^2$.

35. Докажем прежде всего, что если грани тетраэдра $ABCD$ равновелики, то они конгруэнтны между собой. Проведем через (AB) плоскость α, параллельную (CD); пусть C' и D' — проекции C и D на α (рис. 115). Если $(C'P) \perp (AB)$ и $(D'Q) \perp (AB)$, то $[CP]$ и $[DQ]$ — высоты треугольников ABC и ABD (теорема о трех перпендикулярах). Треугольники эти равновелики и основание у них общее, поэтому $[CP] \cong [DQ]$. Отсюда следует, что $\triangle CC'P \cong \triangle DD'Q$: эти треугольники прямоугольные, и у них конгруэнтны гипотенузы и катеты. Поэтому $[C'P] \cong [D'Q]$, точка M' есть середина $[C'D']$, а значит, и точка M, проекция которой есть M', — середина $[CD]$. Если подобным же образом найти проекцию $[AB]$ на плоскость, параллельную α и проходящую через $[CD]$, то мы убедимся, что M'' — середина $[A'B']$ и, значит, M' — середина $[AB]$. Итак, M' — центр симметрии пар C' и D', A и B, следовательно, $[AD'] \cong [BC']$. Поэтому конгруэнтны прямоугольные треугольники BCC' и ADD', следовательно, $[BC] \cong$ $\cong [AD]$. Аналогично докажем, что $[AC] \cong [BD]$ и $[AB] \cong [CD]$. Этим доказана конгруэнтность треугольников — граней тетраэдра.

Установив это, найдем внутри тетраэдра точку O, равноудаленную от всех его вершин (пересечение плоскостей симметрии пар вершин). Соединяя ее со всеми вершинами, получим 4 треугольные пирамиды с конгруэнтными основаниями и с конгруэнтными боковыми ребрами. Описав окружность около каждой грани, мы убедимся, что их центры находятся на равных расстояниях от O. Поэтому точка O — центр описанной сферы в то же время служит центром сферы, касающейся всех граней в центрах окружностей, описанных около граней (поясните).

36. Рассмотрим диагональное сечение куба. Соединив его центр O с одной из точек деления на ребре куба и с серединой ребра, получим прямоугольный треугольник с катетами длиной $\frac{a}{6}$ и $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Расстояние от центра O до каждой из точек деления определяется из равенства: $\frac{a^2}{36} + \frac{2a^2}{4} = r^2$. Итак, $r = \frac{a\sqrt{19}}{6}$. Площадь поверхности сферы, описанной из центра O этим радиусом, равна: $S = \frac{19}{9}\pi a^2$.

37. Ввиду того что величина острых углов всех граней равна 60°, диагонали граней конгруэнтны боковым ребрам параллелепипеда. Пусть $ABCD$ — одна из граней, $A'B'C'D'$ — параллельная ей грань, A — вершина трех острых углов. Если от этого параллелепипеда отделить два правильных тетраэдра $AA'BD$ и $CC'B'D'$, то останется октаэдр $A'BDCB'D'$ (докажите). Сфера, вписанная в этот октаэдр, будет касаться и всех граней параллелепипеда. Из задачи 31 мы имеем, что если d — длина половины диагонали октаэдра, то радиус r вписанной сферы определяется по формуле: $d = r\sqrt{3}$. Длина же ребра октаэдра равна $a = d\sqrt{2}$. Итак, $a = r\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{\sqrt{6}}$, и объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{9}\pi\frac{a^3}{\sqrt{6}}$.

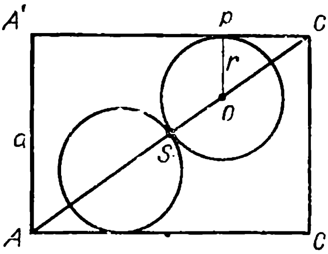


Рис. 116

38. Для построения касающихся сфер, вписанных в противоположные трехгранные углы куба, рассмотрим диагональное сечение куба $AA'C'C$ (рис. 116). Построить сферы можно методом гомотетии. Из подобия треугольников $AA'C'$ и OPC' получим:

$$\frac{r}{a} = \frac{\frac{d}{2} - r}{d}; \quad \frac{r}{a} = \frac{d - 2r}{2d}.$$

Здесь $d = a\sqrt{3}$ — длина диагонали куба. Из полученной пропорции находим: $2dr = ad - 2ar$; $2ar\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} - 2ar$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Зная a, вычисляем объем каждого шара по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

39. Если $S(x) = a^2x + bx + c$, то объем V тела определится интегралом: $V = \int\limits_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{ch^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch$, где h — высота тела.

Чтобы получить отсюда формулу Симпсона, подставим в многочлен $ax^2 + bx + c$ последовательно значения $x = 0$, $x = \frac{h}{2}$, $x = h$ и получим: $S_0 = c$; $S_m = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c$, $S_n = ah^2 + bh + c$. Умножая S_m на 4 и складывая полученные значения, найдем:

$$S_0 + 4S_m + S_n = 2ah^2 + 3bh + 6c.$$

Умножая обе части равенства на $\frac{h}{6}$, получим:

$$\frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n) = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = V.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 166

Антонин Иванович Фетисов

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Спец. редактор *А. Н. Земляков*
Редактор *Л. М. Котова*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. И. Карасик*
Технический редактор *Л. Я. Медведев*
Корректоры *Н. И. Котельникова, П. Т. Нигель*

Сдано в набор 8/IV—1977 г. Подписано к печати 2/VIII—1977 г. 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага типогр. № 1. Печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 11,93. Тираж 80 тыс. экз. Заказ № 7755.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики им М. В. Фрунзе в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, г. Иваново-8, ул. Типографская, 6.
Цена 45 коп.