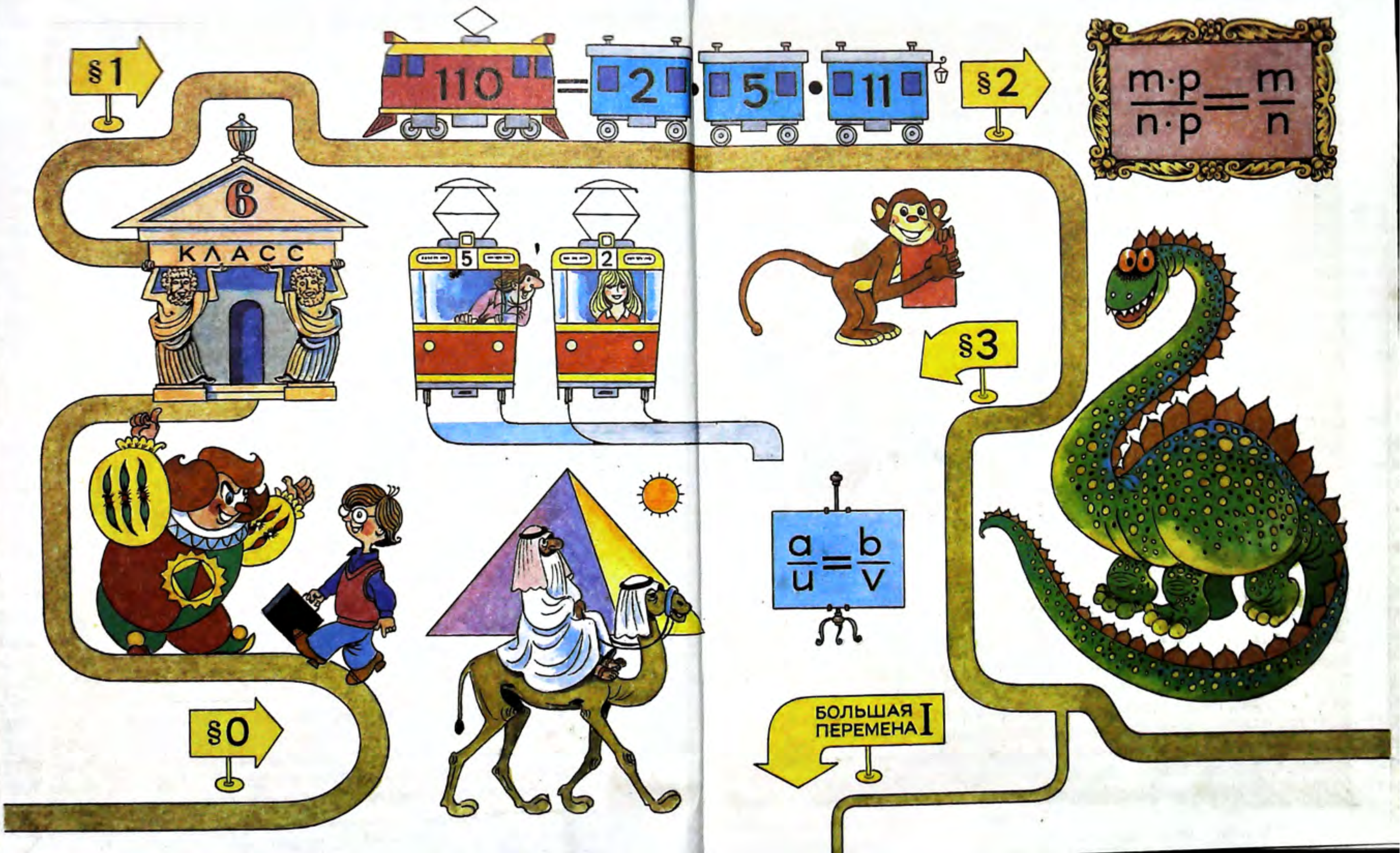
# МАТЕМАТИКА 6

УЧЕБНИК–СОБЕСЕДНИК

ПРОСВЕЩЕНИЕ



§1
110 = 2 · 5 · 11
§2
$\frac{m \cdot p}{n \cdot p} = \frac{m}{n}$
6
КЛАСС
5
2
§3
$\frac{a}{u} = \frac{b}{v}$
§0
БОЛЬШАЯ ПЕРЕМЕНА I

# Дар Правительства Российской Федерации

**ПРОДАЖЕ НЕ ПОДЛЕЖИТ!**

# МАТЕМАТИКА

## УЧЕБНИК–СОБЕСЕДНИК

**ДЛЯ 6 КЛАССА**
**ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ**

*Рекомендовано*
*Министерством образования*
*Российской Федерации*

3-е издание, переработанное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1997

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М34

Авторы:
Л. Н. ШЕВРИН, А. Г. ГЕЙН, И. О. КОРЯКОВ, М. В. ВОЛКОВ

*Учебник получил премию
на Всесоюзном конкурсе учебников по математике
для средней общеобразовательной школы*

**Математика:** Учеб.-собеседник для 6 кл. общеобразоват.
М34 учреждений / Л. Н. Шеврин, А. Г. Гейн, И. О. Коряков,
М. В. Волков.— 3-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1997.—
223 с.: ил.— ISBN 5-09-007529-8.

ББК 22.1я72

ISBN 5-09-007529-8

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот учебник — продолжение книги «Математика, 5. Учебник-собеседник», по которой, как мы надеемся, вы занимались в 5-м классе. Помните, как начиналась та книга? Она начиналась предисловием под названием «Как работать с учебником». Мы не будем повторять его здесь (хотя вам было бы полезно перечитать его, и мы советуем сделать это). Напомним только, что работу с учебником мы сравнили в том предисловии с долгим путешествием по стране Математике. Закончились летние каникулы, и эту работу-путешествие нужно продолжать.

В настоящем путешествии редко возвращаются в те места, которые уже пройдены. При изучении же математики, напротив, возвращаться к пройденному приходится нередко: ведь оно служит опорой для новых знаний! Приступая к изучению математики в 6-м классе, надо помнить пройденное в 5-м, а если что-то забылось — повторить. Для краткого повторения материала 5-го класса мы включили в учебник особый параграф, который помещен перед главой I. И номер ему присвоили особенный — нулевой. В некоторых уроках этого параграфа вы узнаете и кое-что новое, но в основном новый материал начнется с § 1.

Как и в нашей книге для учеников 5-го класса, каждый параграф в учебнике делится на уроки. Чтобы пройти в классе один урок из учебника, вам понадобится иногда один школьный урок, а иногда два или больше. Но, как и раньше, немалая часть работы с учебником будет проходить дома.

Как и к учебнику для 5-го класса, мы составили специальную рабочую тетрадь для этого учебника. Она напечатана отдельной книжкой. В ней продолжаются задания к каждому уроку из учебника. Не забывайте брать в школу рабочую тетрадь.

На страницах учебника вы снова встретитесь со Смекалкиным (а изредка и с его младшим братом) и с математическим клоуном. В таких местах в книге появляются знакомые вам картинки:

когда Смекалкин что-то спрашивает, вклиниваясь в объяснительный текст;

когда Смекалкин, поняв объяснение, утверждает нечто;

когда клоун предлагает свои задачки с шутками или подвохами.

Перечислим также другие ориентирующие знаки в учебнике или рабочей тетради. Для тех, кто забыл их смысл, мы напоминаем, на что указывает каждый из них:

? вставленное в объяснительный текст обращение к вам с вопросом;

! вставленное в объяснительный текст небольшое задание;

место в объяснительном тексте, где можно остановиться и передохнуть, можно отвлечься (если таких мест в уроке несколько, то число колокольчиков около красной черты растет);

**?** начало группы вопросов (после объяснительного текста урока), требующих устного ответа;

**!** начало группы заданий к уроку;

**(У)** устное задание;

■ задача, ответ к которой надо записать в рабочую тетрадь;

* более трудное задание;

▲ необязательный материал в объяснительном тексте или в заданиях.

Снова после каждой главы идет очередная большая перемена. В больших переменах мы как бы отклоняемся от основного маршрута в нашем путешествии по стране Математике. Помещенные в них рассказы можно обсуждать на занятиях математического кружка. А можно, конечно, и просто читать их дома.

* * *

Итак, путешествие по стране Математике продолжается. В добрый путь!

## § 0. ПОВТОРЕНИЕ

В предисловии мы объяснили, зачем нужен такой повторительный параграф. В нашем учебнике для 5-го класса было 10 параграфов. Здесь материалу каждого из них отводится только один урок.

*Значит, уроков в параграфе — десять.*

Да. А их заголовки повторяют заголовки параграфов предыдущего учебника. Понятно, что в объяснительных текстах этих уроков мы можем лишь очень кратко напомнить пройденное в 5-м классе. Поэтому в них можно найти ответы далеко не на все задаваемые затем вопросы. Тому, кто затруднится с ответом на какой-нибудь вопрос, мы советуем более подробно повторить нужный материал, обратившись к учебнику для 5-го класса. Ну и, конечно, вы всегда можете обратиться к своему учителю.

**Урок 1**

### НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Много внимания в 5-м классе было уделено изучению натуральных чисел. Вы узнали прежде всего, что способ записи чисел с помощью цифр называется **нумерацией** (или, по-другому, **системой счисления**), что наша нумерация **позиционная** и **десятичная.**

*Что означают эти свойства нумерации?*

Вы научились сравнивать многозначные натуральные числа и записывать цепочки равенств и неравенств.

*Какое свойство цепочек равенств и неравенств вы помните?*

Если все натуральные числа «выстроить по порядку» (так, что каждое следующее будет на единицу больше предыдущего), то получится бесконечный ряд. Он называется **натуральным рядом.**


Чтобы было интереснее говорить о натуральном ряде, давайте представим, на что он похож. Можно представить себе бесконечную прямую дорогу, на которой расставлены метки как будто километровые столбы. Обычные километровые столбы вдоль дорог отмечают по порядку километры, а наши метки пусть отмечают натуральные числа.

*Я вот что придумал: натуральный ряд похож не только на бесконечную дорогу, но и на бесконечную линейку.*

Это — удачное сравнение. Такая бесконечная линейка пригодится нам позднее, начиная со второй главы.

*Расстояние между двумя соседними столбами на обычной дороге 1 км. А какое расстояние между двумя соседними натуральными числами на нашей бесконечной дороге?*

Ответим так: хотя километрами расстояние между натуральными числами измерять бессмысленно, можно говорить про удаленность чисел друг от друга. Помните, в нашем учебнике для 5-го класса (в уроке 43) есть рассказ о том, как сказочный волшебник отправился «в поход» по натуральному ряду? Так

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...**

вот, удаленность натуральных чисел друг от друга можно «измерять» в шагах этого волшебника. Например, соседние натуральные числа удалены друг от друга на 1 — ведь от одного числа до другого нужно сделать один шаг. Числа 2 и 9 удалены друг от друга на 7 — ведь от одного числа до другого нужно сделать семь шагов. Числа 17 и 24, 118 и 111, 118 и 125 также удалены друг от друга на 7.

*Придумайте несколько пар чисел, удаленных друг от друга на 10; на 222.*

Как узнать, на сколько удалены друг от друга два данных числа? Легко догадаться, что для этого **нужно из большего числа вычесть меньшее.**

Это простое правило применяется при решении таких задач, как, например, следующая: «Одному из братьев 13 лет, а другому 5. Какова разница в возрасте братьев?» Ведь здесь фактически спрашивается про удаленность друг от друга чисел 13 и 5 в натуральном ряде. Каждый сразу вычислит, что они удалены друг от друга на 8.

*А я составил обратную задачу: «Разница в возрасте братьев 8 лет, одному брату 5 лет. Сколько лет другому?» Ответ: другому брату 13 лет.*

Верно. Но здесь можно составить не одну обратную задачу. Ведь как получается задача, обратная к первоначальной? Какое-то из чисел, данных в условии первоначальной задачи, объявляется неизвестным, а число, которое раньше требовалось найти, наоборот, дается в условии. В нашей задаче про братьев было дано два числа. Значит, к ней можно составить две обратные задачи.

*Составьте вторую обратную задачу и решите ее.*

Догадались ли вы, что эта обратная задача имеет два ответа? Ведь если дано, что одному брату 13 лет, а разница в возрасте братьев 8 лет, то еще неизвестно, кто из братьев старше. Поэтому второму брату либо 5 лет, либо 21 год.

Так что будьте внимательны, отыскивая числа, удаленные от данного числа на какое-то число.

**Вопросы и задания**

**1.1.** Что значит сравнить два числа? Какими математическими знаками записывают результат сравнения?

**1.2.** Как узнать, на сколько удалены друг от друга в натуральном ряде два числа? На сколько удалены друг от друга в натуральном ряде числа 117 и 203; числа 2304 и 1991?

**1.3.** а) «Вот какое сложное равенство я составил!» — воскликнул младший брат Смекалкина и показал Смекалкину свою запись:

$123+2\cdot 74-169=1208:4-57-143.$

Проверьте, правильно ли составлено равенство.

б) Смекалкин посмотрел на запись и сказал, что может сразу написать много еще более сложных равенств:

$123+2\cdot 74-169+18=1208:4-57-143+18;$
$123+2\cdot 74-169+1000=1208:4-57-143+1000;$
$123+2\cdot 74-169-29=1208:4-57-143-29;$
$123+2\cdot 74-169-101=1208:4-57-143-101;$
$(123+2\cdot 74-169)\cdot 12=(1208:4-57-143)\cdot 12;$
$(123+2\cdot 74-169)\cdot 100=(1208:4-57-143)\cdot 100.$

Проверьте эти равенства.

в) Младший брат удивился, как быстро Смекалкин сумел написать новые равенства. Смекалкин объяснил, что он знает правило: если к левой и правой частям равенства прибавить одно и то же число, то снова получится равенство. Пользуясь этим правилом, он получил первые два равенства из пункта б). Остальные четыре равенства из пункта б) тоже получены по каким-то правилам из равенства пункта а). Догадайтесь, какие это правила, сформулируйте их и запишите в тетрадь.

**1.4.** **(У)** а) В натуральном ряде число 238 стоит между числами 139 и 339. От какого из них оно дальше?

б) Туристы вышли из леса на шоссе неподалеку от километрового столба с отметкой 249 и решили пойти на ближайшую автобусную остановку. Посмотрев на план местности, руководитель группы сказал, что автобусные остановки расположены на 246-м и 251-м километрах. Куда пойдут туристы?

**1.5.** а) На сколько число 172 удалено в натуральном ряде от числа 123? Какое еще число удалено от числа 123 на столько же? б) Какое число в натуральном ряде удалено от числа 48 на столько же, на сколько удалено от него число 33?


**1.6.** а) Рядом с автобусной остановкой у деревни Сосновки стоит километровый столб, на котором написано 115. Это означает, что от города до Сосновки 115 км. А на столбе у Ольховки написано 143. Какое расстояние от Сосновки до Ольховки? б) Составьте две задачи, обратные к задаче а), и решите их.

**1.7. (У)** В натуральном ряде у каждого числа, кроме первого, имеются два соседних: число, ему предшествующее, и число, за ним следующее. Каковы в натуральном ряде соседи чисел: а) 136; б) 299; в) 3000; г) 52 011? Если $n$ обозначает натуральное число, большее 1, то как должны быть обозначены числа, соседние с ним в натуральном ряде?

**1.8.** а) **(У)** Буквой $n$ обозначено натуральное число, большее 4. Чему равны числа, удаленные от $n$ на 2? А на 3? б) Чему равны числа, удаленные от $n$ на 2, если $n$ обозначает число 8; 212; 1001; 159 999; 1 000 002? в) Чему равны числа, удаленные от 1 000 000 на $n$, если $n$ обозначает число 8; 212; 1001; 159 999; 1 000 002?

**1.9.** Один толстяк, весивший 111 кг, решил похудеть. Он стал соблюдать строгую диету и усиленно заниматься спортом. Через полгода он весил уже 98 кг. В следующие полгода он похудел на столько же килограммов, на сколько в предыдущие.

а) Сколько стал весить толстяк через год? б) На сколько килограммов он похудел за год?

**1.10.** **(У)** а) В натуральном ряде число 7 одинаково удалено от чисел 2 и 12. Проверьте это, вычислив, на сколько удалено число 7 от чисел 2 и 12. б) Какое число одинаково удалено от чисел 7 и 13?

▲ **1.11*.** Клоун придумал три ребуса:

а) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ВАГОН}\\ \text{ВАГОН}\end{array}\\ \hline \text{СОСТАВ}\end{array}$$ б) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ОДИН}\\ \text{ОДИН}\end{array}\\ \hline \text{МНОГО}\end{array}$$ в) $$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{СИНИЦА}\\ \text{СИНИЦА}\end{array}\\ \hline \text{ПТИЧКИ}\end{array}$$

В каждом из них расшифруйте, какая цифра скрывается за каждой буквой. ▲

**Урок 2**

## ДЕЙСТВИЯ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Решая задачи, приходится выполнять действия над числами. Значит, надо уметь определять, где и какое действие надо применить, как правильно да побыстрее его выполнить. Вы знаете такие действия: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень.

Как вы помните, вычитание называют действием, обратным сложению, а деление — действием, обратным умножению. На этой связи между действиями основаны правила проверки вычислений.

*Как проверить вычитанием правильность сложения; делением правильность умножения?*

### Вопросы и задания

**2.1.** Как называются компоненты сложения; вычитания; умножения; деления?

**2.2.** Какое число получится, если из натурального числа вычесть то же самое число; если натуральное число разделить само на себя?

**2.3.** Какое число получится, если к данному числу прибавить 0; если из данного числа вычесть 0; если данное число умножить на 0?

**2.4.** Можно ли разделить натуральное число на 0?

**2.5.** Что получится, если заданное число умножить на 1; разделить на 1?

**2.6.** Что называется основанием степени; показателем степени?

**2.7.** Дано число $b$. Чему равна его первая степень? Как называется вторая степень числа $b$? Что называется кубом числа $b$?

! **2.8. (У)** Игорь захотел узнать, сколько воды вмещает его чайная чашка. Он стал наливать воду чашкой в трехлитровую банку. В нее поместилось ровно 20 чашек воды. Сколько граммов воды вмещает одна чашка? (Масса 1 л воды 1 кг.)

**2.9.** Валя и Вера на своем садовом участке собрали 12 кг клубники. Из них 5 кг собрала Вера. Кто из девочек собрал клубники больше и на сколько?

**2.10.** Веревка длиной 1 м весит 100 г. Сколько весила бы веревка, если бы ею захотели измерить глубину Марианской впадины в Тихом океане — 11 022 м? Ответ запишите: а) в граммах; б) в килограммах; в) в центнерах; г) в тоннах.

**2.11.** Расстояние между домами, в которых живут Петя и Коля, 1200 м. Однажды они вышли каждый из своего дома и направились навстречу друг другу. Когда Петя прошел 400 м, они встретились. Во сколько раз расстояние, которое прошел Коля, больше расстояния, пройденного Петей?

**2.12.** От станции до озера 15 км. Туристы, направляясь от станции к озеру, полтора часа шли пешком со скоростью 4 км/ч, а затем сели на попутную машину, которая ехала со скоростью 72 км/ч. За какое время туристы добрались до озера?

**2.13.** Из клетчатой бумаги вырезаны квадрат со стороной 8 клеток и прямоугольник со сторонами 7 и 9 клеток. а) Сколько клеток располагается вдоль границы каждого из четырехугольников? б) Представьте, что оба четырехугольника разрезали на клетки, а затем выложили эти клетки в ряд отдельно для прямоугольника и для квадрата. Какой ряд будет длиннее и на сколько клеток?

**2.14.** а) Самое большое млекопитающее животное — кит — имеет массу 40 т. Самое маленькое млекопитающее — этрусская мышь — имеет массу всего 2 г. Во сколько раз кит тяжелее этрусской мыши?

б) Составьте и решите две обратные задачи к задаче из пункта а).

## ЧИСЛОВЫЕ И БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Когда люди говорят о математике, они вспоминают не только числа и фигуры, но также формулы и уравнения. И формулы, и уравнения обязательно содержат буквенные выражения. Вспомните: **буквенным выражением** называется запись, в которой числа и буквы связаны знаками действий.

*Приведите два-три примера буквенных выражений.*

Если в буквенное выражение вместо букв подставить числа, то получится числовое выражение. Его значение называют значением этого буквенного выражения при данных значениях букв.

*Подсчитайте значение выражения* $2\cdot n-m$ *при* $n=3$ *и* $m=5$.

Конечно, чтобы правильно вычислить значение выражения, нужно помнить, в каком порядке выполняются действия. В выражении без скобок возведение в степень выполняют до умножения и деления, а умножение и деление — до сложения и вычитания. В выражении со скобками сначала выполняют действия в скобках (в том порядке, о котором только что было сказано).

*Укажите, в каком порядке надо выполнять действия в следующих выражениях:* $8\cdot6+288:(15-3)^2$;

$$(4^2-(6^2-(8^2-9\cdot7)^3-7\cdot5)^3-5\cdot3)^3.$$

*Найдите значения этих выражений.*

Поговорим теперь немного о формулах и уравнениях. Формулами записывают зависимости между величинами или различные свойства действий.

*Вспомните формулы, выражающие зависимость площади прямоугольника от длин его сторон, скорости от пройденного пути и затраченного времени, стоимости от цены и количества покупаемых изделий. Запишите формулами переместительный закон сложения и сочетательный закон умножения.*

Уравнения — незаменимый помощник в решении задач.

Когда с помощью уравнения решают какую-либо задачу, то, как вы знаете, неизвестное число обозначают буквой. А затем записывают в виде равенства зависимость между неизвестным числом и величинами, которые даны в задаче. **Уравнением** как раз и называется равенство, содержащее букву, если требуется найти неизвестное число, обозначенное этой буквой. **Решить уравнение — значит найти неизвестное число.**

### Вопросы и задания

**3.1.** Что такое буквенное выражение?

**3.2.** Что называют значением буквенного выражения при данных значениях букв?

**3.3.** Что такое уравнение? Что значит решить уравнение?

**3.4.** **(У)** Найдите значение числового выражения:
а) $5^3$; б) $2^3+3^2$; в) $(15-2\cdot 7)^5$; г) $1997^{(2\cdot 3-5)}$; д) $(3\cdot 4-6\cdot 2)^{10}$;
е) $8\cdot 10^4+7\cdot 10^3+6\cdot 10^2+5\cdot 10^1+4$.

**3.5.** Выполните действия:
а) $(32^2-999):5+(43^2-999)^2:425$;
б) $307^2-703\cdot(730-703)^3:999$;
в) $(602-593)^3:(313-286)^2+(721-689)^2:(902-894)^3$.

**3.6.** Найдите значение буквенного выражения
$(134-k)^2:(k-2)+(7+k)^3$ при $k=6$; 8; 10; 11; 13; 14.

**3.7.** Решите уравнение:
а) $x+157\,491:307=703$;
б) $199\,923:647-y=281$;
в) $(1116-875)\cdot z=97\,123$;
г) $663\cdot 851:u=897$;
д) $x:345\,678=425\,455-309\,406$;
е) $383\cdot t+22\,222=101\,503$;
ж) $29\cdot z-38\,718=68\,843$;
з) $9187-y:409=7819$.

**3.8.** На две машины было погружено 20 ящиков. Когда с одного грузовика на другой переложили 3 ящика, ящиков на машинах стало поровну. Сколько ящиков было первоначально на каждом грузовике? Решите задачу, составив уравнение.

**3.9.** Для каждого из неравенств а) — е) напишите по два числа, которые может обозначать буква $n$, чтобы неравенство было верным: а) $n<555$; б) $n>1000$; в) $659<n$; г) $2001>n$; д) $2\cdot n>13$; е) $3\cdot n<200$.

**3.10.** Дано числовое выражение без скобок. Двое играющих по очереди ставят пару скобок так, чтобы получалось выражение, значение которого отличается от значения предыдущего выражения. Игра заканчивается, когда ни один из игроков не может сделать ход. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

Поиграйте с соседом по парте в эту игру для выражения:

а) $6\cdot7+5\cdot8+3\cdot9-4\cdot2-1$; б) $23\cdot8-6\cdot2+5\cdot18-8:2$;

в) $1\cdot1+1\cdot1-1\cdot1+1\cdot1-1:1$.

**3.11*.** Петя ждал автобуса на остановке. Не дождавшись, он пошел к следующей остановке, расстояние до которой 750 м. Отойдя на 250 м, он увидел, что к остановке подошел автобус. Автобус делает посадку в течение 30 с, а между остановками движется со скоростью 56 км/ч. Успеет ли Петя сесть в автобус на следующей остановке, если он будет бежать со скоростью: а) 4 м/с; б) 5 м/с?

**3.12*.** Число 64 является квадратом числа 8 и кубом числа 4 *(проверьте!)*. Найдите еще какое-нибудь число, которое является квадратом одного числа и кубом другого.

**Урок 4**

## СВОЙСТВА ДЕЙСТВИЙ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Чтобы было легче выполнять действия над числами, надо помнить и уметь применять свойства этих действий.

*Я помню два свойства сложения и умножения — переместительное и сочетательное. Переместительное свойство разрешает менять местами слагаемые или множители, а сочетательное — расставлять скобки так, как нам удобнее.*

Смекалкин правильно вспомнил смысл переместительного и сочетательного свойств. Мы называли эти важные свойства законами. Сформулируем каждый из них «одним ударом» для сложения и умножения.

Переместительный закон:

**От перемены мест $\dfrac{\text{слагаемых сумма}}{\text{множителей произведение}}$ не меняется.**

А вот формулы, выражающие этот закон:

$$a+b=b+a, \qquad a\cdot b=b\cdot a.$$

Сочетательный закон:

**От изменения расстановки скобок $\dfrac{\text{сумма}}{\text{произведение}}$ не меняется.**

Вот формулы для этого закона:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Напомним, что сочетательный закон выполняется не только тогда, когда компонентов действия три, но и когда таких компонентов больше трех. Как вы помните, этот закон позволяет не ставить скобки в $\dfrac{\text{сумме}}{\text{произведении}}$ нескольких $\dfrac{\text{слагаемых}}{\text{множителей}}$. Вместе с переместительным законом он позволяет группировать слагаемые или множители так, как это удобно для вычислений. Например:

$$216+597+378+684+122=(216+684)+(378+122)+597=$$
$$=900+500+597=1997.$$

Вспомним теперь равенства для выражений, в которых участвуют три числа и вычитание применяется два раза. Таких выражений два, они отличаются друг от друга расстановкой скобок:

$$(a-b)-c \text{ и } a-(b-c).$$

Для каждого из них есть формула, приравнивающая данное выражение к другому, в котором участвует также и сложение. Тем самым упомянутые формулы выражают свойства действий, которые можно назвать совместными свойствами вычитания и сложения. Вот эти формулы:

$$(a-b)-c=a-(b+c);$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

А вот еще две формулы, которые выражают совместные свойства вычитания и сложения:

$$(a+b)-c=(a-c)+b;$$
$$(a+b)-c=a+(b-c).$$

Теперь стоит вспомнить формулы, выражающие совместные свойства умножения и сложения, а также умножения и вычитания. Это распределительные законы.

*Напишите формулы этих законов.*

**Задания**

**4.1. (У)** Пользуясь переместительным и сочетательным законами, вычислите удобным способом:

а) $62+(38+79)$;
б) $593+(725+207)$;
в) $(144+379)+121$;
г) $(166+367)+134$;
д) $5\cdot(6\cdot32)$;
е) $8\cdot(43\cdot25)$;
ж) $(9\cdot35)\cdot2$;
з) $(15\cdot11)\cdot4$.

**4.2.** **(У)** Со склада надо доставить 27 т груза. На первом грузовике увезли 7 т, на втором 8 т. Что означают выражения $(27-7)-8$ и $27-(7+8)$? Какой вывод можно сделать?

**4.3.** На отрезке $AD$ отмечены точки $B$ и $C$ так, как показано на рисунке 1. а) Известны длины отрезков $AD$, $AB$ и $BC$. Длину отрезка $CD$ можно найти двумя способами. Запишите каждый из этих способов формулой. Какой вывод можно сделать? Вычислите длину $CD$, если $AD=47$ см, $AB=12$ см и $BC=23$ см. б) Известны длины отрезков $AD$, $AB$ и $CD$. Длину отрезка $BC$ можно найти двумя способами. Запишите каждый из этих способов формулой. Какой вывод можно сделать? Вычислите длину $BC$, если $AD=2$ м 6 см, $AB=93$ см и $CD=67$ см.

Рис. 1


**4.4.** **(У)** Вычислите удобным способом:

а) $(245+38)-145$; в) $284-(84+37)$; д) $137-(37-18)$;
б) $(65+358)-158$; г) $648-(48+85)$; е) $752-(52-37)$.

**4.5.** Вычислите значение выражения, сначала упростив его:

а) $7\cdot b+9\cdot b$ при $b=2$; 22; 222;
б) $12\cdot z-8\cdot z$ при $z=3$; 34; 345;
в) $m\cdot 13+m\cdot 7$ при $m=12$; 23; 34;
г) $t\cdot 22-t\cdot 15$ при $t=123$; 231; 312;
д) **(У)** $5\cdot x+5\cdot y$ при $x=34$ и $y=66$;
е) **(У)** $7\cdot a-b\cdot 7$ при $a=28$ и $b=18$.

**4.6.** **(У)** Найдите значение выражения:

а) $4\cdot a+4\cdot b$, если $a+b=23$;
б) $c\cdot 13+d\cdot 13$, если $c+d=11$;
в) $9\cdot y-9\cdot z$, если $y-z=34$;
г) $m\cdot 21-n\cdot 21$, если $m-n=15$.

**4.7.** Найдите значение выражения, сначала упростив его:

а) $7\cdot a+13\cdot a+22+48$ при $a=9$; 13; 31;
б) $45+16\cdot b-6\cdot b+15$ при $b=0$; 7; 123;
в) $31\cdot c+38+9\cdot c-12$ при $c=1$; 15; 51.

**4.8.** Упростите левую часть уравнения и решите его:

а) $23+14\cdot x-13\cdot x=72$; г) $5\cdot x+x-13+29=88$;
б) $16\cdot y-17+4\cdot y=83$; д) $y+37+4\cdot y-24=48$;
в) $7\cdot z-14+3\cdot z+12=98$; е) $2\cdot z+z+3\cdot z-52=74$.

**4.9.** *(Фокус.)* Клоун предложил каждому из публики задумать число. Потом он сказал: «Прибавьте к задуманному числу 5. Теперь из результата вычтите 2. А теперь к результату прибавьте 7». Потом клоун спросил у желающих, какое число у каждого из них получилось. Услышав ответ, он немедленно объявлял каждому, какое число тот задумал. Какое число было задумано, если сообщено число: а) 13; б) 10; в) 27?

**4.10.** Клоун предложил публике другой фокус: «Задумайте число. Прибавьте к нему 12. Затем вычтите 7. К результату прибавьте задуманное число. Скажите, сколько получилось, а я скажу задуманное число». Какое число было задумано, если в ответ сообщено число: а) 9; б) 5; в) 13?

**4.11.** а) Клоун предложил публике поиграть в игру, о которой рассказано в задаче 3.10, выбрав для этого выражение

$$7825+69\,057+3487+98\,703+6742-3792.$$

Публика смеялась. Всем было ясно, что в такой игре нельзя сделать ни одного хода. Объясните почему.

б) Тогда клоун предложил сыграть в ту же игру для выражения

$$5463\cdot 78\,693\cdot 8673\cdot 2817\cdot 76\,389\cdot 143\,226\cdot 657.$$

Публика снова смеялась. Объясните почему.

Урок 5

## ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Вспомните: если натуральное число $a$ делится на натуральное число $b$ без остатка, то про число $a$ говорят, что оно **кратное числа** $b$ (или, по-другому, кратно числу $b$).

*А что тогда говорят про число $b$?*

Про число $b$ говорят, что оно **делитель числа** $a$. Например, число 12 делится на число 4, значит, число 12 — кратное числа 4, а число 4 — делитель числа 12.

***Назовите еще три числа, кратные числу 4, а также еще три делителя числа 12.***

Если записать числа, кратные числу $b$, в порядке возрастания, то получится **ряд кратных** числа $b$. Вот, например, ряд кратных числа 4:

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ \ldots\ .$$

Как и натуральный ряд, ряд кратных любого числа бесконечен.

*Какие еще свойства рядов кратных, похожие на свойства натурального ряда, вы знаете?*

Чтобы узнать, будет ли одно натуральное число кратным (или, наоборот, делителем) другого, нужно выполнить деление. Но для некоторых чисел ответ можно получить и не выполняя деления, а применяя **признаки делимости.**

*Сформулируйте признаки делимости на 2; на 5; на 10; на 3; на 9.*

Например, сразу ясно, что число 7458 — кратное числа 2. Ведь 7458 оканчивается цифрой 8, значит, по признаку делимости на 2 оно делится на 2.

*Проверьте, не выполняя деления, будет ли число 3 делителем числа 7458.*

**Вопросы и задания**

**5.1.** Что такое кратное натурального числа; делитель натурального числа?

**5.2.** Как называются числа, кратные числу 2; числа, не делящиеся на 2?

**5.3. (У)** Будет ли: а) 2 делителем числа 5319; б) 3 делителем числа 7254; в) 5 делителем числа 16 286; г) 9 делителем числа 161 532; д) 10 делителем числа 87 550?

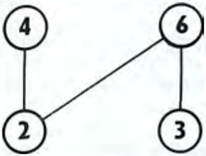
**5.4.** Запишите все делители числа: а) 16; б) 50; в) 100; г)* 96; д)* 97.

**5.5. (У)** Сколько четных чисел содержится среди натуральных чисел: а) от 1 до 100; б) от 5 до 100; в) от 1 до 75; г) от 6 до 35?

**5.6. (У)** В одной кучке спичек на 1 больше, чем в другой. Можно ли, используя все спички обеих кучек, выложить контур прямоугольника? Ответ объясните.

**5.7. (У)** а) Смекалкин загадал младшему брату загадку: «Какое число является делителем любого натурального числа?» Отгадайте ее.

б) Младший брат Смекалкина, отгадав загадку, заявил, что у каждого натурального числа $a$ обязательно 2 делителя. «Ведь число $a$ делится без остатка и на себя, и на 1»,— говорил он. «Так-то оно так,— сказал Смекалкин,— но разве всегда $a$ и 1 — это разные делители?» Назовите натуральное число, у которого всего один делитель. Сколько таких чисел?




▲ **5.8.** То, как натуральные числа делятся друг на друга, можно интересно изображать с помощью рисунка. Договоримся изображать числа кружками, и если число $a$ — делитель числа $b$, отличного от $a$, то будем рисовать кружок для $a$ ниже кружка для $b$ и соединять их отрезком. Например, для чисел 2, 3, 4, 6 получается такая картинка слева:

Применяя указанное правило, нарисуйте картинку для чисел: а) 6, 12, 24; б) 2, 3, 5, 30; в) 1, 3, 4, 12; г) 4, 5, 7, 8, 10. ▲

**5.9*. (У)** Клоун объявил, что знает два разных натуральных числа, каждое из которых является делителем другого. Публика смеялась: всем было ясно, что таких чисел не бывает. Объясните почему. (Совет: подумайте, может ли делитель натурального числа быть больше этого числа.)

**Урок 6**

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

В 5-м классе, кроме натуральных чисел, вы изучали еще и дробные. В этом уроке мы напомним свойства обыкновенных дробей и правила действий над ними. А в уроке 7 кратко повторим десятичные дроби.

Для записи обыкновенной дроби используют дробную черту и два натуральных числа: **числитель** и **знаменатель** дроби. Знаменатель показывает, из каких долей единицы складывается дробь, а числитель — сколько таких долей взято слагаемыми.

*Где (над или под дробной чертой) пишут числитель дроби? А знаменатель?*

Одно и то же дробное число может быть по-разному записано обыкновенной дробью. Например, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$.

*Попробуйте объяснить эти равенства. Приведите другие примеры равных между собой, но по-разному записанных дробей.*

И объяснить приведенные выше равенства, и придумать новые примеры будет легко, если вспомнить основное свойство дроби. Это свойство можно записать такой формулой:

$$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot p}{n\cdot p}.$$

*Сформулируйте основное свойство дроби.*

На этом свойстве основаны правила действий над дробями с разными знаменателями, которыми мы вскоре будем заниматься. А пока повторим правила действий над дробями с одинаковыми знаменателями, которые вы изучали в 5-м классе.

**Чтобы найти** $\dfrac{\textbf{сумму}}{\textbf{разность}}$ **дробей с одинаковыми знаменателями, нужно** $\dfrac{\textbf{сложить их числители}}{\textbf{из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого}}$ **и оставить тот же знаменатель.**

*Запишите формулами правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.*

---

В 5-м классе вы научились еще и сравнивать дроби с одинаковыми знаменателями. Правило здесь очень простое:

**Из двух дробей с одинаковыми знаменателями** $\dfrac{\textbf{больше}}{\textbf{меньше}}$ **та, числитель которой** $\dfrac{\textbf{больше}}{\textbf{меньше}}$**.**

Например, $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}<\frac{4}{4}<\frac{5}{4}<\frac{9}{4}$. В записанной цепочке неравенств встречаются и правильные, и неправильные дроби.

*Вспомните, какая дробь называется правильной. Какая — неправильной?*

Дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ правильные, так как они меньше 1. Дроби $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$ неправильные, так как дробь $\frac{4}{4}$ равна 1 *(объясните почему)*, а дроби $\frac{5}{4}$ и $\frac{9}{4}$ больше 1. Вообще, чтобы узнать, правильная данная дробь или неправильная, удобно пользоваться таким правилом:

**Если числитель дроби** $\dfrac{\textbf{меньше знаменателя}}{\textbf{больше или равен знаменателю}}$**, то дробь** $\dfrac{\textbf{правильная}}{\textbf{неправильная}}$**.**

У неправильной дроби можно найти целую и дробную части и записать эту дробь в виде смешанного числа. Например, $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$,

$\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$. И наоборот, каждое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби.

*Выразите неправильной дробью числа* $4\frac{5}{6}$, $7\frac{8}{9}$.

---

Вспомним еще правила умножения и деления дроби на натуральное число:

**Чтобы $\dfrac{\textbf{умножить}}{\textbf{разделить}}$ дробь на натуральное число, нужно умножить на это число $\dfrac{\textbf{числитель}}{\textbf{знаменатель}}$ дроби, не меняя ее $\dfrac{\textbf{знаменателя}}{\textbf{числителя}}$.**

Запишем эти правила формулами

$$\frac{m}{n}\cdot p=\frac{m\cdot p}{n},\quad \frac{m}{n}:p=\frac{m}{n\cdot p}.$$

Если во второй формуле взять $n=1$, то получится формула, показывающая, что частное натуральных чисел можно заменить дробью:

$$m:p=\frac{m}{p}.$$

**Вопросы и задания**

**6.1.** Что такое обыкновенная дробь? Что показывают знаменатель и числитель дроби?

**6.2.** Какое свойство дроби называется основным?

**6.3.** Как узнать, какая из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше?

**6.4.** Как найти целую и дробную части неправильной дроби?

**6.5.** Как выразить смешанное число неправильной дробью?

**6.6.** Выполните действия:

а) **(У)** $\frac{28}{15}+\frac{32}{15}$; в) $7\frac{19}{49}+6\frac{13}{49}$; д) $\frac{21}{90}\cdot 14$; ж) $11\frac{14}{15}\cdot 71$;

б) **(У)** $\frac{41}{27}-\frac{14}{27}$; г) $2\frac{32}{63}-1\frac{47}{63}$; е) $\frac{47}{35}:48$; з) $9\frac{11}{27}:48$.

**6.7.** Найдите значение буквенного выражения

$\left(\left(a+\frac{7}{12}\right):3-\frac{5}{36}\right)\cdot 11$ при $a=\frac{4}{12}$; $1\frac{7}{12}$; 3.

**6.8.** Сравните значения числовых выражений:

а) $\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{9}\right)\cdot 4$ и $\left(\frac{55}{3}-\frac{26}{3}\right):3$; б) $\left(\frac{31}{16}+\frac{7}{16}\cdot 3\right)\cdot 5$ и $\left(\frac{39}{4}\cdot 11-\frac{17}{4}\cdot 10\right):4$;

в) $\left(\frac{31}{12}-\frac{7}{3}:4-\frac{5}{4}:3\right):2$ и $\frac{9}{17}\cdot 4-\frac{4}{17}\cdot 5$;

г) $\left(\frac{83}{42}+\frac{7}{6}:7-\frac{5}{7}:6\right):\left(1\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)$ и $\left(\frac{38}{29}-1\frac{2}{29}\right)\cdot\left(2\frac{9}{11}+1\frac{2}{11}\right)$.

**6.9.** Решите уравнение:

а) $x\cdot 3-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$; в) $21\cdot y+\frac{31}{18}=4\frac{15}{18}$;

б) $x:8+\frac{7}{41}=1\frac{39}{41}$; г) $14\frac{11}{12}:z-\frac{11}{8}=5\frac{5}{8}$.

**6.10.** Подсчитайте, сколько имеется различных дробных чисел, у которых числитель и знаменатель меньше 5, а само число меньше 3.

**6.11.** Винни-Пух сказал, что он на обед съел на $\frac{2}{7}$ кг меда больше, чем на завтрак, а на ужин — вдвое больше, чем на обед. Сколько меда съел Винни-Пух на завтрак, если известно, что всего за завтрак, обед и ужин он съел $\frac{13}{7}$ кг меда?

**Урок 7**

## ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

**Десятичной** называется дробь, которую записывают с помощью запятой. Сразу после запятой идут десятые доли, после них — сотые, затем тысячные и т. д.

? *Какие доли записываются в* 4, 5 *и* 6-*м разрядах после запятой?*

Каждую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби. Для этого нужно то, что стоит до запятой, записать целой частью числа; то, что стоит после запятой, записать в числитель дробной части, а в знаменатель записать единицу и столько нулей, сколько цифр после запятой.

! *Запишите обыкновенной дробью десятичные дроби* 5,6; 3,14; 7,008; 0,102.

Сравнение десятичных дробей, сложение и вычитание выполняются точно так же, как над натуральными числами, т. е. поразрядно. Да и умножают десятичные дроби так же, как натуральные числа. Нужно только не забывать отделять в произведении запятой столько знаков, сколько их после запятой во всех множителях, вместе взятых. Деление же на десятичную дробь заменяют делением на целое число — для этого в делимом и делителе запятую переносят вправо на столько знаков, сколько их в делителе.

Легче всего умножать и делить десятичную дробь на степень числа 10: $\frac{\text{умножение}}{\text{деление}}$ выполняется простым переносом запятой $\frac{\text{вправо}}{\text{влево}}$ на столько знаков, каков показатель степени.

Для действий над десятичными дробями справедливы те же законы, что и для действий над натуральными числами.

*Назовите эти законы и сформулируйте их.*

**Задания**

**7.1. (У)** Вычислите: а) $6{,}35 \cdot 10$; б) $6{,}35:10$; в) $0{,}17 \cdot 100$; г) $0{,}17:100$; д) $9{,}65 \cdot 1000$; е) $1234:1000$; ж) $987:1000$.

**7.2.** Выполните действия:

а) $3{,}14 \cdot 0{,}7^2 + (8{,}311 - 5{,}26) : (6{,}78 + 4{,}52)$;

б) $(4{,}6 \cdot 3{,}5 + 85{,}79 \cdot 0{,}8) : 27{,}6 + (6{,}301 - 5{,}783) : 0{,}148$;

в) $4{,}4^2 \cdot 30{,}3 + 6{,}68 : (0{,}6 + 3{,}852 : 3{,}6)$;

г) $(101{,}96 - 6{,}8 \cdot 7{,}2) : 4{,}24 - 3{,}4 \cdot (10 - 6{,}35)$;

д) $82{,}2 \cdot 0{,}3^3 - 4{,}97142 : 7{,}1 + (0{,}78 + 1{,}12)^2$.

**7.3.** Найдите значение буквенного выражения

$$6{,}48 : (b + 0{,}2)^2 + 8{,}64 : (b - 0{,}2)^2$$

при $b = 0{,}3$; $0{,}7$; $1$; $1{,}4$; $1{,}8$.

**7.4.** Решите уравнение:

а) $3{,}08 \cdot x + 4 \cdot x + 2{,}5 \cdot x = 4{,}79$;

б) $0{,}26 \cdot y + y - 0{,}17 \cdot y = 7{,}63$;

в) $0{,}8 \cdot x + 0{,}95 \cdot x + 49{,}7 = 84{,}7$;

г) $x - 0{,}2 \cdot x - 3{,}57 = 6{,}43$;

д) $z - 0{,}05 \cdot z - 0{,}5 \cdot z = 1{,}35$;

е) $0{,}37 \cdot y + 0{,}63 \cdot y - 3{,}9 = 0$.

**7.5.** а) Придумайте числовое равенство с десятичными дробями. Предложите соседу по парте проверить его.

б) Вспомните правило, сформулированное в задании 1.3 в), и прибавьте к обеим частям равенства, составленного вами в пункте а), одну и ту же десятичную дробь. Проверьте полученное равенство.

в) Вычтите из обеих частей равенства, составленного в пункте а), одну и ту же десятичную дробь. Проверьте полученное равенство. Сформулируйте правило, которое теперь можно обнаружить.

г) Умножьте обе части равенства, составленного в пункте а), на одну и ту же десятичную дробь. Проверьте полученное равенство. Сформулируйте правило, которое теперь можно обнаружить.

**7.6.** Стена в комнате имеет длину 6 м и высоту 2,75 м. Ее предполагается оклеить обоями, ширина которых 60 см. Длина одного рулона обоев 10 м. Сколько полос длиной 2,75 м можно нарезать из одного рулона? Сколько рулонов потребуется, чтобы оклеить стену полностью?

**7.7.** Буек на воде, обозначающий границу, за которую запрещено заплывать купающимся, расположен в 120 м от причала.


Рис. 2

Один из отдыхающих заплыл за буек и продолжает удаляться от причала со скоростью 0,9 м/с. Как только он нарушил границу, от причала стартовала спасательная шлюпка, двигающаяся со скоростью 6,12 км/ч. Через какое время она догонит нарушителя?

**7.8. (У)** а) На рисунке 2,*а* изображен медицинский термометр, с помощью которого люди измеряют свою температуру. Каждое деление соответствует 0,1°. Прочитайте показание термометра.

б) Температура здорового человека обычно близка к 36,6°. Прочитайте показания термометров на рисунке 2,*б* и определите, кто из детей здоров, а кто болен.

Урок 8

## ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ В ПРАКТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

В практической деятельности людей часто бывает удобно использовать сотые доли величин. Одна сотая доля называется **процентом.** В процентах обычно выражают состав смесей и сплавов, концентрацию растворов и т. д.

*Что еще обычно выражают в процентах?*

Нередко, подсчитывая проценты, числа приходится округлять, т. е. заменять число его приближенным значением. Округление чисел возникает и при измерении величин.

*Что значит округлить число до сотых; до единиц; до тысяч? Сформулируйте правило округления числа до данного разряда.*

### Вопросы и задания

**8.1.** Что такое 1%?

**8.2.** Что такое приближенное значение числа с избытком? с недостатком?

**8.3.** Для того чтобы печенье было рассыпчатым, в тесто кладут так называемый пекарский порошок. В его состав входят пищевая сода — 25%, лимонная кислота — 15% и мука — 60%. Сколько соды, лимонной кислоты и муки надо взять, чтобы приготовить 150 г пекарского порошка?

**8.4.** а) Число 35 сначала увеличили на 40%, а затем результат уменьшили на 40%. Что больше: получившееся число или число 35? б) Число 35 сначала уменьшили на 40%, а затем результат увеличили на 40%. Что больше: получившееся число или число 35? в)* Сравните числа, которые получились в пунктах а) и б). Изменится ли результат сравнения, если вместо числа 35 взять какое-нибудь другое число? Попытайтесь объяснить свой ответ. (Совет: обозначьте взятое число буквой.)

**8.5.** а) Число 47 сначала увеличили на 25%, а затем результат уменьшили на 20%. Что больше: получившееся число или число 47? б)* Изменится ли ответ на вопрос пункта а), если вместо числа 47 взять какое-либо другое число? Попытайтесь обосновать свое мнение.

**8.6.** Всхожестью называют число, показывающее, какую часть составляют проросшие семена от всех посеянных семян. Всхожесть обычно выражают в процентах. Для пшеницы она равна 95%. Сколько тонн семян надо посеять, чтобы 35 т из них проросло?

**8.7.** Чтобы связать один шарф, требуется 200 г пряжи. Пряжа состоит на 40% из мохера и на 60% из полиакрила. Сколько мохера и полиакрила потребуется, чтобы изготовить 2500 шарфов?

**8.8.** Дощатый забор сколочен без просветов из 211 одинаковых досок шириной 18 см. Какова длина этого забора? Ответ округлите до метров.

**8.9*.** В комнате длиной 6 м и шириной 3 м нужно настелить деревянный пол. У столяра имеются доски длиной 4 м и шириной 24 см. Он решил располагать доски вдоль большей стороны комнаты. При этом некоторые доски ему придется распилить, чтобы замостить пол полностью. Какое наименьшее количество досок ему для этого понадобится?

**8.10.** Таблетка от кашля содержит 0,01 г травы термопсиса и 0,25 г соды. Выразите состав таблетки в процентах (ответ округлите до десятых долей процента).

**Урок 9**

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

В 5-м классе вы изучали разные плоские фигуры: прямые линии и лучи, окружности и углы, прямоугольники и треугольники. Вы измеряли длину отрезков, находили периметры многоугольников. А помните ли вы, как найти длину окружности?

*Я помню! Нужно диаметр окружности умножить на число π.*

Правильно. А еще нужно вспомнить, что диаметр равен двум радиусам:

$$D=2\cdot R.$$

Поэтому для вычисления длины окружности можно воспользоваться и такой формулой:

$$C=2\cdot\pi\cdot R.$$

*Какое приближенное значение числа π вы знаете?*

Конечно, вы не забыли, что $\pi\approx$**3,14**. В § 6 вы узнаете более точное значение π. Чтобы успешно решать задачи, надо знать не только формулу длины окружности и число π, но и многое другое. Например, что такое градусы, как ими измеряют углы и...

*Вспомните-ка, что еще измеряют угловыми градусами.*

### Вопросы и задания

**9.1.** Что такое прямоугольник; квадрат? Что называют периметром многоугольника?

**9.2.** Прочитайте определение, восстановив пропущенное слово: «Окружность — это замкнутая линия, все точки которой находятся на одинаковом ... от некоторой точки». Как называют эту точку?

**9.3.** Слово «радиус» (как и слово «диаметр») имеет два значения: это и некоторый отрезок, и его длина. Какой же отрезок называют радиусом окружности?

**9.4.** а) Закончите предложение: «Хорда окружности — это отрезок, концы которого...». б) Какую хорду называют диаметром?

**9.5.** а) Какая получится фигура, если из одной точки провести два луча? б) Какие четыре вида углов вы изучили в 5-м классе? в) Как название треугольника зависит от вида его углов? А как оно зависит от длин сторон?

**9.6.** а) Прочитайте предложение, восстановив пропущенное слово: «1° — это величина угла, который является одной ... долей развернутого угла». б) Какова величина развернутого угла; прямого угла? в) Что можно сказать о градусной мере острого угла; тупого угла?

**9.7.** На сколько градусов делится окружность?

! **9.8.** Напомним, как можно построить треугольник по трем сторонам $a$, $b$ и $c$. Возьмем отрезок длины $a$. Его концы будут двумя вершинами искомого треугольника. Из этих вершин как из центров проведем окружности радиусов $b$ и $c$. Одна из точек пересечения окружностей будет третьей вершиной треугольника (рис. 3). Постройте треугольник со сторонами: а) 50 мм, 40 мм и 30 мм; б) 20 мм, 45 мм и 28 мм.

**9.9.** Дуга $AB$ на рисунке 4 имеет градусную меру 45°. Найдите длину этой дуги, если радиус окружности равен: а) 10 м; б) 55 мм.

**9.10.** Найдите радиус окружности, если ее дуга величиной 30° имеет длину 15,7 см.

**9.11.** а) На сколько градусов повернется минутная стрелка часов за 20 мин? б)* На сколько градусов за это же время повернется часовая стрелка?

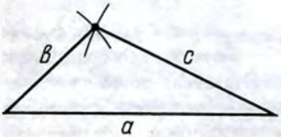


Рис. 3

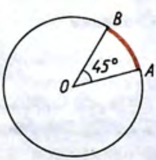


Рис. 4


Рис. 5

**9.12.** В зубчатой передаче (рис. 5) большая шестерня имеет 48 зубьев, маленькая — 18. На сколько градусов повернется большая шестерня, когда маленькая сделает полный оборот?

**9.13*.** Когда гоночная машина достигла скорости 220,5 км/ч, ее колеса каждую секунду делали 25 оборотов. Найдите диаметр колес с точностью до 1 мм.

▲ **9.14*.** На 1 м$^2$ поверхности расходуют 250 г краски. Сколько килограммов краски потребуется, чтобы покрасить снаружи стальную трубу диаметром 120 см и длиной 15 м? ▲

**Урок 10**

## ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Вы хорошо знаете единицы площади и давно умеете измерять площадь прямоугольника. А в 5-м классе вы научились измерять и площадь круга. Вспомнили? Если круг имеет радиус $R$, то площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi \cdot R^2$.

А еще вы измеряли объемы. Вы, конечно, помните, как измерить объем прямоугольного параллелепипеда?

*Нужно перемножить все три его измерения: длину, ширину и высоту.*

Смекалкин прав. Важно только не забывать, что все три измерения должны быть выражены в одинаковых единицах длины. Если длина, ширина и высота выражены, например, в метрах, то объем получится в кубических метрах.

### Вопросы и задания

?

**10.1.** Что такое круг? Что называют центром круга? Что такое сектор круга?

**10.2.** Как называют прямоугольники, из которых состоит поверхность прямоугольного параллелепипеда?

**10.3.** Сколько у параллелепипеда вершин; ребер; граней?

**10.4.** Что такое куб? Какой куб называют единичным?

**10.5.** Что такое кубический дециметр? Что такое литр; миллилитр? Сколько литров в кубическом метре?

!

**10.6.** Дан прямоугольник размерами $a$ на $b$ (так часто говорят о прямоугольнике, смежные стороны которого равны $a$ и $b$). Напишите формулы, выражающие периметр и площадь этого прямоугольника.

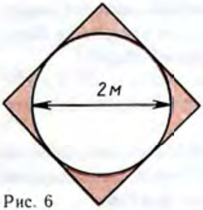



Рис. 6

**10.7.** Постройте два прямоугольника, имеющие: а) равные периметры, но разные площади; б) разные периметры, но равные площади.

**10.8.** На рисунке 6 изображены круг и квадрат. Диаметр круга задан там же. Найдите общую площадь закрашенных частей фигуры.

▲ **10.9*.** Сектор круга радиуса 4 м имеет площадь $6 \cdot \pi$ м$^2$. Найдите градусную меру и длину дуги этого сектора. ▲

**10.10.** Масса 1 см$^3$ известняка равна 2,5 г. Великая пирамида Хеопса в Египте сложена из 2 250 000 известняковых блоков — прямоугольных параллелепипедов. Средний объем блока равен 1,172 м$^3$. а) Найдите массу одного блока в килограммах. б) Найдите массу пирамиды Хеопса в тоннах.

**10.11.** Спортивный бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 50 м. Когда из бассейна выпустили 240 м$^3$ воды, ее уровень в бассейне понизился на 30 см. Найдите ширину бассейна.

**10.12*.** В свежем банане 95% объема составляет вода, а после сушки воды будет лишь 80%. Во сколько раз объем свежего банана больше объема сушеного?

**10.13.** Клоун притащил доску длиной 5 м, шириной 20 см, толщиной 30 мм и сказал, что сейчас вычислит ее объем. «Перемножим три измерения: $5 \cdot 20 \cdot 30$. Объем доски равен 3000». Публика смеялась: все видели, что для измерения разных ребер клоун использовал разные единицы длины. Найдите объем доски в м$^3$; в см$^3$; в мм$^3$.

Глава I

# ДРОБНЫЕ ЧИСЛА И ПРОПОРЦИИ

## § 1. РАЗЛОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА МНОЖИТЕЛИ

Не удивляйтесь, что в § 1 речь пойдет о натуральных числах, хотя, судя по названию главы I, в ней изучаются числа дробные. Все объясняется просто: для дальнейшего движения по области Дробей в стране Математике надо пройти еще немного по области Натуральных чисел. В этом параграфе вы узнаете, какие натуральные числа называют простыми, как из простых чисел составляются другие натуральные числа и что скрывается за сокращениями НОД и НОК.

**Урок 11**

### ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

У числа 7 только два делителя — само число 7 и число 1. Таким же свойством обладают числа 11, 19, 23: у каждого из них только два делителя *(проверьте!)*. А вот у числа 10, кроме 10 и 1, есть еще два делителя: 5 и 2, т. е. всего делителей больше двух. Таким же свойством обладают и числа 12, 25, 28, 33: у каждого из них больше двух делителей *(проверьте!)*.

Натуральное число называется $\frac{\textbf{простым}}{\textbf{составным}}$,

если у него $\frac{\text{только два делителя}}{\text{больше двух делителей}}$.

Значит, числа 7, 11, 19, 23 простые, а числа 10, 12, 25, 28, 33 составные.

*А число 1 простое или составное?*

Число 1 имеет только один делитель — само число 1. Поэтому число 1 нельзя считать ни простым, ни составным.

Самое маленькое простое число — 2. Это — единственное четное простое число. Все остальные простые числа нечетны. В самом деле, если четное число $n$ больше чем 2, то уже можно указать три разных делителя: 1, 2 и $n$; поэтому у числа $n$ больше двух делителей. Значит, **все четные числа, бóльшие чем 2, составные.**

**Вопросы и задания**

**11.1.** Какое натуральное число называется простым; составным?

**11.2.** Какое натуральное число не является ни простым, ни составным? Ответ объясните.

**11.3.** Почему все простые числа, кроме числа 2, нечетны?

**11.4.** Могут ли быть простые числа среди: а) кратных числа 3; б) кратных числа 5; в) кратных числа 4? Ответ объясните.

**11.5.** Число 64 составное: оно делится на 2. Так как $64:2=32$, это число можно разложить в произведение чисел 2 и 32, т. е. записать равенство $64=2\cdot 32$. Проверьте, что каждое из следующих чисел составное, и разложите его в произведение двух чисел, не равных 1: а) 75; б) 81; в) 123; г)* 169.

**11.6.** *(Загадки.)* а) Задумано простое число. Следующее за ним натуральное число тоже простое. Какое число задумано?

б) Задуманы два простых числа. Их сумма тоже простое число. Какие числа задуманы?

**11.7. (У)** Двузначное число оканчивается на $\frac{\text{пять}}{\text{три}}$. Может ли это число быть простым? Ответ «да» нужно подтвердить, указав такое число; ответ «нет» нужно объяснить.

**11.8. (У)** Клоун объявил, что нашел в натуральном ряде такие три числа, идущие подряд, что каждое из них простое. Публика смеялась: все понимали, что так быть не может. Объясните почему. (Совет: воспользуйтесь тем, как идут в натуральном ряде четные и нечетные числа.)

**Урок 12**

## РЯД ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Как узнать про данное число, простое оно или составное?

Если число небольшое, то можно перебрать одно за другим все числа, которые могут быть его делителями. Например, возьмем число 13. Его делители могут встретиться среди чисел от 1 до 13. Ясно, что 1 и 13 — делители числа 13; а перебирая одно за другим числа от 2 до 12, убеждаемся, что ни на одно из них 13 не делится. Так что у числа 13 только два делителя, и, значит, оно простое.

Если же число велико, то перебирать числа в поисках его делителей придется слишком долго. Чтобы не тратить время на эту однообразную работу, было бы удобно иметь список всех простых чисел. Посмотрел туда и узнал, будет ли данное число простым. Если числа в таком списке расположить в порядке возрастания, то получится **ряд простых чисел.** Начинается он с числа 2, затем идут числа 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т. д.

*А можно ли сформулировать правило, по которому идут числа в этом ряде?*

К сожалению, такого правила нет. Однако математики умеют составлять таблицы простых чисел, меньших какого-то числа. Например, таблица простых чисел, которые меньше 1000, напечатана в конце этого учебника.

*А если попадется большее число?*

Вообще-то есть таблицы (составленные с помощью компьютера), в которых записаны все простые числа, меньшие чем 10 000 000. Но вам такие таблицы, пожалуй, не понадобятся.

▲ *А среди чисел, больших 10 000 000, есть простые?*

Это разумный вопрос. Ответ на него таков: есть. Если наш сказочный волшебник (см. урок 1) будет идти по натуральному ряду, то простые числа встретятся ему и после 10 000 000, и после 100 000 000, и вообще после любого числа. Потому что, как доказали математики, **ряд простых чисел бесконечен.** ▲

### Вопросы и задания

?

**12.1.** Что такое ряд простых чисел? С какого числа он начинается? ▲ Какое еще свойство этого ряда сформулировано в уроке? ▲

!

**12.2. (У)** С помощью таблицы простых чисел определите, какие из следующих чисел простые, а какие составные: а) 871; б) 379; в) 697; г) 991; д) 649; е) 541.

**12.3.** Выпишите все простые числа, которые больше чем 500 и меньше чем 550.

**12.4.** С помощью таблицы простых чисел легко узнать, будет ли данное число составным. Например, число 803 составное. В самом деле, в ряде простых чисел его нет (см. таблицу — после простого числа 797 там идет сразу 809). Напишите все составные числа, которые больше чем 100 и меньше чем 114. Каждое из них разложите в произведение двух чисел, не равных 1.

**12.5.** Где простых чисел больше: между числами 100 и 200 или между числами 200 и 300?

**12.6.** Сколько составных чисел заключено: а) между числами 600 и 700; б) между числами 800 и 900?

**12.7.** Используя таблицу простых чисел, найдите: а) три идущих подряд составных числа; б) пять идущих подряд составных чисел.

**12.8.** Среди простых чисел до 10 000 000 самое большое число 9 999 991. Убедитесь, что все числа от 9 999 992 до 10 000 000 составные. (Совет: проверьте, что каждое из этих чисел делится или на 2, или на 3, или на 5, или на 7.)

**12.9.** а)* **(У)** В ряде простых чисел любые два соседних числа, кроме чисел 2 и 3, удалены друг от друга на четное число. Объясните почему.

б) Простые числа, удаленные друг от друга на 2, называются **близнецами.** Напишите все пары простых чисел-близнецов, меньших чем 1000. (Совет: воспользуйтесь таблицей простых чисел.)

Урок 13

## РАЗЛАГАЕМ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Число 110 составное, и его можно разложить в произведение чисел, не равных единице: $110=10\cdot 11$. Но число 10 само составное, и его тоже можно разложить в произведение: $10=2\cdot 5$. Получаем:

$$110=2\cdot 5\cdot 11.$$

Теперь в правой части равенства все множители — простые числа. Мы записали число 110 в виде произведения простых чисел, или, как говорят, **разложили его на простые множители.**

Так же, шаг за шагом, можно разложить на простые множители любое другое составное число. Поэтому составные числа и назвали составными: ведь они составлены из простых множителей, как железнодорожный состав из вагонов (рис. 7). Количество простых множителей у составного числа может оказаться

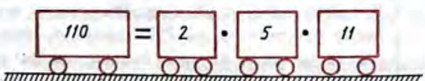



Рис. 7

и меньше трех, и больше трех. Например: $6=2\cdot3$, $4=2\cdot2$, $1155=$ $=3\cdot5\cdot7\cdot11$, $500=2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5$.

Любое ли натуральное число разложимо (т. е. может быть разложено) на простые множители? Чтобы дать ответ, нужно учесть, что каждое натуральное число либо простое, либо составное, либо равно 1. Единица, конечно, не разлагается на простые множители. Если же взять простое число, то ясно, что его нельзя представить в виде произведения других простых чисел, но математики договорились считать, что оно тоже разлагается на простые множители, а именно: само для себя будет простым множителем. Тем самым ответ на поставленный выше вопрос можно сформулировать так:

Любое натуральное число, не равное 1, разложимо на простые множители.

Как разложить данное составное число $n$ на простые множители? Обычно поступают так. Сначала с помощью признаков делимости на 2, 3, 5 проверяют, делится ли $n$ на одно из этих простых чисел. Если делится, то находят частное. Если оно простое число, то сразу получается нужное разложение, а если оно составное, то продолжают разлагать в произведение.

Пример 1. Число 65 составное, оно делится на 5. Частное $65:5=13$ — простое число. Поэтому сразу получаем разложение числа 65 на простые множители: $65=5\cdot13$.

Пример 2. Число 510 составное, оно делится на 2. Частное $510:2=255$ снова составное число, оно делится на 3. Следующее частное $255:3=85$ также составное число, кратное 5. И только частное $85:5=17$, наконец, будет простым числом. Получаем цепочку равенств

$$510=2\cdot255=2\cdot3\cdot85=2\cdot3\cdot5\cdot17.$$

Соединяя ее начало и конец знаком «=», записываем разложение числа 510 на простые множители: $510=2\cdot3\cdot5\cdot17$.

Вычисления, которые выполняют при разложении составного числа на простые множители, удобно записывать так. Справа от исходного числа пишут его простой делитель. Частное пишут ниже исходного числа, справа от него — простой делитель частного. Следующее частное пишут под предыдущим и т. д. В записи возникают два столбика чисел. Вычисления заканчивают, когда в левом столбике появляется число 1. Простые числа, записанные в правом столбике, и будут теми простыми множителями, на которые разлагается исходное число. Вот как выглядит запись вычислений из примеров 1 и 2:

$$
\begin{array}{r|l}
65 & 5 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
510 & 2 \\
255 & 3 \\
85 & 5 \\
17 & 17 \\
1 &
\end{array}
$$

Разложим на простые множители число 72: $72=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$. В получившемся разложении есть несколько одинаковых простых множителей: три раза встречается число 2 и два раза — число 3. В таком случае разложение можно записать короче, заменяя произведение одинаковых множителей степенью. Так как $2\cdot2\cdot2=2^3$, $3\cdot3=3^2$, получаем $72=2^3\cdot3^2$.

Если число, которое нужно разложить на простые множители, не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, то подбирают его делитель среди простых чисел 7, 11, 13, 17, 19, ..., проверяя их одно за другим по порядку. А дальше находят частное и действуют так же, как и раньше.

**Вопросы и задания**

**13.1.** Что значит разложить натуральное число на простые множители?

**13.2.** **(У)** Разложите на простые множители число: а) 10; б) 15; в) 8; г) 12; д) 16; е) 24; ж) 30; з) 33; и) 28; к) 49; л) 77.

**13.3.** Разложите на простые множители число: а) 100; б) 42; в) 105; г) 111; д) 225; е) 216; ж) 441; з) 1000; и) 3600; к)* 539; л)* 1001; м)* 847; н)* 689; о)* 961.

**13.4.** Определите, какие из следующих чисел являются простыми, а какие — составными. Составные числа разложите на простые множители: а) 313; б) 341; в) 343; г) 347; д) 349; е) 377; ж) 383; з) 391; и) 397; к) 401.

**13.5.** Найдите все простые делители числа: а) 300; б) 512; в) 729; г) 980; д) 625; е) 1024.

**13.6.** *(Игра.)* Дано число. Первый игрок разлагает его на два множителя, меньшие этого числа (если это возможно). Второй игрок может выбрать любое число из получившихся чисел и тоже разлагает его на два меньших множителя. Затем первый игрок выбирает любой из трех получившихся множителей и разлагает его на два меньших множителя. Затем второй и т. д. Проигрывает тот, кто уже не сможет увеличить количество получающихся таким способом множителей. Кто выигрывает в этой игре, если первоначально дано число: а) 14; б) 12; в) 36; г) 1000? ▲

13.7. Клоун написал несколько равенств и утверждал, что это — разложение чисел на простые множители:

$$120=2\cdot3\cdot4\cdot5;\ 1539=9^2\cdot19;\ 7497=3\cdot7^2\cdot51.$$

Публика смеялась: все видели, что клоун ошибается. Объясните, почему утверждения клоуна неверны, и напишите правильные разложения чисел 120, 1539 и 7497 на простые множители.

Урок 14

## НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Задача. Шестиклассники решили сделать подарки ученикам 1-го класса. Они собрали 87 воздушных шариков и 58 флажков и все их раздали малышам поровну. Сколько учеников в 1-м классе?

Давайте рассуждать. Раз шестиклассники смогли поровну разделить и флажки, и шарики между малышами, то число первоклассников должно быть делителем и числа флажков, и числа шариков. Делители числа 87 — это числа 1, 3, 29, 87; делители числа 58 — это числа 1, 2, 29, 58. Видно, что есть только два общих делителя чисел 87 и 58: число 1 и число 29. Но из условия ясно, что в классе несколько учеников, значит, их 29.

Для решения задачи нам понадобился **общий делитель** двух данных чисел, т. е. число, на которое оба эти числа делятся. У чисел 87 и 58 оказалось два общих делителя: 1 и 29.

Найдем общие делители чисел 72 и 96. Сначала запишем делители каждого из них в порядке возрастания: так будет легче высмотреть, какие числа встретятся дважды.

Делители числа 72: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{6}$, $\underline{8}$, 9, $\underline{12}$, 18, $\underline{24}$, 36, 72.
Делители числа 96: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{6}$, $\underline{8}$, $\underline{12}$, 16, $\underline{24}$, 32, 48, 96.
Числа, встретившиеся дважды, мы подчеркнули — это и есть общие делители. Выпишем их отдельно: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Наибольшим из них является число 24. Оно называется наибольшим общим делителем чисел 72 и 96.

Вообще **наибольший общий делитель** двух натуральных чисел — это наибольшее число, на которое оба данных числа делятся.

Наибольший общий делитель натуральных чисел $m$ и $n$ обозначается НОД $(m, n)$ — по первым буквам слов «Наибольший Общий Делитель». Например, НОД $(87,58)=29$, НОД $(72,96)=24$.

*Найдите НОД(9,12), НОД(15,25), НОД(19,16)*

Зачем может пригодиться наибольший общий делитель? Чтобы ответить на этот вопрос, напишем все делители числа 24. Это числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Посмотрите-ка, снова получились все общие делители чисел 72 и 96. Это не случайно. Дело в том, что выполняется такое свойство: **каждый делитель числа НОД $(m,n)$ является общим делителем чисел $m$ и $n$**, и, наоборот, **каждый их общий делитель является делителем числа НОД$(m,n)$.** Например, зная, что НОД$(108,196)=4$, можно сразу сказать, что все общие делители чисел 108 и 196 — это делители числа 4, т. е. 1, 2 и 4. Находить же все остальные делители чисел 108 и 196, как мы делали раньше, не нужно.

*Я понял. Но как найти сам наибольший общий делитель?*

Тут поможет разложение на простые множители. Чтобы найти НОД$(m,n)$, числа $m$ и $n$ разлагают на простые множители и подчеркивают общие множители двух разложений. Затем все подчеркнутые множители одного из чисел выписывают отдельно и перемножают. Получающееся произведение и будет наибольшим общим делителем данных чисел. Например, $72=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot 3$, $96=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\underline{3}$, значит, НОД$(72,96)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$.

**Вопросы и задания**

**14.1.** Что такое общий делитель двух чисел?

**14.2.** Что такое наибольший общий делитель двух чисел? Как он обозначается?

**14.3.** Как, зная наибольший общий делитель двух чисел, найти все их общие делители?

**14.4.** **(У)** Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 42 и 36; б) 54 и 63; в) 48 и 64; г) 100 и 65; д) 121 и 99.

**14.5.** Найдите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби: а) $\frac{49}{63}$; б) $\frac{51}{85}$; в) $\frac{46}{145}$; г) $\frac{48}{84}$; д) $\frac{52}{130}$; е) $\frac{242}{77}$.

**14.6.** Найдите: а) НОД$(8,9)$; б) НОД$(27,28)$; в) НОД$(19,20)$; г) НОД$(63,64)$. Какой вывод можно сделать?

**14.7.** Найдите: а) НОД (7,11); б) НОД (13,23); в) НОД (19,31); г) НОД (37,53).

**14.8*.** Обратите внимание, что в задании 14.7 отыскивался наибольший общий делитель двух простых чисел. Выберите в таблице простых чисел еще два простых числа и найдите их наибольший общий делитель. Какой вывод можно сделать?

▲ **14.9. (У)** Что можно сказать о числах $m$ и $n$, если НОД $(m,n)=$ $=n$? Придумайте примеры таких чисел. ▲

**14.10*.** Валя и Вера купили несколько одинаковых коробок конфет. Валя подсчитала, что всего в ее коробках 65 конфет, а Вера сказала, что у нее на 26 конфет больше. Сколько конфет в одной коробке? Сколько коробок купила Валя? А Вера?

**14.11.** Длина комнаты 575 см, а ширина 375 см. Пол в комнате нужно выложить декоративными плитками в форме квадрата. Каков наибольший возможный размер такого квадрата? Сколько плиток такого размера понадобится?

**14.12. (У)** Клоун сказал, что сейчас решит о-о-очень трудную задачу: найдет наименьший общий делитель чисел... Не успел он досказать условие, как публика засмеялась: всем было ясно, что наименьший общий делитель у любой пары натуральных чисел один и тот же и искать его незачем. Что это за число?

**Урок 15**

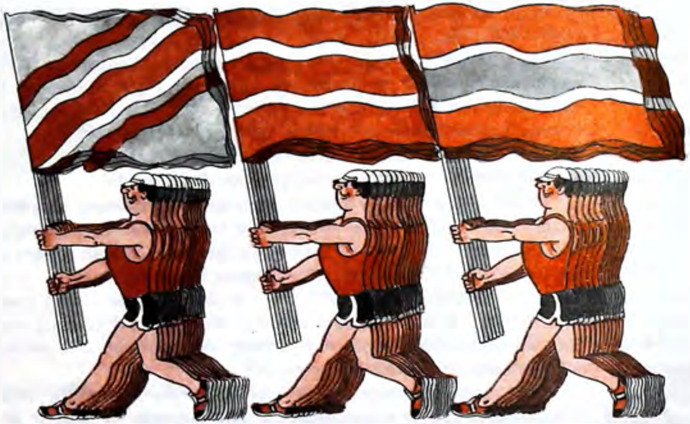
## НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

З а д а ч а. По плану парада физкультурники сначала должны маршировать строем по 12 человек в шеренге. Потом они должны перестроиться в колонну по 18 человек в шеренге. Сколько физкультурников нужно пригласить для участия в параде?

Давайте рассуждать. Чтобы физкультурников можно было построить и в шеренги по 12 человек, и в шеренги по 18 человек, нужно, чтобы их число было кратно и 12, и 18. Запишем ряды кратных этих чисел и подчеркнем в них общие числа. Ряд кратных числа 12: 12, 24, <u>36</u>, 48, 60, <u>72</u>, 84, 96, <u>108</u>, ... . Ряд кратных числа 18: 18, <u>36</u>, 54, <u>72</u>, 90, <u>108</u>, 126, ... .

Видно, что физкультурников для участия в параде можно пригласить или 36, или 72, или 108, или ... .

*Назовите еще два-три числа, которые могут быть ответами в этой задаче.*



В решении задачи встретились **общие кратные** двух данных чисел, т. е. числа, кратные каждому из данных. Такие общие кратные можно перечислять без конца, но среди них есть наименьшее — число 36.

Вообще **наименьшее общее кратное** двух данных натуральных чисел — это наименьшее число, кратное каждому из них.

Наименьшее общее кратное натуральных чисел $m$ и $n$ обозначается НОК$(m,n)$ — по первым буквам слов «Наименьшее Общее Кратное». Например, НОК$(12,18)=36$.

*Найдите НОК(9,12), НОК(15,25), НОК(11,7).*

С помощью наименьшего общего кратного легко найти все общие кратные данных чисел. В самом деле, запишем ряд кратных числа 36: 36, 72, 108, 144, ... . Посмотрите, этот ряд состоит как раз из тех чисел, которые мы подчеркнули при решении задачи выше, т. е. из общих кратных чисел 12 и 18. Вот какое свойство мы обнаружили: **каждое кратное числа НОК$(m,n)$ является общим кратным чисел $m$ и $n$, и, наоборот, каждое их общее кратное является кратным числа НОК$(m,n)$.** Например, зная, что НОК$(40,150)=600$, можно сразу сказать, что общими кратными чисел 40 и 150 будут числа ряда 600, 1200, 1800, 2400, 3000, ... . Записывать же ряды кратных чисел 40 и 150, как мы делали выше для чисел 12 и 18, незачем.

*А наименьшее общее кратное тоже можно найти с помощью разложения чисел на простые множители?*

Да, и сделать это можно так. Разложим данные числа на простые множители и подчеркнем общие множители двух разложений. Произведение всех неподчеркнутых множителей $\dfrac{\text{первого}}{\text{второго}}$ числа называется **дополнительным множителем** $\dfrac{\text{второго}}{\text{первого}}$ числа. Если теперь любое из данных чисел умножить на его дополнительный множитель, что получится наименьшее общее кратное данных чисел. Например, $40=\underline{2}\cdot2\cdot2\cdot\underline{5}$, $150=\underline{2}\cdot3\cdot\underline{5}\cdot5$. Видно, что дополнительный множитель для 150 равен $2\cdot2$, т. е. 4, а дополнительный множитель для 40 равен $3\cdot5$, т. е. 15. Тогда НОК $(40,150)=150\cdot4=600$. Или иначе: НОК $(40,150)=40\cdot15=600$.

**Вопросы и задания**

**15.1.** Что такое общее кратное двух чисел?

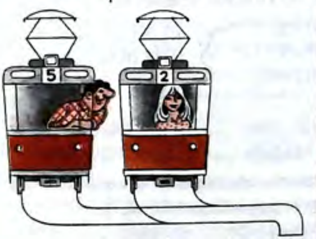
**15.2.** Что такое наименьшее общее кратное двух чисел? Как его обозначают?

**15.3.** Как найти все общие кратные двух чисел, зная их наименьшее общее кратное?

**15.4. (У)** Назовите три общих кратных чисел: а) 5 и 6; б) 10 и 15; в) 18 и 9.

**15.5. (У)** Найдите наименьшее общее кратное двух чисел: а) 14 и 21; б) 24 и 30; в) 18 и 27; г) 9 и 11.

**15.6.** Найдите наименьшее общее кратное знаменателей дробей: а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{7}{6}$; б) $\frac{11}{12}$ и $\frac{4}{15}$; в) $\frac{9}{20}$ и $\frac{16}{25}$; г) $\frac{3}{100}$ и $\frac{7}{125}$; д) $\frac{19}{144}$ и $\frac{17}{156}$.




▲ **15.7.** Что можно сказать о числах $m$ и $n$, если НОК $(m, n)=m$? Придумайте примеры таких чисел. ▲

**15.8.** Олины родители работают водителями трамваев: мама на 2-м маршруте, папа на 5-м. Один рейс 2-го маршрута длится 48 мин, а 5-го — 72 мин. У этих маршрутов есть общая конечная станция. Вскоре после начала работы папин и мамин вагоны подошли к ней одновременно. Через какое время они снова встретятся на этой станции?

**15.9*.** Перечитайте условие задачи 9.12. Какое наименьшее число полных оборотов должна сделать маленькая шестерня, чтобы большая шестерня также сделала несколько полных оборотов? Сколько оборотов сделает при этом большая шестерня?

**15.10. (У)** Клоун объявил, что сейчас найдет наибольшее общее кратное чисел ... . Не успел он назвать числа, как публика засмеялась: все поняли, что клоун не сможет этого сделать. Объясните почему.

Урок 16

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 1

Как вы помните, в нашем учебнике для 5-го класса каждый параграф заканчивался уроком «Задания на повторение». То же самое мы решили сделать и в этом учебнике.

*А в конце § 0 не было урока с таким названием!*

Правильно. Это единственное исключение: ведь весь нулевой параграф называется «Повторение». Так что помещать в нем еще и специальный урок «Задания на повторение» не было нужды.

При повторении пройденного в каждом параграфе полезно перечитать вопросы к урокам этого параграфа и дать на них ответы. Если вы при этом испытаете затруднения, то стоит перечитать объяснительный текст нужного урока. И, вообще, полезно время от времени перечитывать объяснительные тексты уроков.

**16.1. (У)** Вычислите:

а) НОД(14,21); г) НОК(91,13); ж) НОК(5,9);
б) НОД(33,22); д) НОД(27,45); з) НОК(6,8).
в) НОК(7,35); е) НОД(100,40);

**16.2.** Вычислите:

а) НОД(144,729); в) НОД(91,169); д) НОК(28,105);
б) НОД(625,375); г) НОК(144,216); е) НОК(169,1001).

**16.3.** Какое натуральное число обозначено буквой $x$, если:

а) НОД$(13,x)=1$ и НОК$(13,x)=195$;
б) НОД$(6,x)=6$ и НОК$(6,x)=24$;

в) НОД$(35, x)=5$ и НОК$(35, x)=210$;
г) НОД$(98, x)=14$ и НОК$(98, x)=362$?

Попытайтесь сформулировать правило, как находить неизвестное натуральное число, если даны его НОД и НОК с одним и тем же известным числом. Запишите это правило формулой. (Совет: посмотрите вывод, который вы сделали в задании 15.12 в рабочей тетради.)

**16.4.** **(У)** а) Смекалкин загадал младшему брату загадку: «Задуманы два числа. Их НОД равен 6, а их НОК равно 30. Какие числа задуманы?» Отгадайте эту загадку.

б) Младший брат, отгадав загадку Смекалкина, придумал похожую загадку: «Задуманы два числа. Их НОД равен 5, а их НОК равно 30. Какие числа задуманы?» Смекалкин объяснил, что у этой загадки не одна, а две отгадки. Найдите эти отгадки.

в) Придумайте загадку, у которой было бы четыре отгадки.

**16.5.** а) Смекалкин придумал еще одну загадку: «Задумано число. Его НОК с числом 20 равно 60, а с числом 21 равно 105. Что это за число?»

б) Отгадайте похожую загадку, если НОК задуманного числа и числа 165 равно 495, а его НОК с числом 54 равно 594.

в)* Младший брат тоже придумал похожую загадку: «Задумано число. Его НОК с числом 39 равно 234 и с числом 52 тоже равно 234. Что это за число?» Смекалкин подумал и сказал, что у этой загадки несколько отгадок. Найдите все отгадки.

**16.6.** Найдите значение числового выражения и разложите получившееся число на простые множители:

а) $(1000+1):11$; в) $12^2+5^2$; д) $29\cdot31+196:14^2$;
б) $1024:2:4:8:16+9$; г) $14^2+5^2+2^2$; е) $333:3+625:25^2$.

**16.7.** Число 1000 можно получить, перемножая два числа, в записи которых нет нуля: 125 и 8. Можно ли получить 1 млн., перемножая два числа, в записи которых нет нуля? А 1 млрд.?

**16.8.** а) В ряде нечетных чисел есть такие три числа, идущие подряд, что каждое из них простое. Найдите эти числа.

б)* Имеется ли в этом ряде еще одна тройка идущих подряд чисел, каждое из которых простое? Ответ «да» нужно подтвердить, указав такую тройку; ответ «нет» нужно объяснить.

**16.9.** **(У)** Может ли среднее арифметическое двух соседних чисел в ряде простых чисел само быть простым числом?

▲ **16.10.** Перечитайте задание 5.8. Продолжим заниматься картинками, изображающими делимость натуральных чисел.

а) Для числа 10 выпишите все делители и нарисуйте для этих чисел соответствующую картинку.

б) Выполните то же задание для числа 12.

**16.11.** *(Сказка с заданиями.)* а) 28 сентября число 28 решило пригласить в гости всех своих делителей, меньших, чем оно само. Первой прибежала единица, за ней двойка, за ней ... Напишите список всех гостей числа 28.

б) Когда все гости собрались, число 28 увидело, что их немного. Оно огорчилось и предложило, чтобы каждый из гостей привел еще и своих делителей. Сколько придет новых гостей?

в) Единица объяснила числу 28, что при таком условии новые гости к нему не придут: ведь если какое-то число $b$ — делитель числа $a$, а число $c$ — делитель числа $b$, то $c$ будет делителем и числа $a$. Проверьте это при $a=30$: найдите все его делители и для каждого из них его делители.


г)* Чтобы утешить число 28, его гости соединились знаком «+». И, о чудо, сумма оказалась равной самому числу 28. Единица сказала, что всякое натуральное число, которое равно сумме своих меньших делителей, называется **совершенным.** Так что 28 — совершенное число. Число 28 обрадовалось и спросило, какие есть еще совершенные числа. Всезнающая единица объяснила, что совершенные числа встречаются очень редко: среди чисел до миллиона только 4 совершенных числа. Число 28 — единственное двузначное совершенное число, есть только одно трехзначное совершенное число — 496 и только одно однозначное. Проверьте, что число 496 совершенное, и найдите однозначное совершенное число.

д) Наступило 29 сентября, и число 29 тоже решило пригласить в этот день в гости своих меньших делителей. Первой, как всегда, пришла единица. Кто еще пришел в гости? Что можно сказать про число 29? Какое оно?

е) Числам понравилось приглашать в гости своих делителей. Кто пришел в гости 30 сентября, вы знаете, если выполнили задание в). И в октябре продолжался тот же обычай. Только одно

число не дождалось гостей. Что это за число? Сколько раз оно само побывало в гостях?

ж) У каких чисел был только один гость? Что это за гость? ▲

**16.12*.** Клоун объявил, что он придумал два десятизначных простых числа, сумма которых тоже простое число. Публика смеялась: всем было ясно, что таких чисел быть не может. И вообще, сумма двух неоднозначных простых чисел не может быть простым числом. Объясните почему.

## § 2. ДЕЙСТВИЯ НАД ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ

В уроках 6, 7 и 8 мы кратко повторили то, что вам было известно о дробях. Теперь изучение дробей нужно продолжить: ведь вам пора научиться сравнивать любые дроби, находить сумму и разность любых двух дробей, умножать и делить дроби. Всему этому вы и научитесь в этом параграфе.

**Урок 17**

### ЧТО ЗНАЧИТ СОКРАТИТЬ ДРОБЬ

Вспомните формулу, выражающую основное свойство дроби. Как и в любом равенстве, в ней можно поменять местами левую и правую части. Тогда получится такая формула:

$$\frac{m\cdot p}{n\cdot p}=\frac{m}{n}.$$

Она утверждает равенство двух дробей, вторая из которых получается, если числитель и знаменатель первой дроби разделить на их общий делитель. Например, $\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{3}{5}$; $\frac{801\cdot 37}{62\cdot 37}=\frac{801}{62}$.

Мы видим, что основное свойство дроби можно сформулировать и «с другого конца»: **если у дроби числитель и знаменатель разделить на их общий делитель, то получится равная ей дробь.** Если этот общий делитель больше единицы, то числитель и знаменатель дроби, конечно, уменьшаются. В таком случае говорят, что дробь сократили.

**Сократить дробь** — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший единицы.

При сокращении дробь заменяют равной дробью с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Поэтому сокращение дробей облегчает вычисления.

*Сократите дробь* $\frac{16\cdot4}{25\cdot4}$; $\frac{9\cdot12}{9\cdot11}$; $\frac{101}{101}$.

Не всякую дробь можно сократить. Например, дробь $\frac{4}{7}$ сократить нельзя: ведь у числителя 4 и знаменателя 7 нет общих делителей, больших единицы. Дробь, которую $\dfrac{\text{можно}}{\text{нельзя}}$ сократить, называют $\dfrac{\textbf{сократимой}}{\textbf{несократимой}}$.

Если дробь сократима, то ее обычно сокращают на наибольший общий делитель числителя и знаменателя. После такого сокращения общих делителей уже не остается, поэтому получается несократимая дробь. Давайте сократим так дробь $\frac{48}{84}$. Подсчитаем НОД (48,84):

$$48=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3,\quad 84=2\cdot2\cdot3\cdot7;$$

следовательно, НОД (48,84) $=2\cdot2\cdot3=12$. Сокращая дробь $\frac{48}{84}$ на 12, получаем несократимую дробь $\frac{4}{7}$.

Итак, **всякая дробь равна какой-то несократимой дроби.**

**Вопросы и задания**

**17.1.** Какое основное свойство дроби вы знаете? Сформулируйте его со словом «умножить»; со словом «разделить».

**17.2.** Что значит сократить дробь? Как называют дробь, которую можно сократить; которую нельзя сократить?

**17.3.** Объясните, почему равны дроби:

а) **(У)** $\frac{21}{28}$ и $\frac{3}{4}$; в) $\frac{121}{99}$ и $\frac{11}{9}$; д) $\frac{9}{27}$ и $\frac{28}{84}$; ж) $\frac{200}{200}$ и $\frac{20}{20}$;

б) **(У)** $\frac{18}{21}$ и $\frac{6}{7}$; г) $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{6}$; е) $\frac{45}{30}$ и $\frac{24}{16}$; з) $\frac{987}{987}$ и $\frac{1991}{1991}$.

**17.4.** Найдите несократимую дробь, равную дроби:

а) **(У)** $\frac{6}{27}$; в) $\frac{72}{90}$; д) $\frac{333}{4158}$; ж) $\frac{6520}{755}$; и) $\frac{242}{121}$;

б) **(У)** $\frac{12}{18}$; г) $\frac{212}{462}$; е) $\frac{625}{1000}$; з) $\frac{113}{113}$; к) $\frac{3030}{101}$.

**17.5.** Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, а затем сократите. Образец: $0{,}5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

а) 0,4; в) 0,125; д) 1,5; ж) 2,56; и)* 17,3125;
б) 0,25; г) 0,0625; е) 6,4; з) 3,128; к)* 101,1024.

**17.6.** Придумайте сократимую дробь. Запишите ее на листочке и предложите соседу по парте найти несократимую дробь, равную исходной. Проверьте, правильно ли он выполнил задание. (Совет: придумывая дробь, воспользуйтесь основным свойством дроби. Чтобы было интереснее, не предлагайте слишком легкое задание!)

**17.7.** Сравните дроби, предварительно сократив их:

а) $\frac{3}{9}$ и $\frac{8}{12}$; в) $\frac{9}{15}$ и $\frac{20}{25}$; д) $\frac{625}{125}$ и $\frac{729}{81}$;

б) $\frac{4}{16}$ и $\frac{9}{12}$; г) $\frac{14}{18}$ и $\frac{24}{27}$; е) $\frac{343}{7}$ и $\frac{980}{20}$.

**17.8.** Выполните действия над дробями, предварительно сократив их:

а) $\frac{6}{9}+\frac{4}{12}$; б) $\frac{12}{16}-\frac{3}{12}$; в) $\frac{21}{28}-\frac{5}{20}$; г) $\frac{6}{18}+\frac{18}{27}-\frac{2}{6}$.

**17.9.** Клоун сократил дробь $\frac{1+5}{4+5}$ на 5 и объявил, что она равна дроби $\frac{1}{4}$. Публика смеялась: всем было видно, что клоун сократил на слагаемое. А на слагаемое не сокращают — это полная чепуха! Выполните сложение в числителе и в знаменателе дроби $\frac{1+5}{4+5}$ и сократите ее правильно.

Урок 18

## ПРИВОДИМ ДРОБИ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ. ТЕПЕРЬ МОЖНО СРАВНИВАТЬ ЛЮБЫЕ ДРОБИ

В 5-м классе вы научились сравнивать, складывать и вычитать дроби только с одинаковыми знаменателями. А как быть, если знаменатели различны? Нельзя ли тогда заменить дроби равными им дробями с одним и тем же знаменателем? Оказывается, можно! В таких случаях говорят, что дроби приведены к общему знаменателю.

Привести дроби к общему знаменателю — значит найти равные им дроби с одинаковыми знаменателями.

Научившись приводить дроби к общему знаменателю, можно будет сравнивать, складывать и вычитать любые дроби.

Приведем, например, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ к общему знаменателю 15. Как найти дробь со знаменателем 15, равную дроби $\frac{2}{3}$? Нетрудно догадаться, что нужно воспользоваться основным свойством дроби: умножить числитель и знаменатель на 5:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}.$$

*Найдите дробь со знаменателем* 15, *равную дроби* $\frac{4}{5}$. *Догадались, на сколько нужно умножить числитель и знаменатель?*

Получится $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$. Цель достигнута.

Дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ можно привести и к общему знаменателю 30. Ведь $\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, а $\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$ *(проверьте)*. Общим знаменателем для дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ могут служить и другие числа, например 45, 60, 75 и вообще любое общее кратное чисел 3 и 5.

Обычно дроби приводят к **наименьшему общему знаменателю.** Для дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ таким наименьшим общим знаменателем будет число 15. Вообще **наименьший общий знаменатель несократимых дробей равен наименьшему общему кратному их знаменателей.**

Чтобы привести данные дроби к наименьшему общему знаменателю, можно действовать так:

1) сократимые дроби сократить;

2) у полученных несократимых дробей разложить знаменатели на простые множители;

3) для каждого знаменателя найти свой дополнительный множитель (о дополнительных множителях говорилось в уроке 15);

4) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель ее знаменателя.

Пример. Приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{18}{112}$ и $\frac{23}{60}$.

Первую дробь сократим на 2 и получим несократимую дробь $\frac{9}{56}$. Вторая дробь несократима, поэтому берем ее без изменения.

Далее разлагаем знаменатели на простые множители:

$$56=2\cdot2\cdot2\cdot7;\ 60=2\cdot2\cdot3\cdot5.$$

Ищем дополнительные множители знаменателей: для 56 он равен $3\cdot5$, т. е. 15; для 60 он равен $2\cdot7$, т. е. 14.

Теперь умножаем числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель ее знаменателя:

$$\frac{9}{56}=\frac{9\cdot15}{56\cdot15}=\frac{135}{840};\ \frac{23}{60}=\frac{23\cdot14}{60\cdot14}=\frac{322}{840}.$$

▲ Если не задаваться целью приводить дроби обязательно к наименьшему общему знаменателю, то общим знаменателем дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно взять $b\cdot d$. В итоге исходные дроби заменяются на равные им дроби $\frac{a\cdot d}{b\cdot d}$ и $\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$. Например, только что рассмотренные дроби $\frac{18}{112}$ и $\frac{23}{60}$ таким способом заменятся на $\frac{1080}{6720}$ и $\frac{2576}{6720}$ *(проверьте)*. Указанный способ приведения дробей к общему знаменателю хорош тем, что позволяет обходиться без отыскания наименьшего общего кратного. Мы воспользуемся им в уроке 19 при выводе удобных формул суммы и разности любых двух дробей. ▲

---

Давным-давно Смекалкин спрашивал, как сравнить дроби с разными знаменателями. Теперь нетрудно дать ответ на этот вопрос и объяснить, как сравнивать любые дроби. Сравним, к примеру, дроби $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{6}$. Сначала приведем их к общему знаменателю: $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$, $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$. А сейчас можно воспользоваться правилом сравнения дробей с одинаковыми знаменателями: из двух таких дробей больше та, числитель которой больше. Раз $15>14$, то $\frac{15}{18}>\frac{14}{18}$; значит, $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$.

Обдумывая, что же нам пришлось проделать для достижения цели, мы можем сформулировать правило сравнения любых дробей:

**Чтобы сравнить две дроби, нужно привести их к общему знаменателю и сравнить числители полученных дробей.**

## Вопросы и задания

**18.1.** Что значит привести дроби к общему знаменателю?

**18.2.** Чему равен наименьший общий знаменатель двух несократимых дробей?

**18.3.** Как сравнивать любые дроби?

**18.4.** **(У)** Приведите дроби к общему знаменателю 48:

а) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$; б) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{48}$; в) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{16}$; г) $\frac{3}{16}$ и $\frac{2}{3}$; д) $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{8}$.

**18.5.** Для каких пар дробей а) — д) из задания 18.4 есть общий знаменатель, меньший чем 48? Каков у них наименьший общий знаменатель?

**18.6.** Приведите дроби к общему знаменателю: а) **(У)** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$; б) **(У)** $\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{9}$; в) $\frac{7}{9}$ и $\frac{10}{11}$; г) $\frac{17}{36}$ и $\frac{31}{72}$; д) **(У)** $\frac{2}{4}$ и $\frac{9}{6}$; е) $\frac{4}{10}$ и $\frac{14}{21}$.

**18.7.** Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю и сравните их: а) **(У)** $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$; б) **(У)** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{8}$; г) $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$; д) **(У)** $\frac{3}{6}$ и $\frac{5}{10}$; е) $\frac{6}{14}$ и $\frac{10}{22}$.

**18.8.** **(У)** Сравните дроби:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{8}{21}$; б) $\frac{4}{15}$ и $\frac{2}{5}$; в) $\frac{7}{30}$ и $\frac{3}{10}$; г) $\frac{19}{60}$ и $\frac{4}{15}$; д) $\frac{4}{15}$ и $\frac{7}{30}$; е) $\frac{7}{12}$ и $\frac{29}{48}$.

**18.9.** Придумайте две дроби и предложите соседу по парте сравнить их. Проверьте, правильно ли он выполнил задание.

**18.10.** Расположите в порядке возрастания дроби:

а) $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{11}{30}$; б) $\frac{11}{12}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{5}$.

**18.11.** Клоун высказал такие утверждения: а) $\frac{3}{7}$ больше, чем $\frac{2}{5}$: ведь 3 больше, чем 2, а 7 больше, чем 5; б) $\frac{13}{40}$ больше, чем $\frac{11}{30}$: ведь 13 больше, чем 11, а 40 больше, чем 30; в) $\frac{100}{1000}$ больше, чем $\frac{1}{10}$: ведь 100 больше, чем 1, а 1000 больше 10. Публика смеялась: всем было ясно, что клоун неверно сравнивает дроби. Но один раз оказалось не смешно, потому что клоун нечаянно высказал верное утверждение. Сравните дроби, названные клоуном, и разберитесь, где он высказал верное утверждение, а где нет.

## КАК НАЙТИ СУММУ И РАЗНОСТЬ ЛЮБЫХ ДРОБЕЙ

З а д а ч а. Ученики шестых классов пропалывали морковь на пришкольном участке. 6-й А класс прополол $\frac{5}{16}$ га, а 6-й Б — $\frac{7}{24}$ га. а) Сколько гектаров пропололи оба класса вместе? б) На сколько гектаров один класс прополол больше, чем другой?

Чтобы ответить на вопрос а), нужно сложить дроби $\frac{5}{16}$ и $\frac{7}{24}$. Приведем их сначала к общему знаменателю 48:

$$\frac{5}{16}=\frac{5\cdot 3}{16\cdot 3}=\frac{15}{48};\ \frac{7}{24}=\frac{7\cdot 2}{24\cdot 2}=\frac{14}{48}.$$

Теперь вспомним правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями: чтобы найти сумму дробей с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и оставить тот же знаменатель. Применим это правило:

$$\frac{15}{48}+\frac{14}{48}=\frac{15+14}{48}=\frac{29}{48}.$$

Итак, $\frac{5}{16}+\frac{7}{24}=\frac{29}{48}$. Оба класса вместе пропололи $\frac{29}{48}$ га.

Ответим теперь на вопрос б). Каждый видит, что 6-й А прополол больше, чем 6-й Б: ведь $\frac{15}{48}>\frac{14}{48}$. Чтобы узнать, на сколько гектаров больше прополол 6-й А, нужно найти разность $\frac{5}{16}-\frac{7}{24}$. Заменяя дробь $\frac{5}{16}$ равной ей дробью $\frac{15}{48}$, а дробь $\frac{7}{24}$ дробью $\frac{14}{48}$ и применяя правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями, получаем $\frac{5}{16}-\frac{7}{24}=\frac{15}{48}-\frac{14}{48}=\frac{1}{48}$.

Обдумывая, что же нам пришлось проделать при сложении и вычитании дробей $\frac{5}{16}$ и $\frac{7}{24}$, мы можем сделать такой вывод:

**Чтобы найти ....... сумму/разность ....... двух дробей, нужно привести их к общему знаменателю, ....... сумму/разность ....... числителей полученных дробей записать в числитель результата и оставить общий знаменатель.**

Если знаменатели слагаемых невелики, то общий знаменатель и дополнительные множители обычно находят в уме. Тогда все вычисления записывают цепочкой равенств. Для удобства дополнительные множители пишут чуть выше и правее слагаемых и подчеркивают небольшой дужкой. Например:

$$\frac{7^{\underset{\smile}{5}}}{12}+\frac{2^{\underset{\smile}{4}}}{15}=\frac{35}{60}+\frac{8}{60}=\frac{35+8}{60}=\frac{43}{60}.$$

Так же записывают вычисления и при вычитании. Например:

$$\frac{1^{\underset{\smile}{3}}}{3}-\frac{2^{\underset{\smile}{1}}}{9}=\frac{3}{9}-\frac{2}{9}=\frac{3-2}{9}=\frac{1}{9}.$$

Если в результате получается сократимая дробь, ее сокращают, в неправильной дроби выделяют целую часть. Например:

$$\frac{1^{\underset{\smile}{2}}}{3}+\frac{1^{\underset{\smile}{1}}}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3^{\underset{\smile}{3}}}{4}+\frac{5^{\underset{\smile}{2}}}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}.$$

Для сложения дробей остаются верными переместительный и сочетательный законы, а также свойства вычитания *(сформулируйте эти законы и свойства!)*.

▲ Если общим знаменателем дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ взять произведение $b\cdot d$, то $\left(\text{так как } \frac{a}{b}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d} \text{ и } \frac{c}{d}=\frac{b\cdot c}{b\cdot d}\right)$ их сумма и разность будут выражаться формулами

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad\text{и}\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Это полезные формулы. Формула суммы дробей позволяет, например, убедиться, что переместительный закон верен для сложения дробей. Давайте, глядя на эту формулу, поймем, что в ней произойдет с правой частью, если в левой части переставить слагаемые. Ясно, что просто поменяются местами $a$ и $c$, $b$ и $d$. Получим дробь $\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}$. Но эта дробь равна дроби $\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, так как у них равны числители и равны знаменатели (применяем здесь переместительный закон для умножения и сложения натуральных чисел). Вот и получается (цепочкой равенств) требуемое равенство

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Формулу суммы дробей можно применить и при выводе сочетательного закона сложения. Только повозиться тут придется побольше, чем при выводе переместительного закона. Тому, кто особенно любит заниматься математикой, мы советуем проверить формулу, выражающую сочетательный закон:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

*Какими законами действий над натуральными числами пришлось при этом воспользоваться?*

Для вывода совместных свойств вычитания и сложения повозиться придется еще больше. При этом среди прочих понадобится и формула разности дробей. ▲

**Вопросы и задания**

**19.1.** Как находят сумму дробей; разность дробей?

**19.2.** **(У)** Вычислите:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$; ж) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$; к) $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}$;

б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$; д) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$; з) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$; л) $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; е) $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$; и) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$; м) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

**19.3.** Вычислите:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$; е) $\frac{48}{49}+\frac{3}{7}$; л) $\frac{3}{5}+\frac{5}{6}$; р) $\frac{1}{6}-\frac{5}{36}$; х) $\frac{7}{9}-\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$; ж) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; м) $\frac{2}{7}+\frac{7}{9}$; с) $\frac{2}{3}-\frac{5}{9}$; ц) $\frac{5}{7}-\frac{1}{6}$;

в) $\frac{7}{8}+\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$; н) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$; т) $\frac{48}{49}-\frac{3}{7}$; ч) $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$;

г) $\frac{5}{36}+\frac{1}{6}$; и) $\frac{1}{2}+\frac{7}{9}$; о) $\frac{1}{9}-\frac{1}{27}$; у) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$; ш) $\frac{7}{9}-\frac{2}{7}$;

д) $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}$; к) $\frac{5}{7}+\frac{1}{6}$; п) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$; ф) $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$; щ) $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$.

**19.4.** Вычислите:

а) $\frac{4}{45}+\frac{11}{60}$; в) $\frac{13}{24}+\frac{2}{15}$; д) $\frac{7}{18}-\frac{7}{24}$; ж) $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$;

б) $\frac{11}{12}+\frac{9}{16}$; г) $\frac{5}{48}+\frac{5}{36}$; е) $\frac{11}{36}-\frac{7}{24}$; з) $\frac{5}{9}-\frac{5}{12}$.

В примерах д), е) выполненное вычитание проверьте сложением, а в примерах ж), з) — вычитанием.

**19.5.** Придумайте два примера на сложение дробей с разными знаменателями, запишите их на листочке и предложите соседу по парте. Проверьте, правильно ли он выполнил задание.

**19.6.** Записав смешанное число неправильной дробью, найдите значение выражения:

а) $2\frac{5}{11}+1\frac{6}{7}$; б) $1\frac{3}{14}+2\frac{5}{6}$; в) $3\frac{1}{15}-1\frac{5}{21}$.

**19.7.** Замените десятичную дробь обыкновенной и выполните действие: а) $0{,}5+\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}+1{,}2$; в) $\frac{5}{7}-0{,}6$; г) $2{,}8-1\frac{1}{3}$.

**19.8.** Найдите значение выражения:

а) $\frac{7}{9}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; г) $8\frac{7}{12}-\frac{5}{18}+1\frac{3}{4}-2\frac{1}{6}$;

б) $1\frac{4}{15}+6\frac{13}{45}-\frac{7}{12}$; д) $3\frac{8}{13}-\frac{7}{26}+\left(1\frac{5}{39}-\frac{1}{13}\right)$;

в) $10\frac{5}{28}+\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{14}\right)$; е) $6{,}5-\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$.

**19.9.** Решите уравнение:

а) $x+\frac{5}{18}=\frac{11}{24}$; г) $\frac{7}{12}-z=\frac{5}{9}$; ж) $x:6-\frac{11}{12}=3\frac{5}{18}$;

б) $\frac{4}{15}+y=\frac{7}{18}$; д) $4\cdot x+\frac{7}{12}=\frac{13}{15}$; з)* $\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x=\frac{7}{8}$;

в) $x-\frac{3}{7}=\frac{8}{11}$; е) $1\frac{2}{3}-5\cdot y=\frac{5}{7}$; и)* $3\frac{2}{7}\cdot z-1\frac{2}{7}\cdot z=\frac{6}{11}$.

**19.10.** Мама поручила Игорю купить полбуханки хлеба. По просьбе пожилой соседки, которой трудно дойти до магазина, он купил еще четверть буханки. Сколько всего хлеба купил Игорь?

**19.11.** Вася подсчитал, какую часть от общего числа его оценок за месяц составляют пятерки, а какую — четверки. Полученные дроби он сократил, и оказалось: пятерок $\frac{7}{18}$, четверок $\frac{5}{12}$. а) Каких оценок у Васи было больше: пятерок или четверок? б) Какую часть Васиных оценок составляют пятерки и четверки вместе? в)* Сколько оценок получил Вася за месяц, если известно, что их число больше 40, но меньше 80?

**19.12.** Туристы в первый день похода прошли $\frac{1}{11}$ часть всего маршрута, а во второй день — на $\frac{1}{99}$ часть меньше. Какая часть маршрута пройдена за 2 дня?

**19.13. (У)** Вычислите: а) $\frac{3}{7}\cdot 2$; б) $\frac{13}{9}\cdot 4$; в) $\frac{4}{7}:5$; г) $\frac{15}{4}:7$.

▲ **19.14.** Выполните действия:

а) $\frac{x}{y}+\frac{s}{t}$; б) $\frac{m}{n}-\frac{b}{a}$; в) $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$; г) $\frac{a}{2\cdot b}-\frac{c}{3\cdot b}$; д) $\frac{5\cdot x}{6\cdot y}-\frac{8\cdot x}{15\cdot y}$. ▲

**Урок 20**

## УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Чтобы найти правило умножения дробей, давайте поразмышляем, что значит умножить число $u$ на число $v$.

*Что тут размышлять! Всем известно: это значит взять $u$ слагаемым $v$ раз.*

Да. Но такой ответ годится, если $v$ — число натуральное. А если $v$ — дробь? Например, $v=\frac{1}{2}$. Как понимать слова «взять слагаемым $\frac{1}{2}$ раз»?

*А можно понимать их так: взять половину числа $u$?*

Это хорошая догадка. В самом деле, давайте порассуждаем:
умножить $u$ на 2 — значит взять $u$ два раза;
умножить $u$ на 1 — значит взять $u$ один раз;
умножить $u$ на $\frac{1}{2}$ — значит взять половину $u$, т. е. $u:2$;
умножить $u$ на $\frac{1}{3}$ — значит взять треть $u$, т. е. $u:3$,
и т. д. для разных долей единицы.
Вот математики и договорились: для любого натурального числа $n$ **будем определять произведение $u\cdot\frac{1}{n}$ как частное $u:n$.**

Делить на натуральное число вы умеете (нужные формулы были повторены в уроке 6). Так что следующие вычисления вам понятны:

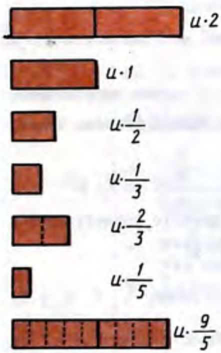
$$93\cdot\frac{1}{2}=93:2=\frac{93}{2};\quad \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{7}:3=\frac{5}{7\cdot 3}=\frac{5}{21}.$$

*Чему равно произведение $\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4}$?*

Продолжим рассуждения: можно сказать, что умножить $u$ на $\frac{2}{3}$ — значит взять две третьих от $u$; умножить $u$ на $\frac{9}{5}$ — значит взять девять пятых от $u$ и т. д. Надо только договориться о том, как понимать «две третьих от $u$» и другие подобные математические обороты.

Дробь $\frac{2}{3}$ мы получим, если $\frac{1}{3}$ возьмем слагаемым 2 раза. Поэтому разумно считать, что $u \cdot \frac{2}{3}$ мы получим, если $u \cdot \frac{1}{3}$ возьмем слагаемым 2 раза, т. е. умножим на 2. Но $\left(u \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = (u:3) \cdot 2$. Так и договариваются считать

$$u \cdot \frac{2}{3} = (u:3) \cdot 2.$$




Например, $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{5}{7}:3\right) \cdot 2 = \frac{5}{7 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$ (в предпоследнем равенстве применено правило умножения дроби на натуральное число; вы повторили его в уроке 6).

*Сколько раз надо взять слагаемым $\frac{1}{5}$, чтобы получить $\frac{9}{5}$? Как разумно определить произведение $u \cdot \frac{9}{5}$? Чему тогда равно произведение $\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{5}$?*

Теперь ясно, как сформулировать правило умножения на любую дробь: **чтобы умножить данное число на дробь $\frac{c}{d}$, нужно разделить его на $d$ и полученное частное умножить на $c$.**

---

Если данное число является дробью $\frac{a}{b}$, то, применяя сформулированное правило, а также правила умножения и деления дроби на натуральное число, можно записать:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}:d\right) \cdot c = \frac{a}{b \cdot d} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

(Такая цепочка равенств уже была записана выше для конкретного примера, когда $a=5$, $b=7$, $c=2$, $d=3$. Посмотрите-ка.) Глядя на крайние выражения в этой цепочке равенств, получаем формулу

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Вот мы и выяснили, как вычислять произведение двух дробей. Искомое правило только что записано формулой. А можно дать полученному выводу и словесную формулировку. Мы запишем ее «одним ударом», указывая сразу, каковы числитель и знаменатель произведения.

Произведение двух дробей — это дробь, $\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$ которой равен произведению $\frac{\text{числителей}}{\text{знаменателей}}$ сомножителей.

---

Для умножения дробей остаются верными переместительный и сочетательный законы, а также оба распределительных закона (относительно сложения и относительно вычитания).

*Запишите все эти законы формулами.*

▲ Проверка переместительного и сочетательного законов сводится (с учетом правила перемножения дробей) к применению тех же законов для умножения натуральных чисел. Смотрите:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{c\cdot a}{d\cdot b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b};$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{(a\cdot c)\cdot e}{(b\cdot d)\cdot f}=\frac{a\cdot(c\cdot e)}{b\cdot(d\cdot f)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c\cdot e}{d\cdot f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

*Объясните, как получается каждое равенство в написанных цепочках.*

А требуемые выводы получаются, если соединить знаками равенства крайние выражения в этих двух цепочках равенств.

---

Проверка распределительных законов немного труднее. Она потребует, конечно, применения формул для суммы и разности дробей (см. конец объяснительного текста урока 19), а также подходящих законов действий над натуральными числами. Мы надеемся, что особенные любители заниматься математикой справятся с такой проверкой. ▲

### Вопросы и задания

**20.1.** Как найти произведение двух дробей?

**20.2.** Буквой $a$ обозначено какое-то число. Чему равно произведение $a \cdot 1$; $1 \cdot a$; $a \cdot 0$; $0 \cdot a$?

**20.3.** **(У)** Вычислите: а) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{8}$; в) $\frac{13}{11} \cdot \frac{2}{3}$; г) $\frac{11}{8} \cdot \frac{5}{3}$.

**20.4.** Найдите значение числового выражения:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{21} \cdot \left(2\frac{3}{13} - \frac{9}{16}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\frac{2}{7} \cdot \left(3\frac{5}{12} - 2\frac{1}{18}\right)$;

в) $\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{49}{25} + \left(\frac{1}{2}\right)^4$;

г) $\left(1\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{35}$.

**20.5.** **(У)** Вычислите удобным способом:

а) $\left(\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{6}{5}$;

б) $\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{41} \cdot \frac{11}{7}$;

в) $\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{21}$;

г) $\frac{5}{9} \cdot \frac{13}{28} + \frac{13}{28} \cdot \frac{4}{9}$;

д) $1\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{17} - \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{17}$;

е) $2\frac{2}{17} \cdot 1\frac{5}{6} - 1\frac{5}{6} \cdot 1\frac{3}{17}$.

**20.6.** Упростите выражение и найдите его значение:

а) $a \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{1}{3} - a \cdot \frac{1}{4}$ при $a = 1$; $\frac{4}{5}$; $1\frac{5}{7}$; $0$;

б) $\frac{3}{4} \cdot b + 1\frac{1}{3} \cdot b - \frac{1}{2} \cdot b$ при $b = 7$; $\frac{6}{7}$; $2\frac{1}{19}$; $0,6$;

в) $c \cdot \frac{3}{4} + c \cdot \frac{5}{6} - c \cdot 1\frac{7}{12}$ при $c = 2$; $\frac{13}{21}$; $3\frac{1}{7}$; $0$; $\frac{1997}{1998}$.

**20.7.** В первый день бригада овощеводов собрала $3\frac{3}{5}$ т огурцов, во второй день — в $1\frac{1}{3}$ раза больше. Сколько тонн огурцов собрали овощеводы за 2 дня?

**20.8.** а) Пешеход идет со скоростью 5 км/ч. Сколько километров он пройдет за 1 мин? Какова скорость пешехода в метрах в минуту?

б) Скорость автомобиля $a$ км/ч. Запишите формулой скорость этого автомобиля в метрах в минуту. Найдите эту скорость при $a = 80$; $90$; $76$.

в) Выразите в метрах в секунду скорость 4 км/ч; 40 км/ч; 90 км/ч; $a$ км/ч.

## ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим дробь $\frac{3}{5}$. Если ее «перевернуть», т. е. поменять местами числитель и знаменатель, то получится дробь $\frac{5}{3}$. Полученную дробь называют обратной дроби $\frac{3}{5}$. Вообще, **обратной** дроби $\frac{m}{n}$ называется дробь $\frac{n}{m}$.

*Назовите дробь, обратную дроби:* а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{19}{4}$.

Каждому понятно, что если из данных двух дробей первая обратна второй, то вторая обратна первой. Поэтому про такие дроби можно говорить, что они **обратны друг другу.** Например, дроби $\frac{4}{7}$ и $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{10}$ и $\frac{10}{11}$, $\frac{1}{100}$ и $\frac{100}{1}$ обратны друг другу.

Что получится, если перемножить две дроби, обратные друг другу? Давайте посмотрим:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=\frac{m\cdot n}{n\cdot m}=1.$$

Вывод:

**Произведение дробей, обратных друг другу, равно единице.**

Два числа, произведение которых равно единице, называются **взаимно обратными** числами. Значит, обратные друг другу дроби являются взаимно обратными числами. Наоборот, если даны два взаимно обратных дробных числа, то их можно записать в виде обратных друг другу дробей. Например, 1,25 и 0,8 — взаимно обратные числа *(проверьте)*. Запишем их в виде обыкновенных дробей:

$$1{,}25=\frac{5}{4};\quad 0{,}8=\frac{4}{5}.$$

Всем сразу видно, что эти дроби обратны друг другу.

Каждое из двух взаимно обратных чисел называют по отношению к другому **обратным** числом. Например, числом, обратным числу 0,75, будет $\frac{4}{3}$; числом, обратным числу $8\frac{8}{14}$, будет $\frac{7}{60}$.

*Проверьте оба утверждения. Найдите число, обратное числу* $3\frac{1}{2}$.

*А для всякого ли числа есть обратное ему число?*

Хороший вопрос. Чтобы ответить на него, давайте порассуждаем. Возьмем какое-нибудь число $u$. Если $v$ — обратное ему число, то $u \cdot v = 1$. Всегда ли найдется такое число $v$? Нетрудно догадаться, что нет, не всегда. Ведь если $u = 0$, то и произведение $u \cdot v$ равно нулю и, значит, не может быть равно единице. Итак, **число 0 не имеет обратного себе числа.** Еще раз убедились в том, какое это особенное число нуль!

**Вопросы и задания**

**21.1.** Какая дробь называется обратной дроби $\frac{m}{n}$? Почему можно говорить: «Дроби, обратные друг другу»?

**21.2.** Чему равно произведение дробей, обратных друг другу? Как называются числа, произведение которых равно единице?

**21.3.** Для всякого ли числа есть обратное ему число? Ответ объясните.

**21.4.** Если дробь правильная, то правильной или неправильной будет обратная ей дробь? Ответ объясните.

**21.5.** **(У)** Назовите дробь, обратную дроби: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{100}{3}$; в) $\frac{4}{4}$.

**21.6.** Найдите число, обратное числу: а) 0,2; б) 0,5; в) 3; г) 10; д) 1,7; е) 3,003; ж) $\frac{5}{42}$; з) $\frac{7}{232}$; и) $2\frac{8}{9}$; к) $12\frac{11}{20}$.

**21.7.** Будут ли взаимно обратными числа: а) **(У)** 0,4 и 2,5; б) **(У)** 0,2 и 2; в) **(У)** 48 и $\frac{1}{48}$; г) **(У)** $\frac{7}{10}$ и $1\frac{3}{7}$; д) **(У)** 0 и 1; е) $3\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{3}$; ж) $7\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{37}$; з) $1\frac{1}{3}$ и 0,9; и) 1,234 и $\frac{500}{617}$; к) **(У)** 1 и 1?

**21.8.** **(У)** Найдите значение выражения:

а) $1\frac{77}{81} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5}$; б) $3{,}4 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7}$; в) $\frac{11}{12} \cdot 5{,}6 \cdot \frac{12}{11}$; г) $\frac{10}{21} \cdot \frac{7}{2} \cdot 2{,}1$.

**21.9.** **(У)** Существует ли число: а) обратное самому себе; б) не имеющее обратного? Ответ «да» нужно подтвердить, указав такое число; ответ «нет» нужно объяснить.

**21.10.** Выполните задание 7.5, используя вместо десятичных дробей какие-нибудь обыкновенные дроби.

## ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Как разделить дробь на дробь? Найдем, например, частное $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$. Вспомним определение: частное при делении числа $u$ на число $v$ — это такое число $q$, что $q\cdot v=u$. Значит, если $q$ — частное при делении дроби $\frac{4}{7}$ на дробь $\frac{3}{5}$, то

$$q\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{7}.$$

Умножим обе части этого равенства на дробь, обратную дроби $\frac{3}{5}$, т. е. на дробь $\frac{5}{3}$. Получится

$$q\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{3}.$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Произведение взаимно обратных дробей $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{3}$ равно 1. Так что $q\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=q\cdot 1=q$. Итак,

$$q=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{3}.$$

Но ведь через $q$ мы обозначили частное $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$. Значит,

$$\frac{4}{7}:\frac{3}{5}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{3}.$$

*Интересно! Деление в умножение превратилось!*

Верно подмечено: частное при делении $\frac{4}{7}$ на $\frac{3}{5}$ оказалось равным произведению $\frac{4}{7}$ на дробь $\frac{5}{3}$, обратную дроби $\frac{3}{5}$. Такой же вывод можно сделать и для любых чисел:

**Чтобы разделить одно число на другое, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.**

Теперь легко закончить вычисление частного $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$, ведь умножать дроби вы уже умеете!

$$\frac{4}{7}:\frac{3}{5}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{20}{21}.$$

Сделанный выше вывод применим для вычисления частного дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Число, обратное $\frac{c}{d}$, — это $\frac{d}{c}$. Значит, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$. (Такая цепочка равенств уже была записана выше для конкретного примера, когда $a=4$, $b=7$, $c=3$, $d=5$. Посмотрите-ка.) Глядя на крайние выражения в этой цепочке равенств, получаем формулу

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Записанное этой формулой правило деления дробей сформулируем «одним ударом», указывая сразу, каковы числитель и знаменатель частного.

Частное двух дробей — это дробь, $\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$ которой равен произведению $\frac{\text{числителя}}{\text{знаменателя}}$ делимого на $\frac{\text{знаменатель}}{\text{числитель}}$ делителя.

*Вычислите частные* $\frac{11}{8}:\frac{5}{9}$, $\frac{9}{10}:\frac{8}{15}$, $\frac{6}{5}:\frac{6}{5}$.

Выше мы объяснили, что с помощью числа, обратного данному, можно выполнять деление. Оказывается, что и, наоборот, с помощью деления можно найти число, обратное данному. Ведь если $v$ — число, обратное данному числу $u$, то $u\cdot v=1$. А вы давно знаете: чтобы найти один из множителей, надо разделить произведение на другой множитель. Значит, $v=1:u$.

Итак,

**число, обратное данному числу $u$, равно частному $1:u$.**

### Вопросы и задания

**22.1.** Деление на данное число можно заменить умножением на какое-то число. На какое?

**22.2.** Как найти частное двух дробей?

**22.3.** Буквой $a$ обозначено какое-то число. Чему равно частное $a:1$; $a:a$; $1:a$?

**22.4.** Как с помощью деления найти число, обратное данному?

**22.5.** **(У)** Вычислите: а) $\frac{6}{7}:\frac{5}{9}$; б) $\frac{8}{11}:\frac{7}{12}$; в) $\frac{14}{9}:\frac{3}{10}$; г) $\frac{2}{7}:\frac{10}{9}$.

**22.6.** Вычислите частное и сравните его с делимым:

а) $\frac{9}{16}:\frac{2}{3}$; в) $\frac{17}{28}:\frac{7}{34}$; д) $\frac{11}{20}:\frac{5}{22}$; ж) $\frac{13}{111}:\frac{51}{37}$; и) $\frac{46}{35}:\frac{23}{7}$;

б) $\frac{9}{16}:\frac{3}{2}$; г) $\frac{17}{28}:\frac{34}{7}$; е) $\frac{11}{20}:\frac{22}{5}$; з) $\frac{13}{111}:\frac{37}{51}$; к) $\frac{46}{35}:\frac{7}{23}$.

**22.7.** Найдите значение буквенного выражения $\frac{5}{18}\cdot a+\frac{7}{12}:a$ при $a=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $1\frac{2}{5}$; 0,6.

**22.8.** Решите уравнение: а) **(У)** $x\cdot\frac{1}{3}=2$; б) **(У)** $x\cdot\frac{1}{2}=3$; в) $x\cdot 0{,}8=0{,}2$; г) $x\cdot 0{,}2=0{,}8$; д) $2{,}3\cdot x=0{,}06$.

**22.9.** Решите уравнение:

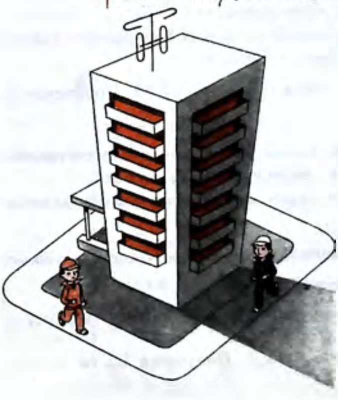
а) $\frac{7}{8}\cdot x=1\frac{3}{4}$; д) $\frac{3}{4}\cdot x+1\frac{1}{6}=3\frac{2}{9}$; и) $\frac{5}{7}:x+2\frac{3}{5}=3\frac{1}{4}$;

б) $x\cdot 2\frac{3}{7}=\frac{2}{3}$; е) $\frac{4}{7}\cdot x-2\frac{3}{5}=1\frac{2}{5}$; к) $x:\frac{8}{9}-1\frac{2}{15}=2\frac{1}{18}$;

в) $x:\frac{8}{11}=3\frac{2}{3}$; ж) $3\frac{2}{9}-\frac{7}{8}\cdot x=2\frac{5}{6}$; л) $\frac{15}{22}+3\frac{1}{6}:x=1\frac{5}{33}$;

г) $1\frac{7}{8}:x=\frac{5}{8}$; з) $3\frac{2}{7}-\frac{5}{8}\cdot x=2\frac{9}{14}$; м) $\frac{5}{9}+x:\frac{7}{18}=1\frac{1}{6}$.

**22.10.** Обработка детали на станке-автомате уменьшает массу отходов в $2\frac{2}{7}$ раза по сравнению с обработкой на обычном станке. Сколько отходов получается при обработке детали на станке-автомате, если при работе на обычном станке их получается $5\frac{1}{3}$ г?



**22.11.** Петя и Коля по утрам бегают вокруг дома по дорожке длиной 340 м. Каждый раз они стартуют одновременно в одном и том же месте. Скорость Пети 5,7 м/с, скорость Коли $5\frac{11}{12}$ м/с. а) Через сколько секунд мальчики встретятся, если они побежали в противоположные стороны? б)* Через какое время один из них догонит другого, если они побежали в одну сторону?

**22.12.** **(У)** а) Во сколько раз меньше своего обратного число $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$; 0,3?

▲ б) Найдите число, которое больше своего обратного в 4 раза; в 9 раз.

в) Может ли натуральное число быть больше своего обратного в 6 раз? Ответ «да» нужно подтвердить, указав такое число; ответ «нет» нужно объяснить. ▲

**22.13.** а) Клоун объявил, что покажет математический фокус. «Задумайте каждый какую-нибудь дробь и не говорите ее мне. Прибавьте к ней число 3 и результат умножьте на дробь, обратную задуманной. Затем вычтите 1 и результат умножьте на задуманную дробь. А я за две секунды объявлю, что у каждого получилось. Число 3». Объясните, как клоун угадывает ответ. (Совет: запишите задуманную дробь в виде $\frac{a}{b}$ и выполните требуемые действия. Какими свойствами действий над дробями пришлось здесь воспользоваться?)

б) **(У)** Какой ответ получится в фокусе клоуна, если вместо числа 3 взять число 4; число 5; число 1992?

▲ в)* Придумайте похожий фокус со взаимно обратными числами. ▲

**Урок 23**

## РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ДРОБИ

З а д а ч а 1. Площадь поля 12 га, из них 8 га засеяно пшеницей. Какая часть поля засеяна пшеницей?

Чтобы решить задачу, надо 8 разделить на 12. Получится $\frac{8}{12}$, т. е. $\frac{2}{3}$ (га).

И вообще, **чтобы найти, какую часть одно число составляет от другого, нужно разделить первое число на второе.**

С этим правилом вы на самом деле познакомились давным-давно, еще в 5-м классе.

З а д а ч а 2. Площадь поля 3 га, $\frac{2}{5}$ этого поля засеяли рожью. На какой площади посеяна рожь?

Чтобы решить эту задачу, надо найти $\frac{2}{5}$ от 3 га. Вы уже знаете, что для этого надо умножить 3 на $\frac{2}{5}$. Получится $1\frac{1}{5}$ га.

И вообще, **чтобы найти дробь от числа, надо это число умножить на данную дробь.**

Задача 3. На площади 6 га посеяна гречиха, эта площадь составляет $\frac{3}{7}$ поля. Какова площадь поля?

Эту задачу очень легко решить уравнением. Обозначим площадь всего поля буквой $x$. Тогда $x \cdot \frac{3}{7}$ — это площадь, на которой посеяна гречиха, т. е. 6 га. Вот и уравнение получилось: $x \cdot \frac{3}{7} = 6$. Решая его, получаем $x = 6 : \frac{3}{7} = 14$ (га).

Конечно, данные в этой задаче могли быть другими, но путь решения остался бы тем же. Значит, можно сформулировать правило:

**Если известна дробь, показывающая, какую часть искомого числа составляет данное число, то, чтобы найти искомое число, нужно данное число разделить на эту дробь.**

**Вопросы и задания**

?

**23.1.** Как найти, какую часть от числа составляет другое число?

**23.2.** Как найти дробь от числа?

**23.3.** Как найти число, если известна дробь, показывающая, какую часть искомого числа составляет данное число?

!

**23.4. (У)** Чему равно:

а) $\frac{2}{3}$ от 40; б) $\frac{5}{7}$ от 100; в) $\frac{13}{11}$ от 110; г) $\frac{33}{20}$ от 14?

**23.5.** Чему равно:

а) $\frac{2}{3}$ от 8,7; в) $\frac{13}{11}$ от 0,8; д) $2\frac{1}{3}$ от 6,9; ж) $\frac{2}{7}$ от $\frac{11}{16}$;

б) $\frac{5}{7}$ от 6,3; г) $\frac{17}{23}$ от 6,8; е) $7\frac{16}{23}$ от 8,3; з) $3\frac{10}{11}$ от $6\frac{7}{8}$?

**23.6.** Запишите обыкновенной дробью:

а) $\frac{1}{3}\%$; в) $2\frac{3}{8}\%$; д) $67\frac{13}{20}\%$;

б) $\frac{4}{7}\%$; г) $24\frac{37}{41}\%$; е) $102\frac{1}{3}\%$.

**23.7.** Вычислите:

а) $\frac{1}{3}\%$ от 27; в) $2\frac{3}{8}\%$ от 7,2; д) $67\frac{13}{20}\%$ от 14,3;

б) $\frac{4}{7}\%$ от $\frac{14}{17}$; г) $24\frac{37}{41}\%$ от $\frac{20}{47}$; е) $102\frac{1}{3}\%$ от $3\frac{6}{7}$.

**23.8.** а) Длина прямоугольника 22,2 см, а его ширина составляет $\frac{4}{11}$ от длины. Найдите периметр прямоугольника.

б) Периметр треугольника 37,8 м. Одна его сторона составляет $\frac{2}{9}$ от периметра, другая — $\frac{3}{7}$. Найдите длины сторон.

**23.9.** Туристы за 3 дня должны пройти 43,35 км. В первый день они планируют пройти $\frac{4}{15}$ всего пути, во второй день — $\frac{2}{5}$ пути. Сколько километров должны пройти туристы в первый, во второй и в третий дни?

**23.10.** Работники почтамта подсчитали, что за прошедший год письма составили $\frac{5}{6}$ всех почтовых отправлений, обработанных почтамтом, посылки — $\frac{3}{100}$, денежные переводы — $\frac{1}{12}$, а телеграммы — $\frac{4}{75}$. Постройте круговую диаграмму, показывающую долю каждого вида почтовых отправлений.

**23.11.** Чему равно число, если:

а) $\frac{2}{3}$ от него равны 3,6; в) $2\frac{1}{7}$ от него равны 4,5;

б) $\frac{35}{23}$ от него равны 0,7; г) $3\frac{4}{7}$ от него равны 1,25?

**23.12. (У)** Чему равно число, если:

а) $\frac{2}{3}$ от него равно 40; в) $\frac{13}{11}$ от него равно 130;

б) $\frac{5}{7}$ от него равно 100; г) $\frac{22}{15}$ от него равно 11?

**23.13.** Чему равно число, если:

а) $\frac{2}{5}\%$ от него равны 5; в) $32\frac{3}{5}\%$ от него равны 72;

б) $2\frac{3}{8}\%$ от него равны 12,5; г) $102\frac{2}{9}\%$ от него равны 92?

**23.14.** До привала туристы прошли 18 км. По карте они определили, что это $\frac{2}{5}$ всего маршрута. Какова длина всего маршрута? Сколько километров осталось пройти туристам?

**23.15.** а) На школьной выставке 220 рисунков выполнены красками, а остальные — карандашами. Сколько всего рисунков на выставке, если карандашами выполнено $\frac{3}{7}$ всех рисунков?

б) Составьте обратную задачу, в которой требуется найти количество рисунков, выполненных красками.

**23.16.** Фермер посадил овощи на площади 3,9 га, что составляет $\frac{13}{70}$ всей посевной площади фермерского хозяйства. Какова вся посевная площадь?

**23.17.** В 1996 г. один российский завод продал $\frac{19}{45}$ выпущенных им спортивных самолетов в России, а остальные 182 самолета были отправлены за границу. Сколько самолетов было продано в России?

Урок 24

## УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. ВАЖНО ХОРОШО ПРОДУМЫВАТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Смекалкин предложил младшему брату две задачи:

З а д а ч а 1. Лифт от 1-го до 2-го этажа идет 4 с. Сколько секунд он будет идти без остановки от 1-го до 6-го этажа?

Младший брат рассуждал так: «Во сколько раз 6-й этаж выше 2-го? Делим 6 на 2, получаем 3. В 3 раза выше! Значит, на подъем до 6-го этажа лифту потребуется в 3 раза больше времени. Умножаем 4 на 3, получаем 12. Ответ: 12 с».

*Правильно ли рассуждал младший брат Смекалкина? Правильно ли он решил задачу?*

Давайте разберемся. Чтобы определить, во сколько раз 6-й этаж выше 2-го, нарисуем схему этажей от 1-го до 6-го (рис. 8). Смотрите: от 1-го этажа до 2-го один пролет (на рисунке он закрашен). А сколько таких пролетов от 1-го этажа до 6-го? Каждый видит, что их 5. Значит, 6-й этаж не в 3 раза выше 2-го, как, не подумав, утверждал младший брат, а в 5 раз! Младший брат не продумал условие как следует и решил задачу неправильно.

Рис. 8

*Решите задачу правильно.*

З а д а ч а 2. В сельском районе выделили под вишневые сады два квадратных участка земли. Сторона первого квадрата 100 м, сторона второго — 150 м. В первом саду высадили 600 вишневых деревьев. Сколько деревьев потребуется для второго сада?

Младший брат Смекалкина, решая эту задачу, рассуждал так: «Второй сад в 1,5 раза больше первого, значит, и деревьев для него потребуется в 1,5 раза больше. Умножаем 600 на 1,5, получаем 900. Ответ: потребуется 900 деревьев».

Смекалкин сказал брату, что тот не продумал условие задачи, рассуждал неправильно и получил неверный ответ.

*Объясните, в чем состояла ошибка младшего брата.*

Давайте задумаемся над такими словами из рассуждений младшего брата: «Второй сад в 1,5 раза больше первого, значит, деревьев для него потребуется в 1,5 раза больше». Вот здесь-то и ошибка! Ведь младший брат вспомнил только о длине стороны квадрата. А для решения задачи нужно учитывать площадь! Во сколько раз больше площадь, во столько раз больше потребуется деревьев. Ясно, что площадь первого сада 1 км$^2$. А какова площадь второго?

*Найдите ее. Определите, во сколько раз она больше площади первого сада, и завершите решение задачи.*

**Задания**

**24.1.** Перечитайте условие задачи 1 из объяснительного текста и определите, сколько секунд лифт будет идти без остановки: а) от 1-го до 7-го этажа; б) от 1-го до 10-го этажа; в) от 2-го до 10-го этажа; г) от 3-го до 12-го этажа.

**24.2.** Младший брат спросил Смекалкина: «Сколько секунд потребуется тебе на запись чисел от 1 до 20?» Смекалкин засек время и написал первые пять чисел, потратив на запись 5 с. «А остальные числа почему не пишешь?» — удивился младший брат. Смекалкин объяснил, что незачем. Ведь уже можно определить, с какой скоростью он пишет цифры, и ответить на заданный вопрос. Младший брат определил: одна цифра в секунду. «Значит, числа от 1 до 20 ты запишешь за 20 с»,— сказал он. Смекалкин объяснил брату, что тот ошибается. Ведь не каждое число записывается одной цифрой.

а) Ответьте правильно на заданный вопрос.

б) Сколько секунд потребуется Смекалкину на запись чисел от 1 до 40, если он будет писать без остановки?

**24.3.** В журнале в семи номерах подряд публиковалась новая повесть. Окончание дано в № 11. С какого номера нужно попросить журнал в библиотеке, чтобы прочитать всю повесть?

**24.4.** Учительница выбирает путевку в санаторий. Срок понравившейся ей путевки 24 дня, начиная с 7 августа. Какого числа кончается срок путевки? Один день нужен на дорогу. Может ли учительница поехать по этой путевке и успеть вернуться к началу учебного года?

**24.5.** На садовом участке есть два кубических бака для воды. Ребро первого куба 1 м, ребро второго — 1,5 м. Во сколько раз больше воды вмещается во второй бак, чем в первый?

**24.6.** Клоун объявил, что на представлении присутствуют 576 детей и что это составляет $\frac{9}{16}$ всех зрителей. Чтобы узнать, сколько всего зрителей на представлении, он умножил 576 на $\frac{9}{16}$ и получил 224 (зрителя). Публика смеялась: все понимали, что клоун вместо того, чтобы искать число по дроби, искал дробь от числа.

а) Сколько всего зрителей было на представлении?

б) Какую часть зрителей составляли взрослые?

в) Проверьте, правильно ли хоть клоун умножил 576 на $\frac{9}{16}$.

**Урок 25**

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 2

**25.1.** Сократите дробь:

а) **(У)** $\frac{12}{18}$; б) **(У)** $\frac{100}{35}$; в) $\frac{315}{495}$; г)* $\frac{2323}{3232}$; д)* $\frac{1111}{111\,111}$.

**25.2.** Сравните дроби: а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{77}{88}$; б) $\frac{888}{999}$ и $\frac{8888}{9999}$.

**25.3.** **(У)** Сократима ли дробь: а) $\frac{45}{111}$; б) $\frac{2375}{67830}$; в) $\frac{37}{98}$?

**25.4.** Чему равна дробь, числитель которой: а) в 3 раза меньше знаменателя; б) в 7 раз меньше знаменателя? (Совет: обозначьте числитель какой-нибудь буквой.)

**25.5.** Запишите в порядке возрастания дроби:

а) $\frac{5}{7}$, $\frac{51}{71}$, $\frac{501}{701}$, $\frac{5001}{7001}$; б) $\frac{1005}{1007}$, $\frac{105}{107}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{5}{7}$.

**25.6.** Даны две дроби. Числитель первой дроби в 2 раза меньше числителя второй дроби, а знаменатель первой дроби в 3 раза меньше знаменателя второй. а) Чему равно частное при делении первой дроби на вторую? (Совет: обозначьте числитель первой дроби буквой $a$, знаменатель — буквой $b$.) б) **(У)** Учитывая ответ из пункта а), скажите, какая дробь больше: первая или вторая.

**25.7.** Винни-Пух съедает банку меда за 3 ч, а его друг Пятачок — за 4 ч. За какое время они съедят такую банку меда, если начнут со своей обычной скоростью есть ее вместе?

**25.8.** (*Старинная задача,* XVII в.) Четыре плотника у некоего купца нанялись двор ставити. И говорит первый плотник так: «Только бы мне одному тот двор ставити, я бы его поставил един год». Другой молвил: «Я бы его поставил в два года». А третий молвил: «Я бы его поставил в три года». Четвертый так рек: «Я бы его поставил в четыре года». Все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Сколько долго они ставили, сочти.

**25.9.** Два колхоза строили дорогу. Один построил $\frac{5}{7}$ дороги, другой — остальную часть. а) Какую часть дороги построил второй колхоз? б) Во сколько раз часть дороги, построенная первым колхозом, больше, чем ее часть, построенная вторым колхозом?

**25.10.** а) К числителю и знаменателю дроби $\frac{7}{15}$ прибавили по 6. Большее или меньшее получилось число? б) Из числителя и знаменателя дроби $\frac{11}{18}$ вычли по 6. Большее или меньшее получилось число?

**25.11.** Сравните дроби: а) **(У)** $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{7}$ и $\frac{2}{9}$; в) $\frac{10}{21}$ и $\frac{10}{49}$; г) $\frac{11}{36}$ и $\frac{11}{48}$; д) $\frac{20}{111}$ и $\frac{20}{259}$. Сделайте вывод и сформулируйте правило сравнения дробей с одинаковыми числителями.

**25.12.** Запишите все дроби с числителем 2, большие чем $\frac{2}{9}$.

**25.13.** Найдите значение числового выражения:

а) $3\frac{1}{2}:4\frac{2}{3}+4\frac{2}{3}:3\frac{1}{2}$; в) $20\frac{7}{8}-\left(\frac{5}{7}\cdot2\frac{1}{3}:\frac{5}{6}\right)^4$;

б) $\left(\left(1\frac{2}{5}\right)^2-1\frac{3}{5}\right):8\frac{1}{3}$; г) $\left(2\frac{1}{3}-1\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{8}{9}$;

д) $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):3\frac{1}{6}$; е) $\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right):2\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}:\left(2\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)$.

**25.14.** Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных дробей и выполните действия:

а) $\frac{2}{3}\cdot 8{,}7$; г) $6{,}8\cdot\frac{15}{13}$; ж) $5{,}6:\frac{7}{9}$; к) $\frac{15}{13}:6{,}5$;

б) $6{,}3\cdot\frac{5}{7}$; д) $2\frac{1}{3}\cdot 6{,}9$; з) $\frac{3}{11}:0{,}6$; л) $3{,}3:2\frac{1}{7}$;

в) $\frac{12}{11}\cdot 0{,}3$; е) $8{,}3\cdot 3\frac{11}{13}$; и) $7{,}2:\frac{24}{19}$; м) $3\frac{9}{11}:6{,}3$.

**25.15.** Найдите число, обратное данному числу:

а) **(У)** 0,01; б) **(У)** 0,00001; в) $2\frac{7}{11}$; г) 6,25; д) 2,25.

**25.16.** Вычислите произведение и сравните его с первым множителем:

а) $\frac{9}{16}\cdot\frac{3}{2}$; в) $\frac{17}{28}\cdot\frac{34}{7}$; д) $0{,}55\cdot\frac{22}{5}$; ж) $\frac{13}{111}\cdot\frac{3}{3}$; и) $2\cdot\frac{7}{24}$;

б) $\frac{9}{16}\cdot\frac{2}{3}$; г) $\frac{17}{28}\cdot\frac{7}{34}$; е) $0{,}55\cdot\frac{5}{22}$; з) $\frac{13}{111}\cdot\frac{13}{13}$; к) $2\cdot\frac{24}{7}$.

Сделайте вывод: увеличивается или уменьшается число при умножении на дробь, большую единицы; на дробь, меньшую единицы; на дробь, равную единице?

**25.17.** Рассмотрите примеры а) — к) из задания 22.6. Можно ли утверждать, что в этих примерах вычисления те же самые, что и в примерах а) — к) из задания 25.16? (Совет: для объяснения воспользуйтесь правилом из урока 22.)

Сделайте вывод: увеличивается или уменьшается число при делении на дробь, большую единицы; на дробь, меньшую единицы; на дробь, равную единице?

**25.18.** Каждое из семи двухметровых бревен надо распилить на равные части по $\frac{2}{3}$ м. Сколько всего распилов надо сделать?

**25.19.** Для провешивания линии электропередачи установили 100 столбов. Расстояние между каждыми двумя столбами 50 м. Какова длина провода, соединяющего первый и последний столбы?

▲ **25.20.** **(У)** а) Не выполняя вычитания, скажите, что больше: $1-\frac{1}{1997}$ или $1-\frac{1}{1998}$. б) Пользуясь ответом к заданию а), сравните дроби $\frac{1996}{1997}$ и $\frac{1997}{1998}$. ▲

**25.21. (У)** Клоун утверждал, что всегда дробь, обратная к неправильной дроби, будет правильной. Публика смеялась: всем было ясно, что не всегда. Чему равны те неправильные дроби, обратные к которым снова неправильные?

## § 3. ПРОПОРЦИИ

Что объединяет между собой движение транспорта и кулинарию, изготовление сплавов и малярные работы, вычерчивание карт и рассматривание микробов в микроскоп? Кому-то такой вопрос может показаться странным. Но того, кто изучал математику в 6-м классе, ответ не затруднит: во всех перечисленных делах и процессах нередко возникают пропорции. Что такое пропорция и как пропорции помогают решать разные задачи, вы узнаете в этом параграфе.

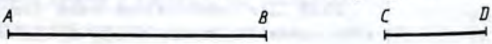
**Урок 26**

### ЧТО ТАКОЕ ОТНОШЕНИЕ

При сравнении двух значений какой-то величины часто возникает вопрос: а) во сколько раз одно значение больше другого или б) какую часть по отношению к другому оно составляет? Вы знаете, что и в случае а), и в случае б) ответ находится вычислением частного. В таких случаях частное двух чисел называют их **отношением.**

Разберем несколько примеров отношений.

Пример 1. Рассмотрим два отрезка длиной 5 см и 2 см (рис. 9): $AB=5$ см, $CD=2$ см. Отношение $AB$ к $CD$ равно $\frac{5}{2}$. Если длины выразить в миллиметрах, то отношение $AB$ к $CD$ можно записать в виде $\frac{50}{20}$. Оба отношения $\frac{5}{2}$ и $\frac{50}{20}$ показывают, во сколько раз $AB$ больше $CD$: в 2,5 раза. Ведь $\frac{5}{2}=\frac{50}{20}=2{,}5$.

Рис. 9 


Пример 2. Масса батона 360 г, а масса буханки хлеба 800 г. Отношение $\frac{360}{800}$ показывает, какую часть составляет первая масса по отношению ко второй: 0,45. Ведь $\frac{360}{800}=0{,}45$ *(проверьте!)*.

Если эти массы выразить в килограммах, то их отношение можно записать в виде $\frac{0{,}36}{0{,}8}$.

*Но ведь дробную черту мы использовали для записи дробей! А сейчас записана не дробь.*

Верно. Но вы давно знаете, что при записи деления натуральных чисел вместо знака деления можно использовать дробную черту. Так вот, договариваются о том же и при записи деления любых чисел. Итак, если $a$ и $b$ — любые числа, то

$$\boxed{\frac{a}{b}=a:b}$$

И записать отношение числа $a$ к числу $b$ можно двумя способами: $\frac{a}{b}$ и $a:b$.

*Придумайте два-три примера, где с помощью отношения сравниваются значения какой-то величины: длины, массы, времени и т. п. Запишите возникшие при этом отношения.*

Еще один важный случай, когда возникает отношение, показан в следующем примере:

П р и м е р 3. Если пешеход за 40 с проходит 50 м, то его скорость равна $\frac{50}{40}$ м/с, т. е. 1,25 м/с. Видите, для определения скорости нам пришлось найти отношение пройденного расстояния к времени движения:

$$\boxed{\text{скорость}} = \frac{\boxed{\text{длина (пройденного пути)}}}{\boxed{\text{время (потраченное на этот путь)}}}$$

В виде отношений могут быть выражены и другие величины: производительность труда, урожайность, цена. Например, цена товара равна отношению стоимости этого товара к его количеству.

### Вопросы и задания

**26.1.** Как найти отношение чисел $a$ и $b$? Как записывают это отношение?

**26.2.** Каково отношение длины окружности к ее диаметру?

**26.3. (У)** Длина отрезка $KL$ равна 12 м, а длина отрезка $MN$ равна 60 м. а) Найдите отношение $KL$ к $MN$. Что показывает это отношение? б) Найдите отношение $MN$ к $KL$. Что показывает это отношение?

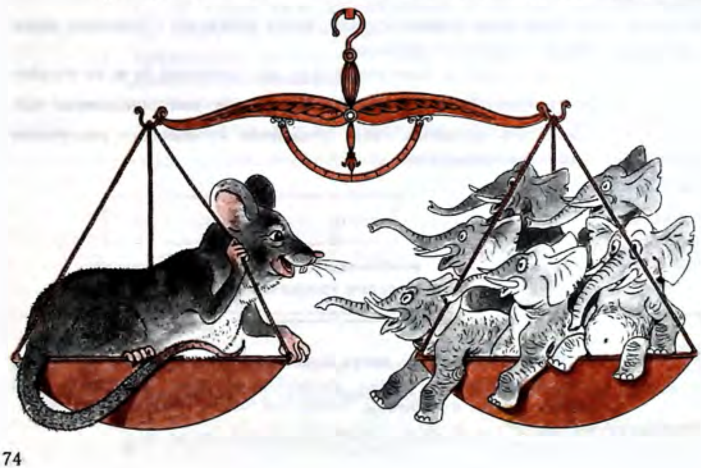
**26.4. (У)** Найдите отношение: а) числа 12 к числу 4; б) числа 4 к числу 12; в) числа 6,3 к числу 9; г) числа 3 к числу $\frac{1}{4}$.

**26.5.** Турист за день прошел 32 км. До обеда он шел 4 ч и прошел 20 км. Еще 3 ч он шел после обеда. Когда скорость туриста была выше: до или после обеда?

**26.6.** Бегун пробежал 100 м за 10 с. Больше или меньше его скорость, чем обычная скорость теплохода 35 км/ч?

**26.7.** Одна бригада маляров за 3 ч покрасила 32 $м^2$ стен, а другая бригада за 4 ч покрасила 42 $м^2$. У какой бригады производительность труда выше?

**26.8. (У)** Найдите отношение площади квадрата к длине его стороны, если длина стороны равна: а) 3 мм; б) 0,2 мм; в) 14 км.



**26.9.** а) Клоун решил найти отношение массы мышки к массе слона. Мышка весит 30 г, слон — 5 т. «Составляем отношение: $\frac{30}{5}$,— сказал клоун.— Мышка в 6 раз тяжелее слона!» Публика смеялась: все видели, что клоун использовал разные единицы массы. Составьте правильное отношение и найдите, какую часть массы слона составляет масса мышки.

б) Затем клоун решил сравнить скорости улитки и космической ракеты. Скорость ракеты 8 км/с, скорость улитки 320 см/ч. «Составляем отношение: $\frac{8}{320}$,— сказал клоун.— Скорость ракеты составляет 0,025 от скорости улитки». Публика смеялась: все видели, что клоун опять использовал неодинаковые единицы скорости. Составьте правильное отношение и найдите, во сколько раз скорость ракеты больше скорости улитки.

Урок 27

## ЗНАКОМИМСЯ С ПРОПОРЦИЕЙ. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПРОПОРЦИИ

Дадим главное определение этого параграфа:

**Пропорцией** называют равенство двух отношений.

В каждом из трех примеров, обсуждавшихся в уроке 26, можно обнаружить пропорцию. Посмотрите-ка еще раз поочередно эти примеры.

В примере 1 пропорция бросается в глаза: $\frac{5}{2}=\frac{50}{20}$. В примере 2 оба написанных там отношения означают одно и то же, так что получается пропорция $\frac{360}{800}=\frac{0,36}{0,8}$. В примере 3 скорость пешехода можно было бы найти, зная расстояние, которое пешеход проходит за какое-нибудь другое время. Например, при той же скорости он за 12 с пройдет 15 м *(проверьте!)*. Значит, его скорость (в м/с) можно было выразить отношением $\frac{15}{12}$. Вспомнив для этой скорости отношение $\frac{50}{40}$, получаем пропорцию $\frac{50}{40}=\frac{15}{12}$.

Пропорцию $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}$ можно прочитать так: «Отношение $a$ к $u$ равно отношению $b$ к $v$», или «$a$ так относится к $u$, как $b$ относится к $v$», или «$a$, деленное на $u$, равно $b$, деленному на $v$». Числа $a$, $b$, $u$, $v$ называют **членами** пропорции. При этом члены $a$ и $v$, а также $u$ и $b$ называют накрест лежащими.

*А почему такое название?*

Если соединить $a$ с $v$ отрезком и $u$ с $b$ отрезком, то такие отрезки образуют крест $\frac{a}{u} \times \frac{b}{v}$.

Можно заметить, что в пропорции произведения накрест лежащих членов равны. Посмотрите: для пропорции $\frac{5}{2}=\frac{50}{20}$ произведения $5 \cdot 20$ и $2 \cdot 50$ равны, для пропорции $\frac{50}{40}=\frac{15}{12}$ произведения $50 \cdot 12$ и $40 \cdot 15$ равны. И вообще,

$$\boxed{\text{если } \frac{a}{u}=\frac{b}{v}, \text{ то } a \cdot v=u \cdot b}$$

▲ Убедиться в том, что это так, можно, рассуждая следующим образом. Умножим каждое из чисел $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{v}$ на одно и то же число $uv$. Получим равные числа. Но чему равны $\frac{a}{u} \cdot u \cdot v$ и $\frac{b}{v} \cdot u \cdot v$? Так как $\frac{a}{u} \cdot u=(a:u) \cdot u=a$, число $\frac{a}{u} \cdot u \cdot v$ равно $a \cdot v$. Точно так же $\frac{b}{v} \cdot u \cdot v=\frac{b}{v} \cdot v \cdot u=(b:v) \cdot v \cdot u=b \cdot u=u \cdot b$.
Вот мы и убедились, что $a \cdot v=u \cdot b$. ▲

Теперь можно сформулировать **основное свойство пропорции:**

В любой пропорции произведения накрест лежащих членов равны.

Пропорцию $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}$ пишут и в виде $a:u=b:v$. Тогда накрест лежащие члены $a$ и $v$ называют **крайними**, а $b$ и $u$ — **средними** членами пропорции. Если левую и правую части пропорции поменять местами, то крайние члены станут средними и наоборот:

$$\overset{\text{крайние}}{\underset{\text{средние}}{\overset{\downarrow}{a}:\underset{\uparrow}{u}=\underset{\uparrow}{b}:\overset{\downarrow}{v}}} \qquad\qquad \overset{\text{средние}}{\underset{\text{крайние}}{\underset{\uparrow}{b}:\overset{\downarrow}{v}=\overset{\downarrow}{a}:\underset{\uparrow}{u}}}$$

Для такой записи «с двоеточием» основное свойство пропорции нужно сформулировать немного по-другому:

**Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.**

### Вопросы и задания

**27.1.** Что называют пропорцией?

**27.2.** Каково основное свойство пропорции?

**27.3.** Прочитайте следующие пропорции и назовите в них крайние и средние члены. Проверьте, что выполнено основное свойство пропорции:

а) $25:5=50:10$; б) $2{,}4:0{,}6=8:2$; в) $3{,}5:7=1{,}25:2{,}5$.

**27.4.** Определите, какие из отношений равны, и составьте из них пропорции: $28:14$; $2\frac{1}{2}:2$; $8:4$; $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$; $3:10$; $2{,}1:7$; $3:0{,}3$.

**27.5.** Скорость самолета 900 км/ч, скорость автомашины 108 км/ч. Выразите эти скорости в метрах в секунду и допишите пропорцию $900:108=...$ .

**27.6.** Объем одной банки 800 мл, объем другой — 2,5 л. Найдите отношение их объемов, выразив оба объема: а) в миллилитрах; б) в литрах. Составьте пропорцию.

**Урок 28**

## ПРОДОЛЖАЕМ ИЗУЧАТЬ СВОЙСТВА ПРОПОРЦИЙ

Как проверить, составляют ли пропорцию отношения $\frac{132}{168}$ и $\frac{143}{182}$? Если составляют, то произведения накрест лежащих членов должны быть равны, т. е. $132\cdot182=168\cdot143$. Это и в самом деле так: оба произведения равны числу 24 024 *(проверьте!)*. Оказывается, верно и обратное: из равенства $132\cdot182=168\cdot143$ выводится пропорция $\frac{132}{168}=\frac{143}{182}$. Чтобы увидеть это, разделим число 24 024 на число $168\cdot182$ двумя способами, воспользовавшись сокращением дробей:

$$\frac{24\,024}{168\cdot182}=\frac{132\cdot182}{168\cdot182}=\frac{132}{168},\quad \frac{24\,024}{168\cdot182}=\frac{168\cdot143}{168\cdot182}=\frac{143}{182}.$$

Значит, $\frac{132}{168}=\frac{143}{182}$.

В этом примере вместо взятых нами конкретных чисел можно взять любые числа $a$, $b$, $u$, $v$ (лишь бы $u$ и $v$ не были равны нулю). Тогда ясно, что выполняется такое свойство:

$$\boxed{\text{если } a\cdot v = u\cdot b, \text{ то } \frac{a}{u}=\frac{b}{v}.}$$

Обратите внимание, что равенство $a\cdot v = u\cdot b$ — это равенство произведений накрест лежащих членов любой из следующих четырех пропорций: $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}$, $\frac{a}{b}=\frac{u}{v}$, $\frac{u}{a}=\frac{v}{b}$, $\frac{b}{a}=\frac{v}{u}$ *(проверьте!)*. И наоборот, эти четыре пропорции можно вывести из равенства $a\cdot v = u\cdot b$ (конечно, числа $a$, $b$, $u$, $v$ тогда не должны быть равны нулю). Например, из равенства $132\cdot 182 = 168\cdot 143$ получаем пропорции:

$$\frac{132}{168}=\frac{143}{182},\quad \frac{132}{143}=\frac{168}{182},\quad \frac{168}{132}=\frac{182}{143},\quad \frac{143}{132}=\frac{182}{168}.$$

Значит, если выполняется одно из следующих пяти равенств, то выполняются и четыре других:

$$\boxed{a\cdot v = u\cdot b}$$

$$\boxed{\frac{a}{u}=\frac{b}{v}} \quad \boxed{\frac{a}{b}=\frac{u}{v}} \quad \boxed{\frac{u}{a}=\frac{v}{b}} \quad \boxed{\frac{b}{a}=\frac{v}{u}}$$

**Задания**

**28.1.** Проверьте, правильно ли составлены пропорции:

а) $\frac{5}{4}=\frac{125}{100}$; б) $\frac{51}{187}=\frac{3}{1}$; в) $\frac{1{,}25}{15}=\frac{0{,}25}{3}$; г) $\frac{2}{0{,}6}=\frac{7}{2{,}1}$;

д) $\frac{6{,}38}{1{,}82}=\frac{95{,}7}{27{,}3}$. Ответ объясните.

**28.2.** Можно ли составить пропорцию из двух отношений:

а) $\frac{19}{7}$ и $\frac{209}{77}$; б) $\frac{19}{7}$ и $\frac{46}{17}$; в) $\frac{226}{371}$ и $\frac{14}{23}$; г) $\frac{266}{437}$ и $\frac{14}{23}$; д) $\frac{2{,}5}{3}$ и $\frac{11}{13}$;

е) $\frac{2{,}5}{3}$ и $\frac{16{,}5}{21}$? Ответ объясните.

**28.3.** Составьте четыре пропорции, используя равенство:

а) $3\cdot 8 = 6\cdot 4$; б) $6\cdot 0{,}25 = 0{,}5\cdot 3$; в) $a\cdot v = u\cdot b$.

**28.4.** Найдите отношение $u$ к $v$, если:

а) $\frac{v}{u}=\frac{5}{3}$; б) $\frac{u}{21}=\frac{v}{7}$; в) $\frac{20}{u}=\frac{5}{v}$.

■ **28.5. Плотностью** вещества называют отношение массы вещества к занимаемому им объему. Например, 10 $см^3$ железа имеют массу 78,8 г; значит, плотность железа равна $\frac{78{,}8}{10}=7{,}88$ ($г/см^3$). Найдите плотность в $г/см^3$ и в $кг/м^3$ воды, нефти, воздуха и свинца, если: а) 1 л воды имеет массу 1 кг; б) 5 $м^3$ нефти имеют массу 4 т; в) $\frac{1}{3}$ $м^3$ воздуха имеет массу 430 г; г) свинцовый кубик с ребром 5 см имеет массу 1412,5 г.

■ **28.6.** Если плотность тела меньше плотности жидкости, то это тело будет плавать в жидкости. а) Тело имеет массу 361 г и объем 380 $см^3$. Будет ли оно плавать в нефти; в воде? (Плотность этих жидкостей вы нашли, выполнив задание 28.5.) б) 5 л ртути имеют массу 68 кг. Найдите плотность ртути в $кг/м^3$. Будет ли плавать в ртути свинцовый кубик из задания 28.5; золотой кубик с ребром 10 см и массой 19,3 кг?

**28.7.** Масса чего больше: 1 $км^3$ воздуха или свинцового куба с ребром 48 м; 59 л нефти или 3,5 л ртути? (Плотность этих веществ вы узнали, выполнив задания 28.5 и 28.6.)

**28.8.** а) Какой объем нефти имеет такую же массу, что и 1 л ртути? б) Плотность сибирской пихты 375 $кг/м^3$, а плотность алюминия 2,7 $г/см^3$. Алюминиевый брусок имеет такую же массу, как пихтовый кубик с ребром 6 см. Найдите объем алюминиевого бруска.

**28.9.** Решите уравнение: а) $x:12=2:3$; б) $\frac{6}{7}=\frac{x}{35}$; в) $\frac{0{,}2}{x}=\frac{0{,}7}{0{,}105}$; г) $117:63=143:x$. (Совет: воспользуйтесь основным свойством пропорции.)

**Урок 29**

## РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИИ

Если три члена пропорции известны, а четвертый нужно найти, то говорят, что это **задача на пропорцию.** Задачи на пропорции возникают очень часто. Нужно научиться уверенно решать их. Вот одна из таких задач:

З а д а ч а 1. Масса железного куба с ребром 5 см равна 985 г. Какова масса железного куба с ребром 10 см?

Напомним, что в задании 28.5 мы определили плотность вещества как отношение его массы к занимаемому объему.

Объем первого куба равен 125 см$^3$, а его масса — 985 г. Вычислим плотность железа: $\frac{985}{125}$ г/см. Объем второго куба равен 1000 см$^3$, а его искомую массу обозначим буквой $x$. Теперь плотность железа можно записать и отношением $\frac{x}{1000}$. Так как плотность одна и та же, получаем уравнение в виде пропорции

$$\frac{985}{125}=\frac{x}{1000}.$$

Перемножим накрест лежащие члены: $985\cdot1000=125\cdot x$. Решая это уравнение, находим $x=\frac{985\cdot1000}{125}=7880$. Вот и ответ: искомая масса равна 7880 г.

С помощью пропорций удобно решать задачи на проценты.

З а д а ч а 2. Бригада трактористов за рабочий день вспахала 117 га, что составило 36% общей площади полей. Найдите общую площадь полей.

Обозначим буквой $x$ искомую площадь. Тогда условие задачи можно записать в виде пропорции

$$\frac{117}{x}=\frac{36}{100}.$$

Перемножая накрест лежащие члены, получим $117\cdot100=x\cdot36$. Отсюда находим искомую площадь: $x=\frac{117\cdot100}{36}=325$ га.

В заданиях к уроку мы предлагаем немало других задач на пропорции.

**Задания**

**29.1.** Из 18 т железной руды выплавляют 10 т железа. Сколько железа выплавят из 35 т руды?

**29.2.** Чтобы заварить 1,5 л чая, нужно 30 г сухого чая. Чайник вмещает 0,39 л. Сколько нужно сухого чая для заварки?

**29.3.** Валя и Вера собрались варить варенье из 2,5 кг смородины. По рецепту на 2 кг ягод нужно 3 кг сахара. Валя сказала, что им потребуется 3,75 кг сахара, а Вера — что 3,25 кг. Кто из них прав? Ответ объясните.

**29.4.** Дуга окружности имеет длину 785 мм и градусную меру 30°. Найдите длину дуги той же окружности, если градусная мера дуги равна 18°; 252°; 96°. (Совет: посмотрите свое решение задания 27.7 в рабочей тетради и составьте пропорции.)

**29.5.** Сектор круга имеет площадь 64 см², а его дуга имеет градусную меру 48°. Найдите площадь сектора того же круга, если дуга сектора имеет величину 18°; 240°; 105°. (Совет: посмотрите свое решение задания 27.8 в рабочей тетради и составьте пропорции.)

**29.6.** В школьном коридоре длиной 56 м нужно выкрасить пол. Выкрасив часть коридора длиной 22 м, израсходовали 8,25 кг краски. Сколько еще нужно краски, чтобы докрасить коридор?

**29.7.** Масса 8 л бензина 5,68 кг. Цистерна имеет объем 500 м$^3$. Хватит ли ее, чтобы вместить 306 т бензина? Ответ объясните.

**29.8.** Чтобы сварить 4 порции пшенной каши, нужно взять 220 г пшена, 1 л молока и 30 г сахара. Сколько потребуется этих продуктов, чтобы сварить 14 порций каши? (Совет: составьте три пропорции — для каждого продукта отдельно.)

**29.9.** Чтобы засеять 2 га пашни, нужно 360 кг пшеницы. Используя эти данные, придумайте задачу на пропорцию и предложите решить ее соседу по парте. Проверьте его решение.

**29.10.** Придумайте задачу, которая решалась бы составлением пропорции $\frac{3}{x}=\frac{240}{53}$. Предложите соседу по парте решить ее и проверьте, правильно ли он решил.

**29.11.** а) Кофейные зерна при жарении теряют 12% своей массы. Сколько килограммов свежих зерен надо взять, чтобы получить 4,4 кг жареных? б) Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?

**29.12.** а) Сахарная свекла содержит 14% сахара. С 1 га собирают 30 т сахарной свеклы. Сколько гектаров надо засеять сахарной свеклой, чтобы получить 100 т сахара? б) Составьте обратную задачу, в которой требуется найти, сколько сахара можно получить из сахарной свеклы, посеянной на заданной площади. Решите составленную задачу.

**29.13.** Даны два числа. Какое из чисел больше и на сколько, если: а) 5% от первого числа равны 15, а 8% от второго равны 16; б) 18% от первого числа равны 72, а 15% от второго равны 60; в) 28% от первого числа равны 140, а 25% от второго числа равны 35% от первого?

**29.14*.** **(У)** Даны два числа. Какое из них больше, если: а) 25% от первого числа равны 35% от второго; б) 140% от первого числа равны 110% от второго?

**29.15.** **(У)** Клоун сказал, что сейчас решит задачу на пропорцию. «Отцу 40 лет, а сыну 20. Сколько лет будет сыну, когда отцу исполнится 60? Составляем пропорцию $\frac{x}{60}=\frac{20}{40}$ и находим возраст сына: $x=30$». Публика смеялась: всем было видно, что пропорция здесь ни при чем. Решите правильно задачу клоуна.

Урок 30

## КАК ЦЕЛОЕ ДЕЛИТЬ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЧАСТИ

Числа $a$, $b$ называют **пропорциональными числам** $u$, $v$, если $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}$. Оба отношения в этой пропорции равны одному и тому же числу. Обозначим его буквой $k$. Тогда $\frac{a}{u}=k$, $\frac{b}{v}=k$. Число $k$ называют **коэффициентом пропорциональности.**

Решим несколько задач на отыскание чисел, пропорциональных данным числам.

З а д а ч а 1. Найдите числа $a$ и $b$, пропорциональные числам 4 и 7 с коэффициентом пропорциональности 3.

Это очень легкая задача! В самом деле, условие означает, что $\frac{a}{4}=3$, $\frac{b}{7}=3$. Ясно, что $a=3\cdot4=12$, $b=3\cdot7=21$.

З а д а ч а 2. Найдите числа $a$ и $b$, пропорциональные числам 4 и 7, если $a+b=25{,}3$.

*Как же решать эту задачу, если коэффициент пропорциональности неизвестен?*

А мы сможем его найти, пользуясь условием задачи. Обозначим неизвестный коэффициент пропорциональности буквой $k$. В условии задачи говорится, что $\frac{a}{4}=k$, $\frac{b}{7}=k$. Тогда $a=k\cdot4$, $b=k\cdot7$. А так как $a+b=25{,}3$, получается уравнение

$$k\cdot4+k\cdot7=25{,}3.$$

*Закончите решение задачи: найдите коэффициент пропорциональности $k$, а затем искомые числа $a$ и $b$.*

Задачу 2 можно сформулировать и так: число 25,3 разделить на две части, пропорциональные числам 4 и 7. Вместо числа 25,3, да и вместо чисел 4 и 7 в такой задаче могли бы быть другие числа. Но и с другими числами задача решается точно так же.

*Разделите-ка число 20 на части, пропорциональные числам 2 и 3.*

---

В некоторых задачах приходится делить число не на две пропорциональные части, а на три или больше. Вот такая задача:

З а д а ч а 3. Для изготовления посуды часто применяют сплав с красивым названием нейзильбер (в быту его называют мельхиором). Это сплав никеля, цинка и меди, массы которых берут пропорциональными числам 3, 4 и 13. Сколько килограммов этих металлов требуется для получения 150 кг нейзильбера?

Р е ш е н и е. Обозначим буквами $x$, $y$ и $z$ неизвестные массы никеля, цинка и меди. Условие задачи означает, что выполняется «двойная» пропорция: $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{13}$. Обозначив буквой $k$ коэффициент пропорциональности, получим:

$$x=k\cdot 3,\ y=k\cdot 4,\ z=k\cdot 13.$$

Так как сумма $x$, $y$ и $z$ равна 150, должно выполняться равенство $k\cdot 3+k\cdot 4+k\cdot 13=150$. Как и при решении задачи 2, получили уравнение. Осталось найти коэффициент пропорциональности $k$, а затем искомые части числа 150. Ответ будет такой: потребуется 22,5 кг никеля, 30 кг цинка и 97,5 кг меди *(проверьте!)*.

Само слово «пропорция» произошло от задач, где приходится что-то целое делить соответственно долям, частям, порциям. Ведь латинское «про-порцио» означает «соответственно порциям».

▲ Вы знаете, что из пропорции $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}$ выводится пропорция $\frac{a}{b}=\frac{u}{v}$ и обратно (см. урок 28). Поэтому пропорция $a:b=u:v$ тоже означает, что числа $a$, $b$ пропорциональны числам $u$, $v$. Нередко и двойную пропорцию $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}$ записывают в виде $a:b:c=u:v:w$. Например, условие задачи 3 можно записать в виде $x:y:z=3:4:13$. Когда вы встретите такие записи в книгах (например, в учебниках химии и физики), вспомните то, что мы о них рассказали. ▲

**Вопросы и задания**

**30.1.** В каком случае числа $a$, $b$ называют пропорциональными числам $u$, $v$? Какое число называют коэффициентом пропорциональности?

**30.2.** Пропорциональны ли числа 3 и 5 числам: а) 537 и 995; б) 0,513 и 0,855; в) 2,37 и 3,85? Ответ объясните.

**30.3.** Найдите такие $x$ и $y$, чтобы числа $x$, $y$, 36 были пропорциональны числам: а) 3, 1, 1; б) 6, 8, 9; в) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{3}$.

**30.4.** а) Разделите число 451 на части, пропорциональные числам 5,3 и 2,9. б) Разделите число 93,44 на части, пропорциональные числам 3,6 и 11.

**30.5.** Валя и Вера хотят засолить огурцы в двух кадушках, объемы которых относятся как 2,5:4. Для этого потребуется 1,3 кг соли. Сколько соли придется на каждую кадушку?

**30.6*.** Периметр прямоугольника равен 64 см. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 3 и 5.

**30.7.** Длины сторон треугольника пропорциональны числам 4, 9 и 6. Найдите эти длины, если длину 18 см имеет: а) самая короткая сторона; б) самая длинная сторона; в) средняя сторона.

**30.8.** Периметр треугольника равен 90 м. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 5, 12 и 13.

**30.9.** Три машины-цементовоза, сделав одинаковое число рейсов, привезли на стройплощадку 609 т цемента. Первая машина за один рейс перевозила 8 т цемента, вторая — 13,5 т, третья — 22 т. Сколько цемента перевезла каждая машина?

**30.10.** Три класса должны посадить 24 саженца деревьев. В 6-м А — 32 ученика, в 6-м Б — 28, а в 6-м В — 36 учеников. Как разделить саженцы по классам пропорционально количеству учеников в них?

**Урок 31**

## СТРОИМ ДИАГРАММЫ

В разных книгах, чтобы наглядно сравнить какие-то цифровые данные, часто используют диаграммы. При их построении не обойтись без чисел, пропорциональных данным.

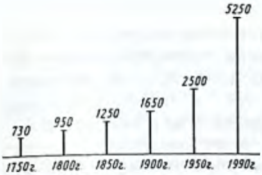


Рис. 10

Рассмотрите диаграмму на рисунке 10. Она показывает, как меняется со временем население Земли (выраженное в миллионах человек). Чтобы построить эту диаграмму, мы изобразили числа 730, 950, ... отрезками, длины которых пропорциональны этим числам. При этом отрезок длиной 1 мм изображает число 100.

*Измерьте отрезки на диаграмме и проверьте их пропорциональность данным числам. Каков здесь коэффициент пропорциональности?*

**Столбчатая** диаграмма на рисунке 11 изображает массы динозавров, вымерших десятки миллионов лет назад. Почему столбчатая? Потому, что массы изображаются не отрезками, а прямоугольными столбиками. Столбики заметнее отрезков! Конечно, и здесь высоты столбиков пропорциональны массам: столбик высотой 10 мм изображает массу 10 т, 50 мм — 50 т и т. д. Значит, масса 1 т изобразилась бы столбиком 1 мм.

Рис. 11

**Задания**

**31.1.** В 1-й строке таблицы указаны возрастные группы. Во 2-й строке, составленной по результатам переписи населения 1989 г., указано число жителей России в каждой возрастной группе. Постройте диаграмму, изображая 1 млн. отрезком 2 мм.

| Возраст, годы | 0—9 | 10—19 | 20—29 | 30—39 | 40—49 | 50—59 | 60—69 | 70 и более |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число жителей, млн. | 23,4 | 20,6 | 22,3 | 24,5 | 15,6 | 18,0 | 12,9 | 9,7 |

**31.2.** Постройте диаграмму потребления человечеством пресной воды за 1 год (на 2000 г.— прогноз). Изобразите 100 км$^3$ столбиком высотой 1 мм.

| Год | 1900 | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1975 | 1985 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Потребление воды, км$^3$ | 400 | 820 | 1100 | 1900 | 2600 | 3000 | 3900 | 6000 |

**31.3.** В таблице для некоторых городов показано годовое количество осадков (в мм). Постройте столбчатую диаграмму, изображая 100 мм осадков столбиком высотой 3 мм.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Москва | 704 | Донецк | 524 | Рига | 678 |
| Мары | 97 | Батуми | 2685 | Омск | 430 |
| Ереван | 339 | Сочи | 1664 | Баку | 247 |

**31.4.** Части света имеют площади (в млн. квадратных километров): Европа — 10,5; Азия — 43,4; Африка — 30,32; Северная Америка — 24,25; Южная Америка — 18,28; Австралия с Океанией — 8,86; Антарктида — 13,975. Составьте диаграмму, изображая 1 млн. км$^2$ столбиком высотой 1,5 мм.

**31.5.** Электроэнергию производят как на атомных электростанциях (АЭС), так и на обычных — гидро-, тепловых и других электростанциях. Часть всей электроэнергии, вырабатываемой на АЭС, составляет в Великобритании — 21,7%, в Германии — 34,3%, в России — 12,3%, в США — 19,1%, во Франции — 74,6%, в Японии — 27,8%. Постройте по этим данным диаграмму, изобразив 1% столбиком высотой 1 мм.

## ПРЯМО ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Возьмем квадрат и обозначим буквой $a$ длину его стороны, а буквой $P$ его периметр. Вы давно знаете, что $P=4 \cdot a$. Значит, для вычисления $P$ нужно знать величину $a$. В таких случаях говорят, что $P$ **зависит** от $a$. Говорят также, что между величинами $a$ и $P$ имеется зависимость.

У этой зависимости есть одно замечательное свойство, а именно: хотя периметр $P$ зависит от длины и меняется вместе с ней, их отношение остается постоянным: $\frac{P}{a}=4$. Иначе говоря, какие бы квадраты мы ни брали, их периметры пропорциональны длинам сторон с коэффициентом пропорциональности 4.

Точно так же длины окружностей пропорциональны их радиусам.

*Чему здесь равен коэффициент пропорциональности?*

Рассмотрим еще один пример. Вспомним пешехода из урока 26 и составим для него следующую таблицу:

| $t$, с | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 40 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$, м | 2,5 | 5 | 7,5 | 12,5 | 15 | 50 | 150 |

В первой строке указывается промежуток времени $t$, а во второй — расстояние $s$, проходимое пешеходом за это время. Каждому значению $t$ соответствует одно значение $s$. Например, промежутку времени 2 с соответствует расстояние 2,5 м, промежутку 12 с соответствуют 15 м и т. д.

И здесь мы обнаруживаем то же самое замечательное свойство. Хотя расстояние $s$ зависит от времени движения $t$, их отношение остается постоянным: $\frac{s}{t}=1{,}25$ (м/с). Значит, какие бы промежутки времени мы ни брали, соответствующие им расстояния пропорциональны этим промежуткам. Коэффициентом пропорциональности служит скорость движения 1,25 м/с.

Сформулируем теперь общее определение:

**Зависимость между величинами называют прямо пропорциональной, если отношение этих величин остается постоянным.**

Обозначим величины буквами $x$ и $y$. Тогда прямо пропорциональная зависимость между ними выразится формулой

$$\frac{y}{x}=k, \text{ или, по-другому, } y=k\cdot x;$$

буквой $k$ здесь обозначен коэффициент пропорциональности. Говорят также, что величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k$.

Например, расстояние $s$, проходимое пешеходом, прямо пропорционально времени движения $t$ с коэффициентом 1,25 м/с.

### Вопросы и задания

**32.1.** В каком случае зависимость между величинами называют прямо пропорциональной?

**32.2.** Кусок медного провода длиной 5 м имеет массу 430 г. а) Какова масса куска этого провода длиной 3 м; 14 м; 380 м; 12 км? б) С каким коэффициентом масса провода пропорциональна его длине?

**32.3.** а) Расстояние между домами, в которых живут Петя и Коля, 1200 м. Однажды они одновременно вышли каждый из своего дома и направились навстречу друг другу: Петя — пешком, а Коля — на велосипеде. Скорость движения Коли в 4 раза больше скорости Пети. На каком расстоянии от Петиного дома они встретятся?

б) Составьте и решите обратную задачу, в которой нужно найти, во сколько раз скорость Коли больше скорости Пети.

**32.4.** Дан круг радиуса $R$. а) Найдите зависимость между площадью $S$ сектора и угловой величиной $A$ его дуги. Будет ли она прямо пропорциональной? (Совет: посмотрите свое решение задания 27.8 в рабочей тетради.) б)* Найдите зависимость между той же площадью $S$ и длиной $L$ дуги. Будет ли она прямо пропорциональной?

**32.5.** В круге радиуса $R$ рассмотрите сектор, дуга которого имеет градусную меру 60°. Будет ли площадь $S$ сектора прямо пропорциональна радиусу $R$?

▲ **32.6.** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k$. Величина $z$ прямо пропорциональна величине $y$ с коэффициентом $m$. Будет ли величина $z$ прямо пропорциональна величине $x$? Если да, то каков коэффициент пропорциональности? Если нет, то как именно $z$ зависит от $x$? ▲

**32.7.** а) Клоун сказал, что площадь квадрата прямо пропорциональна его стороне. Ведь чем больше сторона, тем больше площадь квадрата. Публика смеялась: всем было видно, что это не так. Объясните почему. (Совет: сравните стороны и площади двух разных квадратов; возьмите для этого квадраты с такими сторонами, чтобы удобно было вычислять.)

■ б) Придумайте пример еще двух величин, между которыми имеется зависимость, но не прямо пропорциональная.

**Урок 33**

## ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Представьте, что вам поручили вырезать из бумаги несколько прямоугольников, но с одним непременным условием: чтобы площадь у всех прямоугольников была одна и та же, например 4 см$^2$.

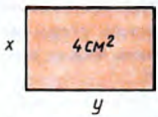



Рис. 12

Обозначим буквами $x$ и $y$ длины (в см) смежных сторон прямоугольника (рис. 12). Тогда наше условие сможем записать формулой $x \cdot y = 4$ (см$^2$). Про такие величины говорят, что они *обратно пропорциональны*, а число 4 называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Простейший пример обратной пропорциональности — взаимно обратные числа $x$ и $\frac{1}{x}$. Ведь для них выполняется равенство

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Сформулируем общее определение.

**Зависимость между величинами называют обратно пропорциональной, если произведение этих величин остается постоянным.** Число, которому равно это произведение, называют **коэффициентом обратной пропорциональности.**

Обратно пропорциональная зависимость между величинами $x$ и $y$ выражается формулой

$$x \cdot y = k, \text{ или, по-другому, } y = \frac{k}{x};$$

буквой $k$ здесь обозначен коэффициент обратной пропорциональности. Говорят также, что величина $y$ обратно пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k$.

▲ Почему говорят «обратно пропорциональна»? Взгляните на формулу $y=\frac{k}{x}$. Ее можно переписать так:

$$y=k\cdot\frac{1}{x}$$

(вспомните-ка правило из урока 22). Но это означает, что величина $y$ прямо пропорциональна величине $\frac{1}{x}$, обратной к $x$. Вот и название разъяснилось! ▲

### Вопросы и задания

**33.1.** В каком случае зависимость между величинами называют обратно пропорциональной? Что называют коэффициентом обратной пропорциональности?

**33.2.** В уксусной эссенции концентрация уксуса 80%. Концентрация столового уксуса 9%. Сколько воды нужно добавить к 180 г эссенции, чтобы получить столовый уксус? (Совет: воспользуйтесь тем, что при разбавлении водой масса уксуса не изменяется; подумайте, какая имеется зависимость между концентрацией уксуса и объемом его раствора.)

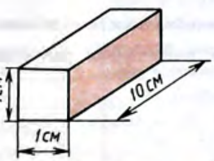



Рис. 13

**33.3*.** Брусок золота имеет длину 10 см, а его поперечное сечение — это квадрат со стороной 1 см (рис. 13). Из этого бруска изготовили проволоку. Какова длина этой проволоки, если ее поперечное сечение — квадрат со стороной: а) 1 мм; б) 0,005 мм?

**33.4.** Представьте себе, что человек, лев, борзая и гепард решили пробежать эстафету 4 по 100 м. Скорости бегунов вы можете найти в задании 31.6 в рабочей тетради. а) За какое время каждый из них пробежит 100 м? б) Чему равен коэффициент обратной пропорциональности между скоростью и временем?

▲ **33.5.** Величина $y$ обратно пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k$. Величина $z$ обратно пропорциональна величине $y$ с коэффициентом $m$. Будет ли величина $z$ обратно пропорциональна величине $x$? Если да, то каков коэффициент обратной пропорциональности? Если нет, то как именно $z$ зависит от $x$? ▲

**33.6.** Клоун сказал, что время, прошедшее от начала урока, обратно пропорционально времени до конца этого урока. Публика смеялась: всем было ясно, что это не так. а) Объясните почему. б) Проверьте, не является ли зависимость, придуманная вами в задании 32.7 б), обратно пропорциональной.

Урок 34

## КОГДА БЫВАЕТ НУЖЕН МАСШТАБ

Карта местности на рисунке 14 сделана в **масштабе** 1:250 000. Это означает, что все расстояния на местности при вычерчивании карты уменьшены в 250 000 раз. Поэтому отрезку на карте длиной 1 см соответствует расстояние

$$250\,000\ \text{см} = 2{,}5\ \text{км}$$

на местности. Другими словами, расстояния на карте прямо пропорциональны расстояниям на местности. А коэффициентом пропорциональности служит масштаб, равный

$$\frac{1}{250\,000} = 0{,}000004.$$

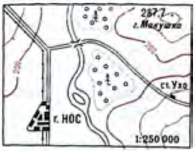



Рис. 14

Как найти расстояние между г. Нос и ст. Ухо? Нужно измерить отрезок, соединяющий соответствующие точки на карте, а затем умножить его длину на 250 000. Отрезок на карте имеет длину 2,4 см. Значит, расстояние между указанными пунктами равно

$$250\,000 \cdot 2{,}4\ \text{см} = 600\,000\ \text{см} = 6\ \text{км}.$$

Масштаб используют не только при вычерчивании карт. Прежде чем построить здание или сделать шагающий экскаватор, их чертят на бумаге. Конечно, все размеры при этом уменьшают, используя подходящий масштаб. А если нужно изготовить маленькие наручные часы или микрокалькулятор? Их детали тоже сначала вычерчивают на бумаге, но в увеличенном виде. Для этого применяют масштаб, который больше 1, например 25:1 или 100:1. Еще больший масштаб потребовался на рисунке 15. Здесь изображен опасный микроб — дизентерийная амеба.


Рис. 15

## Вопросы и задания

**34.1.** Какова зависимость между расстояниями на карте и на местности? Как эта зависимость связана с масштабом?

**34.2.** Отрезок на карте имеет длину 6 см. Найдите масштаб карты, если этому отрезку соответствует на местности отрезок длиной: а) 140 км; б) 15 км; в) 2400 км.

**34.3.** Расстояние между Москвой и Владимиром 180 км. Найдите масштаб карты, если на ней расстояние между изображениями Москвы и Владимира равно: а) 72 мм; б) 45 см; в) 1,2 см.

**34.4.** Река Тигр имеет длину 1850 км. Какой длины будет изображение этой реки на карте, масштаб которой 1:2 500 000?

**34.5.** Изобразите в масштабе 1:200: а) отрезок длиной 5 м; б) окружность радиусом 3,2 м; в) треугольник со сторонами 2 м, 4 м и 2,8 м.

**34.6.** На рисунке 16 изображен вирус и нарисован отрезок, показывающий масштаб рисунка. Измерьте этот отрезок и найдите длину вируса.

**34.7.** Юные географы решили сделать глобус Земли диаметром 3 м, изобразив в том же масштабе рельеф земной поверхности. Земля — шар диаметром 12 742 км. а) Сколько метров будет изображать 1 мм модели? б) Какой высоты (с точностью до 0,1 мм) будет изображение высочайшей горы Джомолунгмы (8848 м)? Какой глубины (с точностью до 0,1 мм) будет изображение глубочайшей Марианской впадины (11 022 м)?

**34.8.** Треугольник на рисунке 17 — это изображение некоторого треугольника на местности; рядом с чертежом указан масштаб. Проделайте нужные измерения и вычислите размеры треугольника на местности.

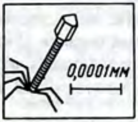



Рис. 16


Рис. 17

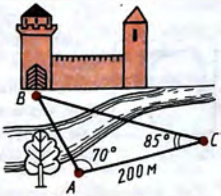



Рис. 18

▲ **34.9*.** Математик находится в точке $A$ и хочет найти расстояние до точки $B$ на другом берегу реки. Для этого он придумал такой способ. Он выбрал точку $C$ на своем берегу, измерил расстояние между $A$ и $C$, а также углы $BAC$ и $ACB$. Результаты его измерений показаны на рисунке 18. Затем он начертил треугольник $ABC$ в масштабе 1:5000, измерил изображение отрезка $AB$ на своем чертеже и вычислил длину этого отрезка. Каково же расстояние между $A$ и $B$? ▲

**Урок 35**

## ЧТО ЗНАЧИТ «ИМЕТЬ ОДИНАКОВУЮ ФОРМУ»

Вы давно знаете, что геометрические фигуры могут отличаться друг от друга как размерами, так и формой. На рисунке 19 изображены четыре фигуры. Видно, что они отличаются размерами. А что можно сказать об их форме?

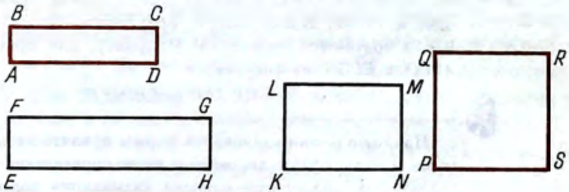


Рис. 19

*Все они — прямоугольники.*

Верно. Но какие-то различия в их форме видны. Посмотрите: прямоугольники $ABCD$ и $EFGH$ довольно вытянуты (т. е. длина у них намного превосходит ширину); прямоугольник $KLMN$ не очень вытянутый, а прямоугольник $PQRS$ совсем не вытянут, это квадрат!

*Измерьте стороны этих прямоугольников и вычислите, во сколько раз длина каждого из них больше ширины.*

Как же различать прямоугольники по форме? Легко догадаться: надо интересоваться тем, во сколько раз длина больше ширины, другими словами — интересоваться о т н о ш е н и е м длины к ширине. И можно сформулировать такое определение:

Два прямоугольника имеют **одинаковую форму,** если у них отношение длины к ширине одно и то же.

Например, для всех квадратов это отношение равно 1. Не зря говорят, что все квадраты имеют одинаковую форму.

Если вернуться к прямоугольникам на рисунке 19, то можно сделать следующие выводы. Прямоугольники $ABCD$ и $EFGH$ имеют одинаковую форму: для них интересующее нас отношение равно 4 (вы ведь только что вычислили его!). А другие два прямоугольника отличаются от первых двух по форме. Мы теперь не только видим это, но и можем обосновать: для прямоугольника $KLMN$ отношение длины к ширине равно 1,5, а для квадрата $PQRS$, как уже говорилось, оно равно 1.

Что же мы выяснили? А вот что: для ответа на вопрос, имеют ли данные два прямоугольника одинаковую форму, нужна пропорция. И здесь, оказывается, возникают пропорции.

*Где же здесь пропорция?*

Чтобы обнаружить ее, давайте порассуждаем. Нужно записать, что отношение длины к ширине у двух данных прямоугольников одно и то же. Иначе говоря, приравнять эти два отношения. Вот и получается пропорция! Например, для прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$ на рисунке 19

$$|AD|:|AB|=|EH|:|EF|.$$

Прямоугольники одинаковой формы принято называть **подобными.** Так что сформулированное выше определение можно пересказать так: два прямоугольника называются подобными, если у них отношения длины к ширине составляют пропорцию.

*А можно вместо отношений длины к ширине подсчитывать отношения ширины к длине?*

Конечно. Для подобных прямоугольников можно записать даже четыре пропорции, членами которых будут их длина и ширина. Посмотрите-ка такое «семейство пропорций» в конце объяснительного текста урока 28. И представьте, что там буквы $a$, $u$ обозначают длину и ширину одного прямоугольника, а буквы $b$, $v$ — длину и ширину другого, ему подобного. Если для примера взять прямоугольники $ABCD$ и $EFGH$ (см. рис. 19), то одна из четырех пропорций уже записана выше. Вот еще одна:

$$|AD|:|EH|=|AB|:|EF|.$$

Она показывает равенство отношения длины и ширины этих прямоугольников. Иначе говоря, каждая длина пропорциональна ширине.

*Запишите две другие пропорции для тех же прямоугольников.*

Определение подобных прямоугольников (см. выше) можно пересказать совсем коротко: прямоугольники называются подобными, если их стороны пропорциональны.

▲ *А какие треугольники имеют одинаковую форму? Что ли тоже с пропорциональными сторонами?*

Треугольники, имеющие одинаковую форму, называют, как и прямоугольники, подобными. В старших классах будет дано определение подобных фигур. А пока скажем только, что Смекалкин правильно догадался: для двух треугольников подобие — это то же самое, что и пропорциональность их сторон. Если стороны одного из них $a$, $b$, $c$, а стороны другого — $u$, $v$, $w$, то пропорциональность сторон записывается двойной пропорцией $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}$. Вы впервые встретились с двойными пропорциями в уроке 30, помните? На рисунке 20 треугольники $ABC$ и $DEF$ подобны и ни один из них не подобен треугольнику $GHI$.

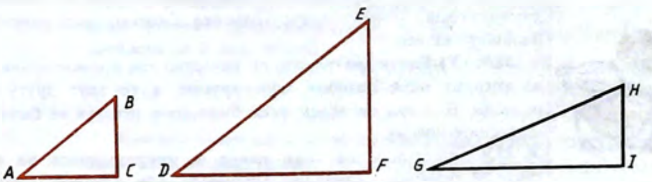



Рис. 20

*Измерьте стороны всех этих треугольников и убедитесь в только что сказанном. Запишите двойную пропорцию для первых двух треугольников.*

Все равносторонние треугольники подобны друг другу (*объясните почему*). Среди же, например, равнобедренных треугольников есть как подобные друг другу, так и не подобные. В заданиях к уроку предложено построить как те, так и другие. ▲

### Вопросы и задания

**35.1.** Когда два прямоугольника имеют одинаковую форму?

**35.2.** Какие прямоугольники называют подобными?

▲ **35.3.** Какие треугольники называют подобными? ▲

**35.4.** Определите на глаз, какие из прямоугольников на рисунке 21 подобны, а какие нет. Проверьте себя, измерив стороны и составив нужные отношения.

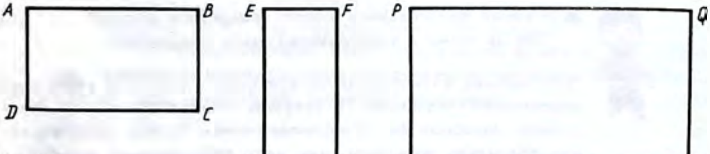


Рис. 21

**35.5.** Проверьте, подобны ли два прямоугольника, имеющие размеры: а) 132 м на 84 м и 1001 см на 637 см; б) 194 мм на 76 мм и 532 м на 208 м.

**35.6.** Постройте какой-нибудь прямоугольник, подобный прямоугольнику $KLMN$ на рисунке 19, но отличный от него.

**35.7.** Даны два подобных прямоугольника. Первый имеет размеры 70 мм на 30 мм, одна из сторон второго — 168 см. Найдите другую сторону второго прямоугольника. Сколько здесь ответов? Запишите их все.

**35.8. (У)** Клоун заявил, что он начертил три прямоугольника, из которых один подобен двум другим, а те друг другу не подобны. Публика смеялась: всем было ясно, что так не бывает. Объясните почему.

▲ **35.9.** Определите на глаз, какие из треугольников на рисунке 22 подобны, а какие нет. Проверьте себя, измерив стороны и составив нужные отношения.

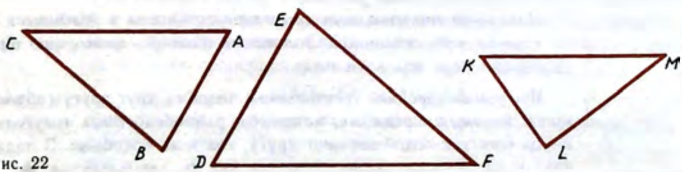


Рис. 22

**35.10.** а) Постройте три разных треугольника, у каждого из которых стороны $a$, $b$, $c$ удовлетворяют двойной пропорции $a:b:c=3:4:5$. (Совет: посмотрите задание 9.8, где рассказано, как строить треугольник по трем сторонам.) б) Измерьте и запишите величины всех углов построенных треугольников. Какие получились треугольники — остроугольные, прямоугольные или тупоугольные? в) Углы между пропорциональными сторонами называют **соответственными.** Сравните друг с другом соответственные углы треугольников на рисунке. Нет ли у них равных? ▲

**Урок 36**

## УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. МОГУТ БЫТЬ РАЗНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Вы знаете, что одну и ту же задачу нередко можно решить разными способами. Поэтому, решив задачу, всегда полезно подумать, нельзя ли решить ее иначе. Вдруг найдется более простой способ! Давайте обсудим несколько задач.

*Задача* 1. Туристы в походе шли со скоростью 4 км/ч. В первый день они находились в пути 7 ч, во второй — 6 ч. Сколько километров прошли туристы за 2 дня?

Задачу можно решить двумя способами.

1-й *способ*. Сначала узнаем, сколько километров прошли туристы в первый день: $4\cdot7=28$ (км). Затем сколько во второй день: $4\cdot6=24$ (км). Наконец, вычислим, сколько километров пройдено за 2 дня: $28+24=52$ (км).

2-й *способ*. Узнаем, сколько часов были туристы в пути за 2 дня: $7+6=13$ (ч). А теперь — сколько километров прошли они за 2 дня: $4\cdot13=52$ (км).

Конечно, ответ один и тот же. Но давайте подумаем: может быть, один из двух способов решения лучше другого? Посмотрите: при 1-м пришлось выполнить три действия; все они хорошо видны в выражении $4\cdot7+4\cdot6$. При 2-м оказалось только два действия; здесь они видны в выражении $4\cdot(7+6)$.

При выборе 2-го способа решения выигрыш, конечно, невелик: сэкономили всего одно действие. Но представьте, что решается задача, в которой сотни тысяч действий! (А такие задачи людям часто приходится решать с помощью компьютера.) Экономия при более простом способе решения будет огромной!

Задача 2. Для вывоза с шахты 2400 т угля понадобилось 44 железнодорожных вагона. Сколько таких же вагонов понадобится для вывоза 3000 т угля?

Задачу можно решить двумя способами.

1-й способ. Сначала узнаем, сколько тонн угля вмещается в один вагон: $2400:44=\dots$ .

*Выполните деление. Быстро ли вы справились с вычислениями?*

Теперь, разделив 3000 на число, найденное предыдущим действием, мы и получим ответ.

*Завершите решение задачи.*

2-й способ. В нем нам поможет уравнение в виде пропорции. Если буквой $x$ обозначить искомое число вагонов, то легко догадаться, что получается пропорция:

$$\frac{3000}{x}=\frac{2400}{44}.$$

Ведь оба записанных отношения означают одно и то же — сколько тонн угля вмещается в один вагон. Применим основное свойство пропорции:

$$3000\cdot 44=x\cdot 2400.$$

Полученное уравнение решить очень легко. Запишем цепочку равенств, пользуясь правилом сокращения дробей:

$$x=\frac{3000\cdot 44}{2400}=\frac{5\cdot 6\cdot 100\cdot 4\cdot 11}{4\cdot 6\cdot 100}=5\cdot 11=55 \text{ (вагонов)}.$$

Вот и ответ получился.

Не правда ли, 2-й способ привел нас к цели быстрее? Вы видите, что задачу можно решить даже устно, записав только дробь $\frac{3000\cdot 44}{2400}$. Ведь совсем нетрудно представить записанные выше разложения числителя и знаменателя на множители, а затем провести сокращение дроби.

Задача 3. Сколько всего двузначных натуральных чисел?

*Вот так задача! Условия нет, а сразу вопрос.*

Что ж, бывают и такие задачи. Условие здесь понятно. Ведь все знают, какими цифрами записывают натуральные числа.

1-й способ. Пишем подряд все двузначные числа от 10 до 99 и ведем счет: первое 10, второе 11 и т. д.

*Ой, какой неинтересный путь! И очень долгий!*

Способ действительно неинтересный. Если каждую секунду писать по цифре, то на запись двузначных чисел уйдет 3 минуты.

Есть намного более интересный способ решения. Вот он:

2-й способ. Все двузначные числа можно расположить в виде таблицы:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

Числа в $\frac{\text{каждой строке}}{\text{каждом столбце}}$ имеют одну и ту же $\frac{\text{первую}}{\text{вторую}}$ цифру. В роли $\frac{\text{первой}}{\text{второй}}$ цифры должны выступить все цифры от $\frac{\text{единицы}}{\text{нуля}}$ до девяти. Значит, в таблице 9 строк и 10 столбцов. Сколько же в ней «клеток»-чисел? Ответ всем ясен: произведение 9·10, т. е. 90. Эту таблицу вовсе не обязательно записывать. Ее легко себе представить! А тогда на вычисление произведения 9·10 уйдет всего лишь 2—3 секунды.

3-й способ. Всего однозначных и двузначных чисел 99, от 1 до 99. Из них однозначных чисел 9, от 1 до 9. Значит, двузначных чисел 99—9, т. е. 90.

И этот способ решения хорош, и при нем на решение мы потратим 2—3 секунды. Он, пожалуй, даже лучше 2-го: при нем и таблицу из чисел представлять не нужно. Но такая таблица может пригодиться и для решения других задач, например задачи 36.5.

Каждую задачу к этому уроку постарайтесь решить двумя способами. Какой из них вам понравился больше? Почему?

**Задания**

! **36.1.** Смекалкин, уходя в школу, вышел из дому на 3 мин позже младшего брата. Расстояние до школы 320 м. Обычно

Смекалкин идет со скоростью 40 м/мин, а его брат — 32 м/мин. Догонит ли Смекалкин брата, прежде чем тот придет в школу?

**36.2.** Для вывоза с фермы 3120 л молока надо 75 бидонов. Сколько таких же бидонов надо для вывоза 4160 л молока?

**36.3.** а) Младший брат купил 3 банки рыбных консервов, по 250 г в каждой. Он положил 3 банки на весы. Весы показали 840 г. «Но ведь в трех банках должно быть 750 г! — удивился младший брат.— Что ли в эти банки положили больше консервов?» Дома Смекалкин объяснил, что указанная на банке масса 250 г — это масса **нетто**, т. е. без учета массы самой банки. А масса вместе с банкой называется массой **брутто**. Какова масса брутто 5 таких же банок? б) В одной коробке помещается 36 банок сгущенного молока. Масса брутто всех этих банок 16,2 кг. Масса нетто каждой банки 400 г. Покупатель купил 5 банок. Сколько жести израсходовано на эти 5 банок?


**36.4.** Известны биржевые курсы валют: за 100 долларов США дают 143,4 швейцарских франка или 162 325 итальянских лир; 100 английских фунтов стоят 149,6 доллара. На международной ярмарке фирмы продают компьютеры. За один компьютер английская фирма просит 920 фунтов, швейцарская — 1990 франков, а итальянская — 2 225 000 лир. Чей компьютер дешевле?

**36.5. (У)** а) Разглядывая таблицу двузначных чисел, приведенную в объяснительном тексте, подсчитайте, сколько двузначных чисел имеют цифру 5 в своей записи. б) Разглядывая ту же таблицу, подсчитайте, сколько двузначных чисел имеют сумму цифр 5; 8. в) Разглядывая ту же таблицу, подсчитайте, сколько всего четных двузначных чисел. А сколько нечетных? Как иначе (т. е. без таблицы) подсчитать количество четных двузначных чисел? (Совет: вспомните, как идут в натуральном ряде четные и нечетные числа.) г)* Сколько всего двузначных чисел, делящихся на 3? А сколько, не делящихся на 3?

**Урок 37**

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 3

! **37.1.** Объем одного металлического бруска 57 см$^3$, объем другого — 133 см$^3$. Одинакова ли плотность этих брусков, если: а) масса первого 347 г, второго 813 г; б) масса первого 306 г, второго 714 г?

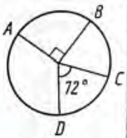


Рис. 23

**37.2.** Если шариковой ручкой провести линию длиной 20 см, то уровень пасты в стержне понизится на 0,006 мм. Измерьте высоту столбика пасты в стержне своей ручки и вычислите, линию какой длины можно ею начертить.

**37.3.** а) Какова градусная мера дуги $AB$ на рисунке 23? б) Найдите длину и радиус окружности, если длина дуги $AB$ равна 15,7 мм. в) Найдите длину дуги $CD$.

**37.4.** Мельхиор — это сплав никеля и меди, массы которых пропорциональны числам 2 и 9. Сколько потребуется никеля и меди для выплавки 187 кг мельхиора?

**37.5.** Три токаря вытачивают одинаковые детали. За 1 ч первый вытачивает 12 деталей, второй — 15, третий — 13. Проработав одно и то же время, все вместе они выточили 280 деталей. Сколько деталей выточил каждый токарь?

**37.6.** Для приготовления квашеной капусты на 10 кг капусты берут 225 г соли, 350 г моркови, 200 г клюквы, 4 г лаврового листа. Сколько соли, моркови, клюквы и лаврового листа надо взять, если закуплено: а) 32 кг капусты; б) 6 кг капусты?

**37.7*.** Аня, Катя и Оля договорились купить к праздничному столу 12 пирожных. Аня купила 5 штук, Катя — 7, а Оля вместо своей доли пирожных внесла 12 800 р. Как Аня и Катя должны разделить между собой эти деньги?

**37.8.** Железнодорожный рельс длиной 12,5 м имеет массу 625 кг. Рельсовая колея — это два рельса железнодорожного пути. Какова масса рельсовой колеи от Москвы до: а) Казани (793 км); б) Екатеринбурга (1759 км); в) Красноярска (3959 км); г) Владивостока (9297 км)? С каким коэффициентом масса рельсовой колеи пропорциональна ее длине (в км)?

**37.9. (У)** а) У прямоугольного треугольника один катет имеет длину 6 см, а другой — $x$ см. Обозначим буквой $S$ площадь треугольника. Определите, какая будет зависимость между величинами $x$ и $S$. б) Площадь прямоугольного треугольника 5 см$^2$. Обозначим буквами $x$ и $y$ длины (в см) катетов. Определите, какая будет зависимость между величинами $x$ и $y$.

**37.10.** Река Днестр имеет длину 1352 км, а ее изображение на карте имеет длину 16,9 см. Найдите масштаб карты.

▲ **37.11*.** Младший брат Смекалкина сказал: «Если величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$, то величина $x$ прямо пропорциональна величине $y$. Так?» Смекалкин подумал и ответил, что это почти всегда так, кроме одного случая.

Рис. 24

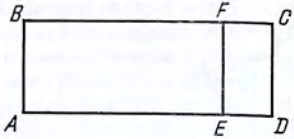



Рис. 25

а) **(У)** При каком коэффициенте пропорциональности утверждение младшего брата неверно?

б) Найдите коэффициент пропорциональности, выражающий зависимость $y$ от $x$, если $x=3\cdot y$; $x=\frac{5}{7}\cdot y$; $x=0{,}6\cdot y$. ▲

**37.12.** Масштаб чертежа дома 1:250. Измерьте отрезки на чертеже и найдите размеры дома (рис. 24).

▲ **37.13.** а) Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$, а величина $z$ обратно пропорциональна $y$. Как $z$ зависит от $x$? б) Ответьте на тот же вопрос, если $y$ обратно пропорциональна $x$, а $z$ прямо пропорциональна $y$. ▲

**37.14.** Всякий прямоугольник можно разбить на два подобных друг другу прямоугольника, например на два одинаковых (см. начало задания 36.6 в рабочей тетради). А можно ли разбить прямоугольник на два подобных, но неодинаковых? Примеры.

а) Убедитесь, что прямоугольники $ABFE$ и $EFCD$, на которые разбит прямоугольник $ABCD$ (рис. 25), подобны.

б) Никакой квадрат нельзя разбить на два подобных неодинаковых прямоугольника. Объясните почему.

в)* Всякий прямоугольник, у которого длина более чем в 2 раза больше ширины, можно разбить на два подобных неодинаковых прямоугольника. Объяснить это можно, изучив квадратные уравнения, с которыми вы познакомитесь в 8-м классе. А сейчас начертите прямоугольник со сторонами 5 см и 2 см и постарайтесь разбить его на два неодинаковых подобных прямоугольника.

▲ **37.15.** **(У)** Клоун заявил, что начертил три подобных треугольника: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный. Публика смеялась: всем было ясно, что так не бывает. Объясните почему. (Совет: см. задание 35.12 б) в рабочей тетради.) ▲

## КАК ВОЗНИКЛИ ЧИСЛА

Подсчитывать предметы люди научились еще в древнем каменном веке — палеолите, десятки тысяч лет назад. Как это происходило? Сначала люди лишь на глаз сравнивали разные количества одинаковых предметов. Они могли определить, в какой из куч больше плодов, в каком стаде больше оленей и т. п.

Затем в человеческом языке появились числительные, и люди смогли называть число предметов, животных, дней. Обычно таких числительных было мало. Например, у племени реки Муррей в Австралии было два простых числительных: энэа (1) и петчевал (2). Другие числа они выражали составными числительными: 3=«петчевал-энэа», 4=«петчевал-петчевал» и т. д. Еще одно австралийское племя — камилороев — имело простые числительные мал (1), булан (2), гулиба (3). И здесь другие числа получались сложением меньших: 4=«булан-булан», 5=«булан-гулиба», 6=«гулиба-гулиба» и т. д.

У многих народов название числа зависело от подсчитываемых предметов. Если жители островов Фиджи считали лодки, то число 10 называли «боло»; если они считали кокосовые орехи, то число 10 называли «каро». Точно так же поступали живущие на Сахалине и берегах Амура нивхи. Еще в прошлом веке одно и то же число они называли разными словами, если считали людей, рыб, лодки, сети, звезды, палки. Мы и сейчас используем разные неопределенные числительные со значением «много»: «толпа», «стадо», «стая», «куча», «пучок» и др.

С развитием торгового обмена люди стали лучше понимать, что общего у трех лодок и трех топоров, десяти стрел и десяти орехов. Племена часто вели обмен «предмет за предмет»; к примеру, обменивали 5 съедобных кореньев на 5 рыб. Становилось ясно, что число 5 одно и то же и для кореньев, и для рыб; значит, и называть его можно одним словом.

Постепенно люди начали использовать для счета камешки, палочки, части собственного тела. Вот как известный русский ученый Н. Н. Миклухо-Маклай описывал счет папуасов: «Папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например «бе, бе, бе...». Досчитав до пяти, он говорит: «Ибон-бе» (рука). Затем загибает пальцы другой руки, снова повторяя «бе, бе...», пока не дойдет до «ибон-али» (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая «бе, бе...», пока не дойдет до «самба-бе» (одна нога) и «самба-али» (две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого». Похожие способы счета применяли и другие народы. Так возникли нумерации, основанные на счете пятерками, десятками, двадцатками.

До сих пор мы рассказывали об устном счете. А как записывали числа? Поначалу, еще до возникновения письменности, использовали зарубки на палках, насечки на костях, узелки на веревках. На рисунке слева показана волчья кость, найденная в Дольни-Вестонице (Чехия). На кости 55 насечек, сделанных более 25 000 лет назад. Заметьте, что насечки сгруппированы по 5, что означает счет пятерками.

Когда появилась письменность, появились и цифры для записи чисел. Сначала цифры напоминали зарубки на палках: в Египте и Вавилоне, в Этрурии и Финикии, в Индии и Китае небольшие числа записывали палочками или черточками. Например, число 5 записывали пятью палочками. Индейцы ацтеки и майя вместо палочек использовали точки. Затем появились специальные знаки для некоторых чисел, таких, как 5 и 10 (вспомните римские цифры, о них мы рассказали в 5-м классе).

В то время почти все нумерации были не позиционными, а похожими на римскую. Лишь одна вавилонская шестидесятеричная нумерация была позиционной. Но и в ней долго не было нуля, а также запятой, отделяющей целую часть от дробной. Поэтому одна и та же цифра могла означать и 1, и 60, и 3600, и $\frac{1}{60}$ и т. д. Угадывали значение цифр по смыслу задачи.

За несколько столетий до новой эры изобрели новый способ записи чисел, при котором цифрами служили буквы обычного алфавита. Первые 9 букв обозначали числа от 1 до 9; следующие 9 букв — десятки 10, 20, ..., 90, а еще 9 букв — сотни. Такой алфавитной нумерацией пользовались до XVII в. Чтобы отличить «настоящие» буквы от чисел, над буквами-числами ставили черточку (на Руси она называлась «титло»).

$\tilde{\text{В}} = 2$

$\tilde{\text{Р}} = 100$

$\widetilde{\text{РВ}} = 102$

Во всех этих нумерациях было трудно выполнять арифметические действия. Поэтому изобретение в VI в. индийцами десятичной позиционной нумерации по праву считается одним из главных достижений человечества. Индийская нумерация и цифры стали известны в Европе от арабов. Их называют арабскими.

При записи дробей еще долгое время целую часть записывали в новой, десятичной нумерации, а дробную — в шестидесятеричной. Но в начале XV в. самаркандский математик и астроном аль-Каши стал употреблять в вычислениях десятичные дроби, а с конца XVI в. десятичные дроби появились и в Европе.

Числа, с которыми вы работали до сих пор, называют положительными. В следующей главе мы расскажем и о других числах — отрицательных. Их использовали в начале новой эры китайские и индийские математики. Позже отрицательные числа появились в Европе, а с XVII в. их применяют везде.

Теперь вы знакомы со многими видами чисел, узнали историю их возникновения. Но это еще не все числа, которые используют в математике и других науках! В старших классах вы познакомитесь и с другими видами чисел.

**Задания**

Мы предлагаем вам решить старинные задачи.

**!** **I.1.** Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Из того, что осталось, другой взял $\frac{1}{17}$, оставил же он в сокровищнице 150. Сколько было в сокровищнице первоначально? (Египет, XX—XVII вв. до н. э. «Папирус Райнда».)

**I.2.** Величина, данная первой, неизвестна; вторая равна удвоенной первой, третья равна утроенной второй, четвертая учетверенной третьей. Общая сумма 132. Какова первая величина? (Индия, VI—VII вв. «Бахшалийская рукопись».)

**I.3.** Один человек проходит расстояние в $\frac{1}{8}$ йоджана за $\frac{1}{3}$ дня. Скажи, за какое время он пройдет 100 йоджана. (Индия, IX—X вв. «Математика» Шридхары.)

**I.4*.** Король взял $\frac{1}{6}$ часть плодов манго, королева — $\frac{1}{5}$ остатка, три принца взяли соответственно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ каждого следующего остатка, а маленький ребенок — оставшиеся 3 плода. О, тот, кто умеет решать смешанные задачи на дроби, назови общее число плодов. (Индия, IX в. «Краткий курс математики» Магавиры.)

Глава II

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

## § 4. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

С чего начинается изучение математики? С натуральных чисел. Ими вы занимаетесь с 1-го класса, а подробно стали изучать их в 5-м классе. Но натуральных чисел для математики недостаточно. Вы давно знаете, что есть еще дробные числа. Их вы тоже начали как следует изучать в 5-м классе. Но и дробных чисел недостаточно, чтобы решать всевозможные задачи в математике. В этой главе вы познакомитесь с новым видом чисел, а именно: к известным вам натуральным и дробным числам (мы будем называть их вместе положительными числами) добавятся числа отрицательные. Положительные и отрицательные числа да еще нуль все вместе — называют рациональными числами. Значит, в этом параграфе перед вами во всей широте откроется область Рациональных чисел страны Математики.

Урок 38

### КАК ВОЗНИКАЮТ ЧИСЛА ВМЕСТЕ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ

З а д а ч а 1. Портовый кран движется по рельсам вдоль причала с запада на восток. Начав работу, кран проехал в направлении на восток 300 м, а потом в направлении на запад: а) 200 м; б) 400 м. На сколько метров и в каком направлении он в результате переместился?

Мы уверены, что каждый сразу решил задачу. И в том и в другом варианте задачи кран переместился на 100 м. Но в чем разница между вариантами а) и б)? В случае а) кран переместился н а  в о с т о к, а в случае б) — н а  з а п а д.

Задача 1 показывает, что иногда приходится интересоваться не только числами, но и **противоположными направлениями.** Можно привести разные примеры таких пар противоположных направлений: на восток — на запад; на север — ...; вверх — ...; вперед — ... .

*Заполните пропуски нужными словами.*

З а д а ч а 2. Гимнаст начал тщательно следить за своей массой и взвешиваться ежедневно. За первый день он стал тяжелее на 300 г, за второй — легче: а) на 200 г; б) на 400 г. Легче или тяжелее стал гимнаст за 2 дня и на сколько граммов?

В обоих вариантах масса гимнаста изменилась на 100 г. Разница же между ними в том, что в варианте а) масса увеличилась, а в б) уменьшилась.

Обратите внимание, как похожи задачи 1 и 2. Можно сказать, что у них одна и та же схема (и даже числа в условиях одинаковы). Давайте разберемся, что это за схема. Разделим страницу на три столбца. В первых двух запишем, что происходит в задачах 1 и 2, а в третьем — что общего в этих задачах.

| | Задача 1 | Задача 2 | Общая схема |
|---|---|---|---|
| Условие | Есть исходное положение портового крана.<br>Кран проехал на восток 300 м.<br>Затем кран проехал на запад:<br>а) 200 м;<br>б) 400 м. | Есть исходная масса гимнаста.<br>Масса увеличилась на 300 г.<br>Затем масса уменьшилась:<br>а) на 200 г;<br>б) на 400 г. | Есть исходное положение какой-то точки.<br>Точка переместилась в одном направлении на 300 единиц.<br>Затем точка переместилась в противоположном направлении:<br>а) на 200 единиц;<br>б) на 400 единиц. |
| Вопрос | Как расположен кран относительно исходного положения? | Как отличается масса гимнаста от исходной? | Как расположена точка относительно исходного положения? |
| Ответ | Кран относительно исходного положения на 100 м:<br>а) восточнее;<br>б) западнее. | Масса по сравнению с исходной стала на 100 г:<br>а) больше;<br>б) меньше. | Точка относительно исходного положения удалена на 100 единиц:<br>а) в первоначальном направлении;<br>б) в противоположном направлении. |

*Придумайте сами задачи, имеющие такую же схему с противоположными направлениями, используя слова «вверх — вниз», «вперед — назад» и т. п.*

Как математически записывать числа вместе с противоположными направлениями? Об этом мы расскажем в следующем уроке.

**Задания**

**38.1.** Днем улитка проползла по дереву от сучка вверх 43 см, а ночью спустилась вниз: а) на 27 см; б) на 59 см. На сколько сантиметров от сучка и в каком направлении переместилась улитка за сутки? Что общего имеют ответы в вариантах а) и б) и чем они отличаются?

**38.2.** Турист прошел от палатки на север 2 км 400 м, а затем прошел в обратном направлении: а) 1 км 300 м; б) 3 км 500 м. На каком расстоянии от палатки будет находиться турист и в каком направлении? Что общего имеют ответы в вариантах а) и б) и чем они отличаются?

**38.3.** Оля начала с 1 ноября систематически измерять дневную температуру воздуха. 2 ноября стало теплее на 3 градуса, а 3 ноября — холоднее: а) на 2 градуса; б) на 4 градуса. На сколько градусов и в какую сторону изменилась температура за два дня? Что общего имеют ответы в вариантах а) и б) и чем они отличаются?

**38.4.** В воскресенье утром Вася встал на полчаса позже, чем в субботу. Зато в понедельник он встал раньше, чем в воскресенье: а) на 20 мин; б) на 40 мин. Раньше или позже встал Вася в понедельник, чем в субботу, и на сколько минут? Что общего имеют ответы в вариантах а) и б) и чем они отличаются?

**38.5.** Рассмотрите рисунок 26. Точка *A* находится на 3 клетки правее точки *O*, а точка *B* — на 4 клетки левее. Где по отношению к точке *O* находится точка *C*; точка *D*?

Рис. 26


**38.6.** Начертите в тетради горизонтальную прямую и отметьте на ней точку *O*. Отметьте на этой прямой точки *K*, *L*, *M* и *N*, если дано следующее:

а) *K* правее *O* на 6 клеток;
б) *L* левее *O* на 8 клеток;
в) *M* левее *O* на 12 клеток;
г) *N* правее *O* на 15 клеток.

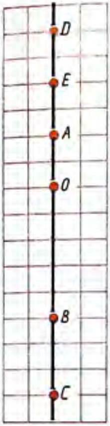


Рис. 27

**38.7.** Рассмотрите рисунок 27. Точка $A$ находится на 2 клетки выше точки $O$, а точка $B$ — на 5 клеток ниже. Где по отношению к точке $O$ находится точка $C$; точка $D$; точка $E$?

**38.8.** Начертите в тетради вертикальную прямую и отметьте на ней точку $O$. Отметьте на этой прямой точки $K$, $L$, $M$ и $N$, если дано следующее:

а) $K$ выше $O$ на 5 клеток; в) $M$ ниже $O$ на 9 клеток;
б) $L$ ниже $O$ на 11 клеток; г) $N$ выше $O$ на 10 клеток.

**38.9.** Младший брат загадал Смекалкину загадку: «Я вошел в лифт на 3-м этаже и проехал два этажа. На каком этаже я вышел из лифта?» Смекалкин сказал, что отгадать такую загадку нельзя. Объясните почему. Уточните условие загадки двумя способами и в каждом случае дайте ответ.

**Урок 39**

## ЗНАКОМИМСЯ С КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

В предыдущем уроке мы обещали рассказать, как записывают числа вместе с противоположными направлениями. Рассказать об этом нам поможет общая схема задач, обнаруженная в том уроке *(вспомните-ка ее!)*. В ней говорится о точке, которая может перемещаться в каком-то из двух противоположных направлений. А еще в этой схеме есть исходное положение точки. Теперь легко догадаться, как изобразить числа вместе с направлениями. Их удобно изображать точками на прямой линии.

Берут прямую и отмечают на ней исходную точку $O$, эту точку называют **началом отсчета.**

Затем на этой прямой выбирают одно из двух возможных направлений. Договариваются называть его **положительным.** Для горизонтальной прямой положительным направлением принято считать направление слева направо, для вертикальной прямой — снизу вверх. Положительное направление обычно указывают стрелкой. Противоположное направление называют **отрицательным.**

Начало отсчета делит прямую на два противоположных луча. Тот луч, который идет в положительном направлении от начала отсчета, называют положительным. Луч, идущий в отрицательном направлении от начала отсчета, называют отрицательным.

Затем выбирают единичный отрезок. Если последовательно откладывать его от начала отсчета в положительном направлении, то на положительном луче мы тем самым отметим точки. Они изображают натуральные числа 1, 2, 3, ... . Сколько раз отложили отрезок, такое число и изображено.

*Какое число изображает на рисунке 28 точка A; точка B?*

Числа, изображаемые точками на положительном луче, так и называют — **положительными.**

*А я догадался, какие числа называют отрицательными! Те, которые изображаются точками на отрицательном луче. Правильно?*

Правильно. Если единичный отрезок последовательно откладывать от начала отсчета в отрицательном направлении, то получающиеся точки тоже изображают какие-то числа. Эти числа договорились называть отрицательными. Значит, **отрицательные** числа — это числа, изображаемые точками на отрицательном луче. Чтобы отличать их от положительных чисел, используют знак «минус»: $-1$, $-2$, $-3$, ... . Читают: «Минус один», «Минус два», «Минус три» и т. д.

*Какое число изображает на рисунке 29 точка C; точка D?*

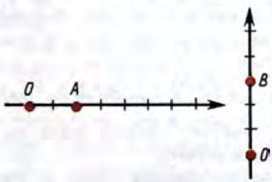



Рис. 28

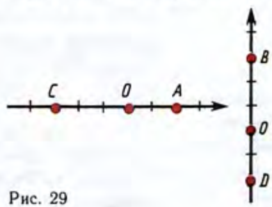
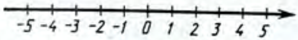



Рис. 29

Для большего отличия положительных чисел их иногда записывают со знаком «плюс». Например, записи $+5$ и $5$ обозначают одно и то же число: $+5=5$.

Точка $O$ изображает нуль (поэтому ее часто называют **нулевой точкой**). Нужно хорошо помнить, что **число 0 не является ни положительным, ни отрицательным.**

Обычно рядом с точками, изображающими числа на прямой, пишут сами эти числа. Рассмотрите на рисунке 30 две такие прямые — горизонтальную и вертикальную. Когда прямая горизонтальная, положительные числа располагаются вправо от нуля, отрицательные — влево от нуля. Для вертикальной прямой положительные числа располагаются вверх от нуля, отрицательные — вниз от нуля.



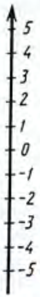




Рис. 30

Прямую, на которой отмечено начало отсчета, выбрано направление и указан единичный отрезок, называют **координатной прямой.**

*А почему такую прямую называют координатной?*

Потому что каждая точка на такой прямой имеет **координату.** Так называют то число, которое изображает эта точка. Например, на рисунке 29 точка $A$ имеет координату 2. Пишут: $A(2)$. Точка $C$ имеет координату —3. Пишут: $C(-3)$.

*Запишите точки $B$ и $D$ вместе с их координатами.*

Положительные координаты имеют все точки на положительном луче, кроме начала отсчета. Отрицательные координаты имеют все точки на отрицательном луче, кроме начала отсчета.

Помните, как в уроке 1 Смекалкин сравнил натуральный ряд с бесконечной линейкой? Такое сравнение лучше применить к координатной прямой, про которую можно сказать, что она похожа на линейку, бесконечную в обе стороны.

*А вертикальная координатная прямая похожа на термометр. На нем ведь тоже есть 0, положительные и отрицательные числа, обозначающие температуру.*

Верно подмечено! При измерении температуры как раз удобно использовать положительные и отрицательные числа. При этом числом 0 обозначают температуру таяния льда. Про температуру $+10°$ часто говорят: «10 градусов тепла», про температуру $-10°$ говорят: «10 градусов мороза».

И при измерении времени бывает удобно применять положительные и отрицательные числа; тогда запись $+5$ ч означает «через 5 часов», а $-5$ ч означает «5 часов назад». И при денежных расчетах положительные и отрицательные числа могут оказаться полезными; тогда запись $+5$ р. означает «добавилось 5 рублей», а $-5$ р. означает «убавилось (например, потратили)

5 рублей» и т. п. И вообще, **изменение величин очень удобно записывать положительными и отрицательными числами** — увеличение или уменьшение времени, скорости, массы и т. д.

**Вопросы и задания**

**39.1.** Что называют координатной прямой?

**39.2.** Какие числа называют положительными; отрицательными?

**39.3.** а) В какую сторону от нуля располагаются положительные числа, когда координатная прямая горизонтальна; вертикальна?

б) В какую сторону от нуля располагаются на тех же прямых отрицательные числа?

**39.4.** Какое число не является ни положительным, ни отрицательным?

**39.5.** Что такое координата точки на координатной прямой?

**39.6.** **(У)** Рассмотрите рисунок 31 и назовите координату точки: а) *A*; б) *B*; в) *C*; г) *D*; д) *O*; е) *K*; ж) *M*.

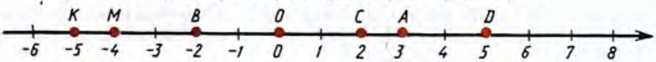



Рис. 31

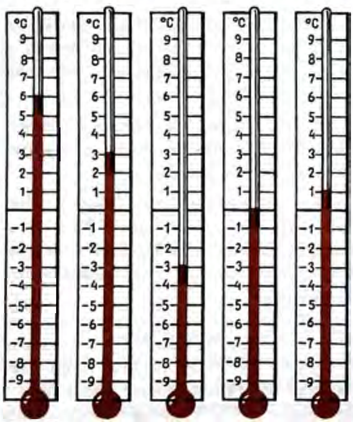



Рис. 32

**39.7.** **(У)** Прочитайте показания термометров, изображенных на рисунке 32.

**39.8.** **(У)** Какую температуру будет показывать каждый из термометров на рисунке 32, если температура: а) повысится на 1°; б) понизится на 1°; в) повысится на 3°; г) понизится на 3°?

**39.9.** Точка *A* обозначала на горизонтальной координатной прямой число 3. Затем она сместилась на: а) +2 единицы; б) −2 единицы; в) +4 единицы; г) −4 единицы; д) 0 единиц. Какое число станет обозначать *A* в каждом из случаев а) — д)?

**39.10.** Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки $A(3)$, $B(6)$ и т. д. Данные возьмите из следующей таблицы:

| Точка | $A$ | $B$ | $C$ | $O$ | $E$ | $D$ | $K$ | $L$ | $M$ | $N$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число | 3 | 6 | $-2$ | 0 | $-3$ | 5 | $-1$ | $+1$ | 7 | $-7$ | $+10$ |

**39.11.** Оля в дневнике наблюдений записывала ежедневно температуру воздуха:

| Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница | Суббота | Воскресенье |
|---|---|---|---|---|---|---|
| +6 °C | +8 °C | +3 °C | +4 °C | +7 °C | +4 °C | 0 °C |

Запишите, как изменилась температура с понедельника на вторник, со вторника на среду и т. д.

**Урок 40**

## ЧИСЛА, ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ДРУГ ДРУГУ

В уроке 39 вы познакомились с координатной прямой. Давайте рассмотрим такую прямую. Отложим на ней вправо от начала отсчета половину единичного отрезка. Легко догадаться, что полученная точка изображает число $\frac{1}{2}$. Иначе говоря, $\frac{1}{2}$ — координата этой точки. Если половину единичного отрезка отложить влево от начала отсчета, то полученная точка будет иметь координату $-\frac{1}{2}$. Читают: «Минус одна вторая» (рис. 33).

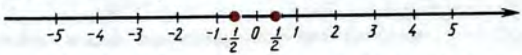



Рис. 33

Вообще, как изобразить на координатной прямой какое-то число? Для этого надо отложить от начала отсчета отрезок нужной длины, причем вправо, если число положительное, влево, если число отрицательное.

*Начертите координатную прямую, отметив на ней точки с координатами* $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Затем отметьте точки* $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ *и* $B\left(\frac{1}{2}\right)$; $C\,(-1{,}4)$ *и* $D\,(1{,}4)$.

Вот что интересное придумал Смекалкин. Он представил, что в начале отсчета поперек координатной прямой поставлено зеркало. Если оно обращено к положительным числам, то отражением точки $B\left(\frac{1}{2}\right)$ будет как раз точка $A\left(-\frac{1}{2}\right)$. Если же зеркало обращено к отрицательным числам, то, наоборот, отражением точки $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ будет точка $B\left(\frac{1}{2}\right)$. Это происходит потому, что точки $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(\frac{1}{2}\right)$ расположены на одинаковом расстоянии от начала отсчета. Точки $C(-1{,}4)$ и $D(1{,}4)$ тоже одинаково удалены от начала отсчета. Рассмотрите это на своем чертеже.

Рассмотрим какую-нибудь точку $A$ на координатной прямой. Точка $B$ на той же прямой называется **симметричной точке** $A$ **относительно начала отсчета** $O$, если $B$ расположена по другую сторону от $O$, нежели $A$, и на том же расстоянии. Например, точки $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(\frac{1}{2}\right)$ симметричны друг другу относительно начала отсчета; $C(1{,}4)$ и $D(-1{,}4)$ также симметричны друг другу. А какая точка симметрична точке $O$ относительно начала отсчета? Понятно, что это сама точка $O$.

Число $b$ называется **противоположным числу** $a$, если точка, изображающая $b$ на координатной прямой, симметрична относительно начала отсчета точке, изображающей $a$. Например, противоположным числу 3 является число $-3$; противоположным числу 1,4 является число $-1{,}4$; противоположным числу $-\frac{1}{3}$ является число $\frac{1}{3}$ (рис. 34). Противоположным числу 0 является само число 0: ведь изображающая его точка симметрична сама себе относительно начала отсчета.

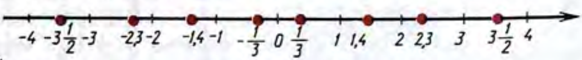



Рис. 34

*Какое число противоположно числу $-2{,}3$; числу $3\frac{1}{2}$?*

Размышляя о рассказанном про числа, противоположные друг другу, можно обнаружить такие свойства: 1) **каждое число имеет противоположное число, и притом только одно**; 2) **если число $b$ противоположно числу $a$, то $a$, в свою очередь,**

**противоположно $b$; 3) число, противоположное $\dfrac{\text{положительному}}{\text{отрицательному}}$ числу, $\dfrac{\text{отрицательно}}{\text{положительно}}$; 4) число 0, и только оно, противоположно самому себе.**

Число, противоположное числу $a$, договорились обозначать $-a$. Используя это обозначение, только что сформулированное свойство 2) можно пересказать так: противоположным числу $-a$ является число $a$. Запишем это формулой:

$$\boxed{-(-a)=a}$$

Например: $-(-7)=7$, $-\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$.

**Вопросы и задания**

?

**40.1.** Какие числа называют противоположными друг другу?

**40.2.** Чем отличаются противоположные друг другу числа?

**40.3.** Сколько противоположных чисел имеет данное число?

**40.4.** Каким будет число, противоположное положительному числу; отрицательному числу?

**40.5.** Какое число противоположно числу 0?

**40.6.** Каким будет число $-a$, если число $a$ положительно; отрицательно; равно 0?

**40.7.** Положительно или отрицательно число $a$, если $-a$ положительно; отрицательно; равно 0?

**40.8.** Каково число $a$, если $-a=a$?

!

**40.9.** **(У)** Назовите число, противоположное числу: а) 15; б) $-18$; в) $-14{,}7$; г) 20,03; д) 0,8; е) $-\frac{2}{3}$; ж) $-1\frac{3}{17}$; з) $8\frac{5}{11}$.

**40.10.** Изобразите на координатной прямой данное число и число, ему противоположное: а) 4; б) $-2{,}5$; в) $3\frac{3}{4}$.

**40.11.** **(У)** Найдите значение выражения:

а) $-k$, если $k=5$; $-7{,}2$; $0{,}85$; $-2\frac{3}{7}$;

б) $m$, если $-m=32$; $-6{,}03$; $0{,}02$; $-17\frac{5}{11}$;

в) $-(-n)$, если $n=13$; $-2{,}95$; $0$; $-7\frac{3}{7}$.

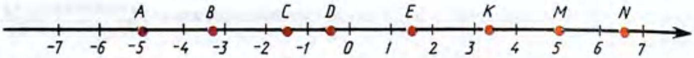



Рис. 35

**40.12.** На рисунке 35 найдите все пары точек, изображающие числа, противоположные друг другу.

**40.13.** Решите уравнение: а) $-x=2{,}73$; б) $-y=-\frac{3}{7}$; в) $-(-z)=0{,}2$; г) $-(-u)=-1\frac{7}{9}$.

**40.14.** На координатной прямой изображены точки $A(-2)$, $B(-1{,}5)$, $C\left(\frac{2}{3}\right)$, $D(4)$, $E(5{,}5)$. Найдите расстояние в единичных отрезках между точками: а) $D$ и $E$; б) $A$ и $D$; в) $B$ и $E$; г) $B$ и $D$; д) $C$ и $D$; е) $A$ и $E$. (Совет: ответить будет легче, если нарисовать координатную прямую и отметить на ней указанные точки.)

Урок 41

## ЧТО ТАКОЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Какие числа вы научились изображать на числовой прямой? Положительные числа (натуральные и дробные), противоположные им отрицательные числа и число 0. Все вместе эти числа называют **рациональными.**

Среди рациональных чисел особо выделяются целые числа. **Целыми** числами называют натуральные числа, противоположные им числа и число 0.

В уроке 39 мы представили себе координатную прямую в виде линейки, бесконечной в обе стороны. Теперь можно сказать, что основные деления на такой линейке обозначают целые числа.

### Вопросы и задания

? **41.1.** Какие числа называют рациональными; целыми?

**41.2.** *(Загадка.)* В словосочетании «целое положительное число» два прилагательных, «целое положительное» можно заменить каким-то одним. Каким?

! **41.3.** Какие целые числа расположены на координатной прямой между числами: а) 4 и 8; б) $-1$ и 5; в) $-3$ и 0; г) $-2$ и 2; д) $-3{,}7$ и 2,2; е) $-\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{7}$?

**41.4.** **(У)** Сказочный волшебник (см. урок 1) снова решил отправиться в поход. Он встал на координатную прямую в нулевую точку и пошел по целым отрицательным числам, наступая на каждое из них. На какое число он наступит, сделав 6 шагов; 100 шагов; *n* шагов?

**41.5.** Служебная собака погналась за нарушителем границы, когда между ними было 1,8 км. С какой скоростью удирал нарушитель, если скорость собаки 19 км/ч и она догнала нарушителя через 12 мин?

**41.6.** *(Старинная задача,* VII в.) В городе Афины был водоем, в который проведены 3 трубы. Одна из труб может наполнить водоем за 1 ч, другая, более тонкая — за 2 ч, третья, еще более тонкая — за 3 ч. Итак, узнай, в какую часть часа все три трубы наполняют водоем.

**Урок 42**

## МОДУЛЬ ЧИСЛА

Возьмем два противоположных числа $a$ и $-a$. Точки, изображающие их на координатной прямой, расположены на одинаковом расстоянии от начала отсчета (на рисунке 36, *а* изображен случай, когда $a$ положительно, на рисунке 36, *б* — когда $a$ отрицательно).

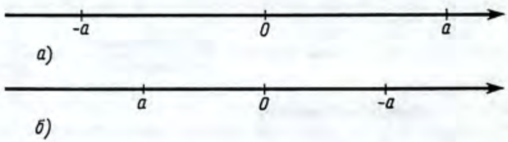



Рис. 36

Для такого расстояния придумано специальное название — модуль числа $a$.

**Модулем числа** называют расстояние от точки, изображающей это число на координатной прямой, до начала отсчета.

Модуль числа $a$ обозначают $|a|$. Читают: «Модуль $a$». Например, $|5|=5$, $|-3|=3$. В самом деле, расстояние от точки

$A(5)$ до нуля равно 5, а расстояние от точки $B(-3)$ до нуля равно 3 (рис. 37).


Рис. 37

Модули противоположных чисел равны. Например, $\left|\frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right|$. Раз модуль числа — это расстояние, он никогда не бывает отрицательным. А чему равен модуль нуля? Конечно, нулю. Для всех других чисел модуль положителен.

Вот какие свойства мы обнаружили:

$$\boxed{|-a| = |a|} \quad \boxed{|0| = 0}$$

$$\boxed{\text{Если } a \neq 0\text{, то } |a| \text{ положителен}}$$

Если число положительно, то его модуль равен самому числу. Если же оно отрицательно, его модуль равен противоположному числу. В самом деле, $|-3| = 3 = -(-3)$, $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} = -\left(-\frac{1}{3}\right)$. Оба эти важных свойства можно сформулировать, используя букву:

**Если число $a$ $\dfrac{\text{положительно}}{\text{отрицательно}}$, то $\dfrac{|a| = a}{|a| = -a}$.**

**Вопросы и задания**

?

**42.1.** Что такое модуль числа?

**42.2.** Чему равен модуль положительного числа; отрицательного числа?

**42.3.** Как располагаются на координатной прямой точки, изображающие неравные числа с равными модулями?

**42.4.** Вспомните, какие числа называются противоположными. Сформулируйте это, используя слово «модуль».

!

**42.5.** **(У)** Какое значение может принимать $a$, если $|a| = 3{,}3$?

**42.6.** **(У)** а) Известно, что $|a| = 7$. Чему равен $|-a|$? б) Известно, что $|-b| = 3{,}6$. Чему равен $|b|$?

**42.7.** **(У)** Найдите модуль числа: а) 81; б) $-3{,}2$; в) $-\frac{2}{3}$; г) $3\frac{2}{7}$; д) 0.

**42.8.** **(У)** *(Загадки.)* а) Задумано отрицательное число, модуль которого равен 3. Какое число задумано? б) Задумано положительное число, модуль которого равен 7. Какое число задумано? в) Задумано положительное число, модуль которого совпадает с модулем числа $-4$. Какое число задумано?

**42.9.** **(У)** Вычислите:

а) $|3{,}7|$; г) $\left|-2\frac{7}{15}\right|$; ж) $|3|\cdot|-9|$; к) $|-63|:|7|$;

б) $|-2{,}8|$; д) $|5|+|-8|$; з) $|-2{,}2|\cdot|-5|$; л) $|-3|:|11|$;

в) $\left|1\frac{3}{7}\right|$; е) $|-7|+|3|$; и) $\left|\frac{6}{7}\right|\cdot\left|-\frac{7}{6}\right|$; м) $|-1{,}2|:|4|$.

**42.10.** Найдите значение выражения:

а) $|x|$ при $x=3{,}2$; $-7\frac{1}{3}$; $-9{,}3$; $6\frac{8}{9}$; 0;

б) $|x|+|y|$ при $x=-2{,}7$, $y=3\frac{2}{3}$.

**42.11.** **(У)** В каждой паре чисел выберите то число, у которого модуль больше: а) $-5{,}73$ и $-7{,}42$; б) $-3\frac{2}{3}$ и $2\frac{1}{7}$; в) $-0{,}2$ и 0; г) 3,7 и $8\frac{5}{9}$.

**42.12.** Расположите числа в порядке возрастания их модулей: а) 3,1; $-2{,}43$; $-3$; $-2{,}4$; 2,42; 3,05; б) $-1\frac{2}{7}$; $2\frac{3}{11}$; 0; $-\frac{2}{9}$; $-2{,}25$.

**42.13.** а) Найдите модуль числа, изображенного на координатной прямой точкой $A\,(-2)$; $B\left(-2\frac{1}{3}\right)$; $C\,(-0{,}63)$; $D\,(-2{,}7)$.
б) На каком расстоянии от начала отсчета находится точка $A\,(-1{,}5)$; $B\left(-2\frac{3}{7}\right)$; $C\,(3{,}27)$; $D\,(-0{,}87)$; $E\left(3\frac{2}{7}\right)$?

**42.14.** **(У)** Назовите все числа, имеющие модуль: а) 12; б) 3,7; в) $2\frac{1}{7}$; г) 0.

**42.15.** Решите уравнение:

а) $|x|=0$; б) $|x-1|=0$; в) $|2\cdot x-1{,}4|=0$.

**42.16.** **(У)** Младший брат Смекалкина утверждал, что модуль целого числа всегда число натуральное. Смекалкин

сказал, что есть ровно одно число, для которого это не так. Какое это число? Объясните, почему для всех остальных целых чисел утверждение младшего брата верно.

**42.17. (У)** Клоун заявил, что если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $|a+b| \neq 0$. Публика засмеялась, и он сразу поправился: «Ой, я перепутал. Наоборот, если $|a+b| \neq 0$, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$». Но публика продолжала смеяться: всем было ясно, что оба утверждения клоуна неверны. Опровергните каждое из них.



## СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

Вы давно знаете, что числа можно сравнивать. В 5-м классе вы научились сравнивать натуральные числа, обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, десятичные дроби. А в уроке 18 мы объяснили, как сравнивать любые дроби. Значит, теперь вы умеете сравнивать любые положительные рациональные числа.

*А отрицательные числа тоже можно сравнивать?*

Конечно. Именно об этом мы сейчас будем рассказывать.

Возьмем два числа: например, 1 и 3. Каждый знает, что $1<3$. Представьте горизонтальную координатную прямую. Как на ней расположены друг относительно друга точки $A(1)$ и $B(3)$? Ясно, что точка $A$ расположена левее точки $B$ (рис. 38). И вообще легко понять, что если $a$ и $b$ — положительные числа, причем $a<b$, то точка с координатой $a$ расположена левее точки с координатой $b$.

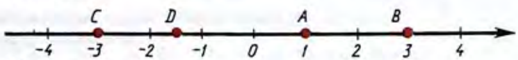



Рис. 38

Давайте повторим обнаруженное свойство в виде правила сравнения чисел:

Из двух чисел $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ то, которое изображается

на горизонтальной координатной прямой $\frac{\text{правее}}{\text{левее}}$.

Это правило получено для положительных чисел. Но ведь слова «правее» и «левее» годятся для точек, изображающих любые числа (а вовсе не только положительные!). Поэтому можно договориться применять то же самое правило для сравнения любых чисел. Именно так люди и договорились! Тогда видно, например, что число, изображаемое точкой $C$ на рисунке 38, меньше числа, изображаемого точкой $D$; $-3<-2$; $-3<1$; $-3>-5$; $2>-5$; $-5<0$.

*Сравните числа $-1000$ и $-2000$; $5$ и $-50$.*

Если рассматривать вертикальную координатную прямую (рис. 39), то в сформулированном правиле сравнения нужно заменить слово «правее» на слово «выше», а слово «левее» — на «ниже».

*Сформулируйте правило сравнения чисел, когда они изображены на вертикальной координатной прямой.*

*Что же, для сравнения чисел всегда надо представлять координатную прямую?*

Представлять ее полезно, но вовсе не обязательно. Например, каждому понятны такие свойства, которые легко запомнить:

**Любое $\dfrac{\text{положительное}}{\text{отрицательное}}$ число $\dfrac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ нуля.**

**Любое $\dfrac{\text{положительное}}{\text{отрицательное}}$ число $\dfrac{\text{больше отрицательного}}{\text{меньше положительного}}$.**

Учитывая первое из этих свойств, можно записывать неравенством $\dfrac{a>0}{a<0}$ утверждение, что число $a$ $\dfrac{\text{положительно}}{\text{отрицательно}}$. Часто так и поступают.

Теперь мы объясним, как сравнивать отрицательные числа, не пользуясь координатной прямой. Рассмотрите на рисунках 38 и 39 точки $C$ и $D$, изображающие отрицательные числа. Какая из них ближе к началу отсчета? Ясно, что $D$. А она изображает большее число. Можно сделать такой вывод: расстояние до начала отсчета $\dfrac{\text{меньше}}{\text{больше}}$ для той из двух точек, которая изображает $\dfrac{\text{большее}}{\text{меньшее}}$ отрицательное число. Но ведь расстояние от точки до начала отсчета мы назвали модулем числа, изображаемого этой точкой. Значит, если учесть, что такое модуль, то сделанный вывод можно сформулировать так:

Рис. 39

**Из двух отрицательных чисел $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ то, модуль которого $\frac{\text{меньше}}{\text{больше}}$.**

Запомнив это правило, необязательно представлять координатную прямую. А представив координатную прямую, легко вспомнить сформулированное правило.

**Вопросы и задания**

**43.1.** Какое правило сравнения чисел сформулировано в этом уроке?

**43.2.** Какое из двух чисел больше: положительное или отрицательное; отрицательное или нуль; положительное или нуль?

**43.3.** Как сравнить отрицательные числа, не пользуясь координатной прямой?

**43.4.** Положительно или отрицательно число $x$, если: а) $x>0$; б) $x<0$?

**43.5.** **(У)** а) Число $a$ больше 2. Обязательно ли $a$ положительно? б) Число $b$ меньше 3. Обязательно ли $b$ отрицательно? в) Число $c$ больше, чем $-1$. Обязательно ли $c$ положительно? г) Число $d$ меньше, чем $-5$. Обязательно ли $d$ отрицательно? Ответы объясните.

**43.6.** Запишите в порядке возрастания числа, изображенные точками $A$, $B$, $C$, $D$, $O$ на рисунке 40.

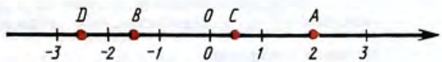



Рис. 40

**43.7.** Изобразите числа точками на координатной прямой, сравните их и результат сравнения запишите неравенством:

| | | |
|---|---|---|
| а) 3 и 5; | е) 0 и $-2{,}6$; | л) $-0{,}5$ и $0{,}3$; |
| б) 0,6 и 4; | ж) $-3\frac{2}{5}$ и 0; | м) $2\frac{3}{5}$ и $-3\frac{2}{5}$; |
| в) 0 и $2\frac{3}{5}$; | з) 2 и $-3$; | н) $-2$ и $-4$; |
| г) 0,2 и 0; | и) $-2$ и 0,7; | о) $-3$ и $-0{,}2$; |
| д) $-3$ и 0; | к) 5 и $-1{,}8$; | п) $-1\frac{2}{5}$ и $-2$. |

**43.8.** Не пользуясь координатной прямой, сравните числа:

а) 11 и 13; б) −11 и 13; в) 11 и −13; г) −11 и −13; д) −11 и 0; е) 0 и −13;

ж) $2\frac{1}{9}$ и $2\frac{1}{8}$; з) $-2\frac{1}{9}$ и $2\frac{1}{8}$; и) $2\frac{1}{9}$ и $-2\frac{1}{8}$; к) $-2\frac{1}{9}$ и $-2\frac{1}{8}$; л) $-2\frac{1}{9}$ и 0;

м) 0 и $-2\frac{1}{8}$; н) 4,7 и 5,03; о) −4,7 и 5,03; п) 4,7 и −5,03; р) −4,7 и −5,03.

**43.9.** Вставьте вместо многоточия какое-нибудь число так, чтобы было верно двойное неравенство:

а) $-1<...<2$; б) $1>...>0$; в) $0{,}3>...>-1{,}2$; г) $-1<...<0$; д) $0>...>-\frac{2}{3}$;

е) $-\frac{1}{7}<...<\frac{1}{7}$; ж) $-4<...<-2$; з) $-0{,}1<...<-0{,}01$; и) $-4{,}37>...>-4{,}38$.

**43.10. (У)** Какое целое число стоит между числами:

а) −1,1 и −0,6; в) −5,3 и −3; д) −7 и −5; ж) −2 и 0;
б) −0,8 и 0,2; г) −1,8 и 0; е) −4 и −2,3; з) −1 и 1?

**43.11. (У)** Сколько целых чисел стоит между числами:

а) −5,4 и −1,2; в) −9,6 и 0; д) −5 и −1,2; ж) −7 и −2;
б) −7,5 и 3,2; г) −4,5 и 8; е) −3 и 0,75; з) −4 и 4?

**43.12.** а) Расположите числа в порядке возрастания: −3; 2,1; $3\frac{2}{3}$; 0,6; $-1\frac{2}{7}$; −2,99; $-3\frac{2}{3}$; 0,01; 0,6. б) Расположите числа в порядке убывания: 0,8; −2; −4,2; 3,02; 2; −2,02; 0; 1,9; −1,9.

**43.13.** В таблице указана высота над уровнем моря некоторых городов.

Запишите эти города в порядке возрастания их высоты над уровнем моря, а затем в порядке убывания этой высоты.

| Город | Высота (м) |
|---|---|
| Москва | 150 |
| Санкт-Петербург | 5 |
| Астрахань | −25 |
| Ереван | 1100 |
| Иркутск | 450 |

**43.14. (У)** Клоун заявил, что если $|a|=|b|$, то $|a+1|=|b+1|$. Публика смеялась: все знали, что это не всегда верно.

а) Укажите две пары таких чисел $a$ и $b$, что $|a|=|b|$, но $|a+1|\neq|b+1|$.

б)* Что вообще можно сказать о парах чисел $a$ и $b$ с таким свойством, что $|a|=|b|$ и $|a+1|\neq|b+1|$?

**Урок 44**

## КАК РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ПРЕВРАЩАЮТСЯ В ОДНУ ЗАДАЧУ ПРО ЧИСЛА

В объяснительном тексте урока 38 мы обсудили две задачи: про портовый кран и про гимнаста. *(Прочитайте-ка их еще раз!)* Мы выяснили там, что они имеют одну и ту же схему. Чтобы разобраться в этой схеме, мы рассказали про точку, которая перемещается в двух противоположных направлениях. Теперь вы уже знакомы с координатной прямой и отрицательными числами, и эту схему можно пересказать легче. А именно: обе задачи из урока 38 превращаются в одну и ту же задачу про числа. Вот такую:

З а д а ч а. К числу 300 прибавили: а) число $-200$; б) число $-400$. Сколько получится?

***Вспомните ответы в задачах 1 и 2 из урока 38 и догадайтесь, как ответить на заданный вопрос.***

Легко догадаться, что ответ будет такой: в варианте а) 100; в варианте б) $-100$.

Видите, решение о д н о й задачи про числа может дать решение сразу н е с к о л ь к и х конкретных задач. Тем и хороша математика, что одна и та же задача про числа может пригодиться для решения разных конкретных задач. Поэтому надо учиться видеть в каждой конкретной задаче математическую задачу. Тогда, разобравшись с одной конкретной задачей, вы легко сможете решить и другие.

В задаче, которая сформулирована выше, нужно найти сумму двух чисел: в варианте а) $300+(-200)$; в варианте б) $300+$ $+(-400)$. Видите, одно из слагаемых — отрицательное число.

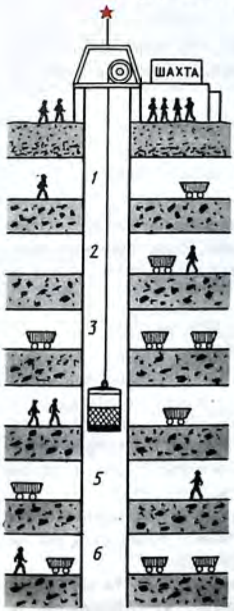
***А как находить сумму, если среди слагаемых окажутся отрицательные числа?***

Потерпите до следующего параграфа, где мы ответим на этот вопрос и вообще научим вас выполнять действия над рациональными числами.

**Задания**

**44.1.** **(У)** а) Алеша, Боря и Вася живут в одном доме, в одном подъезде на разных этажах: Алеша на 5-м, Боря на 8-м. Алеша пошел к Боре поиграть в шахматы. Борины родители сказали ему, что Боря ушел к Васе. Алеша помнил, что Борин этаж от его и от Васиного этажа удален одинаково. До какого этажа нужно дойти Алеше?

б) Киномеханик приступил к работе в 5 ч вечера. В 8 ч вечера, начав последний сеанс, он заметил, что до конца его рабочей смены осталось столько же, сколько он уже проработал. До какого времени будет работать киномеханик?




в) Перечитайте условия задач а) и б). Перескажите каждую из них как задачу про числа. Можно ли утверждать, что получилась одна и та же задача?

**44.2.** **(У)** а) Счет этажам в шахте ведется сверху вниз, этажи в шахте называют горизонтами. Лифт в шахте с 4-го горизонта опустился еще на 2 горизонта, а затем поднялся на 3 горизонта. Выше или ниже относительно первоначального положения оказался лифт и на сколько горизонтов?

б) Вчера в полдень термометр показывал $-4°$. К вечеру температура еще понизилась на $2°$, а сегодня к полудню она повысилась на $3°$. Повысилась или понизилась полуденная температура за сутки и на сколько градусов?

в) Задачи а) и б) можно превратить вот в какую задачу: Точка $A$ на вертикальной координатной прямой обозначает число $-4$. Сначала она переместилась вниз на 2 единицы, а затем вверх на 3 единицы. Выше или ниже относительно первоначального положения оказалась точка $A$ и на сколько? Решите эту задачу.

г) Перескажите и решите ту же задачу, что и в пункте в), для случая, когда точка на горизонтальной прямой.

**44.3.** а) Для приготовления компота из персиков берут сахар, персики и воду в пропорции 1:1:3. Сколько граммов каждого продукта надо взять, чтобы сварить 1 кг компота?

б) Для приготовления защитной смеси от жуков-вредителей берут смолу, нафталин и керосин в пропорции 1:1:3. Какую массу каждого вещества надо взять, чтобы приготовить 1 кг смеси?

в) Перескажите условия задач а) и б) как задачу про числа. Можно ли утверждать, что получилась одна и та же задача?

**44.4.** а) Школьники собрали за лето 34,2 кг липового цвета и ромашки. Ромашки собрали на 7,8 кг больше, чем липового цвета. Сколько килограммов ромашки и сколько килограммов липового цвета собрали школьники?

б) Перескажите эту задачу как задачу про числа. Придумайте еще какую-нибудь задачу, которая превратилась бы в ту же задачу про числа.

Урок 45

## УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. КАКИЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МОГУТ СКРЫВАТЬСЯ ЗА ЗАДАЧАМИ ПРО ЧИСЛА

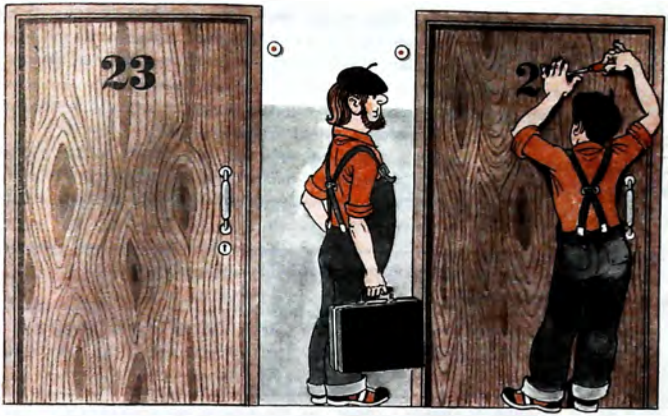
Зачем нужно уметь решать математические задачи? Ответ очень прост: многие практические задачи, если над ними подумать, превращаются в задачи математические, например в задачи про числа.

*А если задача про числа появилась просто так, не из практики, то ее незачем решать?*

Это интересный вопрос. А ответить на него можно так. Задачи просто про числа стоит решать уже потому, что они дают хорошую тренировку. Потренируешься хорошенько в их решении и с практическими задачами легче справишься! Но дело не только в этом. Очень часто бывает так: задача про числа, а за ней скрываются всякие практические задачи.

Вспомните-ка, например, задачу из урока 36: *сколько всего двузначных натуральных чисел?* Как может возникнуть эта задача на практике? Мы обсудим два примера.

З а д а ч а 1. Построили 100-квартирный дом. На дверях его квартир нужно прибить номера цифрами, изготовленными из




металла. Средняя масса одной цифры 25 г. Сможет ли один рабочий принести со склада (в мешке или коробке) все нужные цифры?

Давайте рассуждать. Чтобы решить задачу, надо узнать массу всех цифр. А для этого надо подсчитать, сколько всего цифр потребуется на номера квартир. Девять номеров — однозначные числа от 1 до 9, на них потребуется девять цифр. Один номер трехзначный — 100, еще три цифры. Остальные номера двузначные. Сколько же их? Вот и появилась наша старая задача про числа! Вы помните, что двузначных чисел 90. Значит, цифр на них уйдет $2 \cdot 90$, т. е. 180. А всего цифр потребуется $9+180+3$, т. е. 192. Средняя масса одной цифры дана в условии.

*Вычислите массу всех цифр и дайте ответ на вопрос задачи.*

---

Перечитайте вопрос б) задачи 24.2. Там имелось в виду, что Смекалкин записывает без остановки числа от 1 до 40 и никакие другие знаки при этом не пишет. Но в жизни часто приходится писать и какие-нибудь дополнительные знаки, например запятые. Тогда получаются задачи потруднее. Вот одна из таких задач.

З а д а ч а 2. Машинистке нужно напечатать на пишущей машинке ряд чисел от 1 до 100. После каждого числа ставится знак препинания: запятая для чисел от 1 до 99, точка для числа 100. После запятой пробел (т. е. пропуск знака) или переход в следующую строку. Машинистка печатает со скоростью 2 удара в секунду. За один удар получается либо цифра, либо знак препинания, либо пробел, либо переход в другую строку. Успеет ли машинистка напечатать нужный ряд чисел за 3 мин?

Давайте рассуждать. Ясно, что надо подсчитать число ударов, необходимых для выполнения работы. Тогда, разделив полученное число ударов на 2, мы узнаем время (в с), за которое машинистка выполнит работу.

| | |
|---|---|
| Сколько ударов уйдет на знаки препинания? | Ясно, что 100 ударов. |
| Сколько ударов уйдет на пробелы и переносы? | Ясно, что 99 ударов. Ведь между числами от 1 до 100 есть 99 промежутков. |
| Сколько ударов уйдет на цифры для всех чисел? | 9 ударов на однозначные числа, 3 удара на число 100. Чтобы узнать число ударов на двузначные числа, надо 2 умножить на число двузначных чисел. |

Вот мы и опять встретились с нашей старой задачей про числа! Число ударов, которое потребуется на цифры, равно 192 (мы уже подсчитывали его при решении задачи 1). Теперь подсчитаем общее число ударов: $100+99+192=391$.

*За сколько секунд напечатает машинистка нужный ряд чисел? Каков ответ в задаче?*

**Задания**

Для каждой из задач 45.1—45.6 придумайте какую-нибудь практическую задачу, которая за ней скрывается.

**45.1.** Одно число равно 47, а другое на 24 больше. Какова сумма этих двух чисел?

**45.2.** Одно число равно 36, а другое в 3 раза больше. Какова разность этих чисел?

**45.3.** Во сколько раз число 234 больше суммы чисел 36 и 42?

**45.4.** Сумма трех чисел равна 378. Первое из них в 2 раза больше второго, но в 3 раза меньше третьего. Найдите эти числа.

**45.5.** Сумма трех чисел 125. Сумма первого и второго равна 93, сумма второго и третьего равна 76. Найдите эти числа.

**45.6.** Разделите число 240 на части в пропорции 3:4:5.

**45.7.** Перечитайте задачу 1 из объяснительного текста. Рабочий за один раз может нести груз до 20 кг. Каков будет ответ в задаче, если условие изменить так: в доме: а) 200 квартир; б) 400 квартир?

**45.8.** Перечитайте задачу 2 из объяснительного текста. Изменим условие так: машинистке нужно напечатать ряд чисел: а) от 1 до 200; б) от 1 до 300. За какое время она выполнит эту работу?

**Урок 46**

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 4

!

**46.1. (У)** На рисунке 41, *а* изображена шкала прибора. Стрелка показывает на ней число −2. Прочитайте показания прибора на рисунке 41, *б, в, г, д*.


Рис. 41

**46.2.** Отметьте на координатной прямой точки $A(-1)$, $B(3)$, $C(-2{,}5)$, $D(2{,}5)$. Каково расстояние от каждой из этих точек до начала координат?

**46.3.** В новогоднюю ночь температура воздуха была: в Архангельске −25°, в Ашхабаде +6°, в Душанбе +9°, в Киеве −10°, в Красноярске −44°, в С.-Петербурге −17°, в Магадане −20°, в Москве −20°, в Ростове −5°, в Екатеринбурге −18°, в Ташкенте +4°, в Тбилиси −3°, в Хабаровске −29°, в Чите −32°, в Якутске −45°. Постройте по этим данным столбчатую диаграмму. (Совет: выберите масштаб 1° в 1 мм и догадайтесь, какие столбцы надо чертить вверх, а какие — вниз.)

**46.4.** При измерении высот и глубин за 0 принимают уровень Мирового океана. Высоты при этом записываются положи-

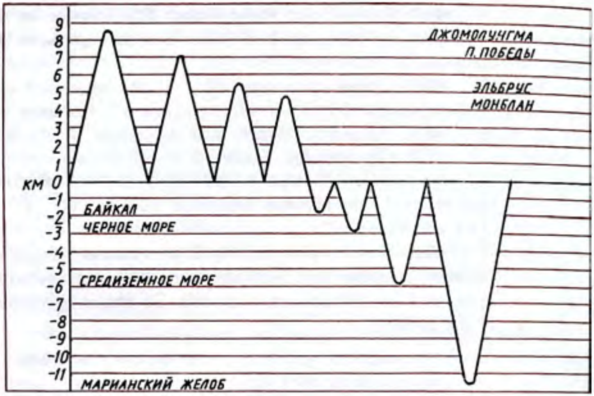



Рис. 42

тельными числами, а глубины — отрицательными. Рассмотрите рисунок 42 и запишите с точностью до 1 км указанные на нем высоты и глубины положительными и отрицательными числами.

**46.5.** Расположите числа $-3{,}2$; $1$; $-\frac{1}{2}$; $7{,}4$; $0$; $-1{,}5$: а) в порядке убывания; б) в порядке убывания их модулей.

**46.6. (У)** Младший брат Смекалкина, увидев запись $-x$, сказал, что здесь записано отрицательное число. Смекалкин объяснил брату, что так утверждать нельзя. Какое число $-x$, зависит от того, каким числом является $x$. Каким числом будет $-x$, если: а) $x>0$; б) $x<0$; в) $x=0$?

**46.7. (У)** Пусть известно, что $|a|<3$. Такое неравенство может выполняться и при положительных значениях буквы $a$, и при отрицательных. Например, при $a=-1$ и при $a=2$ (*проверьте!*).

Для каждого из следующих неравенств назовите одно положительное значение буквы и одно отрицательное, при которых неравенство будет верным: а) $|a|<1{,}2$; б) $|a|>2$; в) $|b|<0{,}8$; г) $|m|>0$.

**46.8. (У)** Смекалкин задал младшему брату вопрос: «Может ли быть так, что число меньше трех, а его модуль больше трех?» Младший брат ответил: «Нет, не может! Что за странный вопрос!

Разве неверно, что если число меньше трех, то и его модуль меньше трех? Вот, например, $2<3$ и $|2|<3$». Смекалкин объяснил брату, что для положительных чисел это верно. Но ведь есть и отрицательные числа!

Назовите два-три числа, такие, что само число меньше трех, а его модуль больше трех.

**46.9. (У)** а) Игорь вместе с родителями в январе пойдет в театр: 1-й раз — 9 января, 2-й раз — через неделю после 1-го, 3-й раз — через две недели после 2-го. Какого числа он пойдет в театр во 2-й и в 3-й раз?

б) В 9 км от города находится автозаправочная станция. За ней по той же дороге через 7 км расположена база отдыха, еще дальше — спортивный лагерь. Спортивный лагерь удален от базы отдыха на расстояние, в 2 раза большее, чем то, на которое она удалена от автозаправочной станции. На каком расстоянии от города находится база отдыха; спортивный лагерь?

в) Перечитайте внимательно условия задач а) и б). Перескажите каждую из них как задачу про числа. Можно ли утверждать, что получилась одна и та же задача?

## § 5. ДЕЙСТВИЯ НАД РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

В § 2 вы научились складывать, вычитать, умножать и делить любые положительные рациональные числа. Теперь вы знаете, что есть еще и отрицательные числа. С ними тоже нужно уметь выполнять действия. Как находить сумму, разность, произведение, частное любых рациональных чисел, мы расскажем в этом параграфе.

**Урок 47**

### СЛОЖЕНИЕ

Для изучения сложения рациональных чисел удобно представлять себе координатную прямую. Например, горизонтальную. Давайте, глядя на такую прямую, обсудим, как можно определить суммы $3+5$ и $3+(-5)$. Вспомним о нашем сказочном волшебнике. Чтобы оказаться в точке с координатой 3, он из нулевой точки должен сделать 3 шага вправо. Прибавить затем 5 — значит сделать еще 5 шагов вправо, а прибавить $-5$ — значит сделать 5 шагов в противоположном направлении, т. е. влево. В какой же точке окажется в результате волшебник?

Рис. 43

Каждому видно: в первом случае он окажется в точке с координатой 8, во втором — в точке с координатой −2 (рис. 43). То, что $3+5=8$, знает, конечно, и первоклассник, но для нас здесь особенно важен вывод о том, что $3+(-5)=-2$.

А теперь повторим эти рассуждения, отыскивая сумму $a+b$ любых рациональных чисел $a$ и $b$.

*Но ведь a и b могут оказаться не целыми числами! И тогда, чтобы попасть в нужные точки на координатной прямой, шагами не обойтись. Как же рассуждать?*

Разумное замечание. Но волшебник может не только шагать по такой прямой, но и скользить или прыгать по ней. Давайте, действуя с любыми рациональными числами, и будем представлять себя волшебником, который умеет перемещаться по координатной прямой на любое расстояние и в любую сторону.

Итак, мы хотим найти сумму $a+b$. На сколько и в какую сторону нужно переместиться по горизонтальной координатной прямой от точки с координатой $a$, чтобы оказаться в точке с координатой $a+b$? В какую сторону, понятно: если число $b$ положительно, то вправо, если $b$ отрицательно — влево. И на какое расстояние, тоже легко догадаться: каким бы ни было $b$ (положительным или отрицательным), точка с координатой $a+b$ удалена от точки с координатой $a$ на расстояние $|b|$.

*Вернитесь-ка, например, к рисунку 43, где были рассмотрены две пары чисел: 1) $a=3$, $b=5$; 2) $a=3$, $b=-5$. Видите: в обоих случаях интересующее нас расстояние равно 5. Но 5 — это и $|5|$, и $|-5|$.*

Мы можем сформулировать окончательный вывод: **если число $b$ $\dfrac{\text{положительно}}{\text{отрицательно}}$, то, чтобы оказаться в точке с координатой $a+b$, нужно из точки с координатой $a$ переместиться $\dfrac{\text{вправо}}{\text{влево}}$ на расстояние $|b|$.**

*Нарисуйте координатную прямую и найдите с ее помощью суммы* $5+(-3)$, $\frac{1}{2}+(-3)$, $(-2)+2$, $(-2)+\frac{1}{2}$. *Для каждой суммы отметьте точки, изображающие слагаемые и результат.*

Перечитайте сделанный выше вывод. Все ли возможные случаи для числа $b$ в нем учтены?

*Не все! Ведь $b$ может оказаться ни положительным, ни отрицательным: такое число $b$ — нуль!*

Верно. Поэтому разберем отдельно случай, когда $b=0$. Правило сложения здесь совсем простое: ведь в этом случае от точки с координатой $a$ никуда перемещаться не нужно! Значит, $a+0=a$. Как вы видите, эта давно известная вам формула верна и тогда, когда $a$ — любое рациональное число. Точно так же легко убедиться, что при любом $a$ верна формула $0+a=a$ *(убедились?)*.

В рассуждениях пользоваться координатной прямой очень удобно. Но надо бы научиться вычислять суммы любых рациональных чисел и не обращаясь к ней. Мы сейчас расскажем, как это делать.

Складывать положительные числа вы давно уже умеете и без всякой координатной прямой. Посмотрим теперь, что происходит при сложении двух о т р и ц а т е л ь н ы х чисел $a$ и $b$. Применим сделанный выше вывод. Точка с координатой $a$ находится на отрицательном луче на расстоянии $|a|$ от нулевой точки. Чтобы оказаться в точке с координатой $a+b$, нужно переместиться в отрицательном направлении еще на расстояние $|b|$ (рис. 44, где все это показано для чисел $a=-3$, $b=-4$; фигурные скобки отмечают модули слагаемых). Ясно, что сумма $a+b$ будет здесь числом отрицательным. А каков ее модуль? Видно, что $|a+b|=$ $=|a|+|b|$. Значит, $a+b=-(|a|+|b|)$. (В нашем примере $|-3|=3$, $|-4|=4$, так что $(-3)+(-4)=-(3+4)=-7$.)

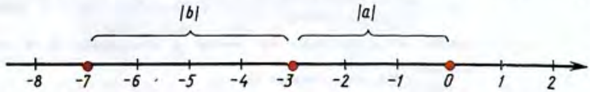



Рис. 44

Найденная формула показывает, как вычислять сумму отрицательных чисел, не обращаясь к координатной прямой:

Чтобы сложить два отрицательных числа,
нужно взять сумму их модулей со знаком «минус».

*Примените это правило к вычислению сумм*

$$(-3{,}25)+(-6{,}75) \text{ и } \left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right).$$

Теперь выясним, как вычислять сумму, если слагаемые имеют разные знаки (т. е. одно положительное, другое отрицательное). Оказывается, тут придется учитывать результат сравнения модулей слагаемых.

Разберем два похожих примера:

$$(-7)+5 \text{ и } 7+(-5).$$

В обеих суммах модули слагаемых одни и те же: 7 и 5, но в первом приме́ре больший модуль у отрицательного слагаемого, а во втором — у положительного.

Видно (рис. 45), что знак суммы зависит от того, какое слагаемое «пересилит»: сумма будет числом $\frac{\text{положительным}}{\text{отрицательным}}$, если модуль $\frac{\text{положительного}}{\text{отрицательного}}$ слагаемого больше модуля $\frac{\text{отрицательного}}{\text{положительного}}$ слагаемого.

А каков модуль суммы в каждом случае? Видно (снова см. рис. 45), что и в том и в другом случае он равен разности модулей слагаемых.

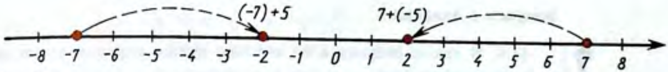



Рис. 45

Значит, в случае, когда модули слагаемых не равны (т. е. один из них больше другого), получается такое правило:

Чтобы сложить два числа разных знаков, имеющие разные модули, нужно из большего модуля вычесть меньший и полученную разность взять со знаком слагаемого, имеющего больший модуль.

*Какой случай осталось разобрать? Подумайте, чему будет равна сумма в этом случае.*

Осталось разобрать случай, когда слагаемые разных знаков имеют равные модули. Такие слагаемые — противоположные числа. Находя сумму $a+(-a)$ с помощью координатной прямой, нужно из нулевой точки переместиться на одинаковое расстояние $|a|$ сначала в одном направлении (для $a$), затем в противоположном (для $-a$).

*Тогда мы вернемся в нулевую точку!*

Конечно. На рисунке 46 это проиллюстрировано при $a=-\frac{7}{2}$ и $a=5$. Вот какое интересное свойство мы обнаружили:

Сумма противоположных чисел равна нулю.

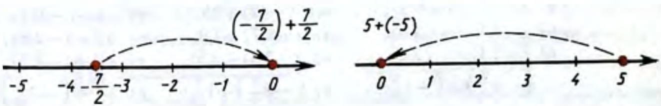



Рис. 46

▲ Если подумать, то можно догадаться, что и наоборот: если сумма двух чисел равна нулю, то эти числа противоположны друг другу.

*Постарайтесь объяснить это свойство, пользуясь координатной прямой.* ▲

### Вопросы и задания

**47.1.** В какую сторону и на сколько нужно переместиться по координатной прямой из точки с координатой $a$, когда к числу $a$ прибавляется число: 2; 3; $-5$; $-1{,}5$; $b$?

**47.2.** Чему равна сумма данного числа и числа 0; сумма противоположных чисел?

**47.3.** Как сложить два отрицательных числа; два числа разных знаков с не равными модулями?

**47.4.** а) Отметьте на горизонтальной координатной прямой точку $A(-4)$. Затем отметьте точки, изображающие суммы: $(-4)+2$; $(-4)+5$; $(-4)+(-1)$; $(-4)+(-3)$; $(-4)+4$.

б) Выполните то же задание, что и в а), на вертикальной координатной прямой. Сформулируйте правило, в какую сторону и на сколько нужно переместиться по вертикальной координатной прямой из точки с координатой $a$, когда число $a$ складывают с числом $b$.

в) Придумайте по одному заданию, похожему на задания из а) и б), предложите их соседу по парте, а затем проверьте, правильно ли он их выполнил.

**47.5.** Вчера температура воздуха была 3°. Сегодня она: а) повысилась на 2°; б) понизилась на 2°; в) понизилась на 4°; г) понизилась на 3°. В каждом варианте а) — г) запишите в виде суммы сегодняшнюю температуру и вычислите ее.

**47.6.** Вычислите:

а) $(-37)+(-112)$;
б) $(-4{,}5)+(-4{,}6)$;
в) $(-2{,}4)+(-2{,}4)$;
г) $\left(-3\frac{7}{12}\right)+\left(-1\frac{5}{18}\right)$;
д) $(-0{,}8)+(-3{,}2)$;
е) $(-6{,}9)+(-6{,}9)$;
ж) $(-42)+53$;
з) $(-6{,}7)+2{,}9$;
и) $(-3{,}5)+3{,}5$;
к) $\left(-8\frac{7}{9}\right)+1\frac{5}{12}$;
л) $(-2{,}5)+0{,}9$;
м) $(-2{,}5)+4{,}9$;
н) $13+(-31)$;
о) $3{,}7+(-2{,}8)$;
п) $4{,}5+(-4{,}5)$;
р) $3\frac{7}{15}+\left(-7\frac{5}{18}\right)$;
с) $4{,}1+(-3{,}2)$;
т) $5{,}3+(-6{,}9)$.

**47.7.** **(У)** Вычислите:

а) $(-22)+35$;
б) $(-3{,}7)+2{,}8$;
в) $1{,}5+(-6{,}3)$;
г) $8{,}2+(-8{,}2)$.

**47.8.** Сравните значения выражений:

а) $3{,}87+(-2{,}63)$ и $5{,}29+(-3{,}59)$;
б) $(-7{,}35)+4{,}54$ и $(-4{,}68)+3{,}46$;

в) $3\frac{8}{11}+\left(-5\frac{4}{9}\right)$ и $1\frac{2}{9}+\frac{10}{11}$;

г) $(-5{,}68)+3{,}95$ и $2{,}63+(-5{,}3)$.

**47.9.** Смекалкин предложил младшему брату придумать два числа, сумма которых меньше каждого из них. «Разве так бывает?» — удивился брат. Смекалкин объяснил, что, конечно, бывает. а) Придумайте два таких числа. б)* Может ли одно из них быть положительным? Ответ объясните. в)* Что можно сказать о знаках чисел, сумма которых больше каждого слагаемого?

**47.10. (У)** Найдите число, противоположное числу: а) 3,7; б) $-2{,}6$; в) $-7\frac{1}{3}$; г) $8\frac{7}{9}$; д) $-16{,}02$.

**Урок 48**

## ВЫЧИТАНИЕ

Смекалкин предложил младшему брату вычесть из числа 2 число 5. Тот воскликнул: «Но ведь нет такого числа, которое было бы разностью $2-5$!» Смекалкин объяснил, что такого числа нет среди положительных чисел. А среди отрицательных его найти очень легко: это $-3$. Почему? Как в этом убедиться?

Давайте разберемся. Что такое разность чисел $c$ и $a$? Это такое число $b$, что выполнено равенство $a+b=c$. В примере Смекалкина $c=2$, $a=5$, и Смекалкин утверждает, что тогда $b=-3$. Проверим: $a+b=5+(-3)=2=c$. Все в порядке! Итак, $2-5=-3$.

*Проверьте, что* $1-10=-9$. *Найдите разность* $3-11$.

Теперь, зная отрицательные числа, вы можете находить разность любых чисел. Как это делать? Оказывается, вычитание можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Так, в примере Смекалкина, чтобы вычесть из числа 2 число 5, можно, наоборот, прибавить к 2 число, противоположное 5, т. е. $-5$. Посмотрите-ка:

$$2+(-5)=-(5-2)=-3.$$

А ведь раньше было проверено, что $-3$ равно разности 2 и 5. Значит, $2-5=2+(-5)$. Точно так же $1-10=1+(-10)=-(10-1)=-9$. И вообще:

Чтобы вычесть из одного числа другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

То же самое можно записать такой формулой:

$$\boxed{c-a=c+(-a)}$$

Этой формулой пользуются, чтобы находить разность любых чисел. Вот примеры:

$$6-(-9)=6+9=15;$$
$$(-7)-(-3)=(-7)+3=-(7-3)=-4;$$
$$(-9)-1{,}5=(-9)+(-1{,}5)=-(9+1{,}5)=-10{,}5.$$

Итак, сделаем важный вывод, главный в этом уроке:

Для любых двух чисел можно найти число, которое будет их разностью.

*А если одно из чисел — это нуль?*

Формула для разности дает ответ в любом случае. Посмотрите: при $c=0$ получается равенство $0-a=0+(-a)=-a$, при $a=0$ получается равенство $c-0=c+(-0)=c+0=c$. В этом равенстве вместо $c$ можно писать и букву $a$. Значит, верны формулы

$$\boxed{0-a=-a;\ a-0=a}.$$

**Вопросы и задания**

**48.1.** Какой главный вывод был сделан в уроке? Как вычитание заменяют сложением?

**48.2.** Чему равна разность чисел 0 и $a$; $a$ и 0?

**48.3.** Замените вычитание сложением:

а) $18-6$; б) $37-(-7)$; в) $(-17)-9$; г) $(-6)-(-13)$.

**48.4.** Вычислите:

а) $15-18$;
б) $3{,}8-6{,}4$;
в) $(-7{,}2)-2{,}8$;
г) $\left(-2\frac{1}{3}\right)-1\frac{1}{6}$;
д) $12-(-17)$;
е) $4{,}5-(-3{,}7)$;
ж) $(-8{,}6)-(-9{,}5)$;
з) $(-3)-3$;
и) $\left(-4\frac{5}{15}\right)-\left(-6\frac{7}{18}\right)$;
к) $(-7)-(-7)$;
л) $9{,}93-(-4{,}6)$;
м) $(-5{,}3)-5{,}3$;
н) $0-5$;
о) $0-\left(-7\frac{10}{11}\right)$;
п) $0-0$.

Выполненное вычитание в примерах г) и е) проверьте сложением, а в примерах и) и л) — вычитанием.

**48.5.** **(У)** Вычислите:

а) $22-27$; в) $19-(-2)$; д) $(-34)-(-27)$;
б) $(-13)-8$; г) $(-27)-(-34)$; е) $0-7$.

**48.6.** Решите уравнение:

а) $x+3{,}7=-2{,}6$; е) $(-2{,}6)-x=4$;
б) $x+(-1{,}7)=4{,}5$; ж) $(-x)+0{,}6=-3{,}7$;
в) $(-1{,}3)+x=-0{,}4$; з) $(-x)-(-1{,}7)=2{,}9$;
г) $x-4{,}5=-6{,}2$; и) $(-0{,}4)-(-x)=-1{,}2$.
д) $x-(-1{,}7)=3{,}5$;

**48.7.** **(У)** Смекалкин предложил младшему брату придумать такие два числа, чтобы их разность была больше уменьшаемого. «Разве так бывает?» — удивился брат. Смекалкин объяснил, что, конечно, бывает. а) Придумайте два таких числа. б)* Может ли при этом вычитаемое быть положительным? Ответ объясните. в)* Что можно сказать о знаке вычитаемого, если разность меньше уменьшаемого?

**48.8.** Человек за минуту делает в среднем 15 вдохов, поглощая за каждый вдох 0,55 л воздуха. Какой объем воздуха он вдыхает за 1 ч; за 1 сутки? Какой объем воздуха вдыхает ваш класс за 1 урок? Выразите его в кубических метрах и сравните с объемом вашей классной комнаты.

**48.9.** Расстояние от Аниного дома до Катиного 1260 м. Однажды Аня и Катя одновременно вышли навстречу друг другу и встретились через 14 мин. Какова скорость Ани, если Катя шла со скоростью $43\frac{2}{3}$ м/мин?

**Урок 49**

## СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

Вспомним прежде всего свойство, которое мы сформулировали в конце урока 47 *(посмотрите его формулировку)*. Запишем это свойство сложения формулами:

$$\boxed{a+(-a)=0; \ (-a)+a=0}\ .$$

*А переместительный и сочетательный законы сложения верны для рациональных чисел?*

Разумный вопрос. Вы давно знаете, что они верны для сложения натуральных чисел, а в уроке 19 мы обсудили их для дробей. Оказывается, они остаются верными и для сложения любых рациональных чисел. Кроме того, выполняется следующее важное свойство сложения: число, противоположное сумме двух чисел, равно сумме чисел, противоположных слагаемым. Вот запись этого утверждения формулой:

$$\boxed{-(a+b)=(-a)+(-b)}\,.$$

▲ То, что равенство $a+b=b+a$ выполняется для любых чисел $a$ и $b$, можно объяснить, если разобрать все возможные случаи. Их четыре: 1) $a$ и $b$ положительны; 2) $a$ и $b$ отрицательны; 3) $a$ и $b$ разных знаков; 4) среди чисел $a$ и $b$ есть нуль. Первый случай был разобран в уроке 19. В остальных трех случаях требуемое равенство легко проверить, если воспользоваться правилами и формулами, найденными в этом уроке.

*Проверьте равенство $a+b=b+a$ в остальных трех случаях.*

То, что равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$ выполняется для любых чисел $a$, $b$ и $c$, можно объяснить (лучше всего с помощью координатной прямой), тоже разбирая возможные случаи. Только повозиться тут придется побольше, чем при проверке переместительного закона. Мы надеемся, что у тех, кто особенно любит заниматься математикой, хватит настойчивости, чтобы разобраться в этих случаях.

То, что выполняется равенство $-(a+b)=(-a)+(-b)$, проверить нетрудно, если вспомнить свойство, которое было сформулировано в самом конце урока 47 *(посмотрите его формулировку)*. Если мы убедимся, что $(a+b)+((-a)+(-b))=0$, то это и будет означать, что числа $a+b$ и $(-a)+(-b)$ противоположны. А убедиться в этом можно как раз воспользовавшись сочетательным и переместительным законами *(убедитесь!)*. ▲

---

Обсудим теперь свойства вычитания. Давайте вспомним свойства, о которых мы говорили в пятом классе. Вот как они записываются формулами:

$$\boxed{(a-b)-c=a-(b+c)} \qquad \boxed{a-(b-c)=(a-b)+c}$$

$$\boxed{(a+b)-c=a+(b-c)} \qquad \boxed{(a+b)-c=(a-c)+b}$$

То, что все они верны для любых рациональных чисел, можно объяснить, заменяя вычитаемые противоположными слагаемыми (и наоборот, если потребуется) и применяя свойства сложения, обсужденные выше в этом уроке. Например, первая формула получается такой цепочкой равенств:

$$(a-b)-c=(a+(-b))+(-c)=a+((-b)+(-c))=$$
$$=a+(-(b+c))=a-(b+c).$$

*Объясните каждое равенство в этой цепочке.*

Проверить остальные три формулы мы предлагаем вам в задании 49.3. Если во второй формуле вместо $a$ подставить 0, то несложными рассуждениями *(проведите их!)* получится еще одна полезная формула:

$$\boxed{-(b-c)=c-b}.$$

Другими словами, числа $b-c$ и $c-b$ противоположны друг другу.

Умение вычислять разность любых двух чисел помогает при решении многих задач. Например, сейчас можно дать простой ответ на вопрос о том, как найти расстояние между двумя точками на координатной прямой, зная их координаты. Возьмем точку $A$ с координатой $a$ и точку $C$ с координатой $c$. Обозначим через $b$ разность $c-a$, тогда $c=a+b$. В уроке 47 мы заметили, что точка с координатой $a+b$ удалена от точки с координатой $a$ на расстояние $|b|$ *(найдите там это место!)*. Но сейчас $b=c-a$. Значит, интересующее нас расстояние между точками $A$ и $C$ равно $|c-a|$. Ответ найден.

*А если бы мы через $b$ обозначили $a-c$, тогда ответ для того же расстояния был бы $|a-c|$? Что ли здесь два ответа?*

Ответ один, потому что $|a-c|=|c-a|$. Ведь числа $a-c$ и $c-a$ противоположны друг другу (мы установили это выше), значит, модули их равны. Запишем найденный ответ формулой:

$$|AC|=|c-a|=|a-c|.$$

### Вопросы и задания

**49.1.** Чему равно число, противоположное сумме двух данных чисел?

**49.2.** Чему равно расстояние между точками с координатами $a$ и $b$?

**49.3.** В объяснительном тексте урока записаны формулами четыре совместных свойства вычитания и сложения. Там же показано, как выводится первая из них. Выведите остальные.

**49.4.** Найдите расстояние между точками $A(u)$ и $B(v)$:

а) **(У)** $u=2,\ v=8$; г) $u=-2{,}7,\ v=-5{,}3$;
б) **(У)** $u=9,\ v=3$; д) $u=6{,}3,\ v=-8{,}2$;
в) $u=-1{,}3,\ v=4{,}1$; е) $u=-2\frac{2}{3},\ v=-1\frac{1}{6}$.

**49.5.** Дана точка $A(-2{,}7)$. Какая из точек удалена от точки $A$ дальше: а) $B(-4{,}2)$ или $C(-3{,}9)$; б) $D(0{,}2)$ или $E(1)$; в) $K(-5{,}8)$ или $L(0{,}8)$; г) $M(-3)$ или $N(-2{,}4)$?

**49.6. (У)** Клоун искал расстояние от точки $A(5)$ до точки $B(-6)$: «Применяем формулу $|5-6|=|-1|=1$. Расстояние между $A$ и $B$ равно 1». Публика смеялась: всем была видна ошибка клоуна. а) Скажите, в чем состояла ошибка клоуна. б) Найдите правильно расстояние между точками $A(5)$ и $B(-6)$. в) Какие точки расположены на расстоянии 1 от точки $A(5)$; от точки $B(-6)$?

**Урок 50**

## УМНОЖЕНИЕ

Настала пора научиться выполнять умножение и деление рациональных чисел. В этом уроке мы займемся умножением. Положительные числа вы давно умеете умножать (кстати, сейчас полезно было бы перечитать урок 20, где давались нужные определения и правила). Значит, надо обратиться к случаям, когда среди множителей есть отрицательные числа.

Если спросить, что значит умножить $-2$ на 3, то каждый ответит: это значит взять $-2$ слагаемым 3 раза. Запишем, применяя правило сложения отрицательных чисел, что тогда получится:

$$(-2)\cdot 3=(-2)+(-2)+(-2)=-(2+2+2)=-(2\cdot 3).$$

Итак,

$$(-2)\cdot 3=-(2\cdot 3).$$

Что можно заметить? Находя произведение чисел $-2$ и 3, мы **заменили отрицательный множитель его модулем и поставили перед полученным произведением знак «минус».** Короче можно сказать так: перенесли «минус» от множителя к произведению.

Это наблюдение подсказывает такую догадку: правило «переносить «минус» от множителя к произведению» надо применять и в том случае, когда отрицателен второй множитель, причем не только когда множители — целые числа. Тогда, например,

$$\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\right)=-\frac{6}{35}.$$

*А если оба множителя отрицательны, то что ли придется «минус» переносить 2 раза?*

Да. Давайте посмотрим, как это делать. Рассмотрим произведение $(-2)\cdot(-3)$. Перенесем сначала «минус» от первого множителя к произведению: $(-2)\cdot(-3)=-(2\cdot(-3))$. А сейчас внутри скобок перенесем «минус» от второго множителя к произведению: $-(2\cdot(-3))=-(-(2\cdot3))$. Теперь можно воспользоваться формулой $-(-a)=a$ (см. урок 40). Значит, $-(-(2\cdot3))=2\cdot3$. Так что окончательно получаем равенство

$$(-2)\cdot(-3)=2\cdot3.$$

*Интересно! Произведение отрицательных чисел оказалось числом положительным!*

Вот именно! Применяя сначала наше правило переноса «минуса», а затем формулу $-(-a)=a$, мы приходим к выводу: **произведение любых двух отрицательных чисел положительно и равно произведению их модулей.**

Подведем итоги. Мы договорились, что действует правило «переносить «минус» от множителя к произведению». Тогда в обоих рассмотренных случаях (когда множители имеют разные знаки и когда они отрицательны) модуль произведения равен произведению модулей. Этот вывод верен и в случае, когда множители положительны: ведь такие множители попросту совпадают со своими модулями. Значит, всегда

$$\boxed{|a\cdot b|=|a|\cdot|b|}.$$

А знак произведения зависит от знаков множителей: если множители имеют одинаковые знаки (т. е. оба положительны или оба отрицательны), то произведение положительно, а если разные — отрицательно. Значит, можно сформулировать такое правило умножения рациональных чисел:

Чтобы найти произведение двух чисел $\dfrac{\text{одинаковых}}{\text{разных}}$ знаков,

нужно перемножить модули этих чисел

и результат взять со знаком $\dfrac{\text{«плюс»}}{\text{«минус»}}$.

Конечно, среди множителей может оказаться число «без знака», т. е. 0. Чему тогда равно произведение? Здесь остается в силе хорошо известное вам правило: если один из множителей равен 0, то произведение равно 0.

*Запишите это правило формулой.*

**Вопросы и задания**

**50.1.** Как умножить одно число на другое?

**50.2.** Чему равен модуль произведения двух чисел?

**50.3.** Какой знак имеет произведение двух положительных чисел; двух отрицательных чисел; положительного числа и отрицательного?

**50.4.** а) Произведение двух чисел положительно. Какими могут быть знаки множителей? б) Произведение двух чисел отрицательно. Какими должны быть знаки множителей?

**50.5.** а) Какой знак имеет произведение трех отрицательных чисел; четырех отрицательных чисел; пяти отрицательных чисел; шести отрицательных чисел? б) Какое общее правило о знаке произведения отрицательных чисел можно сформулировать?

**50.6.** **(У)** Вычислите:

а) $(-7)\cdot 3$;
б) $(-2{,}1)\cdot 5$;
в) $7\cdot(-8)$;
г) $(-9)\cdot 6$;
д) $(-6)\cdot(-7)$;
е) $11\cdot(-0{,}3)$;
ж) $(-1{,}2)\cdot(-2)$;
з) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 14$;
и) $(-3)\cdot 0{,}6$;
к) $(-2)^2$;
л) $(-2)^3$;
м) $(-5)^2$;
н) $(-0{,}1)^2$;
о) $(-0{,}1)^3$;
п) $0\cdot(-2{,}32)$;
р) $6{,}23\cdot(-1)$.

**50.7.** Вычислите:

а) $(-3{,}15)\cdot 2{,}04$;
б) $(-18{,}6)\cdot 0{,}35$;
в) $49\cdot(-2{,}02)$;
г) $(-41{,}02)\cdot(-1{,}3)$;
д) $2{,}06\cdot(-7{,}05)$;
е) $(-7{,}2)\cdot 0{,}036$;

ж) $(-0{,}28)\cdot 1{,}25$; к) $\left(-8\frac{2}{21}\right)\cdot\left(2\frac{5}{17}\right)$; м) $\left(-2\frac{3}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$;

з) $(-3{,}9)\cdot 3{,}07$;

и) $4\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{7}{31}\right)$; л) $\left(-4\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{7}\right)$; н) $\left(-7\frac{5}{11}\right)\cdot 9\frac{1}{6}$.

**50.8.** Замените сложение одинаковых слагаемых умножением и вычислите значение выражения:

а) $a+a+a+a+b+b+b$ при $a=-1{,}3$ и $b=2{,}1$;

б) $x+y+x+y+x+y+x+y+x$ при $x=3{,}5$ и $y=-4{,}1$.

**50.9.** В холодильной установке первоначальная температура камеры 0°. Через 1 ч она стала −2° и продолжает понижаться с той же скоростью. Какой будет температура через 2 ч; 5 ч; 0 ч?

**50.10.** Найдите значение выражения:

а) $(2{,}3-3{,}2)\cdot(5{,}4-4{,}5)$;

б) $\left(10-5\frac{2}{3}-8{,}5\right)\cdot\left(-4\frac{2}{9}+5\frac{5}{18}\right)$;

в) $(-2{,}7)\cdot((-2{,}3)+0{,}8-(-2{,}3))$.

**50.11.** **(У)** Клоун заявил, что если $a<b$, то $a^2<b^2$. Публика смеялась: все знали, что это не всегда верно.

а) Укажите две пары таких чисел $a$ и $b$, что $a<b$, но $a^2>b^2$.

б)* Что вообще можно сказать о парах чисел $a$ и $b$ с таким свойством, что $a<b$ и $a^2>b^2$?

**Урок 51**

## ДЕЛЕНИЕ

Найти правило деления рациональных чисел будет легко, если вспомнить, что деление можно заменить умножением на число, обратное делителю. Давайте сначала подумаем, какой знак будет у числа, обратного отрицательному числу.

*Конечно, минус! Ведь если бы число, обратное отрицательному числу, имело знак плюс, то произведение этих чисел было бы отрицательным. А на самом деле оно положительно и равно +1.*

Убедительное рассуждение.

*Проверьте, что числом, обратным числу −2, будет число $-\frac{1}{2}$; числом, обратным числу $-\frac{7}{9}$, будет число $-\frac{9}{7}$.*

Теперь уже легко выполнить деление в следующих примерах, заменяя его умножением на число, обратное делителю:

$$3:(-2)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}=-(3:2);$$

$$(-5):4=(-5)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}=-(5:4);$$

$$(-7):(-8)=(-7)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{8}=+(7:8);$$

$$6:11=6\cdot\frac{1}{11}=\frac{6}{11}=+(6:11).$$

Рассматривая эти примеры, можно заметить, что всегда модуль частного равен частному модулей делимого и делителя:

$$\boxed{|a:b|=|a|:|b|,\ b\neq 0}$$

А знак частного ведет себя так же, как знак произведения: если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, то частное положительно, а если разные, то отрицательно. Получается правило деления рациональных чисел, очень похожее на правило их умножения:

**Чтобы найти частное двух чисел $\dfrac{\text{одинаковых}}{\text{разных}}$ знаков, нужно разделить модуль делимого на модуль делителя и результат взять со знаком $\dfrac{\text{плюс}}{\text{минус}}$.**

Что будет, если среди компонентов деления есть число «без знака», т. е. 0? Во-первых, делитель нулем быть не может (постарайтесь вспомнить рассуждения, которыми мы объясняли это в учебнике для 5-го класса). Во-вторых, здесь остается в силе хорошо известное вам правило (также обсужденное в 5-м классе): если делимое равно 0 (а делитель — любое число, отличное от 0), то частное равно 0.

*Запишите это правило формулой.*

Полезно запомнить зависимость знака частного от знаков делимого и делителя. Легко заметить, что она точно такая же, как зависимость знака произведения от знаков множителей. Обе эти зависимости наглядно показывает таблица:

| Знак числа $a$ | Знак числа $b$ | Знак чисел $a \cdot b$ и $a:b$ |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | − | − |
| − | + | − |
| − | − | + |

Ее можно назвать таблицей умножения и деления знаков. Запомнить ее очень легко. Например, последнюю комбинацию знаков обычно читают так: «Минус на минус дает плюс». Предпоследнюю комбинацию знаков читают: «Минус на плюс дает минус».

*Прочитайте все 4 комбинации знаков в таблице.*

**Вопросы и задания**

**51.1.** Как разделить одно число на другое?

**51.2.** Чему равен модуль частного двух чисел?

**51.3.** Какой знак имеет частное двух положительных чисел; двух отрицательных чисел; положительного числа и отрицательного?

**51.4.** а) Частное при делении двух чисел положительно. Какими могут быть знаки делимого и делителя? б) Частное при делении двух чисел отрицательно. Какими должны быть знаки делимого и делителя?

**51.5. (У)** Вычислите:

а) $(-3{,}5):7$; д) $(-48):(-8)$; и) $(-2{,}4):0{,}8$;
б) $(-6{,}3):0{,}9$; е) $(-2{,}4):(-6)$; к) $0:(-3{,}5)$;
в) $63:(-9)$; ж) $3:(-0{,}1)$; л) $4{,}2:(-1)$;
г) $56:(-7)$; з) $(-6):0{,}5$; м) $1:(-1)$.

**51.6.** Вычислите:

а) $(-86{,}1):2{,}46$; д) $0{,}75:(-1{,}5)$; и) $\frac{2}{3}:\left(-1\frac{1}{4}\right)$;
б) $(-41{,}58):5{,}4$; е) $(-7{,}2):0{,}036$; к) $\left(-2\frac{5}{9}\right):1\frac{11}{12}$;
в) $(-49{,}44):4{,}8$; ж) $(-85{,}2):(-1{,}2)$; л) $\left(-1\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{5}{18}\right)$;
г) $8{,}01:(-9)$; з) $\left(-2\frac{1}{4}\right):\left(-1\frac{1}{8}\right)$; м) $\left(-5\frac{7}{15}\right):2\frac{5}{18}$.

Выполненное деление в примерах е), и) проверьте умножением, а в примерах а), л) — делением.

**51.7.** Найдите значение выражения:

а) $(-1{,}9)\cdot 4^2:3{,}8$;

б) $\left(-3\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{7}{15}:1\frac{1}{27}$;

в) $\left(-2\frac{1}{4}\right):1\frac{1}{8}\cdot 5\frac{2}{5}$;

г) $((-0{,}5):1{,}25+1{,}4:(-3{,}5)-(-0{,}3))\cdot 2{,}2$;

д) $((-2{,}75)-0{,}15-1{,}32):((-1{,}75)+2{,}5+0{,}05)$;

е) $((-3{,}1)+(1{,}6)^2):((-2{,}1)-(-1{,}2))$;

ж) $((-0{,}2)^3+(-1)^3):(-0{,}03)$.

**51.8.** Найдите значение выражения $(x^2+1{,}1):(x-1)$ при $x=3$; $-1$; $0{,}3$; $1{,}3$; $-1{,}5$; $2$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $0$.

**51.9.** Решите уравнение:

а) $x\cdot 2{,}1=-15{,}33$;

б) $y:3{,}9=-6{,}08$;

в) $z\cdot 3{,}7-(-2{,}9)=-6{,}72$;

г) $x:2{,}4+3{,}7=2{,}3$;

д) $(-0{,}37)\cdot y=11{,}1$;

е) $(-1{,}1)\cdot z=-3{,}74$;

ж) $x:16{,}7=-0{,}02$;

з) $y:(-1{,}72)=0{,}21$;

и) $23{,}1:z=-0{,}033$;

к) $(-0{,}312):x=-2{,}6$;

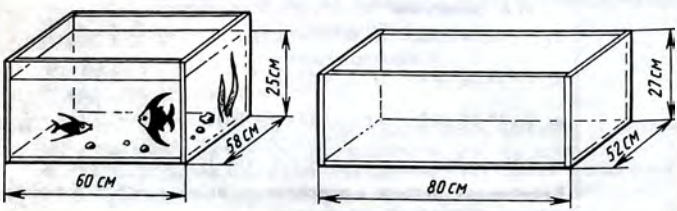
л) $(-y):5{,}7=14{,}2$;

м) $3\frac{1}{2}:(-z)=3\frac{1}{2}$.

**51.10.** Найдите число, обратное числу $-2$; $-\frac{2}{3}$; $-0{,}5$; $-2\frac{7}{11}$.

**51.11.** **(У)** Младший брат Смекалкина догадался, что число 1 обратно самому себе, и загадал Смекалкину загадку: «Отгадай число, которое обратно самому себе». Смекалкин объяснил, что среди положительных чисел отгадка только одна — число 1. Но число, обратное самому себе, есть и среди отрицательных чисел. Что это за число?

**51.12.** Родители купили Игорю новый аквариум. Его длина 80 см, ширина 52 см и высота 27 см. а) Сколько литров воды



вмещает этот аквариум? б) В старом аквариуме, длина которого 60 см, а ширина 58 см, вода налита до высоты 25 см. До какой высоты будет заполнен новый аквариум, если в него перелить всю воду из старого?

**51.13. (У)** *(Старинная задача. XVII в.)* Юноша некий пошел с Москвы к Вологде и идет на всякий день по 40 верст. А другой пошел после его на следующий день, а на всякий день идет по 45 верст. Во сколько дней тот юноша догонит прежнего юношу, сочти.

**Урок 52**

## СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

Для умножения рациональных чисел остаются верными переместительный и сочетательный законы, а также оба распределительных закона (относительно и сложения, и вычитания).

*Запишите все эти законы формулами.*

▲ То, что равенство $a \cdot b = b \cdot a$ выполняется для любых чисел $a$ и $b$, можно объяснить, если разобрать все возможные случаи. Их четыре: 1) $a$ и $b$ положительны; 2) $a$ и $b$ отрицательны; 3) $a$ и $b$ разных знаков; 4) среди чисел $a$ и $b$ есть нуль. Первый случай был разобран в уроке 20. В остальных трех случаях требуемое равенство легко проверить, если воспользоваться правилами и формулами, найденными в уроке 50.

*Проверьте равенство $a \cdot b = b \cdot a$ в остальных трех случаях.*

Чтобы убедиться в выполнении сочетательного закона для любых чисел $a$, $b$ и $c$, снова потребуется разобрать все возможные случаи. Их пять: 1) все три числа положительны; 2) два числа положительны, одно отрицательно; 3) одно число положительно, два отрицательны; 4) все три числа отрицательны; 5) хотя бы одно из чисел $a$, $b$ и $c$ равно 0.

*Проверьте, что $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, разобрав все случаи.*

Проверка распределительных законов немного труднее. Она потребует, конечно, применения правил и формул не только из урока 50, но и из уроков 47 и 48, а также подходящих законов действий над положительными числами. Мы надеемся, что большие любители математики справятся с такой проверкой. ▲

Выясним теперь, как ведут себя при умножении и делении особенные числа 1, $-1$ и 0.

Свойства нуля при умножении и делении были отмечены в уроках 50 и 51 *(вспомните эти свойства!)*. Свойства числа 1 вы повторите, выполняя задание 52.3. А сейчас давайте разберемся с числом $-1$. Нужно выяснить, чему будет равен результат, если среди компонентов умножения или деления есть $-1$. Для этого рассмотрим примеры и применим сформулированные выше правила умножения и деления:

$$5\cdot(-1)=-(5\cdot1)=-5;\ 5:(-1)=-(5:1)=-5;$$
$$(-1):5=-(1:5)=-\frac{1}{5}.$$

И вообще, верны такие утверждения:

**Если** $\dfrac{\textbf{один из множителей}}{\textbf{делитель}}$ **равен $-1$, то результат равен числу, противоположному** $\dfrac{\textbf{другому множителю}}{\textbf{делимому}}$**; если делимое равно $-1$, то частное** $\dfrac{\textbf{противоположно}}{\textbf{обратно}}$ **числу, которое** $\dfrac{\textbf{обратно}}{\textbf{противоположно}}$ **делителю.**

Вот формулы для этих утверждений:

$$\boxed{a\cdot(-1)=-a;\ (-1)\cdot a=-a}$$

$$\boxed{a:(-1)=-a}$$

$$\boxed{(-1):a=-(1:a)=1:(-a),\ a\neq0}$$

Еще одно утверждение, в котором участвует $-1$, вы сформулируете, выполнив задание 52.4.

Полезно помнить и такие формулы:

$$\boxed{a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-a\cdot b}$$

▲ Их легко объяснить, применяя свойства $-1$ при умножении и сочетательный закон. Для этого напишем цепочку равенств, в которой участвуют все три интересующих нас выражения:

$$a\cdot(-b)=a\cdot((-1)\cdot b)=(a\cdot(-1))\cdot b=(-a)\cdot b=$$
$$=((-1)\cdot a)\cdot b=(-1)\cdot(a\cdot b)=-a\cdot b. ▲$$

**Задания**

**52.1.** Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(-2{,}7)\cdot a+3{,}6\cdot a-(-4{,}9)\cdot a$ при $a=1{,}2;\ -3{,}6;\ 0{,}5;\ -0{,}1;$

б) $6{,}2\cdot b+(-3{,}7)\cdot b-(-5{,}9)\cdot b$ при $b=-1;\ 0{,}7;\ -2{,}1;\ -3{,}7.$

**52.2.** Решите уравнение:

а) $(-3{,}1)\cdot x+2{,}6\cdot x-0{,}7\cdot x=-2{,}7;$

б) $2{,}3\cdot y-(-7{,}2)\cdot y+(-1{,}5)\cdot y=-2{,}4;$

в) $(-4{,}6)\cdot z+5{,}2\cdot z+(-0{,}8)\cdot z=5{,}7;$

г) $3{,}7\cdot m-8{,}4\cdot m-(-2{,}2)\cdot m=6{,}3.$

**52.3.** Вам хорошо известны свойства числа 1, записанные следующими формулами:

$$\boxed{a\cdot 1=a},\ \boxed{1\cdot a=a},\ \boxed{a:1=a},\ \boxed{a:a=1}.$$

Эти свойства сохраняются и когда $a$ — отрицательное число. Сформулируйте утверждения, записанные этими формулами. Пользуясь правилами умножения и деления рациональных чисел, объясните каждое из них.

**52.4.** Вычислите значение выражения $(-a):a$ при $a=3;\ -2;\ 0{,}6;\ -0{,}4;\ \frac{2}{3};\ -2\frac{1}{7}$. Какое правило можно сформулировать? Запишите его формулой.

**52.5.** **(У)** Рассмотрите ряд равенств:

$(-1)^1=-1;\ (-1)^2=1;\ (-1)^3=-1;\ (-1)^4=1;\ (-1)^5=-1;\ \dots\ .$

Какое общее правило можно сформулировать? Вычислите: $(-1)^{99}$, $(-1)^{1997}$, $(-1)^{1998}$, $(-1)^{2000}$.

**Урок 53**

## «СЛОЖЕНЧЕСКО-УМНОЖЕНЧЕСКИЙ» СЛОВАРЬ

Изучая действия над числами, вы не раз обнаруживали похожие свойства сложения и умножения. Например, для каждого из этих действий выполняются переместительный и сочетательный законы. Для каждого из них есть обратное действие: для сложения — вычитание, для умножения — деление. Можно догадаться, что и совместные свойства вычитания со сложением и деления с умножением похожи.

Вспомним формулы, выражающие совместные свойства вычитания и сложения (последний раз вы повторяли их в уроке 49):

$$(a-b)-c=a-(b+c),$$
$$(a+b)-c=a+(b-c),$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c,$$
$$(a+b)-c=(a-c)+b.$$

Глядя на них, запишем похожие формулы для деления и умножения: везде вместо знака «плюс» будем писать знак умножения, а вместо знака «минус» — знак деления. Получатся формулы:

$$(a:b):c=a:(b\cdot c), \qquad a:(b:c)=(a:b)\cdot c,$$
$$(a\cdot b):c=a\cdot(b:c), \qquad (a\cdot b):c=(a:c)\cdot b.$$

▲ Можно представить себе, что мы как бы переводили формулы с «языка сложения» на «язык умножения». А возможен и обратный перевод — с языка умножения на язык сложения. Занимаясь такими переводами, надо применять правило: если в языке $\frac{\text{сложения}}{\text{умножения}}$ встретилось $\frac{\text{вычитание}}{\text{деление}}$, то в языке $\frac{\text{умножения}}{\text{сложения}}$ следует заменить его $\frac{\text{делением}}{\text{вычитанием}}$.

*А как перевести с языка сложения на язык умножения формулу $a+0=a$? Наверное, и нуль надо чем-то заменить?*

Конечно. Нетрудно догадаться, что при таком переводе нуль следует заменить единицей. Получится известная всем формула $a\cdot 1=a$. Вот еще пример: если формулу $a:a=1$ перевести на язык сложения, то получится формула $a-a=0$.

*Интересно! Наверное, можно составить такой словарь для перевода с языка сложения на язык умножения? «Сложенческо-умноженческий»!*

Неплохая идея. И слово придумано подходящее — «сложенческо-умноженческий». Давайте составим такой словарь. Оформим его в виде таблицы из двух столбцов: в левом будем писать слова, знаки и буквенные выражения, относящиеся к сложению, в правом столбце — их переводы на язык умножения.

| Язык сложения | Язык умножения |
|---|---|
| Сложение | Умножение |
| Сумма | Произведение |
| $a+b$ | $a \cdot b$ |
| Вычитание | Деление |
| Разность | Частное |
| $a-b$ | $a:b$ |
| Нуль | Единица |
| 0 | 1 |
| Противоположное число | Обратное число |
| $-a$ | $\frac{1}{a}$ |
| Кратное | Степень |
| $a \cdot 2$ | $a^2$ |
| $a \cdot 3$ | $a^3$ |

Наш «сложенческо-умноженческий» словарь немного похож на словарь для перевода с одного языка на другой. Например, с английского на русский — вы знаете, что такой словарь называют англо-русским. Словарь для перевода с русского языка на английский называют русско-английским. Если в составленном нами словаре переставить столбцы, то получится «умноженческо-сложенческий» словарь; но переставлять столбцы, конечно, незачем — можно просто в нашем словаре от записи в правом столбце переходить к записи в левом столбце.

Запишем, пользуясь словарем, несколько пар формул:

| Язык сложения | Язык умножения |
|---|---|
| $a+b=b+a$ | $a \cdot b=b \cdot a$ |
| $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ |
| $a+0=a$ | $a \cdot 1=a$ |
| $a-0=a$ | $a:1=a$ |
| $a-a=0$ | $a:a=1$ |
| $0-a=-a$ | $1:a=\frac{1}{a}$ |
| $a+a=a \cdot 2$ | $a \cdot a=a^2$ |
| $a+a+a=a \cdot 3$ | $a \cdot a \cdot a=a^3$ |

*Попытайтесь продолжить этот список.* ▲

**Задания**

**53.1. (У)** Объясните следующие приемы умножения: а) Чтобы умножить заданное число на 5, можно умножить его на 10 и результат разделить на 2. б) Чтобы умножить заданное число на 25, можно умножить его на 100 и результат разделить на 4. в) Пользуясь этими приемами, вычислите: $18 \cdot 5$; $45 \cdot 5$; $222 \cdot 5$; $2468 \cdot 5$; $325{,}6 \cdot 5$; $36 \cdot 25$; $168 \cdot 25$; $142 \cdot 25$; $246{,}8 \cdot 25$.

**53.2. (У)** Объясните следующие приемы деления: а) Чтобы разделить заданное число на 5, можно умножить его на 2 и результат разделить на 10. б) Чтобы разделить заданное число на 25, можно умножить его на 4 и результат разделить на 100. в) Пользуясь этими приемами, вычислите: 315:5; 23,5:5; 74:5; 225:25; 425:25; 65:25.

▲ **53.3.** Пользуясь «сложенческо-умноженческим» словарем, переведите следующие формулы:

а) с языка сложения на язык умножения:

$$b+b\cdot 2=b\cdot 3;\ a\cdot 2-a=a;$$

б) с языка умножения на язык сложения:

$$b^3:b=b^2;\ c^4:c^2=c^2.$$

**53.4.** Напишите на листке бумаги два буквенных выражения: первое на языке сложения, второе на языке умножения. Передайте листок соседу по парте, и пусть он переведет первое выражение на язык умножения, а второе — на язык сложения. Проверьте, правильно ли он выполнил задание. ▲

**Урок 54**

## УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. КАК ПЛАНИРОВАТЬ СВОИ ДЕЙСТВИЯ

Задача 1. В воскресенье Коля запланировал сходить в музей. Расстояние от дома до музея 1 км. Коля знает, что туда он пойдет со скоростью 4 км/ч, а обратно, усталый,— со скоростью 3 км/ч. В музее он планирует пробыть 2 ч, а вернуться хочет к 14 ч, чтобы успеть посмотреть мультфильм по телевизору. Когда самое позднее Коля должен выйти из дому?

Давайте рассуждать.

| | |
|---|---|
| Сколько времени уйдет у Коли на дорогу до музея? | Делим расстояние на скорость: $1:4=\frac{1}{4}$ (ч). |
| Сколько времени уйдет на обратную дорогу? | Действуем так же: $1:3=\frac{1}{3}$ (ч). |
| Сколько времени уйдет на дорогу туда и обратно? | Складываем: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ (ч). |
| Сколько времени уйдет на весь поход в музей? | В музее Коля по плану будет 2 ч, значит, всего времени уйдет $2+\frac{7}{12}$, т. е. $2\frac{7}{12}$ (ч). |

Выразив $2\frac{7}{12}$ ч в минутах, получаем 2 ч 35 мин *(проверьте!)*. Чтобы вернуться к 14 ч, Коля должен выйти из дому не позже ... *(закончите предложение!)*.

Задача 2. Москвич Петров отправился в санаторий. Самолет, на который он взял билет, вылетает в 21 ч 20 мин из аэропорта Домодедово. Регистрация пассажиров в аэропорту начинается за 1,5 ч и заканчивается за 40 мин до вылета. До аэропорта Петров будет ехать 1 ч электричкой от Павелецкого вокзала. В вечернее время электрички в аэропорт отправляются в 18 ч 38 мин, 19 ч 15 мин, 19 ч 41 мин и позднее. От своего дома до Павелецкого вокзала Петров добирается за 30 мин, на вокзал надо прибыть за 15 мин до отправления электрички. Когда самое позднее Петров может выйти из дому?

Давайте рассуждать. Прежде всего надо выяснить, какая электричка годится Петрову. Если он поедет в 19 ч 41 мин, то прибудет в аэропорт в 20 ч 41 мин. В этот момент до вылета останется 39 мин, регистрация закончится, т. е. Петров опоздает. Значит, надо ехать более ранней электричкой. Годится ли та, что отправляется в 19 ч 15 мин? Если Петров поедет на ней, то прибудет в аэропорт в 20 ч 15 мин. В этот момент до вылета останется 1 ч 5 мин, т. е. регистрация еще не закончится. Электричка в 19 ч 15 мин годится!

***Перечитайте конец условия задачи, дайте ответ на вопрос.***

Конечно, тем более годится электричка в 18 ч 38 мин. Тогда у Петрова будет дополнительный запас времени.

? *Сколько времени будет у Петрова от прибытия этой электрички в аэропорт до начала регистрации?*

**Задания**

! **54.1.** Коля закончил выполнять домашнее задание в 16 ч 10 мин. Вечером у него тренировка в спортзале. Коля обдумывает, успеет ли он сходить в кино. В кинотеатре «Луч» ближайший сеанс в 17 ч 00 мин, в кинотеатре «Мир» — в 16 ч 30 мин. Фильм идет 1 ч 25 мин. От дома до каждого кинотеатра идти 10 мин, до спортзала — 15 мин. а) Сможет ли Коля посетить какой-нибудь кинотеатр, вернуться домой и успеть на тренировку, если она начинается в 18 ч 00 мин? Если да, то какой кинотеатр? б) Ответьте на те же вопросы при условии, что начало тренировки в 18 ч 30 мин.

**54.2.** Врач в санатории рекомендовал Петрову проходить каждый день пешком 10 км. Петров ходит со скоростью 4,5 км/ч и до обеда на ходьбу тратит 1,5 ч. Чтобы выполнить дневную норму, он ходит еще перед ужином до 18 ч 00 мин. а) Когда самое позднее должен Петров начинать ходьбу перед ужином? (Совет: результат вычисления разумно округлите.) б) Если он начнет ходьбу в 16 ч 00 мин, то на сколько процентов он перевыполнит свою дневную норму? Ответ округлите до 1%.

**54.3.** Аня и ее родители любят пить чай. За день Анин папа выпивает 4 стакана чаю, мама — 3 стакана, Аня — 2 стакана. Воду для чая предварительно отстаивают в банке. Папа пьет чай без сахара, мама кладет на стакан 1 чайную ложку сахарного песку, Аня — 2 чайные ложки. а) Объем одного стакана 0,25 л. Вместится ли необходимая на день вода для чая в трехлитровую банку? А в двухлитровую? б) Одна чайная ложка вмещает 10 г сахарного песку. Сколько сахара для чая надо купить, чтобы его хватило на 4 недели? в) Ответьте на вопросы из а) и б) при измененном условии: к Ане приехала погостить на 4 недели бабушка, которая выпивает за день 5 стаканов чаю и кладет в стакан 2 чайные ложки сахарного песку.

**54.4.** а) Группа туристов из 13 мужчин и 8 женщин отправляется на неделю в поход в горы. Каждый мужчина за день съедает 400 г хлеба, женщина — 300 г. Масса одной буханки хлеба 1 кг. Сколько хлеба должна взять с собой группа? б) Решите такую же задачу, если в группе 7 мужчин и 4 женщины, но группа идет на 2 недели.

**54.5.** Экипаж космического корабля состоит из двух мужчин и одной женщины. Они будут находиться на орбите 40 дней. Каждому мужчине на день требуется 1,5 л питьевой воды, женщине — 1,4 л. Космонавты возьмут полуторный запас питьевой воды. Сколько литров питьевой воды возьмут космонавты?

**54.6.** На ежегодный ремонт одного старого станка завод тратит в среднем 8 000 000 р. Более совершенный новый станок работает в 2 раза производительней старого и будет работать без ремонта 5 лет. Но стоит дорого — 75 000 000 р. Что обойдется заводу дешевле — ремонтировать два старых станка или заменить их одним новым?

**54.7*.** Отправляясь на месяц на гастроли, клоун объявил, что приготовил для себя 100 колпаков. Дело в том, что по ходу каждого представления 3 колпака должны быть подарены публике. На гастролях по понедельникам будет выходной, по воскресеньям будет 3 представления, в остальные дни по одному представлению. Гастроли начнутся первого числа. Хватит ли клоуну запасенных колпаков? (Исследуйте зависимость ответа от того, в каком месяце будут проходить гастроли и какой день недели будет первого числа.)

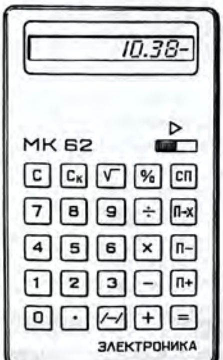



Рис. 47

Урок 55

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 5

Некоторые из предлагаемых ниже заданий вы по указанию учителя будете выполнять на микрокалькуляторе. Поэтому мы расскажем сейчас, как набирают на микрокалькуляторе рациональные числа. Но прежде нужно вспомнить, какие числа вы уже умеете набирать на микрокалькуляторе. Тому, кто забыл, мы советуем перечитать в уроке 60 учебника 5-го класса ту часть объяснительного текста, около которой нарисован микрокалькулятор.

Вы знаете, что на микрокалькуляторе можно набирать положительные десятичные дроби и число нуль. Отрицательные десятичные дроби тоже можно набирать (рис. 47). Чтобы набрать на микрокалькуляторе отрицательное число, набирают его модуль, а затем нажимают клавишу $\boxed{/-/}$. Она называется клавишей изменения знака числа. Если, например, набрать число 10,38 и нажать клавишу $\boxed{/-/}$, то на индикаторе появится число —10,38. Правда, на некоторых микрокалькуляторах оно изобразится непривычным для вас образом: знак «минус» будет стоять не в начале числа, а в конце. Если затем снова нажать клавишу $\boxed{/-/}$, то на индикатор вернется число 10,38. Значит, при нажатии клавиши $\boxed{/-/}$ число на индикаторе микрокалькулятора заменяется противоположным ему числом.

*Наберите на микрокалькуляторе число —3,27; —0,571; —2,03. Пронаблюдайте действие клавиши* $\boxed{/-/}$, *нажав ее несколько раз.*

Действия над отрицательными числами выполняются на микрокалькуляторе так же, как и над положительными.

**55.1. (У)** Вычислите:

| | | |
|---|---|---|
| а) $26-(-5)$; | д) $(-3)-(-8)$; | и) $(-3)^2$; |
| б) $(-8)-14$; | е) $(-4)+(-18)$; | к) $54:(-9)$; |
| в) $14+(-6)$; | ж) $2\cdot(-8)$; | л) $(-36):3$; |
| г) $19-26$; | з) $(-8)\cdot(-6)$; | м) $(-72):(-8)$. |

**55.2.** Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{7}\right):(-3)-6\frac{1}{13}:\left(-6\frac{1}{13}\right)$;

б) $\left(4\frac{3}{4}-7\right)\cdot1\frac{1}{3}+\left(4\frac{2}{5}-6\right):1\frac{1}{3}$;

в) $\left(7-8\frac{4}{5}\right)\cdot2\frac{7}{9}-15:\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right)$;

г) $\left(-\frac{3}{14}\right)\cdot\frac{7}{9}-\frac{8}{15}:\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{12}$;

д) $(-1,5):(-0,5)+2,7:(-1,8)$;

е) $(-3,6)\cdot(-2,5)+12,96:(-1,6)$;

ж) $(0,8-2,86:2,6)\cdot(3,04-7,02)$.

**55.3. (У)** а) Вычислите значение выражения $|x|:x$ при $x=2$; 3; 0,5; $-1,7$; $2\frac{2}{7}$; $-3\frac{7}{13}$. б)* Какой вывод о значениях выражения $|x|:x$ можно сделать?

**55.4.** **(У)** Не выполняя действий, скажите, какой знак имеет значение числового выражения:

а) $(-3{,}1)\cdot(-2{,}1)\cdot(-1)\cdot 2{,}6\cdot(-5{,}2)\cdot(-1{,}1)\cdot 4{,}1\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot 0{,}2$;

б) $(-1{,}2):6{,}3\cdot(-3{,}7):(-2{,}5)\cdot 1\frac{7}{15}:\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-7):(-3{,}2)$;

в) $6{,}8\cdot(-2{,}3)\cdot(-3{,}7)\cdot(-4{,}2):6{,}3:(-2{,}9):(-1):(-5)$;

г) $(-3{,}4)\cdot(-7{,}2):6{,}1:(-3{,}2):(-2)\cdot(-1{,}5)\cdot(-3{,}9):\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**55.5.** Решите уравнение:

а) $3{,}2\cdot x+(-1{,}2)\cdot x+2{,}7=-4{,}9$;
б) $(-5{,}6)\cdot y+2{,}9\cdot y-3{,}86=-9{,}8$;
в)* $-z-2{,}8\cdot z+3{,}7=-0{,}14$;
г)* $3{,}5\cdot x-(-3{,}1)\cdot x-1{,}9=-1{,}73$;
д) $-1{,}9\cdot y+3{,}5\cdot y+2{,}8=4{,}2$;
е) $2{,}5\cdot z+(-3{,}4)\cdot z-5{,}2=-3{,}94$.

**55.6.** **(У)** Сумма трех слагаемых равна одному из них. Как связаны между собой два других слагаемых?

**55.7.** **(У)** Произведение трех чисел отрицательно. Какими могут быть знаки множителей?

**55.8.** Запишите сумму всех целых чисел, начиная с самого большого двузначного отрицательного числа и кончая самым маленьким двузначным положительным числом. Устно вычислите ее.

**55.9.** **(У)** Верно ли, что $|a|+a=2\cdot a$ для любого числа $a$?

**55.10.** **(У)** Объясните равенство $(-1)^3=-1$. Есть ли еще какое-нибудь число, куб которого равен самому числу?

**55.11.** При увеличении температуры на 1° столбик ртути в термометре поднимается на 2 мм. При температуре 0° длина столбика ртути 37 мм. Запишите формулой зависимость длины $l$ столбика ртути от температуры $t$. Найдите значение $l$ при $t=+6°$; $-3°$; $+20°$; $-12°$; $0°$.

■ **55.12.** По своему дневнику наблюдений природы вычислите среднемесячную температуру в вашей местности за январь, февраль, март. Ответ округлите до целых градусов.

▲ **55.13.** Понижение среднемесячной температуры на 1° увеличивает расход топлива для обогрева жилых помещений на 0,5%.
а) На отопление 16-этажного дома в ноябре потребовалось 83 т топлива. Синоптики предсказывают, что среднемесячная температура в декабре будет на 8° ниже, чем в ноябре. Сколько тонн

топлива надо запасти для этого дома на декабрь? б) В задаче 55.12 вы нашли среднемесячную температуру в январе и феврале. В какой из этих месяцев расход топлива был больше и на сколько процентов? ▲

**55.14. (У)** а) Смекалкин спросил младшего брата: «Какой знак имеет квадрат отрицательного числа?» Брат удивился: «Как же ответить на этот вопрос, если неизвестно, какое именно число?!» Смекалкин объяснил, что ответ здесь не зависит от выбора числа. Ответьте на вопрос Смекалкина.

б) Какой знак имеет куб отрицательного числа? А четвертая степень? А пятая?

▲ в)* Какое общее правило можно сформулировать? ▲

**55.15.** *(Загадки.)* а) Младший брат Смекалкина загадал загадку: «Какое число в квадрате равно 9?» Смекалкин объяснил, что среди натуральных чисел есть только одна отгадка — число 3. Но среди отрицательных чисел есть еще одна отгадка. Какая именно? б) Какие числа могут скрываться за буквой $a$, если $a^2=25$? А если $a^2=121$?

**55.16.** Клоун сказал, что для любых чисел $a$ и $b$ выполняются неравенства $|a+b|>|a|$ и $|a-b|<|a|$. Публика смеялась: все понимали, что это не всегда так. Объясните почему.

## § 6. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

В 5-м классе вы познакомились с десятичными дробями. При выполнении арифметических действий они удобнее обыкновенных дробей. Вы помните, что для превращения обыкновенной дроби в десятичную числитель дроби делят на знаменатель. Однако может случиться так, что это деление будет продолжаться без конца. Как узнать, закончится ли деление? Что будет получаться, если деление придется выполнять без конца? Для чего может пригодиться результат такого деления? На эти вопросы мы и ответим в § 6.

**Урок 56**

### ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ

Однажды Смекалкин решил записать $\frac{2}{3}$ десятичной дробью. Он знал, что для этого нужно числитель делить на знаменатель, и начал выполнять деление. Вычислив несколько цифр частного, Смекалкин увидел закономерность, с которой эти цифры появляются.

$$\begin{array}{r|l} -\,2 & 3 \\ \cline{2-2} 18 & 0{,}666\ldots \\ \cline{1-1} -\,20 & \\ 18 & \\ \cline{1-1} -\,20 & \\ 18 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ \ldots & \end{array}$$

?

*А вы догадались, какие цифры будут все время появляться?*

Видно, что в частном будут получаться одни шестерки.

*Но ведь так можно продолжать без конца!*

Вот-вот. Поэтому получающуюся дробь и называют **бесконечной десятичной дробью.** Записать ее полностью невозможно. Так что где-то придется оборвать запись и поставить многоточие. Надо только, чтобы была понятна закономерность, с которой цифры идут друг за другом. Для дроби $\frac{2}{3}$ такую закономерность мы обнаружили выше. Можно записать: $\frac{2}{3}=0{,}666666\ldots$ .

Бесконечные десятичные дроби — это тоже числа. Их можно складывать и вычитать, умножать и делить, сравнивать между собой. Сравнивают их по тому же правилу, что и конечные (т. е. обычные) десятичные дроби, а именно поразрядно. Например, $10{,}63186318\ldots>10{,}631846318\ldots$ *(объясните почему).*

---

Давайте отбросим в бесконечной десятичной дроби все цифры, начиная с некоторого разряда. У нас получится конечная десятичная дробь. Например, из дроби 0,666666... можно получить конечные дроби 0,6; 0,66; 0,666; 0,6666; ... . Говорят, что каждая из них — **приближение с недостатком** данной бесконечной десятичной дроби. Из этих приближений можно выстроить бесконечную цепочку неравенств: $0{,}6<0{,}66<0{,}666<0{,}6666<\ldots$ . Каждая дробь в цепочке меньше данного числа 0,666666..., и, чем больше цифр содержит дробь, тем она ближе к этому числу.

Теперь снова отбросим в бесконечной десятичной дроби все цифры, начиная с некоторого разряда, но последнюю цифру увеличим на единицу. Тогда мы опять получим конечную десятичную дробь. Она будет больше данной бесконечной десятичной дроби. Ее называют **приближением с избытком**. Например, для числа 0,666666... дроби 0,7; 0,67; 0,667; ... — приближения с избытком. Каждая из этих дробей больше числа 0,666666..., и, чем больше цифр содержит дробь, тем она ближе к этому числу.

6—1729

Итак, что же мы поняли? Вот что: **чем больше цифр взято в приближении данного числа, тем ближе получающаяся конечная десятичная дробь к данному числу.**

Помня, что $\frac{2}{3}=0,666666...$, мы можем получить много приближенных равенств. Несколько из них записано в следующей таблице, где указано, с точностью до каких долей получается каждое приближение.

| Приближение | С точностью | | |
|---|---|---|---|
| | до десятых | до сотых | до тысячных |
| С недостатком | $\frac{2}{3}\approx 0,6$ | $\frac{2}{3}\approx 0,66$ | $\frac{2}{3}\approx 0,666$ |
| С избытком | $\frac{2}{3}\approx 0,7$ | $\frac{2}{3}\approx 0,67$ | $\frac{2}{3}\approx 0,667$ |

**Вопросы и задания**

? **56.1.** Как получается приближение бесконечной десятичной дроби с недостатком; с избытком?

! **56.2.** Запишите обыкновенную дробь бесконечной десятичной дробью, вычислив шесть цифр после запятой. Объясните (устно), с какой закономерностью идут цифры в получающейся десятичной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{11}$; в) $\frac{5}{27}$; г) $\frac{43}{111}$; д) $\frac{16}{9}$; е) $\frac{37}{18}$; ж) $2\frac{8}{15}$; з) $9\frac{2}{7}$.

**56.3.** Сравните числа:

а) 3,737373... и 3,767676...;
б) 6,821821... и 6,8218;
в) $-0,1845$ и $-0,184184184...$;
г) 7,315315... и 7,315316.

**56.4.** Сравните числа:

а) 0,545545545... и $\frac{6}{11}$;
б) $-2\frac{2}{9}$ и $-2,21221221...$;
в) $7\frac{8}{13}$ и 7,65765765...;
г) 1,2121212... и $1\frac{7}{33}$.

**56.5.** Расположите числа в порядке возрастания: 0,466; $\frac{7}{15}$; 0,4636363...; 0,463736; 0,4656565... .

**56.6.** **(У)** Объясните, с какой закономерностью идут цифры в бесконечной десятичной дроби:

а) 0,383838383...; ▲ г)* 0,1010010001000010...;

б) 42,2912912912...; д)* 1,252255222555222255..;

в) 5,328717717717...; е)* 0,410414104141410414... . ▲

Назовите в каждом примере три последующие цифры.

Урок 57

## КАК УЗНАТЬ, КАКОЙ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБЬЮ МОЖЕТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНО РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Вы давно знаете, что некоторые обыкновенные дроби записываются в виде конечных десятичных дробей. Например, $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{7}{4}=1{,}75$; $\frac{14}{125}=0{,}112$. В уроке 56 выяснилось, что есть обыкновенные дроби, которые можно выразить только бесконечной десятичной дробью. Нельзя ли сразу, глядя на дробь, сказать, какая десятичная дробь из нее получится — конечная или бесконечная? Оказывается, можно. Мы сейчас объясним это.

Если знаменатель дроби — степень числа 10, то такую дробь легко записать в виде десятичной.

*Запишите десятичными дробями* $\frac{5}{100}$; $\frac{117}{1000}$; $\frac{8095}{1\,000\,000}$.

На какие простые множители разлагается степень числа 10? Ясно, что этими множителями могут быть только числа 5 и 2. Ведь $10=2\cdot5$; $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$; $1000=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5$ и т. д. Заметьте, что в каждом произведении здесь количество множителей 2 и 5 одинаково. Значит, знаменатель обыкновенной дроби будет степенью числа 10, если его простые множители — числа 2 и 5, причем их поровну.

А если количество множителей 2 и 5 в знаменателе неодинаково? Например, $\frac{3}{80}=\frac{3}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5}$. Домножим числитель и знаменатель на $5\cdot5\cdot5$. Тогда дробь не изменится (помните основное свойство дроби?), но в знаменателе двоек и пятерок станет поровну:

$$\frac{3}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{3\cdot5\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{375}{10\,000}=0{,}0375.$$

Точно так же можно поступить с любой дробью, у знаменателя которой простые множители — только числа 2 и 5. Вывод:

Если в знаменателе обыкновенной дроби нет простых множителей, кроме 2 и 5, то она записывается конечной десятичной дробью.

Можно ли дробь $\frac{3}{6}$ записать конечной десятичной дробью?

Можно: $\frac{3}{6}=0{,}5$. А ведь у знаменателя 6 есть простой множитель 3. Но легко заметить, что эту дробь можно сократить; получится $\frac{1}{2}$. Множитель 3 в знаменателе исчез!

А если в знаменателе дроби никаким сокращением нельзя избавиться от простых множителей, отличных от 2 и 5? Тогда ясно, что такую дробь не удастся записать конечной десятичной дробью. Итак:

Если в знаменателе несократимой обыкновенной дроби имеются простые множители, отличные от 2 и 5, то эту дробь можно выразить лишь бесконечной десятичной дробью.

**Вопросы и задания**

**57.1.** Какую обыкновенную дробь можно записать конечной десятичной дробью?

**57.2.** Какую несократимую обыкновенную дробь нельзя записать конечной десятичной дробью? Какой десятичной дробью в этом случае ее можно выразить?

**57.3.** **(У)** Не выполняя деления, скажите, конечной или бесконечной десятичной дробью можно выразить данную обыкновенную дробь:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{13}{26}$; д) $\frac{11}{49}$; е) $\frac{17}{20}$; ж) $\frac{31}{80}$; з) $\frac{8}{75}$; и) $\frac{2}{6}$; к) $\frac{6}{90}$; л) $\frac{1}{123}$; м) $\frac{33}{576}$; н) $\frac{562}{1344}$; о) $\frac{942}{1344}$.

**57.4.** Приведите дробь к знаменателю, являющемуся степенью числа 10:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{11}{25}$; в) $\frac{15}{16}$; г) $\frac{13}{49}$; д) $\frac{60}{125}$; е) $\frac{45}{72}$; ж) $\frac{49}{245}$.

**57.5.** Выполните действия. (Совет: там, где возможно, замените обыкновенные дроби десятичными, а в остальных примерах, наоборот, десятичные дроби замените обыкновенными.)

а) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0{,}3\right):0{,}6;$ в) $9{,}6\cdot 2\frac{1}{2}-\left(2\cdot 125-1\frac{5}{12}\right):\frac{1}{4};$

б) $\left(\frac{9}{25}-2\cdot 18\right):\left(3\frac{4}{5}+0{,}2\right);$ г) $\frac{5}{18}-1{,}456:\frac{7}{25}+4{,}5\cdot\frac{4}{5}.$

**57.6.** Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}+0{,}8-1\frac{3}{5}\right)\cdot\left(2{,}3+4\frac{7}{25}-1{,}28\right);$

б) $\left(3\frac{1}{4}+0{,}25-1\frac{5}{24}\right):\left(3\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}+0{,}75\right):1\frac{19}{36};$

в) $-12\frac{3}{80}+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right):(-0{,}8):(-2);$

г) $5:\left(-\left(-\frac{1}{12}\right)\right):\left(\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}:(-2)\right)+1\frac{1}{3}.$

▲ **57.7*.** Клоун предложил в слове «шалаши» каждую букву заменить цифрой так, чтобы выполнялось равенство ш:а=л,аши (одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные — разными). Сделайте то, что предложил клоун. ▲

Урок 58

## ЗАЧЕМ НУЖНЫ БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Результаты измерений величин часто записывают конечными десятичными дробями. Но оказывается, что не всегда длина отрезка выражается конечной десятичной дробью. Чтобы показать вам, как это может произойти, мы расскажем об одном знаменитом открытии. Его давным-давно, в VI в. до н. э., сделал греческий математик Пифагор.

Представьте, что дан квадрат со стороной 1 м и нужно измерить длину $d$ его диагонали $AB$ (рис. 48, *а*). Если к диагонали приложить большую линейку, то сразу будет видно, что $d\approx 1{,}4$ м. В действительности точка $B$ попадет между черточками, обозначающими 1,4 м и 1,5 м, т. е. выполняется двойное неравенство 1,4 м$<d<$1,5 м.

Используя сантиметровые деления, можно увидеть, что выполняется более точное неравенство 1,41 м$<d<$1,42 м. Если же на линейке есть и миллиметровые деления, то мы обнаружим, что 1,414 м$<d<$1,415 м. Это видно на рисунке 48, *б*, где в

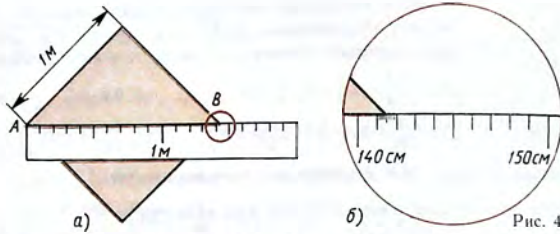


Рис. 48

большом круге показано увеличенное изображение маленького круга. Давайте представим, что на нашей линейке есть сколь угодно мелкие деления, т. е. каждый миллиметр разделен на 10 новых равных частей, каждая новая часть — на 10 других и т. д. без конца.

В каком случае длину отрезка $AB$ удалось бы записать конечной десятичной дробью? Вот в каком: если бы отрезок содержал целое число каких-нибудь мелких делений. Тогда точка $B$ попала бы на черточку, которой заканчивается одно из таких делений. Но в нашем случае точка $B$ никогда не попадет на черточку, какими бы мелкими ни были деления! До этого и додумался когда-то Пифагор.

Продолжая измерять, мы обнаружили бы, что выполняются такие двойные неравенства:

$$1{,}4142 \text{ м} < d < 1{,}4143 \text{ м},$$
$$1{,}41421 \text{ м} < d < 1{,}41422 \text{ м},$$
$$1{,}414213 \text{ м} < d < 1{,}414214 \text{ м},$$
$$1{,}4142135 \text{ м} < d < 1{,}4142136 \text{ м}$$

и т. д. Но это означает, что числовое значение $d$ выражается бесконечной десятичной дробью 1,4142135... .

То, что $d$ нельзя записать конечной десятичной дробью, вы сможете доказать в 8-м классе.

---

В 5-м классе вы познакомились с числом $\pi$. Его приближенное значение с точностью до сотых вы знаете *(назовите его!)*.

Число $\pi$ тоже можно выразить только бесконечной десятичной дробью. Вот как выглядит число $\pi$ с первыми десятью знаками после запятой: $\pi = 3{,}1415926535...$ .

---

▲ Решая задачу 56.2, вы сформулировали закономерности, с которыми идут цифры в записях полученных вами десятичных дробей. Посмотрите свои записи. Они выглядят, скорее всего, так:

а) $\frac{1}{3}=0{,}333333...$; г) $\frac{43}{111}=0{,}387387...$;

б) $\frac{1}{11}=0{,}090909...$; д) $\frac{16}{9}=1{,}777777...$;

в) $\frac{5}{27}=0{,}185185...$; е) $\frac{37}{18}=2{,}055555...$ .

Легко заметить, что в каждом примере одна цифра или группа цифр начинает повторяться с некоторого места. Такую повторяющуюся группу цифр называют **периодом бесконечной десятичной дроби,** а саму дробь называют **периодической.** Конечную десятичную дробь тоже можно считать периодической — ее период состоит из нуля. Например, $3{,}7=3{,}70000000...$ .

*А всякое ли число можно записать периодической дробью?*

Это очень интересный вопрос. В старших классах вы докажете, что каждое рациональное число можно записать периодической десятичной дробью. И наоборот, если число записано периодической дробью, то оно рациональное. Но, кроме рациональных чисел, есть еще и другие числа. Именно это обнаружил Пифагор. Он доказал удивительную вещь: оказывается, длину диагонали единичного квадрата нельзя записать рациональным числом! А бесконечной десятичной дробью ее записать можно (см. начало этого урока). Точно так же нельзя записать периодической дробью число $\pi$. ▲

**Задания**

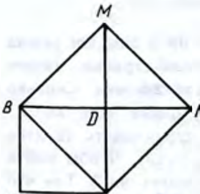


Рис. 49

! **58.1. (У)** На рисунке 49 в некотором масштабе изображен квадрат $ACBD$ со стороной 1 м. а) Чему равна площадь квадрата $ABMN$? б) Обозначим буквой $d$ длину диагонали $AB$. Чему равно значение величины $d^2$?

**58.2.** Катеты прямоугольных треугольников в углах большого квадрата на рисунке 50 имеют длины 1 см и 2 см. Измерьте длину $a$ гипотенузы одного треугольника. Чему равно $a^2$?

**58.3. (У)** Рассмотрите рисунок 50. Догадайтесь, как, не измеряя, найти: а) площадь одного

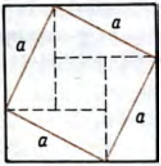



Рис. 50

треугольника; б) площадь маленького (пунктирного) квадрата; в) площадь большого квадрата. г)* Найдите площадь среднего квадрата; это точное значение величины $a^2$ из задания 58.2. Чему оно равно? Сравните с ответом в 58.2.

**58.4.** а) Греческий математик Архимед в III в. до н. э. обнаружил, что для числа $\pi$ выполняется двойное неравенство $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. Проверьте это неравенство. (Совет: выразите числа $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$ бесконечными десятичными дробями, вычислив для каждого из них четыре цифры после запятой.)

б) Индийский математик Ариабхата в V в. писал: «Прибавь 4 к 100, умножь на 8 и прибавь ко всему этому 62 000. То, что получишь,— приближенное значение длины окружности, если ее диаметр 20 000». Найдите приближение числа $\pi$, указанное Ариабхатой. Какое это приближение (с недостатком или с избытком) и с какой точностью?

в) Китайский математик Цзу Чунчжи в V в. предложил для $\pi$ приближенное значение $\frac{355}{113}$. Вычислите первые восемь цифр десятичной дроби, получающейся при делении 355 на 113. Сколько одинаковых цифр у этого приближения и у числа $\pi$?

▲ **58.5. (У)** Определите, какие из десятичных дробей, перечисленных в задании 56.6, периодичны, а какие нет. Ответ объясните. ▲

Урок 59

## УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. КОГДА В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ДАННЫХ НЕДОСТАТОЧНО

Задача 1. Юре дали почитать книгу на 3 дня. Он решил прочитывать каждый день одно и то же число страниц. Читает Юра со скоростью в среднем 1 страница за 2,5 мин. Сколько времени он будет тратить ежедневно на чтение этой книги?

Давайте рассуждать. Если Юра будет прочитывать за день $a$ страниц, то на их чтение потратит $2{,}5\cdot a$ (мин). Чтобы найти число $a$, нужно число страниц в книге разделить на 3. Так что для решения задачи требуется знать число страниц в книге.

? *Дано ли это в условии задачи?*

Нет, не дано. Видим, что данных в условии недостаточно и, значит, решить задачу с таким условием нельзя. Такие задачи с неполным условием называются **неопределенными.**

Чтобы задача стала определенной, нужно дополнить ее условие недостающими данными. В задаче 1 таким данным должно быть число страниц в книге. Давайте решим несколько вариантов этой задачи с дополненным условием.

а) В книге 150 страниц.

*Решите задачу 1 в этом варианте устно. Выразите ответ в часах и минутах.*

б) В книге 200 страниц.

Решение. Чтобы узнать, сколько страниц будет прочитывать Юра за день, разделим 200 на 3. Получится $66\frac{2}{3}$ *(проверьте!)*. В уроке 56 мы выразили $\frac{2}{3}$ бесконечной десятичной дробью 0,666... . Так что $66\frac{2}{3}=66{,}666...$ . В задаче 1 особая точность не нужна, поэтому будет разумно округлить найденное число до целых. Получим приближенное равенство: $66\frac{2}{3}\approx 67$. Можно считать, что Юра ежедневно должен прочитывать 67 страниц. Сколько времени он на это потратит? Умножаем: $2{,}5\cdot 67=...$ .

*Выполните умножение. Округлите результат до целых. Найденный ответ (в мин) выразите затем в часах и минутах.*

Задача 2. Игорь купил книжку за 12 000 р., а потом еще два одинаковых блокнота. Сколько денег у него осталось?

*Каких данных недостает в условии?*

Легко понять, что здесь недостает двух данных: 1) цены одного блокнота; 2) первоначальной суммы денег у Игоря.

*Решите задачу 2 (устно) в каждом из следующих вариантов:*
*а) блокнот стоит 5000 р., а у Игоря было 23000 р.;*
*б) блокнот стоит 8000 р., а у Игоря было 28000 р.*

На практике неопределенные задачи встречаются нередко. Чтобы применить к практической задаче математику и решить задачу, нужно хорошенько продумать ее условие и понять, достаточно ли в нем данных. Если данных недостаточно, то надо постараться дополнить условие необходимыми данными.

В задания к этому уроку мы включили несколько таких неопределенных задач. Прочитав условие каждой задачи, прежде всего подумайте, достаточно ли в нем данных; если нет, то каких именно данных недостает. Затем дополните условия нужными данными: либо придумайте их (правдоподобно), либо спросите у взрослых, какими могут быть эти данные, либо получите сведения из подходящих книг.

**Задания**

**59.1.** Определите среднюю скорость своего чтения. Представьте, что вам дали почитать книгу в 320 страниц. а) За сколько дней вы ее прочитаете, если будете читать 1,5 ч каждый день? б) Если книгу необходимо прочитать равными порциями за 3 дня, то сколько времени придется ежедневно тратить на чтение?

**59.2.** На автомашине нужно проехать по шоссе 400 км, сделав две остановки: для заправки бензином и для обеда. Сколько времени отнимет поездка?

**59.3.** С двух полей собрали урожай пшеницы: с одного 360 т, с другого 400 т. На каком поле урожайность выше?

**59.4.** Изучая географию, вы узнали, что температура воды в морях и океанах понижается с глубиной. Какая будет температура на глубине 3000 м, если на глубине 1000 м она 15°? (Совет: недостающие данные можно найти в учебнике «Физическая география».)

**59.5.** На капустной грядке растет 20 кочанов. Их раз в день поливают водой, 60% которой капуста затем испаряет. Сколько воды надо на ежедневный полив этой капустной грядки? (Совет: данные о количестве воды, испаряемой одним кочаном, можно найти в книгах по ботанике.)

**59.6.** В лондонский магазин зашел американец, у которого было 54 английских фунта и 60 долларов. Ему понравился альбом с фотографиями, стоящий 95 фунтов. Хватит ли американцу денег на покупку альбома, если он обменяет в банке доллары на фунты?

**59.7.** Представьте, что 20 апреля в 6.00 запущен очередной спутник. Сколько оборотов вокруг Земли сделает он до полудня 1 мая?

**59.8.** Придумайте задачу с недостающими данными и предложите соседу по парте решить ее. Обсудите с ним его решение.

**59.9*.** Открывая 1-е отделение, клоун объявил, что позавчера в цирк привезли несколько обезьянок, вчера привезли еще столько же обезьянок, а сегодня еще одну. Половина всех обезьянок выступит в 1-м отделении, половина — во 2-м. «Сколько обезьянок выступит в каждом отделении?» — спросил клоун. Публика смеялась: все понимали, что на вопрос клоуна ответить нельзя. Как ни добавляй здесь недостающие данные, общее число обезьянок не разделить на две равные части. Объясните почему. (Совет: обозначьте буквой число обезьянок, привезенных в первый раз.)

**Урок 60**

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 6

**60.1.** Выразите число бесконечной десятичной дробью, вычислив семь ее цифр. Объясните (устно), с какой закономерностью идут цифры в получающейся десятичной дроби.

а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{7}{11}$; в) $\frac{12}{37}$; г) $\frac{4}{3}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{25}{22}$; ж) $16\frac{6}{45}$; з) $\frac{41}{333}$.

**60.2.** Найдите какую-нибудь конечную десятичную дробь, расположенную между двумя данными числами:

а) $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{1}{6}$; в) $2\frac{7}{12}$ и $2\frac{5}{9}$;

б) $-\frac{5}{14}$ и $-\frac{1}{3}$; г) $-1\frac{2}{11}$ и $-1\frac{1}{6}$.

(Совет: выразите каждое число бесконечной десятичной дробью. Подумайте, сколько цифр после запятой достаточно вычислить в каждом примере.)

**60.3.** Найдите значение выражения:

а) $5\cdot(14{,}7:\left(-0{,}75-0{,}7:2\frac{1}{3}\right)-0{,}15)-101{,}26$;

б) $-5{,}13:\left(5\frac{5}{28}-1\frac{8}{9}\cdot1{,}25+1\frac{16}{63}\right)$;

в) $\left(3\frac{1}{3}\cdot1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{62}{75}-\frac{4}{25}\right)$;

г) $\left(-0{,}5-\frac{3}{4}\right):(-3)+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right):(-2)$;

д) $\left(\frac{2}{25}-1{,}008\right):\frac{4}{7}:\left(\left(3\frac{1}{4}-6\frac{5}{9}\right)\cdot2\frac{2}{17}\right)$.

**60.4*. (У)** Выясните, с какой закономерностью идут цифры в десятичной дроби: а) 0,123456789101112...; б) 0,1491625364964...; в) 0,182764125216... .

▲ **60.5.** Клоун стал вытягивать из рукава длинную ленту с записью

У:Х=И, ПОТЕХА ПОТЕХА ПОТЕХА...

и объявил, что здесь написано частное, выраженное бесконечной периодической дробью. Отгадайте ребус клоуна.

Большая перемена 11

## ВЕЛИКИЕ МАТЕМАТИКИ ДРЕВНОСТИ И СРЕДНЕВЕКОВЬЯ

Мы уже не раз сравнивали работу над учебником с путешествием по стране Математике. Но кто был первооткрывателем замечательной страны, кто проложил дорогу, по которой вы сейчас путешествуете? Это сделали ученые-математики. О самых знаменитых из них мы и расскажем сейчас.

Самые ранние математические открытия были сделаны еще 40 веков назад в Древнем Египте и Вавилоне. К сожалению, история не сохранила имен великих математиков того времени. Первые ученые-математики, сведения о которых дошли до нас, жили в VI в. до н. э. в Древней Греции. Это Фалес (625—547 гг. до н. э.) и Пифагор (570—500 гг. до н. э.). Фалес в молодости много путешествовал и познакомился с математикой Египта и Вавилона. Затем он сам сделал важные математические открытия. Например, именно Фалес установил, что диаметр делит окружность на две равные половины (мы обсуж-

Фалес

Пифагор

дали это в 5-м классе). Он же открыл, что у всякого равнобедренного треугольника равны величины углов при основании. Это свойство вы будете изучать в 7-м классе.

Пифагор обнаружил, что сумма величин углов треугольника равна 180°. Он же нашел три первых совершенных числа: 6, 28 и 496 (мы рассказывали о совершенных числах в заданиях на повторение к § 1). Об одном замечательном открытии Пифагора мы рассказали в уроке 58. Но самое знаменитое открытие Пифагора вам предстоит изучить в 8-м классе. Оно состоит в том, что **площадь квадрата, построенного на гипотенузе любого прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах того же треугольника** (рис. 51). Это свойство именуют теоремой Пифагора.

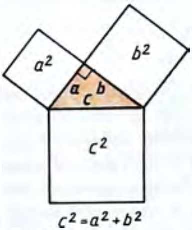


Рис. 51

Своего наивысшего расцвета наука Древней Греции достигла в IV—III вв. до н. э. Знаменитый ученый Е в к л и д (340—287 гг. до н. э.) свел воедино все открытия греческих математиков в 13 книгах под общим заглавием «Начала». Это грандиозное научное сочинение служило энциклопедией математических знаний и учебником на протяжении двух тысячелетий, да и позднее не утратило своего значения. С момента изобретения книгопечатания «Начала» издавались в разных странах более тысячи раз. Многие сведения, упомянутые в нашем учебнике, впервые появились именно в «Началах». Например, свойство, что ряд простых чисел бесконечен (см. урок 12),— это 20-е предложение IX книги «Начал».


Евклид Архимед ал-Хорезми

Величайшим ученым древности был А р х и м е д (287—212 гг. до н. э.). Он открыл ряд важнейших законов природы, о которых вы узнаете в 7-м классе, когда начнется новый учебный предмет «Физика». Но самыми важными были открытия Архимеда в математике. Мы уже рассказывали о том, как точно вычислил Архимед знаменитое число $\pi$ (урок 58, задание 58.4). Он же первым изобрел способ, как с помощью позиционной нумерации записывать любые, сколь угодно огромные натуральные числа. Архимед нашел также площади и объемы многих важных геометрических фигур и тел. Эти открытия Архимеда опередили свое время и были поняты только 19 веков спустя. Вы познакомитесь с ними в старших классах.

В средние века значительных успехов в математике достигли ученые Средней Азии. Величайшим математиком того времени был Мухаммед бен Муса (787—850 гг.), больше известный как а л-Х о р е з м и (т. е. уроженец Хорезма в Узбекистане). Именно его труды способствовали повсеместному распространению индийской позиционной десятичной нумерации. В книге «Об индийском счете» ал-Хорезми изложил правила записи чисел с помощью арабских цифр и правила действий с ними столбиком, знакомые теперь каждому. В XII в. эта книга была переведена на латинский язык и получила широкую известность в Европе. Любопытно, что от латинского написания имени ал-Хорезми возникло впоследствии слово «алгоритм», обозначающее теперь одно из важнейших понятий математики. С этим понятием вы познакомитесь, когда будете изучать предмет «Основы информатики и вычислительной техники».

Вторая знаменитая книга ал-Хорезми посвящена решению уравнений. Она называется «Китаб ал-джебр вал-мукабала», т. е. «Книга о восполнении и противопоставлении». Мы обсудим эти приемы решения уравнений в § 8. И эта книга стала известна европейцам, а от слова «ал-джебр» из ее заглавия произошло слово «алгебра» — название одной из главных частей математики.

Мы рассказали об ученых, заложивших фундамент математики. Математики нового времени воздвигли на этом фундаменте великолепный дворец современной математической науки, верхние этажи которого продолжают расти на наших глазах.

Мысленно обозревая этот дворец, не устаешь восхищаться величием человеческой мысли и смелостью человеческой фантазии!

Большой вклад в развитие математической науки внесли математики нашей страны. О некоторых из них мы расскажем в последней, III большой перемене.

**Задания**

**!**

**II.1.** Древнегреческий историк Геродот рассказывает, что Фалес предсказал солнечное затмение в Малой Азии в 585 г. до н. э. Солнечные затмения повторяются в данной точке Земли каждые 1244 года. Предскажите, в каком году в Малой Азии состоится очередное солнечное затмение. (Совет: учтите, что года с номером 0 не было, поэтому если записать годы до н. э. с помощью отрицательных чисел, то 585 г. до н. э. запишется как —584 г.).

**II.2.** Пифагор был не только знаменитым ученым, но и выдающимся атлетом, победителем Олимпийских игр. Олимпийские игры в Древней Греции проводились каждые 4 года. Первые игры состоялись в 776 г. до н. э., а последние — в 393 г. н. э.

а) Сколько всего раз проводились Олимпийские игры в Древней Греции? (Воспользуйтесь советом к заданию V.I.)

б) Неизвестно, победителем какой именно Олимпиады был Пифагор. Если считать, что он выиграл Олимпийские игры, когда ему было больше 20, но меньше 40 лет, то каким мог быть номер этих игр?

**II.3.** Пифагор называл два натуральных числа **дружественными**, если сумма всех делителей каждого из них равна сумме этих двух чисел. Он же открыл первую пару дружественных чисел. Одно из этих чисел равно 220. Найдите дружественное ему число.

**II.4*.** На вопрос, сколько учеников посещают его школу, Пифагор ответил: «Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме того, есть три женщины». Сколько учеников посещало школу Пифагора?

**II.5.** В IX книге «Начал» Евклид доказал, что если число $2^n-1$ простое, то число $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ будет совершенным. Например, число $2^2-1=3$ простое, значит, число $2^1\cdot(2^2-1)=6$ совершенное.

а) Проверьте, что совершенные числа 28 и 496 также можно получить по формуле Евклида.

б)* С помощью формулы Евклида найдите еще одно совершенное число. (Совет: воспользуйтесь таблицей простых чисел.)

**11.6.** Архимед изобрел подъемное устройство полиспаст, с помощью которого один человек может приподнять и спустить на воду огромный корабль. Полиспаст состоит из одного или нескольких подвижных блоков (на рисунке 52 изображены полиспасты из одного и двух блоков). Применение каждого блока дает двукратный выигрыш в силе. Взрослый человек может приподнять груз массой 40 кг. Сколько блоков должен содержать полиспаст, чтобы с его помощью один человек мог приподнять корабль массой 80 т?

**11.7.** Сиракузский царь попросил Архимеда определить, нет ли примеси серебра в его золотой короне. Решая эту задачу, Архимед и открыл свой знаменитый закон: тело, погруженное в жидкость, теряет в весе столько же, сколько весит вытесненная им жидкость. Известно, что масса 1 $см^3$ золота равна 19,3 г, а масса 1 $см^3$ серебра — 10,5 г. Если объем короны равен 250 $см^3$, а масса — 3 кг 725 г, то сколько процентов золота в ней содержится?

**11.8.** В книге «Об индийском счете» ал-Хорезми предлагает такую задачу: «Если от числа отнять его треть и его четверть, то получится 8. Найдите число». Решите эту задачу.

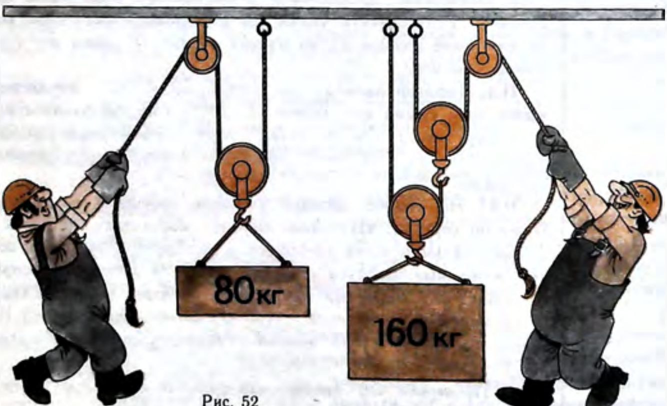



Рис. 52

Глава III

# ПОДГОТОВКА К ИЗУЧЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ В 7-м КЛАССЕ

## § 7. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

В § 4 вы познакомились с координатной прямой. Но координаты бывают нужны для точек не только на прямой, но и на плоскости. Что такое координатная плоскость и как ее используют, вы узнаете в этом параграфе. Координатная плоскость определяется выбором двух перпендикулярных координатных прямых. Поэтому мы начнем параграф с рассказа о том, что такое перпендикулярные прямые. Появятся в параграфе и параллельные прямые. Ну, а подробно изучать параллельные и перпендикулярные прямые вы будете уже в 7-м классе в новом предмете **геометрия.**

Урок 61

### ПЕРПЕНДИКУЛЯР — ВАЖНАЯ ВЕЩЬ В ГЕОМЕТРИИ. СТРОИМ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвернутых угла. Если один из них прямой, то остальные тоже прямые (рис. 53). В этом случае прямые линии называются **перпендикулярными.**

*А бывают перпендикулярные отрезки?*

Да. Вообще можно назвать перпендикулярными любые две линии, лежащие на перпендикулярных прямых. Так что перпендикулярными могут быть два луча, отрезок и прямая и т. п. Часто про перпендикулярные линии говорят, что каждая из них — **перпендикуляр** к другой.

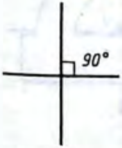



Рис. 53

Изучая геометрические фигуры, вы уже не раз встречались с перпендикулярами. Например, смежные стороны прямоугольника перпендикулярны. Или ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину; любые два из них перпендикулярны друг другу — ведь это смежные стороны прямоугольной грани (рис. 54).

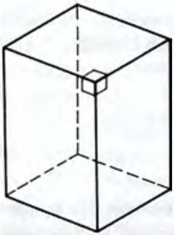


Рис. 54

Как убедиться в том, что две линии перпендикулярны? Надо проверить, что какой-нибудь из углов, образованный ими, прямой. Вы знаете, как это сделать с помощью угольника или транспортира. На практике применяют и другие способы. С древних пор строители проверяли перпендикулярность стены основанию дома с помощью о т в е с а, т. е. грузика на веревке. Отсюда и произошло название перпендикуляра: латинское «перпендикулярис» — «отвесный».

Чтобы построить перпендикуляр к прямой, достаточно построить прямой угол. Это вы умеете делать и с помощью угольника (рис. 55, *а*), и с помощью транспортира (рис. 55, *б*).

Перпендикуляров к данной прямой $b$ можно провести много. Обычно приходится решать такую задачу: построить перпендикуляр, проходящий через заданную точку $M$. Это можно делать теми же инструментами (см. рис. 55).

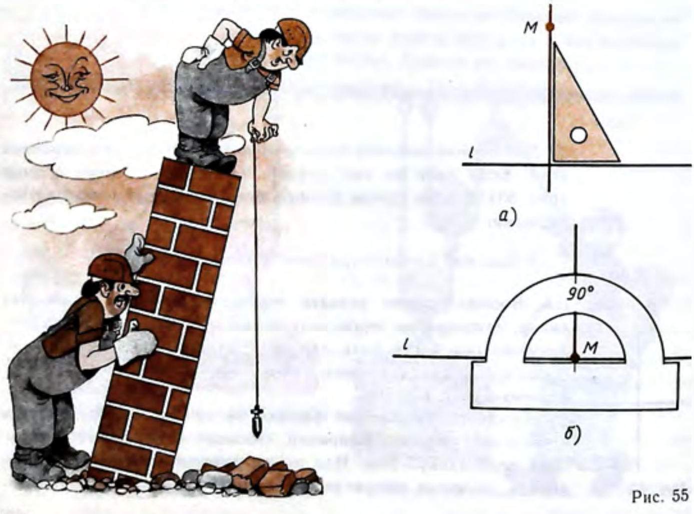



Рис. 55

**Вопросы и задания**

**61.1.** Какие пересекающиеся прямые линии называют перпендикулярными?

**61.2.** В тексте урока мы воспользовались таким свойством пересекающихся прямых линий (рис. 56): если угол $BOC$ прямой, то и углы $BOD$, $DOA$, $AOC$ прямые. Объясните, почему это так. (Совет: вспомните, чему равна величина развернутого угла.)

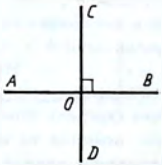



Рис. 56

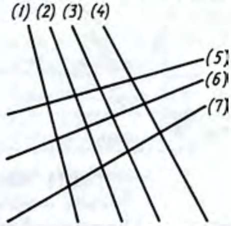



Рис. 57

**61.3.** Определите с помощью угольника или транспортира, какие из прямых на рисунке 57 перпендикулярны.

**61.4.** Начертите в тетради прямую. Отметьте точку $A$, лежащую на прямой, и точку $B$, не лежащую на прямой. а) С помощью транспортира проведите через точку $A$ перпендикуляр к прямой. б) С помощью угольника проведите через точку $B$ перпендикуляр к прямой.

**61.5.** а) Нарисуйте в тетради точку $O$. Проведите через нее две перпендикулярные прямые. б) Отметьте точку $A$, не лежащую на построенных прямых. Проведите через точку $A$ прямые, перпендикулярные уже построенным. в) Скажите, какую фигуру ограничивают все построенные прямые.

**61.6.** Начертите окружность и проведите ее диаметр. Через центр окружности проведите диаметр, перпендикулярный к первому.

**61.7.** Начертите прямую $l$ и нарисуйте точку $M$, не лежащую на ней. а) Проведите через точку $M$ перпендикуляр к прямой $l$. Обозначьте буквой $D$ точку пересечения прямой $l$ и перпендикуляра. б) На прямой $l$ отметьте две точки $A$ и $B$ по разные стороны от точки $D$. Проведите прямые $MA$ и $MB$. в) Измерьте отрезки $MA$, $MB$ и $MD$. Какой из них короче? г) Найдите площадь треугольника $AMB$.

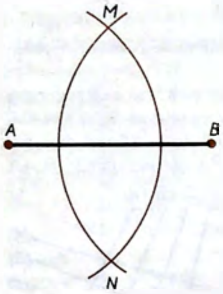



Рис. 58

**61.8.** Начертите треугольник и отметьте точку внутри его. Проведите через эту точку перпендикуляры ко всем сторонам треугольника.

**61.9.** Начертите отрезок $AB$ длиной 4 см. а) Установите раствор циркуля 3 см и начертите дуги окружностей с центрами $A$ и $B$ так, чтобы они пересекались (рис. 58). б) Проведите прямую $MN$. Проверьте, будет ли она перпендикулярна отрезку $AB$. в) Обозначьте буквой $C$ точку пересечения отрезков $AB$ и $MN$. Измерьте отрезки $AC$ и $CB$. Будут ли они равны? г) Начертите отрезок длиной 5 см. Проведите перпендикуляр к нему так, как это описано в пунктах а) и б). Убедитесь, что этот перпендикуляр пройдет через середину отрезка.

**61.10.** Начертите прямую, отметьте на ней две точки и проведите через них перпендикуляры к прямой. Пересекутся ли эти перпендикуляры? Попробуйте объяснить свой ответ.

**61.11. (У)** Клоун заявил, что если даны три прямые, причем первая перпендикулярна второй, а вторая — третьей, то первая тоже перпендикулярна третьей. Публика смеялась: всем было видно, что это не всегда так. Приведите пример, когда то, что сказал клоун: а) не выполняется, б) выполняется.

**Урок 62**

## КАКИЕ ПРЯМЫЕ НАЗЫВАЮТСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ

Если рельсы железнодорожного пути изобразить прямыми линиями (рис. 59), то эти линии будут идти рядом, нигде не пересекаясь,— они параллельны.

Прямые называют **параллельными**, если они лежат в одной и той же плоскости и не пересекаются. Название произошло от греческого «параллелос», что значит «идущий рядом». Как и в случае перпендикулярных линий, можно говорить о параллельных отрезках, лучах и т. п. Две линии называют параллельными, если они лежат на параллельных прямых (рис. 60). Параллельные

Рис. 59

Рис. 60

отрезки встречаются так же часто, как и перпендикулярные. Например, в любом прямоугольнике противоположные стороны параллельны (рис. 61). Во многих городах есть районы с прямоугольной планировкой. На рисунке 62 приведен план части Васильевского острова в С.-Петербурге. Три проспекта и набережная лейтенанта Шмидта параллельны друг другу. Улицы, расположенные на плане вертикально, тоже параллельны друг другу. Все они перпендикулярны проспектам.

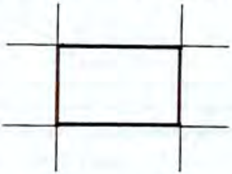


Рис. 61


Рис. 62

Параллельные линии можно обнаружить в разлиновке ваших тетрадей, на шахматной доске и много где еще.

*Укажите сами несколько примеров параллельных линий.*

---

В 5-м классе мы рассказывали, как младший брат Смекалкина пытался нарисовать треугольник с двумя прямыми углами. Конечно, у него ничего не вышло: две стороны, перпендикулярные к третьей, шли рядом, не пересекаясь. Свойство, обнаруженное младшим братом, можно сформулировать так: **две прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные к третьей прямой, параллельны** (рис. 63).

Рис. 63

Рис. 64

Именно это свойство используют как при построении параллельных прямых, так и для проверки их параллельности (рис. 64).

**Вопросы и задания**

**62.1.** Какие прямые называют параллельными?

**62.2.** **(У)** Рассмотрите рисунок 65 и представьте прямые, на которых лежат ребра нарисованного прямоугольного параллелепипеда. а) Какие из этих прямых параллельны? б) Какое самое большое число пар таких параллельных прямых найдено в вашем классе?

**62.3.** Начертите с помощью линейки и угольника четыре параллельные прямые.

**62.4.** Начертите прямую $l$ и точку $M$, не лежащую на ней. Проведите через точку $M$ прямую, параллельную прямой $l$.

**62.5.** Начертите какой-нибудь четырехугольник. Соедините отрезками середины смежных сторон (рис. 66). Проверьте, будут ли параллельны противоположные стороны нового четырехугольника.

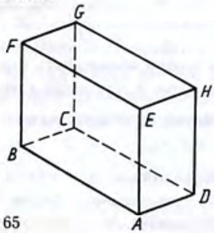



Рис. 65

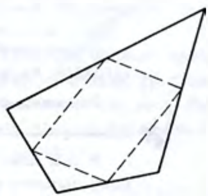


Рис. 66

**62.6.** Начертите квадрат со сторонами 2 см и проведите через его вершины прямые, параллельные диагоналям. Эти прямые ограничивают четырехугольник. а) Какого вида этот четырехугольник? (Совет: измерьте его стороны и углы.) б) Найдите его площадь.

**62.7.** Начертите прямую $l$. Отметьте на ней точки $A$, $B$ и $C$ (рис. 67). Проведите через точку $A$ прямую, перпендикулярную прямой $l$. Обозначьте ее буквой $m$. а) Проведите через точку $B$ прямую $p$, перпендикулярную прямой $l$. Будет ли она параллельна прямой $m$? б) Проведите через точку $C$ прямую $k$, параллельную прямой $p$. Будет ли она перпендикулярна прямой $l$? в) Будет ли прямая $k$ параллельна прямой $m$?

**62.8.** В некотором царстве, в некотором государстве все города имеют прямоугольную планировку. Улицы вытянуты с

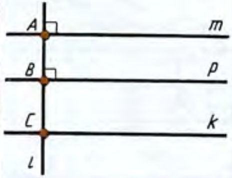



Рис. 67

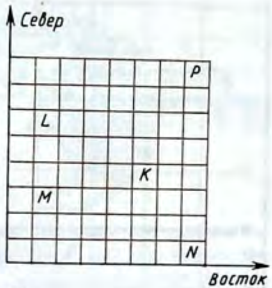



Рис. 68

запада на восток и с юга на север. Главные ворота города расположены в юго-западном углу (см. план на рисунке 68, где каждый квадратик — это квартал). На вопрос «В каком квартале ты живешь?» любой житель отвечает, называя два числа. Например, житель квадрата $M$ говорит: «В квадрате (2; 3)». Это означает, что квадрат $M$ — 2-й на восток и 3-й на север от главного входа. Скажите, как жители города называют квартал, помеченный буквой $K$; $L$; $N$; $P$.

**62.9. (У)** Клоун заявил, что если две прямые параллельны третьей, то они перпендикулярны друг другу. Публика смеялась: всем было видно, что такое свойство не выполняется никогда. Догадайтесь, каким словом следует заменить слово «перпендикулярны» в утверждении клоуна.

**Урок 63**

## ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Из географии вы знаете, что положение точки на Земле можно определить, зная ее географические координаты — долготу и широту. Для этого используют сеть параллелей и меридианов. Но на обычной карте определять к о о р д и н а т ы трудно, ведь там параллели и меридианы искривлены. Гораздо удобнее пользоваться специальной морской картой.

На ней очертания материков выглядят чуть иначе, чем на обычной карте. Но зато на морской карте легко находить координаты точек, так как параллели и ме-

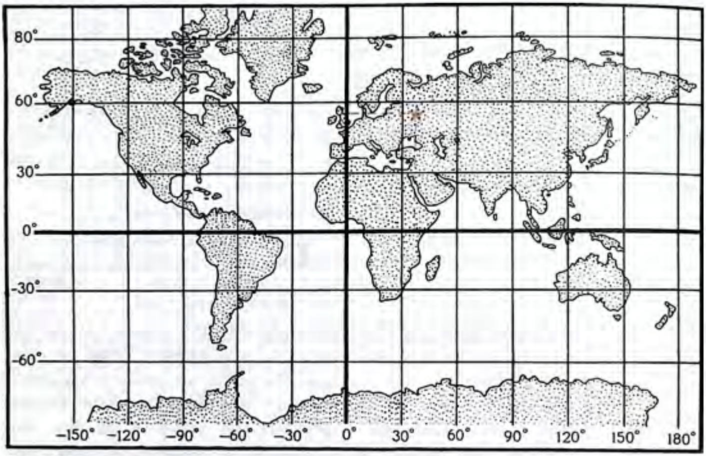


Рис. 69

ридианы образуют прямоугольную сеть (рис. 69). Найдем, к примеру, координаты Москвы. Для этого нужно из точки, изображающей Москву, провести перпендикуляры к экватору и нулевому меридиану. Получим 37,6° восточной долготы и 55,8° северной широты.

Обратите внимание: на карте градусы западной долготы и южной широты написаны со знаком «минус». Направления на восток и на север считаются положительными, а противоположные им направления, западное и южное,— отрицательными.

Координаты обычно записывают в скобках — сначала долготу, затем широту. Тогда Москва имеет координаты (37,6°; 55,8°), Гавана — (−82,4°; 23,1°). А остров Петра I имеет координаты (−90,5°; −68,8°).

*Где он расположен? Высмотрите его на карте мира.*

Положение точки удобно определять координатами не только на Земле. Координатами пользуются и на плоскости.

Начертим две перпендикулярные прямые. Точку *O* их пересечения сделаем началом отсчета на каждой прямой и назовем

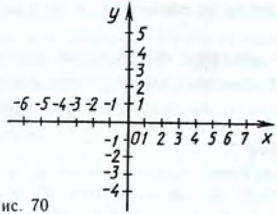



Рис. 70

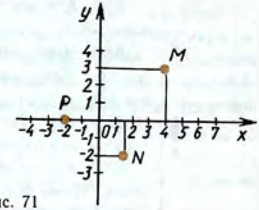



Рис. 71

**началом координат**. Выберем единичные отрезки и укажем положительные направления на прямых. У нас получились две координатные прямые (рис. 70). Их называют **осями координат** — ось $Ox$ и ось $Oy$. Они образуют **прямоугольную систему координат** на плоскости. Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют **координатной плоскостью.**

Как найти координаты точки? Так же, как на морской карте: проведем из данной точки $M$ перпендикуляры к каждой оси координат (рис. 71). На оси $Ox$ получилась точка с координатой 4, а на оси $Oy$ — точка с координатой 3. Числа 4 и 3 называют **координатами** точки $M$; записывают: $M(4;3)$. Первую координату называют **абсциссой**, вторую — **ординатой**. Значит, 4 — абсцисса точки $M$, а 3 — ордината точки $M$. Абсциссой точки $N$ будет число 1,5, а ординатой — число $-2$, поэтому пишем: $N(1{,}5;\ -2)$. Точка $P$ имеет координаты $(-2;\ 0)$.

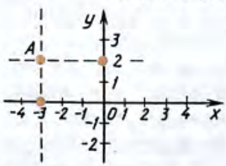



Рис. 72

*Какие координаты имеет точка O?*

Рассмотрим теперь обратную задачу: даны координаты $(-3;\ 2)$ точки $A$. Как найти саму точку $A$? Отметим на оси $Ox$ точку с координатой $-3$, а на оси $Oy$ точку с координатой 2 (рис. 72). Проведем через эти точки перпендикуляры к осям. Их пересечение и даст нам точку $A$.

**Вопросы и задания**

**63.1.** Что называют координатной плоскостью?

**63.2.** Как называют точку пересечения координатных осей? Какие у этой точки координаты?

**63.3.** Как найти координаты точки? Как называют первую координату; вторую?

**63.4.** Как найти точку на плоскости, если известны ее координаты?

**63.5.** Чему равна абсцисса любой точки, расположенной на оси $Oy$? Чему равна ордината любой точки, расположенной на оси $Ox$?

**63.6.** **(У)** Найдите координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, показанных на рисунке 73.

**63.7.** Начертите прямоугольную систему координат. а) Отметьте точки $M(-4;\ 1)$, $N(-3;\ -1)$, $P(3;\ 0)$, $K(4;\ 4)$, $L(1;2)$, $Q(0;\ -1)$. б) Проведите отрезок $LP$, найдите на нем точку с ординатой 1. Чему равна ее абсцисса? в) Проведите прямую $NQ$, отметьте на ней точку с абсциссой 4. Чему равна ее ордината? Чему равна ордината любой точки на прямой $NQ$?

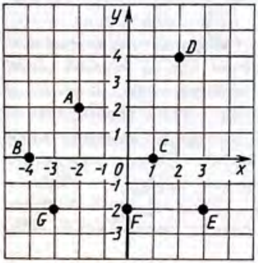



Рис. 73

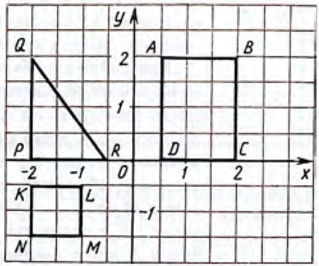



Рис. 74

**63.8.** а) Определите на рисунке 74 длины отрезков $AB$, $PQ$, $KL$, $LM$. б) Вычислите площадь фигур $ABCD$, $PQR$, $KLMN$. в) Чему равна абсцисса любой точки отрезка $BC$; $AD$; $KN$; $PQ$? г) Чему равна ордината любой точки отрезка $PR$; $AB$; $NM$?

**63.9.** Начертите прямоугольную систему координат. а) Постройте прямую, проходящую через точки $A(-5;\ 2)$ и $B(-2;\ 2)$. б) Постройте прямую, проходящую через точки $M(4;\ 1)$ и $N(4;\ -2)$. в) Обозначьте буквой $T$ точку пересечения прямых $AB$ и $MN$. Какие у нее координаты? г) Проведите прямую через начало координат $O$ и точку $T$. Отметьте на этой прямой точки с абсциссами 2; −2; 6; −6. Чему равны их ординаты?

**63.10.** а) Начертите в координатной плоскости треугольник с вершинами $A(3;\ 5)$, $B(3;\ -1)$, $C(-5;\ -1)$. Убедитесь, что он прямоугольный. б) Проведите параллельно осям координат отрезки от середин катетов до гипотенузы. Соедините отрезком середины катетов. в) Проверьте, что длины сторон полученного маленького треугольника пропорциональны длинам сторон треугольника $ABC$. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Урок 64

## КАК ИЗОБРАЖАЮТ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ

Рассмотрим прямо пропорциональную зависимость между величинами, выражаемую формулой $y=2\cdot x$. Вы уже знаете, что каждую пару соответственных значений $x$ и $y$ можно изобразить точкой на координатной плоскости. Зависимость $y=2\cdot x$ встретилась вам в задании 63.11 из рабочей тетради.

*Посмотрите свое решение этого задания. На какой линии расположены точки, изображающие пары соответственных значений величин $x$ и $y$?*

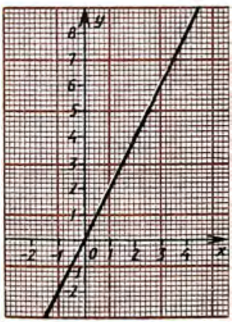



Рис. 75

Эти точки расположены на прямой линии (рис. 75). И обратно: любая точка этой прямой изображает какую-то пару соответственных значений $x$ и $y$. Поэтому говорят, что данная прямая линия **изображает** зависимость $y=2\cdot x$.

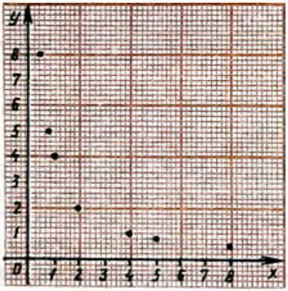
Точно так же прямая линия из задания 63.12 из рабочей тетради изображает зависимость $y=\frac{1}{2}\cdot x$. Линию на координатной плоскости, изображающую какую-то зависимость, называют **графиком** этой зависимости. **График прямо пропорциональной зависимости всегда будет прямой линией, проходящей через начало координат.**

Рассмотрим теперь обратно пропорциональную зависимость. Вспомните пример такой зависимости из урока 33.

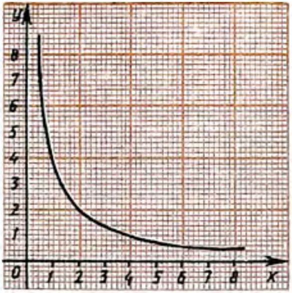
Там рассматривались длины $x$ и $y$ смежных сторон прямоугольников, площадь которых равна 4 см$^2$. Некоторые пары соответственных значений $x$ и $y$ записаны в таблице:

| x | 0,5 | 0,8 | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 5 | 4 | 2 | 1 | 0,8 | 0,5 |

Изобразив каждую пару значений из таблицы точкой, мы получим рисунок 76, *а*. Здесь нарисовано всего 7 точек. Чем больше будет нарисовано точек, тем точнее можно представить зависимость $y=\frac{4}{x}$. Точки, изображающие всевозможные соответственные пары, будут располагаться на кривой линии (см. рис. 76, *б*). Эта линия является графиком обратно пропорциональной зависимости $y=\frac{4}{x}$. Сравните этот рисунок с рисунком из задания 63.13 в рабочей тетради — ведь там тоже изображена обратно пропорциональная зависимость.




а)




б)

Рис. 76

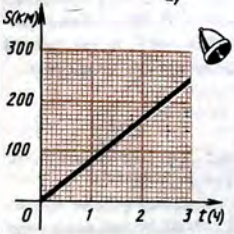



Рис. 77

Единичные отрезки на осях координат не всегда имеют одинаковую длину, а сами оси не всегда обозначаются буквами $x$ и $y$. Прямая линия на рисунке 77 — график движения поезда, она изображает зависимость расстояния от времени. На горизонтальной оси откладывается время движения $t$ в часах, а на вертикальной — соответствующее расстояние $s$ в километрах.

*Определите, с какой скоростью движется поезд.*

На вертикальной оси 100 км изображаются отрезком длиной 1 см. Значит, масштаб здесь 1:10 000 000. Можно выразиться проще, сказав, что масштаб 100 км в 1 см. Слово «масштаб» употребляют и для другой оси: говорят, что масштаб горизонтальной оси — 1 ч в 1 см. (А скорость поезда 80 км/ч.)

Рассмотрим еще пример. У одной девочки в каждый день рождения измеряли рост (см. таблицу). Как изобразить графически зависимость роста от возраста? Нанесем на координатную плоскость точки с координатами (0; 50), (1; 71) и т. д. Соединим эти точки отрезками.

| Возраст $t$, год | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост $h$, см | 50 | 71 | 82 | 94 | 102 | 108 | 114 | 119 | 124 | 128 | 132 | 138 | 144 | 152 |

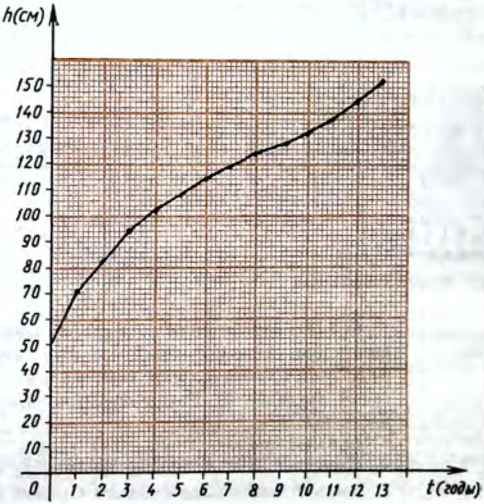


Рис. 78

Вот и получился график зависимости роста от возраста (рис. 78).

Графики часто используют, чтобы наглядно представить ту или иную зависимость. С некоторыми примерами зависимостей и их графиков вы еще встретитесь в заданиях к этому уроку.

**Вопросы и задания**

**64.1.** Как называют линию на координатной плоскости, изображающую зависимость между величинами?

**64.2.** Какой линией будет график прямо пропорциональной зависимости?

**64.3.** Начертите график зависимости: а) $y=\frac{3}{2}\cdot x$, б) $y=-2\cdot x$. (Совет: сначала найдите для каждой зависимости пару ненулевых соответственных значений и изобразите ее точкой.)

**64.4.** Антон поехал на велосипеде в магазин, но по дороге встретил Ивана, и они немного поговорили. Все это показано графиком на рисунке 79. а) Сколько времени и с какой скоростью Антон ехал до встречи с Иваном; после встречи с Иваном? б) Сколько всего времени Антон затратил на дорогу и какое проехал расстояние, если время — в мин, а расстояние в км.

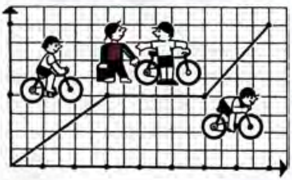


Рис. 79

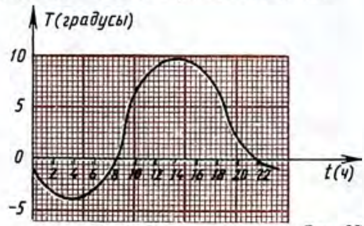



Рис. 80

**64.5.** На рисунке 80 показан график зависимости температуры воздуха от времени суток. Температуру измеряли каждые 2 ч. а) Какая и в какой час была измерена самая низкая температура; самая высокая? б) Какая приблизительно была температура в 9 ч; в 17 ч?

**64.6.** На рисунке 81 показан график зависимости высоты самолета от времени полета. а) Какова наибольшая высота, на которую поднимался самолет? Сколько времени он затратил

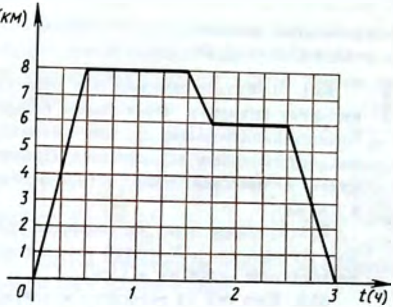



Рис. 81

на подъем? С какой скоростью он поднимался? б) С какой скоростью самолет снижался до высоты 6 км? в) С какой скоростью он снижался с высоты 6 км до земли?

**64.7.** В таблице даны результаты измерения температуры в лесу каждые 6 ч в течение 4 суток. Время удобно отсчитывать от 0 ч 30 марта. Например, 6 ч 31 марта — это будет 30 ч. Постройте график зависимости температуры от времени. Масштабы осей — 1 ч в 1 мм и 0,5 °С в 1 мм.

| Дата | 30 марта | | | | 31 марта | | | | 1 апреля | | | | 2 апреля | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время (ч) | 0 | 6 | 12 | 18 | 0 | 6 | 12 | 18 | 0 | 6 | 12 | 18 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| Температура (°С) | 2 | −1 | 14 | 9 | 6 | 4 | 14 | 16 | 5 | −2 | 15 | 18 | 6 | 4 | 16 | 23 | 11 |

**64.8.** На остров Протекшен в 1937 г. завезли 8 фазанов. В следующей таблице показано, как изменялась их численность.

| Год | 1937 | 1938 | 1939 | 1940 | 1941 | 1942 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Число фазанов | 8 | 30 | 81 | 282 | 641 | 1194 |

Постройте график изменения численности. Масштаб горизонтальной оси — 1 год в 1 см, вертикальной — 100 штук в 1 см.

ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 7

**65.1.** Начертите окружность и проведите в ней два перпендикулярных диаметра. Через концы каждого диаметра проведите прямые, параллельные другому диаметру. Какой четырехугольник ограничивают эти прямые? Найдите отношения площади круга к площади этого четырехугольника. (Напомним, что $\pi \approx 3{,}14$.)

**65.2.** Самолет летит со скоростью 900 км/ч. Начертите график его движения. Масштаб горизонтальной оси — 1 ч в 1 см, вертикальной — 500 км в 1 см.

**65.3.** Юра сел на велосипед и поехал от дома со скоростью 20 км/ч. Через 2 км его велосипед сломался. В течение 10 мин Юра пытался починить велосипед, но не смог и вернулся домой на попутной машине. Машина ехала со скоростью 30 км/ч. а) Сколько минут длилась Юрина прогулка? б) Выбрав подходящие масштабы осей, начертите график движения Юры.

**65.4.** Рост мальчика измеряли каждый год. В 1-й строке таблицы возраст $t$ (в годах), во 2-й строке рост $h$ (в см).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 73 | 90 | 98 | 106 | 112 | 117 | 124 | 131 | 138 | 143 | 146 | 151 | 155 | 163 | 175 | 180 |

Начертите график зависимости роста от возраста. Масштаб горизонтальной оси — 2 года в 1 см, вертикальной — 1:20.

**65.5. (У)** У нескольких мальчиков и девочек семь лет подряд измеряли силу правой руки с помощью динамометра. В следующей таблице записана средняя сила мальчиков и девочек в разном возрасте. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики зависимости силы от возраста для мальчиков и девочек. Масштабы осей выберите сами.

| Возраст, год | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Сила мальчиков, кг | 25 | 28 | 32 | 37 | 43 | 49 | 55 |
| Сила девочек, кг | 21 | 24 | 27 | 28 | 32 | 34 | 35 |

**65.6.** В следующей таблице приведены среднемесячные температуры очень жаркого (Репетек в Каракумах) и очень холодного (Оймякон в Якутии) мест. (В 1-й строке номера месяцев с января по декабрь.)

| Месяц | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Температура, °C | Репетек | 1 | 4 | 10 | 18 | 24 | 29 | 31 | 29 | 22 | 15 | 8 | 3 |
| | Оймякон | −50 | −44 | −32 | −15 | 2 | 12 | 15 | 10 | 2 | −15 | −36 | −47 |

Начертите графики температуры в одной координатной плоскости. Масштабы осей выберите сами.

## § 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алгебраические выражения (в 5-м классе мы чаще называли их буквенными) вам уже хорошо знакомы. Вспомните, с их помощью записывают свойства и правила, зависимости и формулы, уравнения и неравенства. В данном параграфе подводится итог тем знаниям об алгебраических выражениях, которые вы получили за два года. Эти знания понадобятся в 7-м классе при изучении нового предмета алгебра.

**Урок 66**

### ПОГОВОРИМ ОБ УРАВНЕНИЯХ И ИХ КОРНЯХ

Вам уже много раз приходилось решать различные уравнения. При решении отыскивается неизвестное число, обозначенное буквой. Такое число называют корнем уравнения. Иначе говоря, **корень уравнения** — это такое значение буквы, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, уравнение $6\cdot x+5=23$ имеет корень 3 (это каждый подсчитает в уме), уравнение $6\cdot x+5=2-4\cdot x$ имеет корень $-0{,}3$ *(проверьте!)*.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

*А почему сказано «все корни», а не «корень»? Разве уравнение может иметь много корней?*

Конечно. Уравнение может иметь и не один корень. Например, у уравнения $x^2+12=7\cdot x$ есть два корня (3 и 4), у уравнения $x^3=x$ — три корня (1, $-1$ и 0).

*Проверьте это. Кроме того, убедитесь, что $-1$ не является корнем уравнения $x^2+12=7\cdot x$, а 3 не является корнем уравнения $x^3=x$.*

▲ На самом деле в скобках выше перечислены все корни каждого из данных двух уравнений. Но убедиться в том, что других корней у них нет,— задача более трудная, и мы не будем обсуждать ее здесь.

*Но ведь все числа не перепробуешь, чтобы узнать, какое из них будет корнем! Как же искать все корни уравнения?*

Это нелегкий вопрос! Учиться решать уравнения вы будете, изучая алгебру, вплоть до окончания школы. А вообще-то, область Уравнений в стране Математике чрезвычайно обширна и в ней попадаются неприступные скалы — такие трудные уравнения, которые школьными методами не решить. ▲

В уроках 70 и 71 мы расскажем, как решать уравнения, в которых после «раскрытия скобок» неизвестное число, обозначенное буквой, оказывается только в 1-й степени. (Заметьте, что в уравнении $x^2+12=7\cdot x$ неизвестное встречается во 2-й степени, а в уравнении $x^3=x$ — в 3-й.)

*А что значит «раскрыть скобки»?*

Мы объясним это в следующем уроке.

**Вопросы и задания**

**66.1.** Что такое уравнение?

**66.2.** Что такое корень уравнения? Как проверить, является ли данное число корнем уравнения?

**66.3.** Что значит решить уравнение?

**66.4. (У)** Является ли число 7 корнем уравнения:

а) $x+13=20$; в) $5\cdot x=33$;
б) $32-x=23$; г) $63:x=9$?

**66.5.** Решите уравнение:

а) $2\cdot x-3=-7$; д) $1-x:5=3{,}8$; з) $\frac{3}{x-2}=\frac{7}{9}$;
б) $5-3\cdot x=1{,}2$; е) $7+6\cdot x=5$;
в) $x+1{,}7=0$;
г) $-2+4\cdot x=9$; ж) $\frac{2\cdot x-3}{7}=\frac{5}{8}$; и) $\frac{5}{11}=\frac{7}{2\cdot x+3}$.

**66.6.** Клоун предложил решить следующие два уравнения: а) $x+1=x+2$; б) $(x+2)\cdot 3=6+3\cdot x$. Публика смеялась: все видели, что уравнение а) решить нельзя, потому что оно совсем не имеет корней, а уравнение б) решать неинтересно, потому что у него любое число будет корнем. Объясните то и другое.

**Урок 67**

## КАК РАСКРЫВАТЬ СКОБКИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЯХ

В этом и двух последующих уроках мы обсудим, как можно преобразовывать алгебраические выражения. **Преобразовать** алгебраическое выражение — это значит заменить его другим, которое при любых значениях букв принимает то же значение, что и исходное выражение. Такие преобразования выполняют, пользуясь свойствами действий, и вы выполняли их уже очень много раз. Как обычно, преобразованное выражение соединяют с исходным знаком равенства.

*Приведите один-два примера преобразований алгебраических выражений.*

Например, применив распределительные законы, можно преобразовать выражение $2\cdot(b+c)$ в выражение $2\cdot b+2\cdot c$, а выражение $x\cdot(4-5\cdot y)$ в выражение $4\cdot x-5\cdot x\cdot y$. В этих двух примерах преобразованные выражения в отличие от исходных не содержат скобок; говорят, что они получены из исходных выражений раскрытием скобок.

**Вообще раскрыть скобки в алгебраическом выражении — это значит преобразовать его в выражение без скобок.**

Раскрывают скобки не только с помощью распределительных законов. Например, к выражению $2+(3+c)$ распределительный закон не применить; но скобки здесь можно раскрыть, учитывая сочетательный закон сложения. Как вы помните, он гласит: от изменения расстановки скобок сумма не меняется. А раз все равно, как ставить в сумме скобки, то их можно и вовсе не ставить! Мы уже говорили об этом в 5-м классе. Значит, $2+(3+c)=2+3+c$. Получилось, что в рассмотренной сумме мы опустили скобки. Давайте применим тот же прием к сумме $a+(-2+x\cdot 3)$.

*Как же здесь опустить скобки? Ведь тогда получится странное выражение $a+\ -2+x\cdot 3$.*

Так, конечно, не пишут. Если перед слагаемым стоит «минус», то это слагаемое принято заключать в скобки (исключение делают частенько только для первого слагаемого). Поэтому правильно будет записать преобразованную сумму так: $a+(-2)+x\cdot 3$. А чтобы совсем освободиться от скобок, нужно вспомнить правило замены вычитания сложением (см. урок 48). Применяя это правило «в обратную сторону», запишем: $a+(-2)=a-2$. Окончательно получаем $a+(-2+x\cdot 3)=a-2+x\cdot 3$.

Смотрите: «минус» у первого слагаемого в скобках заменил собою «плюс», стоявший перед скобками.

Точно так же можно раскрыть скобки, охватывающие разность. Например:

$$x+(4-y)=x+(4+(-y))=x+4+(-y)=x+4-y.$$

*Объясните каждое равенство в этой цепочке.*

Видите: раскрыв здесь скобки, мы опять попросту опустили их.

Таким же способом (цепочкой равенств) легко убедиться, что верно равенство $a+(-b-c)=a-b-c$ *(убедитесь!)*. Заметьте, что в этом случае знак «минус» у $b$ и у $c$ заменил собою «плюс», стоявший перед скобками.

Итак, мы рассмотрели случаи, когда перед скобками (в которые заключена сумма или разность) стоит знак «плюс».

*Подумайте, не обнаруживается ли для этих случаев простое правило раскрытия скобок.*

Искомое правило можно сформулировать так: **чтобы раскрыть (охватывающие сумму или разность) скобки, перед которыми стоит знак «плюс», нужно: 1) скобки опустить; 2) если в скобках у первого слагаемого или уменьшаемого стоял «минус», то заменить им «плюс», стоявший перед скобками.**

*Применяя 3 раза это правило, раскройте скобки в выражении* $a+(2\cdot b-c\cdot 3)+(-4\cdot d+5\cdot e)+(-x\cdot 6-y\cdot 7)$.

Теперь следовало бы разобрать похожие случаи, когда перед скобками (в которых заключена сумма или разность) стоит знак «минус».

Вот четыре типичных примера таких выражений:

$$a-(b+c),\ a-(b-c),\ a-(-b+c),\ a-(-b-c).$$

Каково здесь правило раскрытия скобок? Начиная рассуждать в поисках такого правила, рассмотрим первое из написанных выражений. Опять воспользуемся упомянутым выше свойством, заменив вычитание прибавлением числа, противоположного вычитаемому, т. е. числа $-(b+c)$. Теперь учтем, что $-(b+c)=(-b)+(-c)$ (такая формула, только с буквами $a$ и $b$, была отмечена в уроке 49). После этого останется раскрыть скобки в полученной сумме. Запишем все сказанное цепочкой равенств: $a-(b+c)=a+(-(b+c))=a+((-b)+(-c))=a+$ $+(-b)+(-c)=a-b-c$. Тем самым мы вывели формулу

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

*Такими же рассуждениями выведите следующие формулы для трех других выражений:*

$$a-(b-c)=a-b+c;$$
$$a-(-b+c)=a+b-c;$$
$$a-(-b-c)=a+b+c.$$

Рассматривая четыре полученные формулы, можно сформулировать искомое правило: **чтобы раскрыть (охватывающие сумму или разность) скобки, перед которыми стоит знак «минус», нужно: 1) этот знак и скобки опустить; 2) у компонентов действия внутри скобок заменить знаки на противоположные.**

*Применяя 3 раза это правило, раскройте скобки в выражении $x-(x-y)-(y+a)-(-a-x)$.*

Найденные в этом уроке правила раскрытия скобок применяют и в случаях, когда скобки охватывают «более длинное» выражение. Какие именно выражения тут имеются в виду (их называют многочленами), мы объясним в следующем уроке.

**Вопросы и задания**

**67.1.** Что значит преобразовать алгебраическое выражение? Что значит раскрыть скобки в выражении?

**67.2.** Как раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «плюс»; знак «минус»?

**67.3.** Напишите сумму двух выражений и упростите ее:

а) $-4-m$ и $m+2$; в) $b-1{,}3$ и $1{,}3-c$; д) $x-y$ и $y-z$;
б) $3-a$ и $a-2$; г) $x-2{,}8$ и $3{,}6-x$; е) $x+y$ и $z-y$.

**67.4.** Напишите разность двух выражений и упростите ее:

а) $-2+a$ и $a-3$; в) $b+2{,}8$ и $2{,}8+c$; д) $x+y$ и $y+z$;
б) $3-a$ и $-a+4$; г) $x-3{,}92$ и $4{,}08-x$; е) $x-y$ и $z-y$.

**67.5.** Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(-6)\cdot(3m+8)-3\cdot(m-5)$ при $m=1$; $-0{,}8$; $\frac{2}{3}$; $0$; $-2{,}5$;

б) $2\cdot a\cdot(3-b)+3\cdot(2\cdot a+1)$ при $a=-2{,}3$; $b=1\frac{5}{23}$.

**67.6.** Составьте алгебраическое выражение со скобками. Предложите соседу по парте раскрыть в нем скобки. Проверьте, правильно ли он выполнил задание.

**67.7.** Скорость течения реки 2,3 км/ч. На сколько скорость лодки, плывущей по течению, больше скорости лодки, плывущей против течения? (Совет: обозначьте собственную скорость лодки буквой $a$.)

**67.8.** Клоун заявил, что он преобразовал выражение $3-(a-5)$ в выражение $3-a-5$, раскрыв в первом из них скобки. Публика смеялась: все видели, что клоун неправильно раскрыл скобки. а) Объясните, в чем состояла ошибка клоуна, и раскройте скобки в первом выражении правильно. б) Найдите разность этих выражений.

Урок 68

## ОДНОЧЛЕН И МНОГОЧЛЕН

**Одночленом** называют всякое число, а также всякое произведение, множителями которого являются буквы и числа. Вот примеры одночленов: $2$, $-\frac{1}{3}$, $a\cdot x\cdot 6$, $b\cdot y$, $c\cdot 4\cdot d\cdot(-0{,}5)$, $a$, $-a$.

*Разве $a$ и $-a$ — одночлены? Ведь здесь нет произведений! К тому же у $-a$ есть «минус», а в определении ничего не говорится про знаки перед буквами.*

Чтобы ответить на реплику Смекалкина и рассеять возникшее недоразумение, выразим $a$ и $-a$ в виде произведения буквы на число. Заодно станет ясно, что в определении одночлена говорить о знаках незачем.

Нужно всего лишь вспомнить известные вам формулы $a=a\cdot 1$ и $-a=a\cdot(-1)$ (см. урок 52). Глядя на них, каждый видит, что нет никаких оснований отказывать выражениям $a$ и $-a$ в праве называться одночленами.

В записи одночлена знак «минус» может стоять и перед произведением, в котором участвуют буквы. Например, одночлен $c\cdot 4\cdot d\cdot(-0,5)$ можно преобразовать к виду $-c\cdot 4\cdot d\cdot 0,5$, так как $c\cdot 4\cdot d\cdot(-0,5)=c\cdot 4\cdot d\cdot 0,5\cdot(-1)=-c\cdot 4\cdot d\cdot 0,5$.

---

Подходящие преобразования одночленов, содержащих буквы, позволяют записывать такие одночлены в более простом виде. Перечислим три приема, которыми это достигается.

1. Пользуясь переместительным законом умножения, можно переставить множители так, чтобы буквы шли после чисел. Затем можно перемножить числовые множители. Полученный в результате числовой множитель, стоящий перед буквами, называют **коэффициентом** данного одночлена. Например, коэффициентом одночлена $x\cdot 3\cdot y\cdot \frac{1}{6}$ является число $\frac{1}{2}$. В самом деле, $x\cdot 3\cdot y\cdot \frac{1}{6}=3\cdot \frac{1}{6}\cdot x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y$.

Если одночлен содержит только буквы (т. е. в его записи нет числовых множителей), то его коэффициентом считают $\dfrac{\text{число } 1}{\text{число } -1}$, когда перед буквами $\dfrac{\text{нет знака «минус»}}{\text{стоит знак «минус»}}$.

А коэффициентом одночлена, являющегося числом, договариваются считать само это число.

Такие соглашения позволяют утверждать, что у **любого одночлена есть коэффициент.**

*Назовите коэффициенты одночленов, написанных в начале урока.*

2. Договариваются не ставить в записи одночлена знак умножения (т. е. точку) между буквенными множителями, а также между коэффициентом и первым буквенным множителем. Например, вместо $2\cdot a\cdot b$ пишут $2ab$ (читают: «Два-а-бэ»). Кстати, точку обычно не ставят и в случае, когда какой-либо множитель заключен в скобки. Например, можно писать $2(a+b)$, $(x-1)(x+2)$.

3. Произведение одинаковых буквенных множителей обычно заменяют степенью. Например, одночлен $2\cdot x\cdot y\cdot 7\cdot x$ преобразуется к виду $14x^2y$, одночлен $a\cdot(-2)\cdot b\cdot a\cdot b\cdot 0,5\cdot a$ преобразуется к виду $-a^3b^2$ *(убедитесь!)*.

Сумму нескольких одночленов называют **многочленом.** Вот примеры многочленов: $x+1$, $a^2+(-2b)+b^2$, $(-3ax)+xy+4+$ $+(-5y)$.

Одночлены-слагаемые в данном многочлене называются его **членами.**

▲ Среди одночленов есть и число 0, которое можно назвать **нулевым одночленом**. Вы давно знаете, что если взять любое число и прибавить к нему нуль, то сумма будет равна взятому числу. Это свойство сохраняется и для сложения одночленов: **если взять любой одночлен и прибавить к нему нулевой одночлен, то сумма будет равна взятому одночлену.**

*Но ведь сумма одночленов — это многочлен. Значит, взятый одночлен оказывается многочленом!*

Ничего странного. Так и говорят: **одночлен — это частный случай многочлена.** ▲

*А вычитать одночлены тоже можно?*

Конечно. Для этого надо только договориться (по примеру действий с числами) **заменять вычитание сложением, меняя у вычитаемого знак на противоположный.** Например:

$$2x-6y=2x+(-6y),\ 2x-(-7y^2)=2x+7y^2.$$

Это правило удобно применять «в обратную сторону»: многочлен, имеющий члены со знаком «минус», можно записать алгебраическим выражением, в котором одночлены соединены знаками «плюс» или «минус». Такое выражение называют **алгебраической суммой.** Перепишем в виде алгебраической суммы два из рассмотренных выше многочленов:

$$a^2+(-2ab)+b^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(-3ax)+xy+4+(-5y)=-3ax+xy+4-5y.$$

Запись многочлена в виде алгебраической суммы позволяет, как мы видим, обходиться без скобок. Но, называя члены так записанного многочлена, надо помнить, что это с л а г а е м ы е, и не забывать об их знаках. Например, члены многочлена $x-8a-9bx^2-10$ — это $x$, $-8a$, $-9bx^2$ и $-10$.

*Назовите члены многочлена* $-11x^3+y^2-a+1$.

Найденные в уроке 67 правила раскрытия скобок применяют не только к сумме и разности, но и к любому многочлену. Это относится и к распределительному закону, и к случаю, когда перед скобками, охватывающими многочлен, стоит «плюс» или «минус».

Например, $(-0{,}5a)\cdot(2b-c-6)=(-0{,}5a)\cdot 2b+$
$+(-0{,}5a)\cdot(-c)+(-0{,}5a)\cdot(-6)=-ab+0{,}5ac+3a$,
$-0{,}5a+(2b-c-6)=-0{,}5a+2b-c-6$,
$-0{,}5a-(2b-c-6)=-0{,}5a-2b+c+6$.

▲ *Сформулируйте распределительный закон для умножения одночлена на многочлен, а также два правила раскрытия скобок, охватывающих многочлен, перед которым стоит знак «плюс» или «минус».* ▲

Многочлены иногда преобразуют, укорачивая их запись приведением подобных членов. Что это такое, мы объясним в следующем уроке.

**Вопросы и задания**

**68.1.** Что называют одночленом?

**68.2.** Как находят коэффициент одночлена? Каков коэффициент у одночлена $a$; $-xy$; $-0{,}7$?

**68.3.** Какими приемами упрощают запись одночлена?

**68.4.** Что называют многочленом? Что такое члены многочлена?

**68.5.** Как заключают слагаемые в скобки, перед которыми стоит «плюс»; стоит «минус»?

**68.6.** Упростите одночлен и найдите его коэффициент:

а) $7a\cdot 6$;
б) $(-2)\cdot 5x$;
в) $6\cdot x\cdot 3$;
г) $(-4a)\cdot(-2)$;
д) $0{,}7e\cdot 1{,}3$;
е) $(-2{,}3)a\cdot 6{,}5b$;
ж) $a\cdot 3{,}2b$;
з) $2{,}6x\cdot(-c)$;
и) $\frac{1}{3}c\cdot\frac{6}{7}m$;
к) $\left(-\frac{3}{5}x\right)\cdot\frac{5}{9}y$;
л) $m\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)n$;
м) $-6a\cdot(-b)$;
н) $6a\cdot\frac{2}{3}b\cdot(-1{,}1)a$;
о) $(-2a)\cdot b\cdot(-1)$;
п) $-3a\cdot 2b\cdot(-e)$;
р) $6x\cdot(-y)\cdot(-3)$.

**68.7.** Вспомните формулы для периметра прямоугольника, периметра квадрата, длины окружности, площади прямоугольника, площади круга, объема прямоугольного параллелепипеда. Запишите перечисленные формулы, не используя точку для обозначения умножения. В таком виде эти полезные формулы легче запомнить.

**68.8.** Замените сумму одинаковых слагаемых произведением, найдите его коэффициент. Вычислите значение выражения при данных значениях буквы:

а) $a+a+a+a$ при $a=-0,3;\ 3\frac{2}{3};\ 0;\ -1,5;$

б) $-b-b-b-b-b$ при $b=1;\ -2,7;\ -1\frac{2}{7};\ 0,2;$

в) $-2x-2x-2x-2x$ при $x=3,5;\ -1\frac{7}{12};\ 0;\ 0,27.$

**68.9. (У)** Младший брат Смекалкина рассматривал многочлен $3ax-2b-c+df-4m+5$. Он сказал: «Коэффициенты у одночленов этого многочлена такие: 3; 2; 4». Смекалкин объяснил брату, что тот не назвал три коэффициента, а из трех остальных коэффициентов у двух указал неверный знак. На самом деле коэффициенты здесь такие: 3; −2; −1; 1; −4; 5.

Назовите коэффициенты у одночленов следующих многочленов:

а) $3,2x-7,3y+2,8z-km-n-3,3k-6,5+a;$
б) $-6,1a-2,2b+cd-2,7d-x+1,3yz+0,2;$
в) $2\frac{2}{7}ab-3\frac{5}{9}bc-6\frac{7}{8}ac+d-xy-8yz+xz.$

**68.10. (У)** Вычислите, используя распределительные законы умножения:

а) $3,7\cdot0,8+3,7\cdot0,2;$
б) $5,3\cdot(-1,6)+5,3\cdot0,6;$
в) $7,9\cdot0,4-2,9\cdot0,4;$
г) $2,7\cdot1,5-(-0,3)\cdot1,5.$

**Урок 69**

## ПРИВОДИМ ПОДОБНЫЕ ЧЛЕНЫ В МНОГОЧЛЕНЕ

Одночлены называются **подобными**, если они имеют одни и те же буквенные множители.

*Значит, подобные одночлены могут отличаться только коэффициентами?*

Совершенно верно. Вот два подобных одночлена: $2a$ и $-\frac{1}{3}a$. И следующие одночлены подобны: $x^2y$, $6x^2y$ и $-x^2y$.

Рассматривая члены какого-нибудь многочлена, бывает полезно поинтересоваться, имеются ли среди них подобные. Например, у многочлена $3ac+5+b-2ac-4+b+4ac$ члены $3ac$,

$-2ac$, $4ac$ подобны (это каждый видит), члены $b$ и $b$ тоже подобны: они даже равны.

*А члены 5 и $-4$ тоже подобны?*

Да, их тоже считают подобными: у них буквенных множителей нет, а потому можно сказать, что они имеют «одни и те же» буквенные множители. Используя переместительный и сочетательный законы сложения, можно сгруппировать подобные члены. Сделаем это для рассмотренного только что многочлена. Тогда он преобразуется так: $(3ac-2ac+4ac)+(b+b)+(5-4)$. Глядя на многочлен $3ac-2ac+4ac$, видим, что его можно преобразовать в выражение $(3-2+4)ac$.

*Каким законом при этом нужно воспользоваться?*

Теперь, выполнив действия в скобках, запишем $(3-2+4)ac=5ac$. Значит, алгебраическую сумму $3ac-2ac+4ac$ можно заменить одним слагаемым $5ac$.

Замену суммы подобных членов одним слагаемым и называют **приведением подобных членов.**

Если привести подобные члены в сумме $b+b$, то получится $2b$; приведя подобные члены 5 и $-4$, получим 1.

В результате рассматриваемый нами многочлен преобразуется в такой многочлен: $5ac+2b+1$. Посмотрите: исходный многочлен имел 7 членов, а преобразовали мы его в многочлен с тремя членами.

С «более короткими» многочленами легче выполнять действия. Поэтому надо с легкостью приводить подобные члены. Правило здесь, как мы убедились, очень простое:

**Сумма подобных членов заменяется одним одночленом с теми же буквенными множителями и с коэффициентом, равным сумме коэффициентов этих членов.**

### Вопросы и задания

**69.1.** Какие одночлены называются подобными?

**69.2.** Что значит привести подобные члены? Как приводят подобные члены?

**69.3.** Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях буквы:

а) $-3a-4a+9{,}2a-3{,}7$ при $a=1$; $-\frac{3}{11}$; $-1{,}8$; 0;

б) $-2\frac{2}{3}x+8-4{,}2x-12$ при $x=3$; $-1$; $0$; $2$; $5$; $\frac{1}{3}$;

в) $3{,}1y^2-2{,}3y-4{,}3y^2+1{,}7$ при $y=2{,}1$; $-\frac{1}{3}$; $0$; $41$; $1$.

**69.4.** Решите уравнение:

а) $2x+3x-6x=-10$;  г) $3{,}9-6x+2{,}1x-4{,}5=0$;
б) $y-4{,}2y+6{,}3y-9{,}3=0$;  д) $5{,}8y-3{,}7+4{,}2y+2=-1{,}5$;
в) $-z+3{,}7z-2{,}8z=0$;  е) $-3{,}1z-2{,}7-4{,}6y+1{,}2=0{,}3$.

**69.5.** Младший брат Смекалкина заявил, что в многочлене $3ac-xyz-5ca+x^2y$ подобных членов нет. Смекалкин возразил, сказав: «Ты не учитываешь, что множители можно переставлять». Приведите подобные члены в этом многочлене.

**69.6.** Замазку для окон готовят из смеси мела и олифы. Мела берут в 4 раза больше, чем олифы. Сколько граммов каждого из этих веществ надо взять, чтобы приготовить 850 г замазки?

▲ **69.7.** Для приготовления клюквенного киселя берут сахар, крахмал, клюкву и воду в пропорции 3:1:3:25. Сколько граммов каждого продукта надо взять, чтобы приготовить 6 порций киселя по 200 г? ▲

**69.8.** **(У)** Клоун заявил, что он преобразовал выражение $a(b+3)$ в выражение $ab+3$, раскрыв скобки. а) Скажите, не ошибся ли клоун. Ответ объясните. б) Найдите разность указанных клоуном выражений.

Урок 70

## КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ПОМОГАЮТ РЕШАТЬ УРАВНЕНИЯ

Преобразования алгебраических выражений, изученные в уроках 67, 68 и 69, позволяют упрощать уравнения. Проиллюстрируем это при решении следующей задачи:

З а д а ч а. Два шестых и два седьмых класса собрали вместе 1695 кг металлолома. Оказалось, что 6 А собрал на 22 кг больше, чем 6 Б, а седьмые классы собрали в 1,5 раза больше, чем вместе собрали 6 А и 6 Б. Сколько металлолома собрал 6 А?

Р е ш е н и е. Обозначим буквой $x$ массу (в кг) металлолома, собранного 6 А классом. Тогда:

$(x-22)$ кг — масса металлолома, собранного 6 Б классом;

$x+(x-22)$ кг — масса металлолома, собранного шестыми классами вместе;

$1{,}5(x+(x-22))$ кг — масса металлолома, собранного седьмыми классами;

$x+(x-22)+1{,}5(x+(x-22))$ кг — общая масса металлолома, собранного шестыми и седьмыми классами.

Так как шестые и седьмые классы собрали 1695 кг, то верно равенство

$$x+(x-22)+1{,}5(x+(x-22))=1695.$$

Вот и уравнение получилось. В нем буква $x$ написана 4 раза. Но левую часть можно упростить, раскрывая скобки и приводя в полученном многочлене подобные члены *(проделайте это!)*. Получится уравнение $5x-55=1695$. Такое уравнение должен решить каждый шестиклассник!

*Решите уравнение и дайте ответ в задаче.*

**Задания**

**70.1.** Решите уравнение:

а) $2x+7x=18$;

б) $3y+4y+5y=3{,}6$;

в) $2z+9z-7{,}8=-21$;

г) $2x+3\frac{2}{3}x+3\frac{1}{3}=54$;

д) $2{,}5y-0{,}2+3{,}8y=1{,}06$;

е) $z-3{,}5z+1{,}2=-0{,}3$;

ж) $0{,}2\cdot 3{,}75=2\frac{1}{4}k-5{,}75+4{,}25$;

з) $1{,}7(0{,}2y-0{,}01)+0{,}76y=1{,}2$;

и) $3{,}2(6{,}5z-1{,}3)+1{,}7(2{,}2-z)=3{,}4$;

к) $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x-2\right)-4\left(2\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=1$;

л) $y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}y=1$;

м)* $z+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{3}\left(z+\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{8}$.

**70.2.** Участникам школьной викторины было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ полагалось 12 очков, а за неправильный 7 очков снималось. Петя набрал в итоге 227 очков. На сколько вопросов Петя ответил правильно?

**70.3.** Конфета с фантиком весит 15 г, а сам фантик весит 1 г. Смекалкин с младшим братом купили 20 конфет. Младший брат съел несколько конфет, а пустые фантики от них свернул в виде конфеты. «Отгадай, не разворачивая фантики, сколько конфет я съел»,— сказал он. Смекалкин положил на весы конфеты и пустые фантики и увидел, что их общая масса 230 г. Он что-то подсчитал и объявил брату, сколько тот съел конфет. Найдите и вы это число.

**70.4.** а) В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ длиннее $BC$ на 3,2 см и короче $AC$ на 1,6 см. Периметр этого треугольника

15,5 см. Найдите длины его сторон. б) В равнобедренном треугольнике боковая сторона больше основания на 0,8 см. Каковы длины сторон этого треугольника, если его периметр 13,6 см? ▲ в) Длины сторон треугольника относятся как 5:7:9. Найдите их, если его периметр 31,5 м. ▲

**70.5.** Одно число относится к другому как 9 к 5. Найдите эти числа, если: а) их сумма равна 98; б) их разность равна 16.

**70.6.** Площадь озера Байкал на 13 200 км$^2$ больше площади озера Балхаш, а отношение этих площадей равно 105:51. Найдите площадь каждого озера.

**70.7.** *(Старинная задача.)* Летела стая гусей, а навстречу ей летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, 100 гусей!» Вожак стаи ему отвечает: «Нас не 100 гусей. Если бы нас было столько, сколько сейчас, да еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да еще ты один гусь, тогда нас было бы 100 гусей». Сколько было гусей в стае?

**70.8*.** В пятиугольнике 4 стороны имеют одинаковую длину, а пятая отличается от них на 2,5 см. Какую длину имеет каждая сторона пятиугольника, если его периметр 8 см? (Совет: задумайтесь над тем, в каких двух смыслах можно понимать здесь слово «отличается».)

**70.9.** Выполните задание 7.5, используя вместо десятичных дробей положительные и отрицательные рациональные числа.

Урок 71

## КАК РЕШАТЬ УРАВНЕНИЯ, ПЕРЕНОСЯ СЛАГАЕМЫЕ ИЗ ОДНОЙ ЧАСТИ РАВЕНСТВА В ДРУГУЮ

Решим уравнение $3x+26=x+30$.

*Как же решать такое уравнение? Ведь у него неизвестное число и в левой части равенства, и в правой!*

Давайте разберемся. Напомним, что $x$ обозначает корень нашего уравнения. Уравнение говорит, что $3x+26$ и $x+30$ — это одно и то же число. Вычтем из него число $x$, снова получим верное равенство:

$$(3x+26)-x=30.$$

Смотрите, из правой части $x$ исчезло, но зато появилось в левой части со знаком «минус». Можно сказать, что мы **перенесли слагаемое $x$ из правой части в левую, сменив у него знак на противоположный.** При этом $x$ будет корнем и нового уравнения.

Новое уравнение удобно тем, что содержит $x$ только в левой части: такие уравнения вы умеете решать.

*Закончите решение и найдите $x$.*

А как решать, например, уравнение $8x-17=33-2x$? И здесь легко избавиться от одночлена $-2x$ в правой части. Нужно прибавить $2x$ к обеим частям равенства:

$$(8x-17)+2x=33.$$

Снова можно сказать, что мы **перенесли слагаемое $-2x$ из правой части в левую, сменив у него знак.** И опять корень уравнения остался прежним.

*Закончите решение уравнения.*

Итак, мы обнаружили важное свойство:

**Корень уравнения не меняется, если перенести какое-либо слагаемое из одной части уравнения в другую, сменив его знак.**

▲ Изложенный здесь способ решения уравнения и является тем приемом «восполнения и противопоставления» ал-Хорезми, о котором мы говорили в «Большой перемене II». Напомним, что арабское название этого правила «ал-джебр вал-мукабала» дало имя а л г е б р е. ▲

### Вопросы и задания

**71.1.** Как переносить слагаемые из одной части уравнения в другую, чтобы при этом корень уравнения не менялся?

**71.2.** Перенесите слагаемое из одной части уравнения в другую так, чтобы в левой части были только слагаемые, содержащие неизвестное число, а в правой — слагаемые, не содержащие неизвестного числа. Затем решите уравнение:

а) $5x+3=27-3x$; ж) $2x+43=4x-65$;
б) $2y-12=18-4y$; з) $3y-35=7y-28$;
в) $6z+24=2z+13$; и) $73-2z=3z+24$;
г) $17+5x=3x-9$; к) $-x+11=4x-13$;
д) $14+6y=18-y$; л) $-13+7y=13y-7$;
е) $2z-4=z+9$; м) $z-1=3z-12$.

**71.3.** Решите уравнение:

а) $5(x-7)=3(x-4)-13$; в) $3z+2(2z-3)=22-7z$;
б) $4(y-3)=16-5(y+6)$; г) $3(2m+7)+4=5(m-3)$;
д) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{3}$; е) $\frac{2y-1}{3y+2}=\frac{7}{8}$; ж) $\frac{1-z}{z-3}=3$.

**71.4.** У Пети и Коли одинаковая сумма денег. Петя купил на все деньги 3 тетради и блокнот за 6000 р., а Коля — 1 тетрадь и авторучку за 10 000 р. Сколько стоит одна тетрадь?

**71.5.** Валя и Вера задумали одно и то же число. Затем Валя умножила это число на 2, а Вера прибавила к нему 2. Валя к результату прибавила 3, а Вера свой результат умножила на 3. И у них снова получилось одно и то же число. Какое число было задумано?

**71.6.** В двух кусках было поровну шелковой ткани. Когда от одного куска отрезали 10 м, а от другого — 40 м, то в первом куске стало вдвое больше ткани, чем во втором. Сколько метров ткани было первоначально в каждом куске?

**71.7.** Игорю исполнилось 11 лет, а его отцу 35. Через сколько лет отец будет старше Игоря: а) втрое; б) вдвое; в)* вчетверо?

**71.8.** Автомобиль проехал расстояние между двумя городами за 7 ч. Если бы его скорость была на 10 км/ч больше, то это же расстояние он проехал бы за 6 ч. а) Какова скорость автомобиля? б) Каково расстояние между городами?

**71.9.** За книгу заплатили 6000 р. и еще $\frac{1}{3}$ ее стоимости. Сколько стоила книга?

**71.10.** *(Старинная задача.)* Летели галки и сели на ветки. Одна ветка осталась пустая, а на остальных ветках сидят по 2 галки. Если бы на каждую ветку село по одной галке, то одной галке не хватило бы ветки. Сколько галок и сколько веток?

**71.11.** а) Дана дробь $\frac{11}{41}$. Какое одно и то же число нужно прибавить к числителю и знаменателю этой дроби, чтобы получилась дробь, равная $\frac{3}{8}$; равная $\frac{1}{6}$?

б) Дана дробь $\frac{29}{64}$. Какое одно и то же число надо вычесть из числителя и знаменателя этой дроби, чтобы получилась дробь, равная $\frac{2}{9}$; равная $\frac{6}{13}$?

**71.12.** На памятнике древнегреческому математику Диофанту (III в.) имеется надпись: «Прохожий! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в старости. Шестую часть его жизни заняло детство, двенадцатую — отрочество, седьмую — юность. Затем он женился, и через 5 лет у него родился сын, который прожил вдвое меньше отца. Четыре года, до самой своей кончины, Диофант оплакивал сына». Сколько лет жил Диофант?

**71.13.** **(У)** Клоун решал уравнение $2y+1=y+8$. Вот как он перенес $y$ из правой части в левую, а 1 из левой части в правую: $2y+y=8+1$. Затем он привел подобные слагаемые, получил уравнение $3y=9$ и нашел его корень 3. Чтобы проверить, правильно ли найден корень, клоун поставил в исходное уравнение число 3 вместо буквы $y$. «Вот чудеса! — воскликнул он.— В левой части получилось 7, а в правой 11. Получается, что 7 равно 11». Объясните, в чем состояла ошибка клоуна при решении этого уравнения. Решите уравнение правильно.

**Урок 72**

## ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ К § 8

**72.1.** На двух кустах сидели воробьи, на каждом поровну. Затем с одного куста на другой перелетели 4 воробья. На сколько больше стало воробьев на одном кусте, чем на другом? (Совет: обозначьте буквой первоначальное число воробьев на каждом кусте.)

**72.2.** Два одинаковых катера отправились по реке — один вверх по течению, другой вниз по течению. Скорость течения реки 3,2 км/ч. На сколько километров больше пройдет за 3 ч катер, плывущий вниз по течению, чем катер, плывущий вверх по течению?

**72.3.** Найдите значение числового выражения:

а) $\dfrac{-0{,}2\cdot\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot0{,}9\right)}{-3+\frac{4}{11}\cdot(-22):(-0{,}1)}$;

б) $\dfrac{\left(0{,}5-\frac{2}{5}-0{,}375\right)\cdot0{,}4}{\left(3{,}03:\frac{3}{8}-4{,}2\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{11}{127}}$;

в) $\dfrac{-2{,}4\cdot3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\cdot4{,}125}{-5\frac{5}{6}\cdot2\frac{4}{7}}$;

г) $\dfrac{-1\frac{3}{17}\cdot\left(-\frac{10}{29}\right)\cdot2\frac{7}{40}\cdot\left(-\frac{17}{40}\right)}{-\frac{1}{5}\cdot1{,}8:\left(-1\frac{1}{6}\right)\cdot0{,}14}$.

**72.4.** Найдите числовое значение алгебраического выражения:

а) $a:b-ab$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=-0{,}5$;

б) $\frac{2a(b+c)}{b-c}$ при $a=-\frac{3}{7}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=0{,}1$;

в) $\frac{-1}{3}x+\frac{x^2}{y}$ при $x=-0{,}6$, $y=\frac{1}{6}$.

**72.5.** Решите уравнение:

а) $3(x-2)+5(7-x)=4$;

б) $0{,}8(2y+3)-1{,}2(3y-4)=0{,}6$;

в) $2\frac{1}{3}(5z-1)-3\frac{5}{6}(4-3z)=7\frac{5}{12}$;

г) $2{,}3(5-3m)+7{,}6(m-2)=-1{,}46$;

д) $\frac{8-7x}{3x+2}=\frac{-1}{14}$;

е) $\frac{3y-1}{8}=\frac{2y-7}{5}$;

ж) $\frac{-2}{3-5z}=\frac{1}{z-4}$.

**72.6.** Решите уравнение:

а) $3{,}1(2-x)+4{,}5=7{,}2-4{,}3(-3{,}7+x)$;

б) $2\frac{1}{3}-3\frac{5}{6}(2-3x)=8\frac{5}{9}+4\frac{7}{12}\left(-1\frac{1}{3}+2x\right)$;

в) $5{,}5(x-2{,}1)-3{,}1(4{,}5-2x)=7{,}2(3{,}5+x)-1{,}2$;

г)* $2x(x+2)-4{,}1=(2x-3)x+3{,}7$.

**72.7.** Дано уравнение $2(3x+1)-9=3(2x-7)+14$. а) Какие из чисел 3; $-1{,}4$; 0; $1\frac{2}{3}$; $-7$ являются его корнями?

▲ б)* Есть ли такое число, которое не будет корнем данного уравнения? Ответ объясните. (Совет: преобразуйте отдельно левую и правую части уравнения.) ▲

**72.8.** Дано уравнение $4(7-x)-27=(-2)(3+2x)+1$. а) Какие из чисел 2; $-3{,}6$; $-1$; $-\frac{7}{9}$ являются его корнями?

▲ б)* Имеет ли это уравнение корень? Ответ объясните. ▲

**72.9.** Для детского сада купили столики. Если в каждую комнату поставить по 3 столика, то 4 столика останутся. Если в каждую комнату поставить по 4 столика, то 3 столиков не хватит. Сколько комнат в детском саду и сколько купили столиков?

**72.10.** В одной пачке было в 2,5 раза больше тетрадей, чем в другой. Когда из второй пачки переложили в первую 5 тетрадей, то во второй пачке стало тетрадей в 3 раза меньше, чем в первой. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

**72.11.** Задуманы два числа, одно из которых на 18 больше другого. Известно, что 25% одного из этих чисел равны 35% другого. Что это за числа?

**72.12.** В городе три пекарни. Первая из них выпекает в 2 раза больше хлеба, чем вторая, но в 3 раза меньше, чем третья. Сколько тонн муки должна получить каждая пекарня, если на выпечку хлеба ежедневно выделяется 21 т муки?

**72.13.** Картофель в магазине был расфасован в 24 пакета двух видов: по 5 кг и по 3 кг. Масса всех пакетов по 5 кг оказалась равной массе всех пакетов по 3 кг. Сколько было тех и других пакетов?

▲ **72.14.** Для каждого из следующих уравнений, в которых неизвестное число обозначено буквой $x$, число 1 является корнем уравнения. Найдите, какое число в каждом из уравнений обозначает при этом буква $a$.

а) $x+1=a$; в) $3(x-1)=x+a$; д) $(5-a)+7x=3a$;
б) $2x-3=2+a$; г) $(a-x)+2=2a$; е) $ax+3=5$. ▲

**72.15.** Клоун назвал число и предложил зрителям, сидящим на $\dfrac{\text{четных}}{\text{нечетных}}$ рядах, $\dfrac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ его на 0,5, а затем $\dfrac{\text{прибавить}}{\text{вычесть}}$ число 3. К удивлению публики, результат у всех получился один и тот же. Какое число назвал клоун?

**72.16.** Клоун сообщил, что число котят, живущих у него, равно $\frac{3}{4}$ этого числа и еще $\frac{3}{4}$ котенка. Слова про $\frac{3}{4}$ котенка звучали смешно. Однако клоун все сказал правильно. Сколько котят живет у клоуна?

**Большая перемена III**

## ВЕЛИКИЕ МАТЕМАТИКИ НАШЕЙ СТРАНЫ

В начале XVIII в. Россия развивалась стремительно. Один за другим возникали новые города, строились заводы, на верфях Воронежа и Архангельска закладывался флот, в сражениях мужала армия. Стране как воздух были нужны образованные люди, ученые. По словам великого русского ученого М. В. Ломоносова, Петр I «усмотрел тогда ясно, что ни полков, ни городов надежно укрепить, ни кораблей построить и безопасно пустить в море, не употребляя математики... невозможно».

В 1725 г. в Петербурге по указу Петра открылась Академия наук. Так как своих ученых в России тогда не хватало, для работы в Академии были приглашены ученые из-за границы. Среди них был и математик из Швейцарии Леонард Эйлер (1707—1783). Россия, куда Эйлер переехал в 1727 г., стала для него второй родиной. Здесь он неутомимо вел математические исследования и вскоре был признан первым математиком мира. Эйлер достиг поразительных результатов во всех известных тогда областях математики, более того, он создал несколько новых математических дисциплин. За свою долгую жизнь Эйлер написал почти 900 научных трудов, полное собрание его сочинений насчитывает 72 тома! И это при том, что еще в 1735 г.

Эйлер, выполнив всего за 3 дня необычно сложный расчет движения кометы, от перенапряжения ослеп на один глаз, а в 1766 г. потерял зрение полностью. Поистине «творчество Эйлера изумительно и в науке беспримерно», как писал академик А. Н. Крылов.

Из учебника природоведения вы знаете о великом польском ученом Копернике, открывшем, что Земля вращается вокруг Солнца. Это открытие произвело переворот в представлениях человека о Вселенной. А великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856) часто называют «Коперником геометрии». Кем же был Лобачевский и что он открыл?

Вся жизнь Лобачевского связана с Казанским университетом. Сначала Лобачевский был его студентом, потом работал в университете, стал профессором, а позднее и ректором (т. е. руководителем университета). Одновременно с преподаванием Лобачевский вел исследования в области геометрии. Он поставил перед собой дерзкую задачу — изобрести геометрию, отличную от классической геометрии Евклидовых «Начал». А ведь в то время авторитет Евклида был непререкаем: более двух тысячелетий все математики знали только одну геометрию и были твердо уверены, что другой быть не может. Лобачевский же смог построить новую геометрию, носящую теперь его имя. Влияние этого открытия на представления человека о пространстве можно сравнить только с влиянием открытия Коперника.

Идеи Лобачевского не были поняты его современниками. Их смог оценить по достоинству лишь величайший немецкий математик XIX века Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), которого за многочисленные выдающиеся открытия в математике назвали «королем математиков». Однако Гаусс побоялся открыто выступить в поддержку Лобачевского. Лобачевский же проявил себя не только как замечательный ученый, но и как мужественный человек. На протяжении 30 лет он в одиночестве боролся за свои идеи и не дожил всего 7 лет до того дня, когда его геометрия получила всеобщее признание.

Каждому случалось наблюдать за прихотливым вращением волчка. Но волчок не только детская игрушка. Во многих важных приборах используют гироскопы — так в технике называют

Эйлер

Лобачевский

Ковалевская

крутящиеся с огромной скоростью волчки. Без них, например, невозможно управлять движением корабля или полетом самолета. Поэтому ясно, как важно уметь математически рассчитывать вращения гироскопа. Первым этой задачей занялся великий Эйлер, но ее окончательное решение — заслуга нашей замечательной соотечественницы, первой русской женщины-математика Софьи Васильевны Ковалевской (1850—1891).

Когда Соне было 8 лет, стены ее комнаты из-за нехватки обоев оклеили листами из учебника высшей математики. Как потом вспоминала Ковалевская, «от долгого ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти». С 15 лет Ковалевская начала систематически изучать высшую математику. В то время в России женщины не имели права учиться в университете. Поэтому, чтобы получить высшее образование, Ковалевской пришлось уехать в Германию. Однако и в Берлинском университете ей не было разрешено посещать лекции. Тогда великий немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815—1897), убедившийся в незаурядных способностях Ковалевской, стал заниматься с ней индивидуально. Под руководством Вейерштрасса Ковалевская уже в возрасте 24 лет получила ученую степень доктора философии. Вернувшись на родину, она, однако, не смогла найти работу, соответствующую ее знаниям: в царской России женщины не имели доступа к научным знаниям. Поэтому в 1883 г. Ковалевская работала в Швеции в должности профессора Стокгольмского университета. Именно тогда она решила упоминавшуюся уже задачу о вращении гироскопа. За это выдающееся достижение

Ковалевская была удостоена премии Парижской академии, а в 1889 г. по предложению передовых ученых Петербургская академия наук избрала Софью Васильевну членом-корреспондентом. Ковалевская была первой женщиной, чьи научные заслуги были оценены столь высоко. Ее яркий пример указал многим женщинам путь в науку.

Огромный вклад в математическую науку внесли отечественные ученые и в XX веке. Можно было бы назвать очень много имен выдающихся математиков, прославивших нашу Родину замечательными открытиями. Мы назовем только имена академиков Алексея Николаевича Крылова (1863—1945) и Мстислава Всеволодовича Келдыша (1911—1978). Оба они успешно применяли математику для решения важных практических задач. Так, труды А. Н. Крылова служат основой кораблестроения, его расчеты по непотопляемости судов спасли жизнь тысячам моряков. Он же разработал правила действия с округленными числами, очень важные для практических вычислений. (С этими правилами вы познакомитесь в 8-м классе.) М. В. Келдыш открыл способ борьбы с флаттером и шимми — грозными явлениями, разрушавшими скоростные самолеты. Позднее он руководил всеми расчетами, связанными с космическими полетами, был главным теоретиком космонавтики. А с 1961 по 1975 г. М. В. Келдыш возглавлял Академию наук СССР — был ее президентом.

В заданиях к этой большой перемене мы предлагаем несколько задач из учебников математики, по которым в разные времена учились дети в нашей стране. Подборки задач чередуются с небольшими рассказами об авторах этих учебников.

**Задания**

В 1701 г. по указу Петра I в Москве открыта Математико-навигацкая школа. Ее учителем Петр назначил лучшего математика Москвы Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739). Магницкий сразу же принялся за составление учебника для воспитанников школы, и в 1703 г. огромным для того времени тиражом (2400 экземпляров) был издан первый русский учебник математики — книга «Арифметика, сиречь наука числительная». «Арифметика» стала энциклопедией математических знаний своего времени. На протяжении полувека верой и правдой служила она, как писал Магницкий, «ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей». По «Арифметике» Магницкого учился и М. В. Ломоносов, назвавший ее «вратами учености». Задачи III.1 —III.3 взяты из «Арифметики» Магницкого.

**III.1.** Найти число, такое, что если к нему добавить его третью часть и от полученной суммы отнять ее шестую часть, то будет 100.

**III.2.** Купил некто сукно трех сортов, а всего 106 аршин. Первого купил на 12 аршин больше, чем второго, а второго — на 9 аршин больше, чем третьего. Сколько же сукна каждого сорта было куплено?

**III.3.** Два человека хотят купить корову. Говорит первый второму: «Если ты дашь мне $\frac{2}{3}$ твоих денег, то я один смогу заплатить ее цену». А второй отвечает первому: «Дай мне $\frac{3}{4}$ твоих денег, тогда и я заплачу ее цену». Сколько у каждого из них было денег, если корова стоит 24 р.?

Леонард Эйлер был не только великим математиком, но и знаменитым педагогом, автором многих учебников как по высшей, так и по элементарной (школьной) математике. Задачи III.4 и III.5 взяты из учебника Эйлера «Основания алгебры», а задача III.6 — это известная задача Эйлера о кенигсбергских мостах, положившая начало новой математической науке — топологии.

**III.4.** Отец, у которого было трое сыновей, оставил им 1600 крон. Старший сын получил на 200 крон больше среднего, а средний — на 100 крон больше младшего. Сколько получил каждый из сыновей?

**III.5*.** Осел, жалуясь на свою судьбу, сказал мулу: «Мне нужно только сто фунтов твоей ноши, чтобы моя стала вдвое тяжелее твоей». На это мул ему ответил: «Да, это так, но если бы ты мне отдал сто фунтов из твоей ноши, то я был бы нагружен втрое больше тебя». Сколько фунтов нес осел и сколько фунтов нес мул?

**III.6*.** В городе Кенигсберге (ныне Калининград) есть остров, окруженный рекой, через которую перекинуто семь мостов (рис. 82). Можно ли обойти их все, проходя только однажды через каждый мост?

Рис. 82

Долгую жизнь прожил Андрей Петрович Киселев (1852—1940). Долгую жизнь прожили и учебники математики, написанные им. По ним учились ваши бабушки и дедушки, прабабушки и прадедушки и даже прапрабабушки и прапрадедушки. Впервые книги Киселева появились в 1880-х гг. А последние издания киселевских учебников использовались в школе и в советское время вплоть до начала 70-х гг. Конечно, учебники менялись со временем, Киселев много работал над их усовершенствованием и добился ясности, последовательности и четкости изложения. Задачи III.7 — III.9 взяты из книги А. П. Киселева «Арифметика».

**III.7.** Разделите 125 на такие 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй как 2:3, вторая — к третьей как 4:5, а третья — к четвертой как 6:11.

**III.8.** На 5 одинаковых керосинок, горевших 24 дня по 6 ч ежедневно, израсходовано 120 л керосина. На сколько хватит 216 л керосина, если 9 таких же керосинок будут гореть по 8 ч в день?

### Работа с учебником закончена, но вы не прощаетесь с математикой

Вот и подошла к концу ваша работа с учебником-собеседником. Мы не раз сравнивали ее с путешествием. Можно сказать, что сейчас это двухлетнее путешествие по стране Математике заканчивается. Мы прощаемся с вами. Но вы не прощаетесь с этой огромной и богатой страной. Математика настолько нужна людям, что ее изучают в школе основательно — с 1-го и до последнего класса. Так что ваше математическое путешествие продолжится, причем даже одновременно по двум областям: начиная с 7-го класса у вас будут два математических предмета — алгебра и геометрия (и отдельные учебники по каждому из них). Изучая их, да и другие предметы, не обойтись без знаний по математике, полученных в 5-м и 6-м классах. А узнали вы немало. Чтобы окинуть пройденное одним взглядом, можно напоследок рассмотреть оглавление нашего учебника. Так путешественник разглядывает карту пройденных областей, чтобы вспомнить те места, которые он посетил.

Впереди у вас несколько лет занятий замечательной наукой математикой. Желаем вам на этом интересном пути успехов!

1. **9.** а) 13 кг; б) 26 кг. **10.** б) 10.
2. **9.** Валя, на 2 кг. **13.** а) По 28 клеток.
3. **7.** б) 28; г) 629; з) 559 512. **9.** 13 и 7. **11.** б) Успеет.
4. **8.** д) $y=7$. **9.** б) 0.
5. **4.** в) 1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100; д) 1; 97.
6. **7.** $1\frac{5}{6}$; $6\frac{5}{12}$; $11\frac{11}{18}$. **9.** б) $x=16\frac{40}{41}$; г) $z=2\frac{11}{84}$. **10.** 1 см. **11.** $\frac{1}{4}$ кг.
7. **2.** а) 1,8086; г) 0,09; д) 5,1292. **6.** 3 полосы; 4 рулона. **7.** 2 мин 30 с.
8. **8.** $\approx 38$ м. **9.** 19 досок. **10.** $\approx 3,8\%$; $\approx 96,2\%$.
9. **8.** а) $\approx 7,85$ м. **10.** а) $\approx 36°$; б) $\approx 144°$; в) $\approx 0,5°$, или $\approx 30'$. **11.** а) 120°; б) 10°. **12.** На 135°. **13.** $\approx 780$ мм.
10. **8.** $72\cdot\pi$ см$^2$; $36\cdot\pi$ см$^2$; $12\cdot\pi$ см$^2$. **9.** 135°; $6\cdot\pi$ м. **11.** а) 2930 кг. **12.** 16 м. **13.** В 4 раза.
11. **5.** а) 3. 41; г) $13^2$. **6.** а) 2.
13. **3.** в) 3. 5. 7; е) $2^3\cdot 3^3$. **5.** в) 3; г) 2; 5; 7.
14. **5.** а) 7; в) 1; д) 26. **10.** 13 конфет; 5 коробок; 7 коробок. **11.** 25 см.
15. **4.** г) 1092; д) 250 047. **6.** д) 1872. **8.** 3 ч 24 мин.
16. **2.** в) 13; г) 432; е) 13 013. **4.** а) 6 и 30; б) 5 и 30; 10 и 15. **7.** Оба числа можно.
17. **5.** ж) $\frac{64}{25}$, или $2\frac{14}{25}$; и) $\frac{277}{16}$, или $17\frac{5}{16}$. **7.** а) $\frac{3}{9}<\frac{8}{12}$; е) $\frac{343}{7}=\frac{980}{20}$. **8.** г) $\frac{2}{3}$.
18. **7.** е) $\frac{6}{14}=\frac{66}{154}$; $\frac{10}{22}=\frac{70}{154}$; $\frac{6}{14}<\frac{10}{22}$.
19. **3.** е) $1\frac{20}{49}$; л) $1\frac{13}{30}$; р) $\frac{1}{36}$; ц) $\frac{23}{42}$; щ) $\frac{1}{110}$. **4.** г) $\frac{35}{144}$; ж) $\frac{1}{10}$. **6.** б) $4\frac{1}{21}$. **7.** а) $\frac{4}{35}$. **8.** б) $6\frac{35}{36}$; е) $5\frac{8}{9}$. **9.** е) $y=\frac{4}{21}$; и) $x=\frac{3}{11}$.
20. **4.** б) $1\frac{7}{8}$; в) $\frac{30}{80}$. **8.** а) $\frac{1}{12}$ км; $83\frac{1}{3}$ м/мин.
22. **6.** $1\frac{11}{36}$; $1\frac{5}{36}$; $\frac{29}{36}$; $1\frac{5}{36}$. **8.** д) $x=\frac{3}{115}$. **9.** ж) $\frac{4}{9}$; л) $6\frac{23}{31}$. **11.** а) $29\frac{11}{41}$ с; б) $26\frac{2}{13}$ мин.
23. **6.** б) $\frac{1}{175}$; е) $1\frac{7}{300}$. **7.** б) $\frac{2}{425}$; е) $3\frac{663}{700}$. **14.** 45 км; 27 км. **15.** 385 рисунков. **16.** 21 га. **15.** 133 самолета.
24. **1.** б) 36 с. **2.** б) 31 с.
25. **1.** в) $\frac{7}{11}$; д) $\frac{101}{10\,101}$. **6.** а) 1,5. **7.** За $1\frac{5}{7}$ ч. **8.** 0,48 года. **9.** б) В 2,5 раза. **13.** а) $2\frac{1}{12}$; б) $\frac{27}{625}$; д) 3. **14.** д) 16,1; л) 1,54. **18.** 14 распилов. **19.** 4950 м.

28. **8.** а) 17 л. **9.** в) 0,03; г) 77.
29. **3.** Валя. **6.** 12,75 кг. **11.** б) 100 кг.
30. **3.** в) $x=13,5$; $y=4$. **6.** 12 см и 20 см. **7.** а) 18 см, 40,5 см; 27 см.
32. **2.** б) 86 г/м. **3.** а) 240 м.
33. **2.** 1420 мл. **3.** а) 10 м; б) 400 км.
34. **2.** в) 1:40 000 000. **4.** 74 см. **7.** а) $\approx$4247,3 м; б) $\approx$2,1 мм; $\approx$2,6 мм.
36. **1.** Не догонит. **3.** б) 250 г. **4.** Итальянский.
37. **6.** а) 720 г соли, 1120 г моркови, 640 г клюквы, 12,8 г лаврового листа. **7.** Ане — 320 р., Кате — 960 р. **9.** б) Обратно пропорциональная зависимость $x \cdot y=10$.
41. **3.** б) 0; 1; 2; 3; 4; е) 0. **5.** 10 км/ч. **6.** $\frac{6}{11}$ ч.
42. **10.** б) $6\frac{11}{30}$. **15.** в) $x=0,7$.
44. **3.** а) 200 г сахара, 200 г персиков, 600 г воды.
45. **4.** 84; 42; 252. **5.** 49; 44; 32. **6.** 60; 80; 100. **8.** а) 7 мин 25,5 с.
47. **6.** г) $-4\frac{31}{36}$; к) $-7\frac{13}{36}$; р) $-3\frac{73}{90}$.
48. **6.** е) $x=-6,6$; з) $x=5,8$. **9.** $46\frac{1}{3}$.
50. **7.** г) 53,326; и) $-1$; к) $-18\frac{2}{21}$. **8.** а) 1,1.
51. **7.** б) $-1,4$; г) 0,66; ж) 33,6. **9.** в) $z=-2,6$; г) $x=-3,36$; л) $y=-80,94$. **12.** б) $20\frac{95}{104}\approx 20,9$ (см).
52. **2.** б) $y=-0,3$; г) $m=-2,52$.
54. **1.** а) Нет; б) сможет в кинотеатре «Мир». **2.** б) 57%. **5.** 264 л. **6.** Заменить одним новым.
55. **2.** б) $-4,2$; в) 19; е) 0,9. **5.** г) $\frac{17}{660}$; д) 0,875.
57. **5.** а) 0,125; г) $-1\frac{29}{90}$. **6.** б) 1; в) $-12,55$.
60. **1.** в) 0,3243243... ; з) 0,1231231... . **3.** а) $-172,01$; б) $-1,26$; д) 0,232. **6.** $7:8=0,875$.
63. **7.** б) Абсцисса равна 2. **9.** в) T(4; 2).
64. **4.** а) 3 мин и 20 км/ч; 2 мин и 30 км/ч. **5.** а) 8 км; 0,5 ч; 16 км/ ч; б) 8 км/ч.
65. **3.** 20 мин.
66. **5.** д) $x=-14$; и) $x=6,2$.
69. **4.** б) $y=3$; д) $y=0,02$. **7.** 112,5 г сахара, 37,5 г крахмала, 112,5 г клюквы, 937,5 г воды.
70. **1.** е) $z=0,6$; л) $y=0,48$; м) $z=0,05$. **3.** 5 конфет. **4.** в) 7,5 м, 10,5 м, 13,5 м. **7.** 36 гусей.
71. **2.** ж) $x=54$; з) $y=-1,75$; л) $y=-1$. **3.** д) $x=-5$; ж) $z=2,5$. **7.** а) Через год; в) через $-3$ года, т. е. три года назад. **8.** б) 420 км. **11.** а) 7; $-5$; б) 19; $-1$. **12.** 84 года.
72. **2.** На 19,2 км. **3.** б) $-0,25$; в) 0. **4.** в) 2,36. **5.** д) $x=1,2$. **6.** г) $1\frac{4}{35}$. **9.** 7 комнат, 25 столиков. **14.** г) $a=1$; е) $a=2$. **16.** 3 котенка.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДО 1000**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 97 | 227 | 367 | 509 | 661 | 829 |
| 3 | 101 | 229 | 373 | 521 | 673 | 839 |
| 5 | 103 | 233 | 379 | 523 | 677 | 853 |
| 7 | 107 | 239 | 383 | 541 | 683 | 857 |
| 11 | 109 | 241 | 389 | 547 | 691 | 859 |
| 13 | 113 | 251 | 397 | 557 | 701 | 863 |
| 17 | 127 | 257 | 401 | 563 | 709 | 877 |
| 19 | 131 | 263 | 409 | 569 | 719 | 881 |
| 23 | 137 | 269 | 419 | 571 | 727 | 883 |
| 29 | 139 | 271 | 421 | 577 | 733 | 887 |
| 31 | 149 | 277 | 431 | 587 | 739 | 907 |
| 37 | 151 | 281 | 433 | 593 | 743 | 911 |
| 41 | 157 | 283 | 439 | 599 | 751 | 919 |
| 43 | 163 | 293 | 443 | 601 | 757 | 929 |
| 47 | 167 | 307 | 449 | 607 | 761 | 937 |
| 53 | 173 | 311 | 457 | 613 | 769 | 941 |
| 59 | 179 | 313 | 461 | 617 | 773 | 947 |
| 61 | 181 | 317 | 463 | 619 | 787 | 953 |
| 67 | 191 | 331 | 467 | 631 | 797 | 967 |
| 71 | 193 | 337 | 479 | 641 | 809 | 971 |
| 73 | 197 | 347 | 487 | 643 | 811 | 977 |
| 79 | 199 | 349 | 491 | 647 | 821 | 983 |
| 83 | 211 | 353 | 499 | 653 | 823 | 991 |
| 89 | 223 | 359 | 503 | 659 | 827 | 997 |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА II. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

**ГЛАВА III. ПОДГОТОВКА К ИЗУЧЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ В 7-м КЛАССЕ**

Учебное издание

**Шеврин Лев Наумович**
**Гейн Александр Георгиевич**
**Коряков Игорь Олегович**
**Волков Михаил Владимирович**

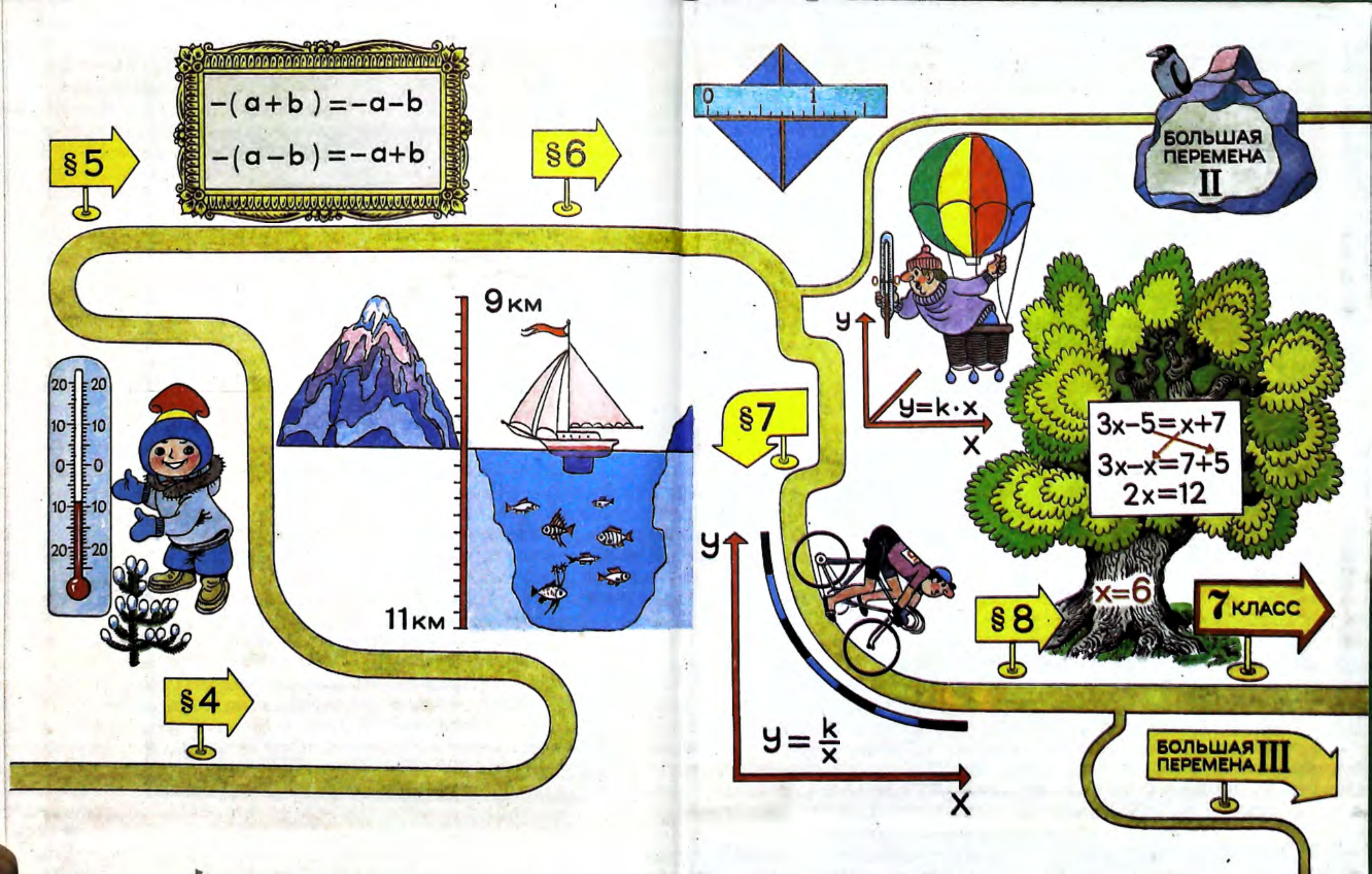
# МАТЕМАТИКА

**Учебник-собеседник для 6 класса общеобразовательных учреждений**

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редактор Т. Ю. Акимова
Младшие редакторы Л. В. Кузнецова, Н. В. Сидельковская
Художники Е. В. Викторов, О. М. Шмелев
Художественный редактор Е. Р. Дашук
Технические редакторы С. Н. Терехова, Л. М. Абрамова
Корректоры Л. С. Вайтман, И. Н. Панкова

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 22.10.96. Подписано к печати 08.05.97. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,38 + 0,36 форз. Усл. кр.-отт 34,74. Уч.-изд. л. 11,74 + 0,53 форз. Тираж 30000 экз. Заказ № 1729.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
ООО ПФ «Полиграфист». 160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.



§5
−(a+b)=−a−b
−(a−b)=−a+b
§6
0
1
БОЛЬШАЯ ПЕРЕМЕНА II
9 км
11 км
20
10
0
10
20
y
y=k·x
x
§7
3x−5=x+7
3x−x=7+5
2x=12
x=6
y
y=k/x
x
§8
7 КЛАСС
§4
БОЛЬШАЯ ПЕРЕМЕНА III

**Учебно-методический комплект по математике для 5—6 классов общеобразовательных учреждений авторов Л. Н. Шеврина и др. включает в себя:**

- **учебник-собеседник**
- **рабочую тетрадь**



ПРОСВЕЩЕНИЕ