

И. В. САВЕЛЬЕВ

# Курс общей физики

ТОМ 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

•

ВОЛНЫ

•

ОПТИКА



И. В. САВЕЛЬЕВ

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ 2

---

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ ВОЛНЫ ОПТИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1988



ББК 22.3  
С12  
УДК 53(075.8)

**САВЕЛЬЕВ И. В. Курс общей физики:** Учеб. пособие. В 3-х т. Т. 2. **Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.** — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 496 с., ил.

Второй том трехтомного курса общей физики, созданного профессором Московского инженерно-физического института, заслуженным деятелем науки и техники РСФСР, лауреатом Государственной премии СССР И. В. Савельевым. Главная цель книги — ознакомить студентов с основными идеями и методами физики. Особое внимание обращено на разъяснение смысла физических законов и на сознательное применение их.

Для вузов с расширенной программой по физике, однако изложение построено так, что, опустив отдельные места, книгу можно использовать для вузов с обычной программой.

Табл. 3. Ил. 337

*САВЕЛЬЕВ Игорь Владимирович*

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том 2

Электричество и магнетизм. Волны. Оптика

Редакторы *Л. Н. Гладнева, Н. А. Михалина, Д. А. Миртова*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*. Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 12937

Сдано в набор 08.10.87. Подписано к печати 26.07.88. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 31. Усл. кр.-отт. 31,25. Уч.-изд. л. 29,85. Тираж 220 000 экз. Заказ № 1645. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014 г. Ярославль, ул. Свободы, 97.

С 1704010000—159  
053(02)—88 КБ-7-70—87

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1978, 1982, 1988

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Методические рекомендации . . . . .	9

### ЧАСТЬ I

#### ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Глава I. Электрическое поле в вакууме . . . . .	11
§ 1. Электрический заряд . . . . .	11
§ 2. Закон Кулона . . . . .	12
§ 3. Системы единиц . . . . .	14
§ 4. Рационализованная запись формул . . . . .	16
§ 5. Электрическое поле. Напряженность поля . . . . .	16
§ 6. Потенциал . . . . .	20
§ 7. Энергия взаимодействия системы зарядов . . . . .	24
§ 8. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом	25
§ 9. Диполь . . . . .	28
§ 10. Поле системы зарядов на больших расстояниях . . . . .	34
§ 11. Описание свойств векторных полей . . . . .	36
§ 12. Циркуляция и ротор электростатического поля . . . . .	51
§ 13. Теорема Гаусса . . . . .	53
§ 14. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса . . . . .	54
Глава II. Электрическое поле в диэлектриках . . . . .	60
§ 15. Полярные и неполярные молекулы . . . . .	60
§ 16. Поляризация диэлектриков . . . . .	62
§ 17. Поле внутри диэлектрика . . . . .	64
§ 18. Объемные и поверхностные связанные заряды . . . . .	65
§ 19. Вектор электрического смещения . . . . .	70
§ 20. Примеры на вычисление поля в диэлектриках . . . . .	73
§ 21. Условия на границе двух диэлектриков . . . . .	77
§ 22. Силы, действующие на заряд в диэлектрике . . . . .	80
§ 23. Сегнетоэлектрики . . . . .	81
Глава III. Проводники в электрическом поле . . . . .	84
§ 24. Равновесие зарядов на проводнике . . . . .	84
§ 25. Проводник во внешнем электрическом поле . . . . .	86
§ 26. Емкость . . . . .	87
§ 27. Конденсаторы . . . . .	89
Глава IV. Энергия электрического поля . . . . .	92
§ 28. Энергия заряженного проводника . . . . .	92
§ 29. Энергия заряженного конденсатора . . . . .	92
§ 30. Энергия электрического поля . . . . .	95

<b>Глава V. Постоянный электрический ток . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 31. Электрический ток . . . . .	98
§ 32. Уравнение непрерывности . . . . .	101
§ 33. Электродвижущая сила . . . . .	102
§ 34. Закон Ома. Сопротивление проводников . . . . .	104
§ 35. Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . . .	107
§ 36. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа . . . . .	108
§ 37. Мощность тока . . . . .	111
§ 38. Закон Джоуля — Ленца . . . . .	112
<b>Глава VI. Магнитное поле в вакууме . . . . .</b>	<b>114</b>
§ 39. Взаимодействие токов . . . . .	114
§ 40. Магнитное поле . . . . .	116
§ 41. Поле движущегося заряда . . . . .	117
§ 42. Закон Био — Савара . . . . .	120
§ 43. Сила Лоренца . . . . .	123
§ 44. Закон Ампера . . . . .	125
§ 45. Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект . . . . .	127
§ 46. Контур с током в магнитном поле . . . . .	133
§ 47. Магнитное поле контура с током . . . . .	138
§ 48. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле . . . . .	140
§ 49. Дивергенция и ротор магнитного поля . . . . .	144
§ 50. Поле соленоида и тороида . . . . .	148
<b>Глава VII. Магнитное поле в веществе . . . . .</b>	<b>153</b>
§ 51. Намагничивание магнетика . . . . .	153
§ 52. Напряженность магнитного поля . . . . .	154
§ 53. Вычисление поля в магнетиках . . . . .	159
§ 54. Условия на границе двух магнетиков . . . . .	162
§ 55. Виды магнетиков . . . . .	165
§ 56. Магнитомеханические явления . . . . .	166
§ 57. Диамагнетизм . . . . .	170
§ 58. Парамагнетизм . . . . .	173
§ 59. Ферромагнетизм . . . . .	176
<b>Глава VIII. Электромагнитная индукция . . . . .</b>	<b>181</b>
§ 60. Явление электромагнитной индукции . . . . .	181
§ 61. Электродвижущая сила индукции . . . . .	182
§ 62. Методы измерения магнитной индукции . . . . .	185
§ 63. Токи Фуко . . . . .	187
§ 64. Явление самоиндукции . . . . .	188
§ 65. Ток при замыкании и размыкании цепи . . . . .	191
§ 66. Взаимная индукция . . . . .	193
§ 67. Энергия магнитного поля . . . . .	195
§ 68. Работа перемagnetивания ферромагнетика . . . . .	197
<b>Глава IX. Уравнения Максвелла . . . . .</b>	<b>199</b>
§ 69. Вихревое электрическое поле . . . . .	199
§ 70. Ток смещения . . . . .	201
§ 71. Уравнения Максвелла . . . . .	205
<b>Глава X. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях . . . . .</b>	<b>208</b>
§ 72. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле . . . . .	208
§ 73. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитными полями . . . . .	210

§ 74. Определение заряда и массы электрона . . . . .	212
§ 75. Определение удельного заряда ионов. Масс-спектрографы . . . . .	217
§ 76. Ускорители заряженных частиц . . . . .	221

## Г л а в а XI. Классическая теория электропроводности металлов . . . . . 227

§ 77. Природа носителей тока в металлах . . . . .	227
§ 78. Элементарная классическая теория металлов . . . . .	229
§ 79. Эффект Холла . . . . .	233

## Г л а в а XII. Электрический ток в газах . . . . . 236

§ 80. Несамостоятельная и самостоятельная проводимость . . . . .	236
§ 81. Несамостоятельный газовый разряд . . . . .	236
§ 82. Ионизационные камеры и счетчики . . . . .	240
§ 83. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде . . . . .	244
§ 84. Газоразрядная плазма . . . . .	248
§ 85. Тлеющий разряд . . . . .	251
§ 86. Дуговой разряд . . . . .	254
§ 87. Искровой и коронный разряды . . . . .	255

## Г л а в а XIII. Электрические колебания . . . . . 258

§ 88. Квазистационарные токи . . . . .	258
§ 89. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления . . . . .	259
§ 90. Свободные затухающие колебания . . . . .	262
§ 91. Вынужденные электрические колебания . . . . .	265
§ 92. Переменный ток . . . . .	270

## Ч А С Т Ь 2

### ВОЛНЫ

## Г л а в а XIV. Упругие волны . . . . . 274

§ 93. Распространение волн в упругой среде . . . . .	274
§ 94. Уравнения плоской и сферической волн . . . . .	277
§ 95. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении . . . . .	280
§ 96. Волновое уравнение . . . . .	281
§ 97. Скорость упругих волн в твердой среде . . . . .	283
§ 98. Энергия упругой волны . . . . .	285
§ 99. Стоячие волны . . . . .	289
§ 100. Колебания струны . . . . .	292
§ 101. Звук . . . . .	292
§ 102. Скорость звука в газах . . . . .	295
§ 103. Эффект Доплера для звуковых волн . . . . .	300

## Г л а в а XV. Электромагнитные волны . . . . . 302

§ 104. Волновое уравнение для электромагнитного поля . . . . .	302
§ 105. Плоская электромагнитная волна . . . . .	304
§ 106. Экспериментальное исследование электромагнитных волн . . . . .	306
§ 107. Энергия электромагнитных волн . . . . .	308
§ 108. Импульс электромагнитного поля . . . . .	310
§ 109. Излучение диполя . . . . .	312

## ЧАСТЬ 3

## ОПТИКА

<b>Глава XVI. Предварительные сведения . . . . .</b>	<b>316</b>
§ 110. Световая волна . . . . .	316
§ 111. Представление гармонических функций с помощью экспонент . . . . .	319
§ 112. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков . . . . .	321
§ 113. Световой поток . . . . .	327
§ 114. Фотометрические величины и единицы . . . . .	329
§ 115. Геометрическая оптика . . . . .	332
§ 116. Центрированная оптическая система . . . . .	336
§ 117. Тонкая линза . . . . .	344
§ 118. Принцип Гюйгенса . . . . .	345
<b>Глава XVII. Интерференция света . . . . .</b>	<b>347</b>
§ 119. Интерференция световых волн . . . . .	347
§ 120. Когерентность . . . . .	352
§ 121. Способы наблюдения интерференции света . . . . .	360
§ 122. Интерференция света при отражении от тонких пластинок . . . . .	362
§ 123. Интерферометр Майкельсона . . . . .	371
§ 124. Многолучевая интерференция . . . . .	373
<b>Глава XVIII. Дифракция света . . . . .</b>	<b>381</b>
§ 125. Введение . . . . .	381
§ 126. Принцип Гюйгенса — Френеля . . . . .	382
§ 127. Зоны Френеля . . . . .	384
§ 128. Дифракция Френеля от простейших преград . . . . .	389
§ 129. Дифракция Фраунгофера от щели . . . . .	400
§ 130. Дифракционная решетка . . . . .	407
§ 131. Дифракция рентгеновских лучей . . . . .	415
§ 132. Разрешающая сила объектива . . . . .	422
§ 133. Голография . . . . .	424
<b>Глава XIX. Поляризация света . . . . .</b>	<b>428</b>
§ 134. Естественный и поляризованный свет . . . . .	428
§ 135. Поляризация при отражении и преломлении . . . . .	432
§ 136. Поляризация при двойном лучепреломлении . . . . .	435
§ 137. Интерференция поляризованных лучей . . . . .	440
§ 138. Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку . . . . .	441
§ 139. Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами . . . . .	443
§ 140. Искусственное двойное лучепреломление . . . . .	447
§ 141. Вращение плоскости поляризации . . . . .	449
<b>Глава XX. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом . . . . .</b>	<b>452</b>
§ 142. Дисперсия света . . . . .	452
§ 143. Групповая скорость . . . . .	452
§ 144. Элементарная теория дисперсии . . . . .	458
§ 145. Поглощение света . . . . .	461
§ 146. Рассеяние света . . . . .	463
§ 147. Эффект Вавилова — Черенкова . . . . .	465
<b>Глава XXI. Оптика движущихся сред . . . . .</b>	<b>467</b>
§ 148. Скорость света . . . . .	467
§ 149. Опыт Физо . . . . .	469

§ 150. Опыт Майкельсона . . . . .	472
§ 151. Эффект Доплера . . . . .	476
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>479</b>
I. Единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе . . . . .	479
II. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе . .	481
III. Векторный потенциал . . . . .	486
Предметный указатель . . . . .	493

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание данного тома составляют учение об электромагнетизме и учение о волнах (упругих, электромагнитных и световых).

Изложение ведется в Международной системе единиц (СИ). Попутно читатель знакомится и с гауссовой системой (соответствующий текст набран петитом). В приложениях в конце книги даны единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе, а также сопоставлен вид основных формул электромагнетизма в обеих системах.

При подготовке книги к третьему изданию сделаны лишь небольшие исправления и уточнения. Наиболее существенным изменением подверглись определение дивергенции (§ 11) и § 120, посвященный когерентности.

Выражаю благодарность В. И. Гервидсу за плодотворное обсуждение ряда вопросов и полезные советы.

Данный курс предназначен в первую очередь для вузов с расширенной программой по физике. Однако изложение построено так, что, опустив отдельные места, эту книгу можно использовать в качестве учебного пособия для вузов с обычной программой. В предпосланных книге «Методических рекомендациях», наряду с другим материалом, приведен ориентировочный перечень купюр (т. е. изъятий, сокращений в тексте), которые можно сделать в случае недостатка времени для изучения книги в полном объеме.

Москва, сентябрь 1985 г.

*И. В. Савельев*

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В настоящих рекомендациях даны разъяснения по поводу тех вопросов, которые не всегда излагаются правильно. Кроме того, приводится ориентировочный перечень параграфов либо их частей, рассмотрение которых не обязательно в случае нехватки времени на изучение Курса в полном объеме. Этот перечень отражает личную точку зрения автора и носит лишь рекомендательный характер.

1. Не следует, как это делается в некоторых книгах, называть электрическую  $\epsilon_0$  и магнитную  $\mu_0$  постоянные «проницаемостями вакуума». Такие названия являются физически бессмысленными. Соответственно не следует рассматривать лишние физические смыслы «абсолютные проницаемости»  $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$  и  $\mu_a = \mu\mu_0$ .

2. В тех случаях, когда электрическая и магнитная постоянные встречаются в комбинации  $\epsilon_0\mu_0$ , целесообразно заменять это произведение через  $1/c^2$ , где  $c$  — электродинамическая постоянная, совпадающая со скоростью света в вакууме (см. формулу (39.15)).

3. Полезно иметь в виду, что  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  входят в формулы в комбинации с множителем  $4\pi$ , причем  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ , а  $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ . Поэтому нецелесообразно иметь дело с числовыми значениями  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м и  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Гн/м. Лучше пользоваться значениями постоянных, выраженными через  $\pi$ , а именно:  $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$  и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ .

4. Не надо жалеть времени на усвоение основных понятий и соотношений векторного анализа (§ 11). Затраченное время с лихвой окупится за счет более простого и изящного получения ряда результатов. Кроме того, подлинное понимание природы и свойств электромагнитного поля без использования понятий дивергенции и ротора недостижимо.

5. Нередко встречаются утверждения, будто электрическое смещение  $\mathbf{D}$  (или напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ ) является характеристикой электрического (магнитного) поля, не зависящей от свойств среды, т. е. что  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , где  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — значения величин в отсутствие среды, а  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  — значения тех же величин в среде. Соответственно относительные проницаемости среды определяются в виде  $\epsilon = E_0/E$  и  $\mu = B/B_0$ . Надо иметь в виду, что такие утверждения являются неверными. Соотношения же  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\epsilon$  и  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{B}_0$  оказываются справедливыми лишь при весьма специфических условиях, которые для электрического поля определены на стр. 76, а для магнитного поля — на стр. 161.

Неправильность в общем случае равенства  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$  вытекает, в частности, из рис. 20.3. Чтобы убедиться в неправильности в общем случае соотношения  $\mu = B/B_0$ , рассмотрим большую тонкую пластинку из однородного и изотропного ферромагнетика, расположенную перпендикулярно к линиям  $\mathbf{B}$  внешнего магнитного поля. В этом случае  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ , а  $\mu$  может достигать значений порядка  $10^5$ .

6. Величины  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  надо трактовать как вспомогательные характеристики электромагнитного поля (основными являются  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ), определяемые формулами (19.3) и (52.5). Величина  $\mathbf{D}$  оказывается полезной, потому что ее дивергенция определяется плотностью только сторонних зарядов, величина  $\mathbf{H}$  — потому что ее ротор определяется плотностью только макроскопических токов (см. формулы (19.8) и (52.6)).



7. Изложение многих вопросов, касающихся колебаний и волн, значительно упрощается и облегчается, если вместо гармонических функций (т. е. косинуса и синуса) использовать экспоненты. Поэтому внедрение в вузовский курс физики представления волн в виде экспонент стало насущно необходимым. Надо иметь в виду, что привыкнуть к такому представлению очень легко, а время, затраченное на «привыкание», с лихвою окупится.

8. В § 18 вывод формулы (18.4) для объемной плотности связанных зарядов можно опустить, а саму формулу дать без вывода.

9. При нехватке времени § 45 «Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект» можно исключить.

10. Выкладки в § 57 и § 58 можно опустить, ограничившись качественным рассмотрением диа- и парамагнетизма.

11. В § 76 расчет поля для бетатрона (формулы (76.1) — (76.6)) можно опустить.

12. Главу XII «Электрический ток в газах» в сокращенный вариант программы можно не включать.

13. В § 97 «Скорость упругих волн в твердой среде» все выкладки можно опустить и дать только окончательные формулы (97.7) и (97.8).

14. В § 98 «Энергия упругой волны» вывод формулы (98.5) можно опустить и начать изучение этого параграфа с формулы (98.5).

15. Первую часть § 112 до формул (112.7) и (112.8) можно опустить.

16. Параграф 116 «Центрированная оптическая система» можно исключить.

17. В § 120 «Когерентность» можно опустить выкладки, начинающиеся формулой (120.4) и заканчивающиеся формулой (120.6).

18. Параграф 124 «Многолучевая интерференция» можно исключить.

19. В § 131 «Дифракция рентгеновских лучей» можно опустить вывод формул Лауэ и сами эти формулы и ограничиться рассмотрением формулы Брэгга — Вульфа.

20. Параграф 133 «Голография» можно исключить.

21. Часть § 135, которая относится к формулам Френеля, можно не рассматривать.

22. В § 143 «Групповая скорость» можно ограничиться элементарным рассмотрением, заканчивающимся формулой (143.7). Выкладки, начинающиеся формулой (143.8) и заканчивающиеся формулой (143.13), можно опустить.

Подчеркнем, что приведенный перечень сокращений является ориентировочным. В зависимости от обстоятельств он может быть изменен или дополнен по усмотрению преподавателя.

### ГЛАВА I

#### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

##### § 1. Электрический заряд

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Имеются два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Заряды одного знака отталкиваются, разных знаков — притягиваются друг другом.

Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. Его можно назвать элементарным зарядом. Положительный элементарный заряд мы будем обозначать буквой  $e$ .

К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (несущий отрицательный заряд  $-e$ ), протон (несущий положительный заряд  $+e$ ) и нейтрон (заряд которого равен нулю). Из этих частиц построены атомы и молекулы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным. Если каким-либо образом создать в теле избыток частиц одного знака (соответственно недостаток частиц другого знака), тело окажется заряженным. Можно также, не изменяя общего количества положительных и отрицательных частиц, вызвать их перераспределение в теле таким образом, что в одной части тела возникнет избыток зарядов одного знака, в другой — другого. Это можно осуществить, приблизив к незаряженному металлическому телу другое, заряженное тело.

Поскольку всякий заряд  $q$  образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным  $e$ :

$$q = \pm Ne. \quad (1.1)$$

Однако элементарный заряд настолько мал, что возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно.

Если физическая величина может принимать только определенные дискретные значения, говорят, что эта величина квантуется. Факт, выражаемый формулой (1.1), означает, что электрический заряд квантуется.

Величина заряда, измеряемая в различных инерциальных системах отсчета, оказывается одинаковой. Следовательно, электрический заряд является релятивистски инвариантным. Отсюда вытекает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь. Однако всегда возникают или исчезают два элементарных заряда противоположных знаков. Например, электрон и позитрон (положительный электрон) при встрече аннигилируют, т. е. превращаются в нейтральные гамма-фотоны. При этом исчезают заряды  $-e$  и  $+e$ . В ходе процесса, называемого рождением пары, гамма-фотон, попадая в поле атомного ядра, превращается в пару частиц — электрон и позитрон. При этом возникают заряды  $-e$  и  $+e$ .

Таким образом, *суммарный заряд электрически изолированной системы*<sup>1</sup> не может изменяться. Это утверждение носит название закона сохранения электрического заряда.

Отметим, что закон сохранения электрического заряда тесно связан с релятивистской инвариантностью заряда. Действительно, если бы величина заряда зависела от его скорости, то, приведя в движение заряды одного какого-то знака, мы изменили бы суммарный заряд изолированной системы.

## § 2. Закон Кулона

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов, был установлен экспериментально в 1785 г. Кулоном. Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

С помощью крутильных весов (рис. 2.1), сходных с теми, которые были использованы Кавендишем для определения гравитационной постоянной (см. т. 1, § 45), Кулон измерял силу взаимодействия

---

<sup>1</sup> Система называется электрически изолированной, если через ограничивающую ее поверхность не могут проникать заряженные частицы.

двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и от расстояния между ними. При этом Кулон исходил из того, что при касании к заряженному металлическому шарiku точно такого же незаряженного шарика заряд распределяется между обоими шариками поровну.

В результате своих опытов Кулон пришел к выводу, что *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*. Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой.

Отметим, что направление силы взаимодействия вдоль прямой, соединяющей точечные заряды, вытекает из соображений симметрии. Из опыта следует, что пространство однородно и изотропно. Следовательно, единственным направлением, выделяемым в пространстве внешними в него неподвижными точечными зарядами, является направление от одного заряда к другому. Допустим, что сила  $\mathbf{F}$ , действующая на заряд  $q_1$  (рис. 2.2), образует с направлением от  $q_1$  к  $q_2$  угол  $\alpha$ , отличный от 0 или  $\pi$ . Но в силу осевой симметрии нет никаких оснований выделить силу  $\mathbf{F}$  из множества сил других направлений, образующих с осью  $q_1 - q_2$  такой же угол  $\alpha$  (направления этих сил образуют конус

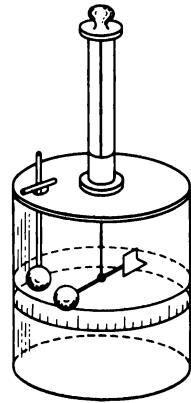


Рис. 2.1.

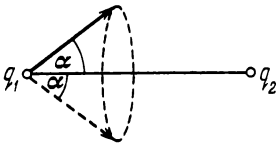


Рис. 2.2.

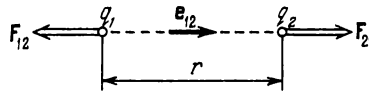


Рис. 2.3.

с углом раствора  $2\alpha$ ). Возникающее вследствие этого затруднение исчезает при  $\alpha$ , равном нулю или  $\pi$ .

Закон Кулона может быть выражен формулой

$$\mathbf{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (2.1)$$

Здесь  $k$  — коэффициент пропорциональности, который предполагается положительным,  $q_1$  и  $q_2$  — величины взаимодействующих зарядов,  $r$  — расстояние между зарядами,  $\mathbf{e}_{12}$  — единичный вектор, имеющий направление от заряда  $q_1$  к заряду  $q_2$ ,  $\mathbf{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $q_1$  (рис. 2.3; рисунок соответствует случаю

одноименных зарядов). Сила  $F_{21}$  отличается от  $F_{12}$  знаком:

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (2.2)$$

Одинаковый для обоих зарядов модуль силы взаимодействия можно представить в виде

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (2.3)$$

Опыт дает, что сила взаимодействия двух данных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить еще какие-либо заряды. Пусть имеется заряд  $q_a$  и, кроме того,  $N$  зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Из сказанного выше вытекает, что результирующая сила  $F$ , с которой действуют на  $q_a$  все  $N$  зарядов  $q_i$ , определяется формулой

$$F = \sum_{i=1}^N F_{ai}, \quad (2.4)$$

где  $F_{ai}$  — сила, с которой действует на  $q_a$  заряд  $q_i$  в отсутствие остальных  $N-1$  зарядов.

Факт, выражаемый формулой (2.4), позволяет, зная закон взаимодействия между точечными зарядами, вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды  $dq$ , чтобы их можно было считать точечными, вычислить по формуле (2.1) силу взаимодействия между зарядами  $dq$ , взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил. Математически эта операция полностью совпадает с вычислением силы гравитационного притяжения между телами конечных размеров (см. т. 1, § 45).

### § 3. Системы единиц

Надлежащим выбором единицы заряда (единицы для  $F$  и  $r$  были установлены в механике) можно добиться того, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (2.1) оказался равным единице. Соответствующая единица заряда ( $F$  и  $r$  предполагаются измеренными в единицах СГС-системы) называется абсолютной электростатической единицей заряда (сокращенно: СГСЭ-единицей заряда). Она представляет собой такой заряд, который взаимодействует в вакууме с равным ему и находящимся на расстоянии 1 см зарядом с силой в 1 дину.

Посредством тщательных измерений (они описаны в § 74) было найдено, что элементарный заряд равен

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ-ед. заряда.} \quad (3.1)$$

Приняв единицы длины, массы, времени и заряда за основные, можно построить систему единиц электрических и магнитных величин. Система, в основе которой лежат сантиметр, грамм, секунда и СГСЭ-единица заряда, называется абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ-системой). В основе этой системы лежит закон Кулона, т. е. закон взаимодействия между покоящимися зарядами. Впоследствии мы познакомимся с абсолютной электромагнитной системой единиц (СГСМ-системой), в основе которой лежит закон взаимодействия между проводниками, по которым течет электрический ток. Абсолютной является также гауссова система, в которой единицы электрических величин совпадают с единицами СГСЭ-системы, а магнитных величин — с единицами СГСМ-системы.

В системе СГСЭ формула (2.3) имеет вид

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (3.2)$$

Эта формула справедлива в том случае, если заряды находятся в вакууме. Для зарядов, помещающихся в некоторой среде, она должна быть уточнена (см. § 22).

С 1 января 1982 г. в СССР введен в действие Государственный стандарт ГОСТ 8.417—81, которым предписывается обязательное применение Международной системы единиц, обозначаемой символом СИ. Основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, кандела и моль. Единицей силы в СИ служит ньютон (Н), равный  $10^5$  дин.

При установлении единиц электрических и магнитных величин СИ, как и СГСМ-система, исходит из закона взаимодействия не зарядов, а проводников с током. Поэтому коэффициент пропорциональности в формуле закона Кулона оказывается отличной от единицы размерной величиной.

Единицей заряда в СИ является кулон (Кл). Опытным путем установлено, что

$$1 \text{ Кл} = 2,998 \cdot 10^9 \text{ (приближенно } 3 \cdot 10^9) \text{ СГСЭ-ед. заряда.} \quad (3.3)$$

Чтобы составить представление о величине заряда в 1 Кл, вычислим силу, с которой взаимодействовали бы два точечных заряда величиной 1 Кл каждый, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. В соответствии с (3.2)

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2} \text{ СГСЭ-ед.} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н.} \quad (3.4)$$

Элементарный заряд, выраженный в кулонах, равен

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (3.5)$$

#### § 4. Рационализованная запись формул

Во многие формулы электродинамики, если записывать их в СГС (в частности, в гауссовой) системах, входят множителями  $4\pi$  и так называемая электродинамическая постоянная  $c$ , равная скорости света в вакууме. Для того чтобы избавиться от них в практически наиболее важных формулах, коэффициент пропорциональности в законе Кулона полагают равным  $1/4\pi\epsilon_0$ . Тогда выражение закона для зарядов, помещающихся в вакууме, принимает вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (4.1)$$

Соответственно изменяются и другие формулы. Видоизмененная подобным образом запись формул называется *рационализованной*. Системы единиц, построенные с использованием рационализованных формул, также называются *рационализованными*. К их числу принадлежит и СИ.

Величину  $\epsilon_0$  называют *электрической постоянной*. Она имеет размерность электрической емкости, деленной на длину. Соответственно ее выражают в единицах, называемых фарада на метр. Чтобы найти числовое значение  $\epsilon_0$ , подставим в формулу (4.1) значения величин, соответствующие случаю двух зарядов по 1 Кл, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга. Согласно (3.4) сила взаимодействия в этом случае равна  $9 \cdot 10^9$  Н. Подставив это значение силы, а также  $q_1 = q_2 = 1$  Кл и  $r = 1$  м в формулу (4.1), получим

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}. \quad (4.2)$$

Гауссова система единиц широко использовалась и продолжает использоваться в физической литературе. Поэтому мы считаем необходимым познакомить читателя как с системой единиц СИ, так и с гауссовой системой. Изложение будет вестись в СИ. Попутно будет указываться, как полученные формулы выглядят в гауссовой системе. В приложении II в конце книги сопоставлена запись основных формул электродинамики в СИ и в гауссовой системе.

#### § 5. Электрическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через *электрическое поле*<sup>1</sup>. Всякий заряд изменяет

<sup>1</sup> В § 40 мы увидим, что в случае движущихся зарядов, кроме электрического поля, взаимодействие осуществляется также через посредство магнитного поля.

свойства окружающего его пространства — создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы. Следовательно, для того чтобы выяснить, имеется ли в данном месте электрическое поле, нужно поместить туда заряженное тело (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто заряд) и установить, испытывает оно действие электрической силы или нет. По величине силы, действующей на данный заряд, можно, очевидно, судить об «интенсивности» поля.

Итак, для обнаружения и исследования электрического поля нужно воспользоваться некоторым «пробным» зарядом. Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле «в данной точке», пробный заряд должен быть точечным. В противном случае сила, действующая на заряд, будет характеризовать свойства поля, усредненные по объему, занимаемому телом, которое несет на себе пробный заряд.

Исследуем с помощью точечного пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q$ . Поместив пробный заряд в точку, положение которой относительно заряда  $q$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 5.1), мы обнаружим, что на пробный заряд действует сила

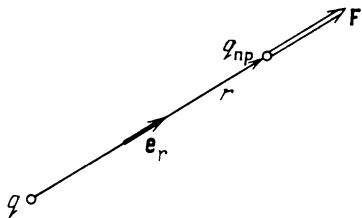


Рис. 5.1.

$$\mathbf{F} = q_{\text{пр}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \right) \quad (5.1)$$

(см. (2.2) и (4.1)). Здесь  $\mathbf{e}_r$  — орт радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ .

Из формулы (5.1) следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от величин, определяющих поле (от  $q$  и  $\mathbf{r}$ ), но и от величины пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ . Если брать разные по величине пробные заряды  $q'_{\text{пр}}$ ,  $q''_{\text{пр}}$  и т. д., то и силы  $\mathbf{F}'$ ,  $\mathbf{F}''$ , ..., которые они испытывают в данной точке поля, будут различными. Однако из (5.1) видно, что отношение  $\mathbf{F}/q_{\text{пр}}$  для всех пробных зарядов будет одним и тем же и зависит лишь от величин  $q$  и  $\mathbf{r}$ , определяющих поле в данной точке. Поэтому естественно принять это отношение в качестве величины, характеризующей электрическое поле:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}} \quad (5.2)$$

Эту векторную величину называют **напряженностью электрического поля** в данной точке (т. е. в той точке, в которой пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  испытывает действие силы  $\mathbf{F}$ ).



В соответствии с формулой (5.2) напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Отметим, что формула (5.2) остается справедливой и в том случае, когда в качестве пробного взят отрицательный заряд ( $q_{\text{пр}} < 0$ ). В этом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$  имеют противоположные направления.

К понятию о напряженности электрического поля мы пришли, исследуя поле неподвижного точечного заряда. Однако определение (5.2) распространяется и на случай поля, создаваемого любой совокупностью неподвижных зарядов. В этом случае, впрочем, необходимо следующее уточнение. Может случиться, что расположение зарядов, обуславливающих исследуемое поле, изменяется под воздействием пробного заряда. Это произойдет, например, когда заряды, создающие поле, расположены на проводнике и могут свободно перемещаться в его пределах. Поэтому, чтобы не внести заметных изменений в исследуемое поле, величину пробного заряда нужно брать достаточно малой.

Из формул (5.2) и (5.1) следует, что напряженность поля точечного заряда пропорциональна величине заряда  $q$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  от заряда до данной точки поля:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (5.3)$$

Направлен вектор  $\mathbf{E}$  вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

В гауссовой системе формула для напряженности поля точечного заряда в вакууме имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (5.4)$$

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность в такой точке, в которой на заряд, равный единице (1 Кл в СИ, 1 СГСЭ-единице заряда в гауссовой системе), действует сила, величина которой также равна единице (1 Н в СИ, 1 дин в гауссовой системе). В гауссовой системе эта единица специального названия не имеет. В СИ единица напряженности электрического поля имеет название вольт на метр и обозначается В/м (см. формулу (8.5)).

В соответствии с (5.3) заряд в 1 Кл создает в вакууме на расстоянии 1 м напряженность

$$E = \frac{1}{4\pi [1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)]} \frac{1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ В/м.}$$

Та же напряженность в гауссовой системе равна

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{100^2} = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$$

Сопоставляя оба результата, находим, что

$$1 \text{ СГСЭ-ед. напряженности поля} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м.} \quad (5.5)$$

Согласно (5.2) сила, действующая на пробный заряд, равна

$$\mathbf{F} = q_{\text{пр}} \mathbf{E}.$$

Очевидно, что на всякий точечный заряд  $q^1$  в точке поля с напряженностью  $\mathbf{E}$  будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}. \quad (5.6)$$

Если заряд  $q$  положителен, направление силы совпадает с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . В случае отрицательного  $q$  направления векторов  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{E}$  противоположны.

В § 2 было указано, что сила, с которой система зарядов действует на некоторый не входящий в систему заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности (см. формулу (2.4)). Отсюда вытекает, что *напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:*

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (5.7)$$

Последнее утверждение носит название принципа суперпозиции (наложения) электрических полей.

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов. Разбив протяженные заряды на достаточно малые доли  $dq$ , любую систему зарядов можно свести к совокупности точечных зарядов. Вклад каждого из таких зарядов в результирующее поле вычисляется по формуле (5.3).

Электрическое поле можно описать, указав для каждой точки величину и направление вектора  $\mathbf{E}$ . Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электрического поля (ср. с полем вектора скорости, т. 1, § 72). Поле вектора скорости можно представить очень наглядно с помощью линий тока. Аналогично электрическое поле можно описать с помощью линий напряженности, которые мы будем называть сокращенно линиями  $\mathbf{E}$  (их называют также силовыми линиями). Линии напряженности проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Густота линий выбирается так, чтобы

---

<sup>1</sup> В формуле (5.3)  $q$  означает заряд, обуславливающий поле. В формуле (5.6) через  $q$  обозначен заряд, испытывающий в точке с напряженностью  $\mathbf{E}$  действие силы  $\mathbf{F}$ .

количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно числовому значению вектора  $\mathbf{E}$ . Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и величине вектора  $\mathbf{E}$  в разных точках пространства (рис. 5.2).

Линии  $\mathbf{E}$  поля точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 5.3). Линии одним концом опираются на заряд, другим уходят в бесконечность. В самом деле, полное число линий, пересекающих сферическую поверхность произвольного радиуса  $r$ , будет равно произведению густоты линий на поверхность сферы  $4\pi r^2$ . Густота линий по условию численно равна  $E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r^2)$ . Следовательно, количество линий численно равно  $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r^2) \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$ . Полученный результат означает, что число линий на любом расстоянии от заряда будет одним и тем же. Отсюда и вытекает, что линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются; они, начавшись

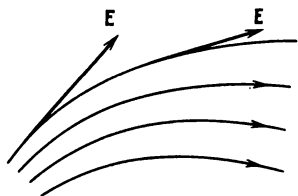


Рис. 5.2.

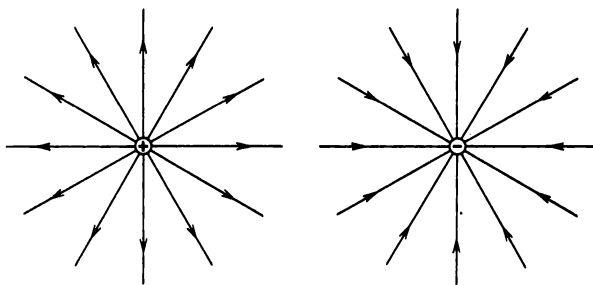


Рис. 5.3.

на заряде, уходят в бесконечность (заряд положителен), либо, приходя из бесконечности, заканчиваются на заряде (заряд отрицателен). Это свойство линий  $\mathbf{E}$  является общим для всех электростатических полей, т. е. полей, создаваемых любой системой неподвижных зарядов: линии напряженности могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

## § 6. Потенциал

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q$ . В любой точке этого поля на точечный заряд  $q'$  действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r = F(r) \mathbf{e}_r. \quad (6.1)$$

Здесь  $F(r)$  — модуль силы  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{e}_r$  — орт радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего положение заряда  $q'$  относительно заряда  $q$ .

Сила (6.1) является центральной (см. т. 1, § 21). Центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом  $q'$  при перемещении его из одной точки в другую, не зависит от пути. Эта работа равна

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) \mathbf{e}_r d\mathbf{l}, \quad (6.2)$$

где  $d\mathbf{l}$  — элементарное перемещение заряда  $q'$ . Из рис. 6.1 видно, что скалярное произведение  $\mathbf{e}_r d\mathbf{l}$  равно приращению модуля радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , т. е.  $dr$ . Поэтому формулу (6.2) можно представить в виде

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) dr$$

(ср. с формулой (21.3) 1-го тома). Подстановка выражения для  $F(r)$  дает

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right). \quad (6.3)$$

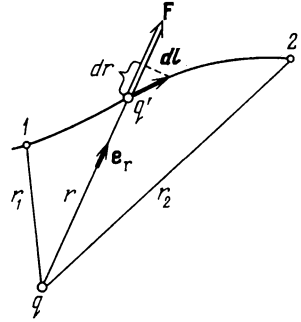


Рис. 6.1.

Работа сил консервативного поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (6.4)$$

Сопоставление формул (6.3) и (6.4) приводит к следующему выражению для потенциальной энергии заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ :

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

Значение константы в выражении потенциальной энергии обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. при  $r = \infty$ ) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (6.5)$$

Воспользуемся зарядом  $q'$  в качестве пробного заряда для исследования поля. Согласно (6.5) потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины  $q'$ , но и от величин  $q$  и  $r$ , определяющих поле. Следовательно, эта энергия

может быть использована для описания поля, подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды  $q'_{\text{пр}}$ ,  $q''_{\text{пр}}$  и т. д. будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией  $W'_p$ ,  $W''_p$  и т. д. Однако отношение  $W_p/q_{\text{пр}}$  будет для всех зарядов одним и тем же (см. формулу (6.5)). Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}} \quad (6.6)$$

называется потенциалом поля в данной точке и используется, наряду с напряженностью поля  $E$ , для описания электрических полей.

Из (6.6) следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд. Подставив в (6.6) значение потенциальной энергии (6.5), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (6.7)$$

В гауссовой системе потенциал поля точечного заряда в вакууме определяется формулой

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим  $r_1, r_2, \dots, r_N$ . Работа, совершаемая силами этого поля над зарядом  $q'$ , будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i.$$

Согласно (6.3) каждая из работ  $A_i$  равна

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

где  $r_{i1}$  — расстояние от заряда  $q_i$  до начального положения заряда  $q'$ ,  $r_{i2}$  — расстояние от  $q_i$  до конечного положения заряда  $q'$ . Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Сопоставив это выражение с соотношением (6.4), получим для потенциальной энергии заряда  $q'$  в поле системы зарядов выражение

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_i},$$

из которого следует, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}. \quad (6.8)$$

Сопоставление полученной формулы с выражением (6.7) приводит к выводу, что *потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности*. В то время как напряженности поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов оказывается обычно гораздо проще, чем вычисление напряженностей электрического поля.

Из формулы (6.6) вытекает, что заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией

$$W_p = q\varphi. \quad (6.9)$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом  $q$  может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6.10)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках (т. е. на убыль потенциала).

Если заряд  $q$  из точки с потенциалом  $\varphi$  удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_\infty = q\varphi. \quad (6.11)$$

Отсюда следует, что *потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность*. Такую же по величине работу нужно совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Формулу (6.11) можно использовать для установления единиц потенциала. За единицу потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. Так, в СИ за единицу потенциала, называемую вольт (сокращенное обозначение — В), принимается потенциал в такой

точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного 1 кулону, нужно совершить работу в 1 джоуль:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В},$$

отсюда

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}. \quad (6.12)$$

За абсолютную электростатическую единицу потенциала (СГСЭ-ед. потенциала) принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного +1 единице СГСЭ, нужно совершить работу в 1 эрг. Выражая в (6.12) 1 Дж и 1 Кл через единицы СГСЭ, найдем соотношение между вольтom и СГСЭ-ед. потенциала:

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = \frac{10^7 \text{ эрг}}{3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}} = \frac{1}{300} \text{ СГСЭ-ед. потенциала}. \quad (6.13)$$

Таким образом, одна СГСЭ-единица потенциала равна 300 В.

В физике часто пользуются единицей энергии и работы, называемой электронвольтom (эВ). Под электронвольтom подразумевается работа, совершаемая силами поля над зарядом, равным заряду электрона (т. е. над элементарным зарядом  $e$ ), при прохождении им разности потенциалов в 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}. \quad (6.14)$$

Используются также кратные электронвольту единицы:

$$\begin{aligned} 1 \text{ кэВ} \text{ (килоэлектронвольт)} &= 10^3 \text{ эВ}, \\ 1 \text{ МэВ} \text{ (мегаэлектронвольт)} &= 10^6 \text{ эВ}, \\ 1 \text{ ГэВ} \text{ (гигаэлектронвольт)} &= 10^9 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

## § 7. Энергия взаимодействия системы зарядов

Выражение (6.5) можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию зарядов  $q$  и  $q'$ . Обозначив заряды через  $q_1$  и  $q_2$ , получим для их энергии взаимодействия формулу

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (7.1)$$

Расстояние между зарядами мы обозначили символом  $r_{12}$ .

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . В § 23 1-го тома было показано, что энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{pik}(r_{ik}) \quad (7.2)$$

(см. формулу (23.20) 1-го тома). Согласно (7.1)

$$W_{pik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (7.2) дает, что

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (7.3)$$

В гауссовой системе в этой формуле отсутствует множитель  $1/4\pi\epsilon_0$ .

В формуле (7.3) суммирование производится по индексам  $i$  и  $k$ . Оба индекса пробегают, независимо друг от друга, все значения от 1 до  $N$ . Слагаемые, для которых значение индекса  $i$  совпадает со значением индекса  $k$ , не принимаются во внимание. Придадим формуле (7.3) следующий вид:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}. \quad (7.4)$$

Выражение

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{q_k}{r_{ik}}$$

представляет собой потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в той точке, где помещается заряд  $q_i$ . Приняв это во внимание, получим для энергии взаимодействия следующую формулу:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (7.5)$$

## § 8. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\mathbf{E}$ , либо с помощью скалярной величины  $\varphi$ . Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Если учесть, что  $\mathbf{E}$  пропорционально силе, действующей на заряд, а  $\varphi$  — потенциальной энергии заряда, легко сообразить, что эта связь должна быть аналогична связи между потенциальной энергией и силой.

Сила  $\mathbf{F}$  связана с потенциальной энергией соотношением

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (8.1)$$

(см. формулу (22.7) 1-го тома). Для заряженной частицы, находящейся в электростатическом поле,  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ,  $W_p = q\varphi$ . Подставив



эти значения в соотношение (8.1), получим, что

$$q\mathbf{E} = -\nabla(q\varphi).$$

Константу  $q$  можно вынести за знак градиента. Осуществив это и сократив затем на  $q$ , придем к формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (8.2)$$

устанавливающей связь между напряженностью поля и потенциалом.

Приняв во внимание определение градиента (см. формулу (22.6) 1-го тома), можно написать, что

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \quad (8.3)$$

Следовательно, в проекциях на координатные оси соотношение (8.2) имеет вид

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Аналогично проекция вектора  $\mathbf{E}$  на произвольное направление  $l$  равна взятой с обратным знаком производной  $\varphi$  по  $l$ , т. е. скорости убывания потенциала при перемещении вдоль направления  $l$ :

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (8.5)$$

В справедливости формулы (8.5) легко убедиться, выбрав направление  $l$  в качестве одной из координатных осей и приняв во внимание соотношения (8.4).

Поясним соотношение (8.2) на примере поля точечного заряда. Потенциал этого поля выражается формулой (6.7). Перейдя к декартовым координатам, получим выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Частная производная этой функции по  $x$  равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}.$$

Подставив найденные значения производных в формулу (8.3), придем к выражению

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

которое совпадает с (5.3).

Формула (8.2) позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т. е. по заданным значениям  $E$  в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = \int_1^2 qE dl.$$

Вместе с тем в соответствии с (6.10) та же работа может быть представлена в виде

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняв друг другу эти два выражения и сократив на  $q$ , придем к соотношению

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl. \quad (8.6)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$  и формула (8.6) переходит в соотношение

$$\oint E dl = 0 \quad (8.7)$$

(кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутому пути). Заметим, что это соотношение справедливо только для электростатического поля. Впоследствии мы выясним, что поле движущихся зарядов (т. е. поле, изменяющееся со временем) не является потенциальным; следовательно, условие (8.7) для него не выполняется.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью. Ее уравнение имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

При перемещении по эквипотенциальной поверхности на отрезок  $dl$  потенциал не изменяется ( $d\varphi = 0$ ). Следовательно, согласно формуле (8.5) касательная к поверхности составляющая вектора  $E$  равна нулю. Отсюда заключаем, что вектор  $E$  в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку. Приняв во внимание, что вектор  $E$  направлен по касательной к линии  $E$ , легко сообразить, что линии напряженности в каждой точке ортогональны к эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля. Следовательно, таких поверхностей может быть построено бесконечное множество. Условливаются проводить поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряженности поля. Действительно, чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности. Следовательно, тем больше в данном месте  $\nabla \varphi$ , а значит и  $E$ .

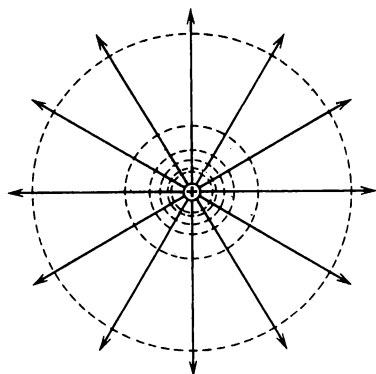


Рис. 8.1.

На рис. 8.1 показаны эквипотенциальные поверхности (точнее, их пересечения с плоскостью чертежа) для поля точечного заряда. В соответствии с характером зависимости  $E$  от  $r$  эквипотенциальные поверхности при приближении к заряду становятся гуще.

Для однородного поля эквипотенциальные поверхности представляют собой систему равноотстоящих друг от друга плоскостей, перпендикулярных к направлению поля.

## § 9. Диполь

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя.

Вычислим сначала потенциал, а затем напряженность поля диполя. Это поле обладает осевой симметрией. Поэтому картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, будет одной и той же, причем вектор  $E$  лежит в этой плоскости. Положение точки относительно диполя будем характеризовать с помощью радиус-вектора  $r$  либо с помощью полярных координат  $r$  и  $\varphi$  (рис. 9.1). Введем вектор  $l$ , проведенный от отрицательного заряда к положительному. Положение заряда  $+q$  относительно центра диполя определяется вектором  $a$ , заряда  $-q$  — вектором  $-a$ . Очевидно, что  $l = 2a$ . Расстояния до данной точки от зарядов  $+q$  и  $-q$  обозначим соответственно через  $r_+$  и  $r_-$ . Ввиду малости  $a$  по сравнению

с  $r$  можно положить приближенно, что

$$\begin{aligned} r_+ &= r - a \cos \vartheta = r - ae_r, \\ r_- &= r + a \cos \vartheta = r + ae_r. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

Произведение  $r_+ r_-$  можно заменить через  $r^2$ . Разность  $r_- - r_+$  согласно формулам (9.1) равна  $2ae_r = l e_r$ . Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql e_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (9.2)$$

где

$$\mathbf{p} = ql \quad (9.3)$$

— характеристика диполя, называемая его электрическим моментом. Вектор  $\mathbf{p}$  направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному (рис. 9.2).

Из формулы (9.2) вытекает, что поле диполя определяется его электрическим моментом  $\mathbf{p}$ . Ниже мы увидим, что и поведение диполя во внешнем электрическом поле также определяется его электрическим моментом  $\mathbf{p}$ . Сравнение с выражением (6.7) показывает, что потенциал поля диполя убывает с расстоянием быстрее (как  $1/r^2$ ),

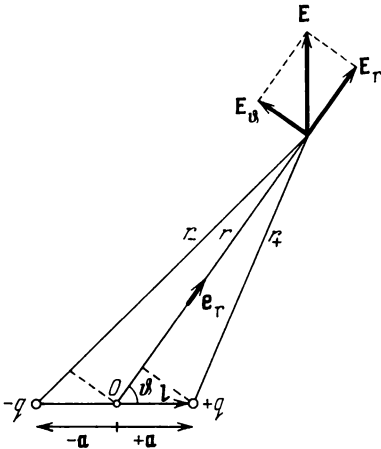


Рис. 9.1

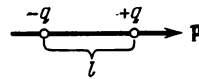


Рис. 9.2

чем потенциал поля точечного заряда (который изменяется по закону  $1/r$ ).

Из рис. 9.1 видно, что  $\mathbf{p} \mathbf{e}_r = p \cos \vartheta$ . Поэтому выражение (9.2) можно написать следующим образом:

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}. \quad (9.4)$$

Чтобы найти напряженность поля диполя, вычислим по формуле (8.5) проекции вектора  $\mathbf{E}$  на два взаимно перпендикулярных направления. Одно из них определяется движением точки, вызванным изменением расстояния  $r$  (при фиксированном  $\vartheta$ ), второе — движением точки, обусловленным изменением угла  $\vartheta$  (при фиксированном  $r$ ; см. рис. 9.1). Первая проекция получается путем дифференцирования выражения (9.4) по  $r$ :

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}. \quad (9.5)$$

Вторую проекцию (обозначим ее  $E_\vartheta$ ) получим, взяв отношение приращения потенциала  $\varphi$ , получающегося при возрастании угла  $\vartheta$  на  $d\vartheta$ , к расстоянию  $r d\vartheta$ , на которое перемещается при этом конец отрезка  $r$  (в этом случае фигурирующее в формуле (8.5)  $dl$  равно  $r d\vartheta$ ). Таким образом,

$$E_\vartheta = -\frac{\partial \varphi}{r d\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}.$$

Подставив значение производной от функции (9.4) по  $\vartheta$ , получим

$$E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}. \quad (9.6)$$

Сумма квадратов выражений (9.5) и (9.6) дает квадрат вектора  $\mathbf{E}$  (см. рис. 9.1):

$$\begin{aligned} E^2 = E_r^2 + E_\vartheta^2 &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}. \quad (9.7)$$

Положив в (9.7)  $\vartheta = 0$ , получим напряженность на оси диполя:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (9.8)$$

Вектор  $\mathbf{E}_{||}$  направлен по оси диполя. Это согласуется с осевой симметрией задачи. Из формулы (9.5) следует, что  $E_r > 0$  при  $\vartheta = 0$  и  $E_r < 0$  при  $\vartheta = \pi$ . Это означает, что в любом случае вектор  $\mathbf{E}_{||}$  имеет направление, совпадающее с направлением от  $-q$  к  $+q$  (т. е. с направлением  $\mathbf{p}$ ). Поэтому формулу (9.8) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{E}_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \quad (9.9)$$

Положив в (9.7)  $\vartheta = \pi/2$ , получим напряженность на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к его оси:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (9.10)$$

Согласно формуле (9.5) при  $\vartheta = \pi/2$  проекция  $E_r$  равна нулю. Следовательно, вектор  $E_{\perp}$  параллелен оси диполя. Из формулы (9.6) следует, что при  $\vartheta = \pi/2$  проекция  $E_{\vartheta}$  положительна. Это означает, что вектор  $E_{\perp}$  направлен в сторону возрастания угла  $\vartheta$ , т. е. антипараллельно вектору  $p$ .

Характерным для напряженности поля диполя является то обстоятельство, что она убывает с расстоянием от диполя как  $1/r^3$ , т. е. быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (убывающая как  $1/r^2$ ).

На рис. 9.3 показаны линии  $E$  поля диполя. Согласно формуле (9.4) при  $\vartheta = \pi/2$  потенциал обращается в нуль для всех  $r$ . Таким образом, все точки плоскости, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину, имеют нулевой потенциал. Это

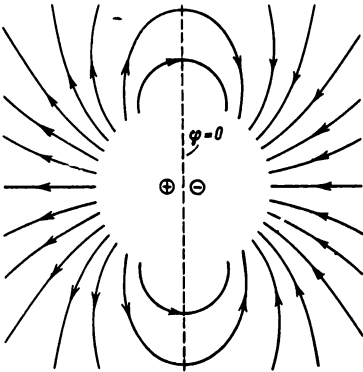


Рис. 9.3.

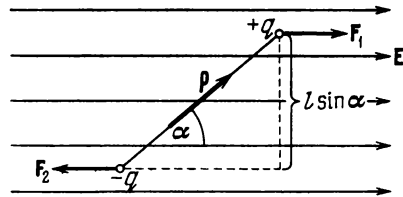


Рис. 9.4.

можно было предвидеть заранее, поскольку расстояния от зарядов  $+q$  и  $-q$  до любой точки этой плоскости одинаковы.

Теперь рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Если диполь поместить в однородное электрическое поле, образующие диполь заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 9.4). Эти силы образуют пару, плечо которой равно  $l \sin \alpha$ , т. е. зависит от ориентации диполя относительно поля. Модуль каждой из сил равен  $qE$ . Умножив его на плечо, получим величину момента пары сил, действующих на диполь:

$$N = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha \quad (9.11)$$

( $p$  — электрический момент диполя). Легко сообразить, что формула (9.11) может быть написана в векторном виде:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]. \quad (9.12)$$

Момент сил (9.12) стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\mathbf{p}$  установился по направлению поля.

Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле. Согласно формуле (6.9) эта энергия равна

$$W_p = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-). \quad (9.13)$$

Здесь  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  — значения потенциала внешнего поля в тех точках, где помещаются заряды  $+q$  и  $-q$ .

Потенциал однородного поля убывает линейно в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Приняв это направление за ось  $x$  (рис. 9.5), можно

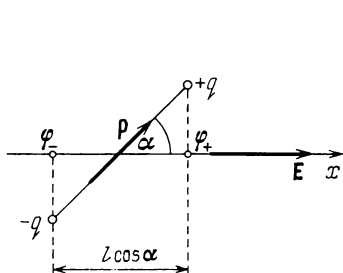


Рис. 9.5.

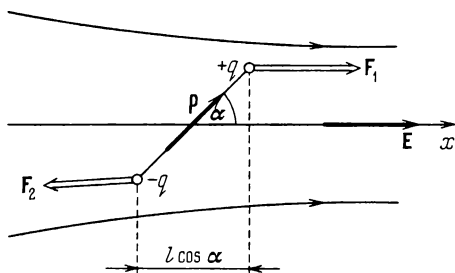


Рис. 9.6.

написать, что  $E = E_x = -d\varphi/dx$ . Из рис. 9.5 видно, что разность  $\varphi_+ - \varphi_-$  равна приращению потенциала на отрезке  $\Delta x = l \cos \alpha$ :

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -El \cos \alpha.$$

Подставив это значение в формулу (9.13), получим, что

$$W_p = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha. \quad (9.14)$$

В этой формуле  $\alpha$  есть угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ , поэтому ее можно написать в виде

$$W_p = -\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (9.15)$$

Заметим, что это выражение не учитывает энергию взаимодействия зарядов  $+q$  и  $-q$ , образующих диполь.

Мы получили формулу (9.15), считая для простоты поле однородным. Однако эта формула справедлива и для неоднородного поля.

Рассмотрим диполь, находящийся в неоднородном поле, обладающем симметрией относительно оси  $x$ <sup>1</sup>. Пусть центр диполя

<sup>1</sup> Частным случаем такого поля является поле точечного заряда, если в качестве оси  $x$  взять прямую, проходящую через заряд.

лежит на этой оси, причем электрический момент диполя образует с осью угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$  (рис. 9.6). В этом случае силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы по величине. Поэтому, кроме вращательного момента, на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его в направлении оси  $x$ . Чтобы получить значение этой силы, воспользуемся формулой (8.1), согласно которой

$$F_x = -\partial W_p / \partial x, \quad F_y = -\partial W_p / \partial y, \quad F_z = -\partial W_p / \partial z.$$

В соответствии с (9.14)

$$W_p(x, y, z) = -pE(x, y, z) \cos \alpha$$

(ориентацию диполя относительно вектора  $\mathbf{E}$  считаем неизменной:  $\alpha = \text{const}$ ).

Для точек оси  $x$  производные  $E$  по  $y$  и  $z$  равны нулю. Соответственно  $\partial W_p / \partial y = \partial W_p / \partial z = 0$ . Таким образом, отлична от нуля лишь компонента силы  $F_x$ . Она равна

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha. \quad (9.16)$$

Этот результат можно получить, приняв во внимание, что напряженность поля в точках, где помещаются заряды  $+q$  и  $-q$  (см. рис. 9.6), отличается на величину  $(\partial E / \partial x) l \cos \alpha$ . Соответственно разность сил, действующих на заряды, равна  $q(\partial E / \partial x) \cdot l \cos \alpha$ , что совпадает с (9.16)

При  $\alpha < \pi/2$  определяемая формулой (9.16) величина  $F_x$  положительна. Это означает, что под действием силы диполь втягивается в область более сильного поля (см. рис. 9.6). При  $\alpha > \pi/2$  диполь выталкивается из поля.

В случае, изображенном на рис. 9.7, у силы, действующей на диполь, отлична от нуля лишь компонента  $F_y$ , которая равна

$$F_y = p \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Слева от начала координат  $E_y$  положительна, а справа — отрицательна. Отсюда заключаем, что  $\partial E_y / \partial x$ , а следовательно и  $F_y$ , отрицательна. Таким образом, сила имеет направление, показанное на рисунке, — диполь втягивается в поле.

Отметим, что подобно тому, как  $-\partial W_p / \partial x$  дает проекцию на ось  $x$  силы, действующей на систему, производная от выражения

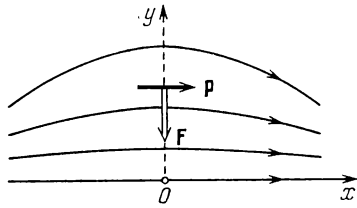


Рис. 9.7.



(9.14) по  $\alpha$ , взятая с обратным знаком, дает проекцию вращательного момента на «ось»  $\alpha$ :  $N_\alpha = -pE \sin \alpha$ . Знак минус получился потому, что «ось»  $\alpha$  и момент  $N$  имеют противоположные направления (см. рис. 9.4).

## § 10. Поле системы зарядов на больших расстояниях

Возьмем систему  $N$  зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , размещенных в объеме с линейными размерами порядка  $l$ , и исследуем поле, создаваемое этой системой на расстояниях  $r$ , больших по сравнению с  $l$  ( $r \gg l$ ). Выберем начало координат  $O$  внутри объема, занимаемого системой, и определим положения зарядов с помощью радиусов-векторов  $\mathbf{r}_i$  (рис. 10.1; чтобы не загромождать рисунок, мы показали только радиус-вектор  $i$ -го заряда).

Потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (10.1)$$

Вследствие малости  $r_i$  по сравнению с  $r$  можно положить, что

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = r - \mathbf{r}_i \mathbf{e}_r = r(1 - \mathbf{r}_i \mathbf{e}_r / r)$$

(ср. с (9.1)). Подстановка этого выражения в формулу (10.1) дает

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r} \frac{1}{1 - \mathbf{r}_i \mathbf{e}_r / r}, \quad (10.2)$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x,$$

справедливой при  $x \ll 1$ , преобразуем выражение (10.2) следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{e}_r}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sum q_i \mathbf{r}_i) \mathbf{e}_r}{r^2}. \quad (10.3)$$

Первый член полученного выражения представляет собой потенциал поля точечного заряда величины  $q = \sum q_i$  (ср. с (6.7)). Второй член имеет такой же вид, как выражение, определяющее потенциал поля диполя, причем роль электрического момента диполя играет величина

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (10.4)$$

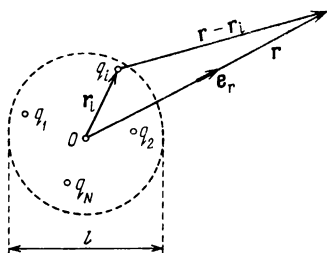


Рис. 10.1.

Эта величина называется дипольным электрическим моментом системы зарядов. Легко проверить, что в случае диполя формула (10.4) переходит в уже знакомое нам выражение:  $\mathbf{p} = ql$ .

Если суммарный заряд системы равен нулю ( $\sum q_i = 0$ ), значение дипольного момента не зависит от выбора начала координат. Чтобы убедиться в этом, возьмем два произвольных начала координат  $O$  и  $O'$  (рис. 10.2). Между радиусами-векторами  $i$ -го заряда, проведенными из этих точек, имеется соотношение

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{b} + \mathbf{r}_i \quad (10.5)$$

(что такое вектор  $\mathbf{b}$ , ясно из рисунка). С учетом (10.5) дипольный момент в системе с началом  $O'$  равен

$$\mathbf{p}' = \sum q_i \mathbf{r}'_i = \sum q_i (\mathbf{b} + \mathbf{r}_i) = \mathbf{b} \sum q_i + \sum q_i \mathbf{r}_i.$$

Первое слагаемое равно нулю (так как  $\sum q_i = 0$ ); второе представляет собой  $\mathbf{p}$  — дипольный момент в системе координат с началом в точке  $O$ . Таким образом, мы получили, что  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ .

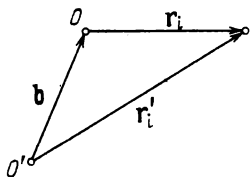


Рис. 10.2.

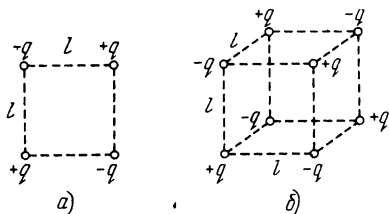


Рис. 10.3.

Выражение (10.3) по существу представляет собой первые члены разложения функции (10.1) в ряд по степеням величин  $r_i/r$ . Если  $\sum q_i \neq 0$ , основной вклад в потенциал вносит первый член формулы (10.3) (второй член убывает как  $1/r^2$  и потому много меньше первого). Для электрически нейтральной системы ( $\sum q_i = 0$ ) первый член равен нулю, и потенциал определяется в основном вторым членом формулы (10.3). Так, в частности, обстоит дело в случае поля диполя.

Для изображенной на рис. 10.3, а системы зарядов, называемой квадруполем, и  $\sum q_i$ , и  $\mathbf{p}$  равны нулю, так что формула (10.3) дает нулевое значение потенциала. В действительности же поле квадруполя хотя и много слабее, чем поле диполя (с такими же  $q$  и  $l$ ), но отлично от нуля. Потенциал поля, создаваемого квадруполем, определяется в основном третьим членом разложения, который пропорционален  $1/r^3$ . Для получения этого члена нужно учесть величины порядка  $(r_i/r)^2$ , которыми мы пренебрегали при выводе формулы (10.3). Для показанной на рис. 10.3, б системы зарядов,

называемой октуполем, равен нулю и третий член разложения. Потенциал поля такой системы определяется четвертым членом разложения, который пропорционален  $1/r^4$ .

Отметим, что стоящая в числителе первого члена формулы (10.3) величина, равная  $\sum q_i$ , называется монополем или мультиполем нулевого порядка, диполь называется мультиполем первого порядка, квадруполь — мультиполем второго порядка и т. д.

Итак, в общем случае поле системы зарядов на больших расстояниях можно представить как наложение полей, создаваемых мультиполями разных порядков — монополем, диполем, квадруполем, октуполем и т. д.

## § 11. Описание свойств векторных полей

Чтобы продвинуться дальше в изучении электрического поля, необходимо ознакомиться с математическим аппаратом, применяемым для описания свойств векторных полей. Этот аппарат называется векторным анализом. В данном параграфе мы рассмотрим основные понятия и некоторые формулы векторного анализа, а также докажем две главные теоремы векторного анализа: теорему Остроградского — Гаусса и теорему Стокса.

Наибольшую наглядность величины, используемые в векторном анализе, имеют в случае поля вектора скорости текущей жидкости. Поэтому мы будем вводить эти величины, рассматривая течение идеальной несжимаемой жидкости, а затем распространять полученные результаты на векторные поля любой природы.

С одним из понятий векторного анализа мы уже знакомы. Это — г р а д и е н т, используемый для характеристики скалярных полей. Если каждой точке  $P$  с координатами  $x, y, z$  сопоставляется значение скалярной величины  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , говорят, что задано скалярное поле  $\varphi$ . Градиентом величины  $\varphi$  называется вектор

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (11.1)$$

Приращение функции  $\varphi$  при смещении на отрезок  $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$  равно

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

что можно представить в виде

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (11.2)$$

Теперь перейдем к установлению характеристик векторных полей.

**Поток вектора.** Пусть течение жидкости охарактеризовано полем вектора скорости. Объем жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность  $S$ , называется потоком жидкости через эту поверхность. Чтобы найти поток, разобьем поверхность на элементарные участки величины  $\Delta S$ . Из рис. 11.1 видно, что за время  $\Delta t$  через участок  $\Delta S$  пройдет объем жидкости, равный

$$\Delta V = \Delta S \cos \alpha \cdot v \Delta t.$$

Разделив этот объем на промежуток времени  $\Delta t$ , найдем поток через поверхность  $\Delta S$ :

$$\Delta \Phi = \Delta V / \Delta t = \Delta S v \cos \alpha.$$

Перейдя к дифференциалам, получим, что

$$d\Phi = v \cos \alpha \cdot dS. \quad (11.3)$$

Формулу (11.3) можно написать еще двумя способами. Во-первых, если учесть, что  $v \cos \alpha$  дает проекцию вектора скорости на нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке  $dS$ , можно представить (11.3) в виде

$$d\Phi = v_n dS. \quad (11.4)$$

Во-вторых, можно ввести вектор  $d\mathbf{S}$ , модуль которого равен величине площадки  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали к площадке  $\mathbf{n}$ :

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}.$$

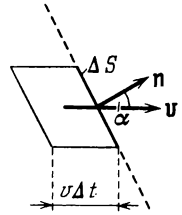


Рис. 11.1.

Поскольку выбор направления вектора  $\mathbf{n}$  условен (его можно направить как в одну сторону от площадки, так и в другую),  $d\mathbf{S}$  является не истинным вектором, а псевдовектором. Угол  $\alpha$  в формуле (11.3) есть угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{S}$ . Следовательно, эту формулу можно написать в виде

$$d\Phi = \mathbf{v} d\mathbf{S}. \quad (11.5)$$

Просуммировав потоки через все элементарные площадки, на которые мы разбили поверхность  $S$ , получим поток жидкости через  $S$ :

$$\Phi_v = \int_S \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int_S v_n dS. \quad (11.6)$$

Аналогичное выражение, написанное для произвольного векторного поля  $\mathbf{a}$ , т. е. величина

$$\Phi_a = \int_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_S a_n dS, \quad (11.7)$$

называется потоком вектора  $\mathbf{a}$  через поверхность  $S$ . В соответствии с этим определением поток жидкости может быть назван потоком вектора  $\mathbf{v}$  через соответствующую поверхность (см. (11.6)).

Поток вектора есть алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность  $S$  при вычислении потока. Изменение направления нормали на противоположное изменяет знак у  $a_n$ , а следовательно, и знак величины (11.7). В случае замкнутых поверхностей принято вычислять поток, «вытекающий» из охватываемой поверхностью области наружу. Соответственно в качестве  $\mathbf{n}$  в дальнейшем будет всегда подразумеваться обращенная наружу (т. е. внешняя) нормаль.

Потоку вектора можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Для этого представим векторное поле системой линий  $\mathbf{a}$ , построенных так, чтобы густота линий в каждом месте была численно равна модулю вектора  $\mathbf{a}$  в той же точке поля (ср. с правилом построения линий вектора  $\mathbf{E}$ , изложенным в конце § 5). Найдем число  $\Delta N$  пересечений линий поля с воображаемой площадкой  $\Delta S$ . Из рис. 11.2 видно, что это число равно густоте линий (т. е.  $a$ ), умноженной на  $\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha$ :

$$\Delta N(=) a \Delta S \cos \alpha = a_n \Delta S.$$

Речь идет лишь о числовом равенстве между  $\Delta N$  и  $a_n \Delta S$ . Поэтому знак равенства заключен в скобки. Согласно (11.7) выражение  $a_n \Delta S$  представляет собой  $\Delta \Phi_a$  — поток вектора  $\mathbf{a}$  через площадку  $\Delta S$ . Таким образом,

$$\Delta N(=) \Delta \Phi_a. \quad (11.8)$$

Для того чтобы знак  $\Delta N$  совпал со знаком  $\Delta \Phi_a$ , нужно пересечения, при которых угол  $\alpha$  между положительным направлением линии поля и нормалью к площадке является острым, считать положительными. В случае же, если угол  $\alpha$  тупой, пересечение нужно считать отрицательным. Для изображенной на рис. 11.2 площадки все три пересечения являются положительными:  $\Delta N = +3$  ( $\Delta \Phi_a$  в этом случае также положителен, поскольку  $a_n > 0$ ). Если направление нормали на рис. 11.2 изменить на обратное, пересечения станут отрицательными ( $\Delta N = -3$ ), поток  $\Delta \Phi_a$  также будет отрицательным.

Просуммировав выражение (11.8) по конечной воображаемой поверхности  $S$ , получим соотношение

$$\Phi_a(=) \sum \Delta N = N_+ - N_-, \quad (11.9)$$

где под  $N_+$  подразумевается полное число положительных пересечений линий поля с поверхностью  $S$ , а под  $N_-$  — полное число отрицательных пересечений.

Может вызвать недоумение то обстоятельство, что, поскольку поток, как правило, выражается нецелым числом, сопоставляемое потоку число пересечений линий поля с поверхностью также будет нецелым. Однако смущаться этим не следует. Линии поля представляют собой чисто условный образ, никакого физического смысла они не имеют.

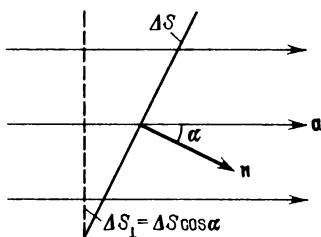


Рис. 11.2.

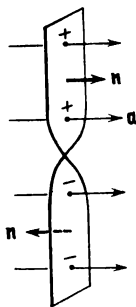


Рис. 11.3.

Возьмем воображаемую поверхность в виде полоски бумаги, нижняя часть которой закручена относительно верхней на угол  $\pi$  (рис. 11.3). Выбор направления нормали для всей поверхности должен быть сделан одинаковым образом. Поэтому, если в верхней части полоски положительную нормаль направить вправо, то в нижней части нормаль будет направлена влево. Соответственно пересечения изображенных на рис. 11.3 линий поля с верхней половиной поверхности нужно считать положительными, а с нижней половиной — отрицательными.

Для замкнутой поверхности (рис. 11.4) положительной считается внешняя нормаль. Поэтому пересечения, соответствующие выходу линий наружу (в этом случае угол  $\alpha$  острый), нужно брать со знаком плюс, а пересечения, возникающие при входе линий внутрь (в этом случае угол  $\alpha$  тупой), надо брать со знаком минус.

Из рис. 11.4 видно, что в случае, когда линии поля проходят внутри замкнутой поверхности непрерывно, каждая линия, пересекая поверхность, входит внутрь и выходит наружу одинаковое число раз. В итоге поток соответствующего вектора через эту поверхность оказывается равным нулю. Легко сообразить, что в случае, если линии поля обрываются внутри поверхности, поток вектора через замкнутую поверхность будет численно равен разности числа линий, начинающихся внутри поверхности ( $N_{\text{нач}}$ ), и числа линий, оканчивающихся внутри поверхности ( $N_{\text{оканч}}$ ):

$$\Phi_a(=) N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}}. \quad (11.10)$$

Знак потока зависит от того, какое из этих чисел больше. При  $N_{\text{нач}} = N_{\text{оканч}}$  поток равен нулю.

**Дивергенция.** Пусть нам дано поле вектора скорости несжимаемой неразрывной жидкости. Возьмем в окрестности точки  $P$  воображаемую замкнутую поверхность  $S$  (рис. 11.5). Если в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью, жидкость не возникает и не исчезает, то поток, вытекающий наружу через поверхность, будет, очевидно, равен нулю. Отличие потока жидкости  $\Phi_v$  от нуля будет указывать на то, что внутри поверхности имеются *источники* или *стоки* жидкости, т. е. точки, в которых жидкость поступает в объем (источники) либо удаляется из объема (стоки). Величина

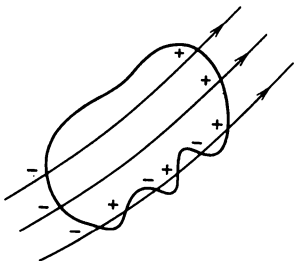


Рис. 11.4.

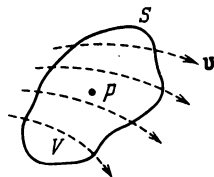


Рис. 11.5.

потока определяет суммарную алгебраическую мощность источников и стоков<sup>1</sup>. При преобладании источников над стоками поток будет положительным, при преобладании стоков — отрицательным.

Отношение потока  $\Phi_v$  к объему  $V$ , из которого он вытекает:

$$\Phi_v/V, \quad (11.11)$$

дает среднюю удельную мощность источников, заключенных в объеме  $V$ . В пределе при стремлении  $V$  к нулю, т. е. при стягивании объема  $V$  к точке  $P$ , выражение (11.11) даст удельную мощность источников в точке  $P$ , которую называют *дивергенцией* (или *расхождением*) вектора  $\mathbf{v}$  (обозначается  $\text{div } \mathbf{v}$ ). Итак,

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_v}{V}.$$

Аналогично определяется дивергенция любого вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\text{div } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{a} \, d\mathbf{S}. \quad (11.12)$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности  $S$ , окружающей точку  $P$ <sup>2</sup>;  $V$  — объем, ограниченный этой поверхностью.

<sup>1</sup> Под мощностью источника (стока) понимается объем жидкости, выделяемый (поглощаемый) в единицу времени. Сток можно рассматривать как источник с отрицательной мощностью.

<sup>2</sup> Кругок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутой поверхности.

Окружим точку  $P$  сферической поверхностью крайне малого радиуса  $r$  (рис. 11.6). Ввиду малости  $r$  объем  $V$ , ограниченный сферой, также будет весьма мал. Поэтому с большой степенью точности можно считать, что значение  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  в пределах объема  $V$  являет-

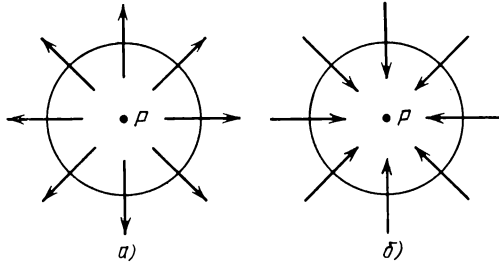


Рис. 11.6.

ся постоянным<sup>1</sup>. В этом случае можно в соответствии с (11.12) записать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \approx \frac{\Phi_a}{V},$$

где  $\Phi_a$  — поток вектора  $\mathbf{a}$  через поверхность, ограничивающую объем  $V$ . Согласно (11.10)  $\Phi_a$  равен  $N_{\text{нач}}$  — числу линий вектора  $\mathbf{a}$ , начинающихся внутри  $V$ , если  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  в точке  $P$  положительна, либо  $-N_{\text{оканч}}$  — взятому со знаком минус числу линий  $\mathbf{a}$ , оканчивающихся внутри  $V$ , если  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  в точке  $P$  отрицательна. С учетом этого можно написать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \approx \frac{N_{\text{нач}}}{V} \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{a} \approx \frac{-N_{\text{оканч}}}{V}.$$

При  $V \rightarrow P$  приближительное равенство превращается в точное.

Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  численно равна плотности точек, в которых начинаются линии вектора  $\mathbf{a}$  (если  $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$ ), или взятой со знаком минус плотности точек, в которых оканчиваются линии  $\mathbf{a}$  (если  $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ ).

Из определения (11.12) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве (кратко — функция точки). Определение (11.12) является самым общим, не зависящим от вида координатной системы.

Найдем выражение для дивергенции в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки  $P(x, y, z)$  малый объем

<sup>1</sup> Предполагается, что значение  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  изменяется при переходе от одной точки поля к другой непрерывно, без скачков.



в виде параллелепипеда с ребрами, перпендикулярными к координатным осям (рис. 11.7). Поток вектора через поверхность параллелепипеда образуется из потоков, текущих через каждую из шести граней в отдельности.

Найдем поток через пару граней, перпендикулярных к оси  $x$  (на рис. 11.7 эти грани обозначены косой штриховкой и помечены

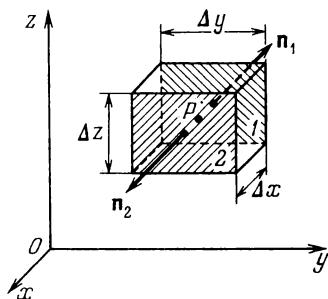


Рис. 11.7.

цифрами 1 и 2). Внешняя нормаль  $\mathbf{n}_2$  к грани 2 совпадает с направлением оси  $x$ . Следовательно, для точек этой грани  $a_{n_2} = a_x$ . Внешняя нормаль  $\mathbf{n}_1$  к грани 1 имеет направление, противоположное оси  $x$ . Поэтому для точек этой грани  $a_{n_1} = -a_x$ . Поток через грань 2 можно записать в виде

$$a_{x2} \Delta y \Delta z,$$

где  $a_{x2}$  — значение  $a_x$ , усредненное по грани 2. Поток через грань 1 равен

$$-a_{x1} \Delta y \Delta z,$$

где  $a_{x1}$  — среднее значение  $a_x$  для грани 1. Суммарный поток через грани 1 и 2 определяется выражением

$$(a_{x2} - a_{x1}) \Delta y \Delta z, \quad (11.13)$$

Разность  $a_{x2} - a_{x1}$  представляет собой приращение среднего (по грани) значения  $a_x$  при смещении вдоль оси  $x$  на  $\Delta x$ . Ввиду малости параллелепипеда (напомним, что мы будем его размеры стремить к нулю) это приращение можно представить в виде  $(\partial a_x / \partial x) \Delta x$ , где значение  $\partial a_x / \partial x$  берется в точке  $P^1$ . Тогда (11.13) переходит в

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V.$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям  $y$  и  $z$ , выражения

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta V \text{ и } \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta V.$$

Таким образом, полный поток через всю замкнутую поверхность определяется выражением

$$\Phi_a = \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V.$$

<sup>1</sup> Неточность, которую мы при этом допускаем, исчезает при стягивании объема к точке  $P$ , осуществляемому при предельном переходе.

Разделив это выражение на  $\Delta V$ , найдем дивергенцию вектора  $\mathbf{a}$  в точке  $P(x, y, z)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (11.14)$$

**Теорема Остроградского — Гаусса.** Зная дивергенцию вектора  $\mathbf{a}$  в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров. Сделаем это сначала для потока вектора  $\mathbf{v}$  (потока жидкости). Произведение  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  на  $dV$  дает мощность источников жидкости, заключенных в объеме  $dV$ . Сумма таких произведений, т. е.  $\int \operatorname{div} \mathbf{v} dV$ , дает суммарную алгебраическую мощность источников, заключенных в объеме  $V$ , по которому осуществляется интегрирование. Вследствие несжимаемости жидкости суммарная мощность источников должна равняться потоку жидкости, вытекающему наружу через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\oint_S \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

Аналогичное соотношение выполняется для векторного поля любой природы:

$$\oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV. \quad (11.15)$$

Это соотношение носит название теоремы Остроградского — Гаусса. Интеграл в левой части соотношения вычисляется по произвольной замкнутой поверхности  $S$ , интеграл в правой части — по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью.

**Циркуляция.** Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур  $\Gamma$ . Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур  $\Gamma$  (рис. 11.8). В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура  $l$ . Эту величину называли *циркуляцией* вектора  $\mathbf{v}$  по контуру  $\Gamma$ . Итак,

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl$$

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости  $v = \text{const}$ ).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости, касательная к контуру, т. е.  $v_l$ . С этой составляющей связан импульс  $d\mathbf{p}_l$ , модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины  $dl$ , имеет величину  $\rho\sigma v_l dl$  ( $\rho$  — плотность жидкости,  $\sigma$  — площадь поперечного сечения канала).

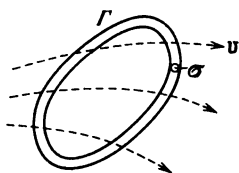


Рис. 11.8.

Так как жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление вектора  $d\mathbf{p}_l$ , но не его величину. Взаимодействие между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выровняет скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма тангенциальных составляющих импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу, теряемому второй частицей. Это означает, что

$$\rho\sigma v_l = \oint \rho\sigma v_l dl,$$

где  $v$  — скорость циркуляции,  $v_l$  — касательная составляющая скорости жидкости в объеме  $\sigma dl$  в момент времени, предшествующий затвердеванию стенок канала<sup>1</sup>. Сократив на  $\rho\sigma$ , получим, что

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = v_l = \oint v_l dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора  $\mathbf{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$ :

$$\text{циркуляция } \mathbf{a} \text{ по } \Gamma = \oint \mathbf{a} dl = \oint a_l dl. \quad (11.16)$$

Может показаться, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 11.9). Линии тока (линии вектора  $\mathbf{v}$ ) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора  $\mathbf{v}$  по изображенному пунктиром контуру, очевидно, отлична от нуля. Вместе с тем в поле с изогнутыми линиями циркуляция может оказаться равной нулю.

<sup>1</sup> Напомним, что кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование осуществляется по замкнутому контуру.

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это означает, что сумма циркуляций по контурам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , ограничивающим смежные поверхности  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 11.10), равна циркуляции по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему поверхность  $S$ , являющуюся суммой поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ . Действительно, циркуляция  $C_1$  по контуру,

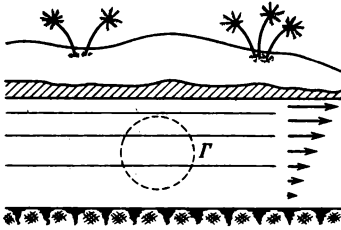


Рис. 11.9.

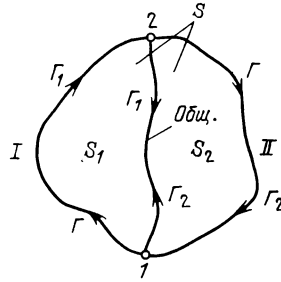


Рис. 11.10.

ограничивающему поверхность  $S_1$ , может быть представлена как сумма интегралов:

$$C_1 = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_{(I)}^2 \mathbf{a} d\mathbf{l} + \int_{(Общ.)}^1 \mathbf{a} d\mathbf{l}. \quad (11.17)$$

Первый интеграл берется по участку I внешнего контура, второй — по общей границе поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  в направлении 2—1.

Аналогично, циркуляция  $C_2$  по контуру, ограничивающему поверхность  $S_2$ , равна

$$C_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_{(II)}^1 \mathbf{a} d\mathbf{l} + \int_{(Общ.)}^2 \mathbf{a} d\mathbf{l}. \quad (11.18)$$

Первый интеграл берется по участку II внешнего контура, второй — по общей границе поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  в направлении 1—2.

Циркуляция по контуру, ограничивающему суммарную поверхность  $S$ , может быть представлена в виде

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_{(I)}^2 \mathbf{a} d\mathbf{l} + \int_{(II)}^1 \mathbf{a} d\mathbf{l}. \quad (11.19)$$

Вторые слагаемые в выражениях (11.17) и (11.18) отличаются только знаком. Поэтому сумма этих выражений оказывается равной выражению (11.19). Таким образом,

$$C = C_1 + C_2. \quad (11.20)$$

Доказанное соотношение не зависит от формы поверхностей и справедливо при любом числе слагаемых. Следовательно, если разбить произвольную незамкнутую поверхность  $S$  на большое число элементарных поверхностей  $\Delta S^1$  (рис. 11.11), то циркуляция по контуру, ограничивающему  $S$ , может быть представлена как сумма элементарных циркуляций  $\Delta C$  по контурам, ограничивающим  $\Delta S$ :

$$C = \sum \Delta C_i. \quad (11.21)$$

**Ротор.** Аддитивность циркуляции позволяет ввести понятие удельной циркуляции, т. е. рассматривать отношение циркуляции  $C$  к величине поверхности  $S$ , «обтекаемой» циркуляцией. При конечных размерах поверхности  $S$  отношение  $C/S$  дает среднее значение удельной циркуляции. Это значение характеризует свойства поля, усредненные по поверхности  $S$ . Чтобы получить характеристику поля в точке  $P$ , нужно уменьшать размеры поверхности, стягивая ее в точку  $P$ . При этом отношение  $C/S$  стремится к некоторому пределу, который характеризует свойства поля в точке  $P$ .

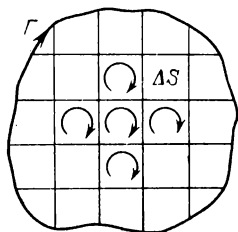


Рис. 11.11.

Итак, возьмем воображаемый контур  $\Gamma$ , лежащий в плоскости, проходящей через точку  $P$ , и рассмотрим выражение

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S}, \quad (11.22)$$

где  $C_a$  — циркуляция вектора  $\mathbf{a}$  по контуру  $\Gamma$ ,  $S$  — площадь, охватываемая контуром. Вычисленный для произвольно ориентированной плоскости предел (11.22) не может служить исчерпывающей характеристикой поля в точке  $P$ , поскольку величина этого предела зависит не только от свойств поля в точке  $P$ , но также и от ориентации контура в пространстве. Эта ориентация может быть задана направлением положительной нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости контура (положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура при интегрировании правилом правого винта). Определяя предел (11.22) в одной и той же точке  $P$  для разных направлений  $\mathbf{n}$ , мы будем получать различные значения, причем для противоположных направлений эти значения отличаются только знаком (изменение направления  $\mathbf{n}$  на противоположное эквивалентно изменению направления обхода по контуру во время интегрирования, что вызовет лишь изменение знака у циркуляции).

<sup>1</sup> На рисунке элементарные поверхности изображены для простоты в виде прямоугольников. В действительности их форма может быть совершенно произвольной.

Для какого-то направления нормали величина (11.22) в данной точке окажется максимальной.

Таким образом, величина (11.22) ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Максимальное значение величины (11.22) определяет модуль этого вектора, а направление положительной нормали  $\mathbf{n}$ , при котором достигается максимум, дает направление вектора. Этот вектор называется ротором (или вихрем) вектора  $\mathbf{a}$ . Обозначается он символом  $\text{rot } \mathbf{a}$ . Используя это обозначение, можно записать выражение (11.22) в виде

$$(\text{rot } \mathbf{a})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \mathbf{a} \, d\mathbf{l}. \quad (11.23)$$

Наглядное представление о роторе вектора  $\mathbf{v}$  можно получить, представив себе небольшую легкую крыльчатку, помещенную в данную точку текущей жидкости (рис. 11.12). В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше по величине проекция ротора на ось крыльчатки.

Выражение (11.23) определяет вектор  $\text{rot } \mathbf{a}$ . Это определение является самым общим, не зависящим от вида координатной системы. Для того чтобы найти выражения

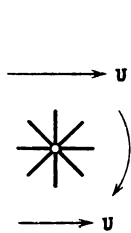


Рис. 11.12.

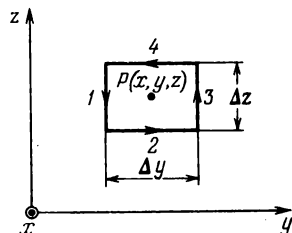


Рис. 11.13.

для проекций вектора  $\text{rot } \mathbf{a}$  на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (11.23) для таких ориентаций площадки  $S$ , при которых нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке совпадает с одной из осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Если, например, направить  $\mathbf{n}$  по оси  $x$ , то (11.23) превратится в  $(\text{rot } \mathbf{a})_x$ . Контур  $\Gamma$  расположен в этом случае в плоскости, параллельной координатной плоскости  $yz$ . Возьмем этот контур в виде прямоугольника со сторонами  $\Delta y$  и  $\Delta z$  (рис. 11.13; ось  $x$  имеет на этом рисунке направление на нас; указанное на рисунке направление обхода связано с направлением оси  $x$  правилом правого винта). Участок 1 контура противоположен по направлению оси  $z$ . Поэтому  $a_l$  на этом участке совпадает с  $-a_z$ . Рассуждая аналогично, найдем, что  $a_l$  на участках 2, 3 и 4 равна соответственно  $a_y$ ,  $a_z$  и  $-a_y$ . Следовательно, циркуляцию можно представить в виде

$$(a_{z3} - a_{z1})\Delta z - (a_{y4} - a_{y2})\Delta y, \quad (11.24)$$

где  $a_{z3}$  и  $a_{z1}$  — средние значения  $a_z$  на участках 3 и 1 соответственно,  $a_{y4}$  и  $a_{y2}$  — средние значения  $a_y$  на участках 4 и 2.

Разность  $a_{z3} - a_{z1}$  представляет собой приращение среднего значения  $a_z$  на отрезке  $\Delta z$  при смещении этого отрезка в направлении оси  $y$  на  $\Delta y$ . Ввиду малости  $\Delta y$  и  $\Delta z$  это приращение можно представить в виде  $(\partial a_z / \partial y) \Delta y$ , где значение  $\partial a_z / \partial y$  берется в точке  $P^1$ . Аналогично разность  $a_{y4} - a_{y2}$  можно представить в виде  $(\partial a_y / \partial z) \Delta z$ . Подставив эти выражения в (11.24) и вынеся общий множитель за скобки, получим для циркуляции выражение

$$\left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta S,$$

где  $\Delta S$  — площадь контура. Разделив циркуляцию на  $\Delta S$ , найдем выражение для проекции  $\text{rot } \mathbf{a}$  на ось  $x$ :

$$(\text{rot } \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}. \quad (11.25)$$

Путем аналогичных рассуждений можно найти, что

$$(\text{rot } \mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (11.26)$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (11.27)$$

Легко убедиться в том, что любое из выражений (11.25) — (11.27) может быть получено из предыдущего (для (11.25) предыдущим следует считать (11.27)) путем так называемой циклической перестановки координат, т. е. замены координат, осуществляемой по схеме



Итак, ротор вектора  $\mathbf{a}$  определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (11.28)$$

Ниже мы укажем более изящный способ записи этого выражения.

**Теорема Стокса.** Зная ротор вектора  $\mathbf{a}$  в каждой точке некоторой (не обязательно плоской) поверхности  $S$ , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему  $S$  (контур также может быть неплоским). Для этого разобьем поверхность на очень малые элементы  $\Delta S$ . Ввиду их малости эти элементы можно считать плоскими. Поэтому в соответствии с (11.23) циркуляция вектора  $\mathbf{a}$  по контуру, ограничивающему  $\Delta S$ , может быть

<sup>1</sup> Неточность, которую мы при этом допускаем, исчезает при стягивании контура к точке  $P$ , осуществляемом при переходе к пределу.

представлена в виде

$$\Delta C \approx (\text{rota})_n \Delta S = \text{rota} \cdot \Delta S, \quad (11.29)$$

где  $\mathbf{n}$  — положительная нормаль к элементу поверхности  $\Delta S$ .

В соответствии с формулой (11.21), просуммировав выражение (11.29) по всем  $\Delta S$ , получим циркуляцию вектора  $\mathbf{a}$  по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему  $S$ :

$$C = \sum \Delta C \approx \sum \text{rota} \cdot \Delta S.$$

Осуществив предельный переход, при котором все  $\Delta S$  стремятся к нулю (число их при этом неограниченно растет), придем к формуле

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.30)$$

Соотношение (11.30) носит название теоремы Стокса. Смысл ее состоит в том, что *циркуляция вектора  $\mathbf{a}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна потоку вектора  $\text{rot } \mathbf{a}$  через произвольную поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром.*

**Оператор набла.** Написание формул векторного анализа значительно упрощается и облегчается, если ввести векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом  $\nabla$  (набла) и носящий название оператора набла или оператора Гамильтона. Под этим оператором подразумевается вектор с компонентами  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  и  $\partial/\partial z$ . Следовательно,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11.31)$$

Сам по себе этот вектор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается. Так, если умножить вектор  $\nabla$  на скаляр  $\varphi$ , то получится вектор

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (11.32)$$

который представляет собой градиент функции  $\varphi$  (см. (11.1)).

Если вектор  $\nabla$  умножить скалярно на вектор  $\mathbf{a}$ , получится скаляр

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (11.33)$$

который есть не что иное, как дивергенция вектора  $\mathbf{a}$  (см. (11.14)).

Наконец, если умножить  $\nabla$  на  $\mathbf{a}$  векторно, получится вектор с компонентами:  $[\nabla \mathbf{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \partial a_z / \partial y - \partial a_y / \partial z$  и т. д., которые совпадают с компонентами  $\text{rot } \mathbf{a}$  (см. (11.25) — (11.27)). Следовательно, воспользовавшись записью векторного произведения



с помощью определителя, можно написать

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (11.34)$$

Таким образом, существует два способа обозначений градиента, дивергенции и ротора:

$$\nabla \varphi \equiv \operatorname{grad} \varphi, \quad \nabla \mathbf{a} \equiv \operatorname{div} \mathbf{a}, \quad [\nabla \mathbf{a}] \equiv \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Обозначения с помощью  $\nabla$  обладают рядом преимуществ. Поэтому мы в дальнейшем будем применять такие обозначения. Следует приучить себя отождествлять символ  $\nabla \varphi$  со словами «градиент фи» (т. е. говорить не «набла фи», а «градиент фи»), символ  $\nabla \mathbf{a}$  — со словами «дивергенция а» и, наконец, символ  $[\nabla \mathbf{a}]$  — со словами «ротор а».

Пользуясь вектором  $\nabla$ , нужно помнить, что он является дифференциальным оператором, действующим на все функции, стоящие справа от него. Поэтому при преобразовании выражений, в которые входит  $\nabla$ , нужно учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференциального исчисления. Например, производная произведения функций  $\varphi$  и  $\psi$  равна

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'.$$

В соответствии с этим

$$\operatorname{grad} (\varphi\psi) = \nabla (\varphi\psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi. \quad (11.35)$$

Аналогично

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \nabla (\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \nabla \varphi + \varphi \nabla \mathbf{a} = \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (11.36)$$

Градиент некоторой функции  $\varphi$  представляет собой векторную функцию. Поэтому к нему могут быть применены операции дивергенции и ротора:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla (\nabla \varphi) = (\nabla \nabla) \varphi = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2) \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi \end{aligned} \quad (11.37)$$

( $\Delta$  — оператор Лапласа);

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = [\nabla \nabla] \varphi = 0 \quad (11.38)$$

(напомним, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулю).

Применим операции дивергенции и ротора к функции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla [\nabla \mathbf{a}] = 0 \quad (11.39)$$

(смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда

построенного на перемножаемых векторах<sup>1</sup>; если два из этих векторов совпадают, объем параллелепипеда равен нулю);

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - (\nabla \nabla) \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a} \quad (11.40)$$

(мы воспользовались формулой  $[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \mathbf{b})$ ).

Соотношение (11.39) означает, что поле ротора не имеет источников. Следовательно, линии вектора  $[\nabla \mathbf{a}]$  не имеют ни начала, ни конца. Именно по этой причине поток ротора через любую поверхность  $S$ , опирающуюся на данный контур  $\Gamma$ , оказывается одним и тем же (см. формулу (11.30)).

В заключение отметим, что с использованием оператора  $\nabla$  формулам (11.15) и (11.30) можно придать вид

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \mathbf{a} \cdot dV \quad (\text{теорема Остроградского — Гаусса}), \quad (11.41)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla \mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{теорема Стокса}). \quad (11.42)$$

## § 12. Циркуляция и ротор электростатического поля

В § 6 мы выяснили, что силы, действующие на заряд  $q$  в электростатическом поле, являются консервативными. Следовательно, работа этих сил на любом замкнутом пути  $\Gamma$  равна нулю:

$$A = \oint_{\Gamma} q \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Сократив на  $q$ , получим соотношение

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (12.1)$$

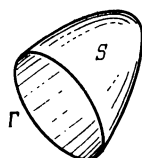


Рис. 12.1.

(ср. с (8.7)).

Интеграл, стоящий в левой части формулы (12.1), представляет собой циркуляцию вектора  $\mathbf{E}$  по контуру  $\Gamma$  (см. (11.16)). Таким образом, характерным для электростатического поля является то обстоятельство, что циркуляция вектора напряженности этого поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Возьмем произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $\Gamma$ , для которого вычисляется циркуляция (рис. 12.1). Согласно теореме Стокса (см. (11.42)) интеграл от ротора  $\mathbf{E}$ , взятый по этой поверхности, равен циркуляции вектора  $\mathbf{E}$  по контуру  $\Gamma$ :

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}] \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (12.2)$$

<sup>1</sup> См. § 2 тома 1.

Поскольку циркуляция равна нулю, мы приходим к выводу, что

$$\oint_S [\Delta \mathbf{E}] d\mathbf{S} = 0.$$

Полученное условие должно выполняться для любой поверхности  $S$ , опирающейся на произвольный контур  $\Gamma$ . Это возможно лишь в том случае, если ротор вектора  $\mathbf{E}$  в каждой точке поля равен нулю:

$$[\nabla \mathbf{E}] = 0. \quad (12.3)$$

По аналогии с крыльчаткой, изображенной на рис. 11.12, представим себе электрическую «крыльчатку» в виде легкой втулки со спицами, на концах которых помещаются одинаковые по величине положительные заряды  $q$  (рис. 12.2; все устройство должно быть малых размеров). В тех местах электрического поля, где ротор  $\mathbf{E}$  отличен от нуля, такая крыльчатка вращалась бы с тем большим

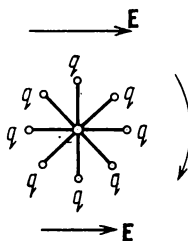


Рис. 12.2.

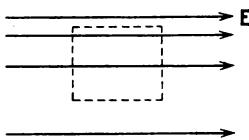


Рис. 12.3.

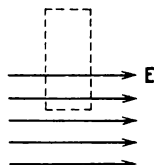


Рис. 12.4.

ускорением, чем больше проекция ротора на ось крыльчатки. В случае электростатического поля такое воображаемое устройство не пришло бы во вращение при любой ориентации его оси.

Итак, отличительной особенностью электростатического поля является то, что оно безвихревое. В предыдущем параграфе мы выяснили, что ротор градиента скалярной функции равен нулю (см. формулу (11.38)). Поэтому равенство нулю ротора  $\mathbf{E}$  в каждой точке поля делает возможным представление  $\mathbf{E}$  в виде градиента скалярной функции  $\phi$ , называемой потенциалом. Такое представление уже было рассмотрено в § 8 (см. формулу (8.2); знак минус в этой формуле взят из физических соображений).

Из необходимости соблюдения условия (12.1) можно сразу заключить, что существование электростатического поля вида, показанного на рис. 12.3, невозможно. Действительно, для такого поля циркуляция по контуру, изображенному пунктиром, была бы отлична от нуля, что противоречит условию (12.1). Точно так же невозможно, чтобы поле, отличное от нуля в ограниченном объеме, было во всем этом объеме однородным (рис. 12.4). В этом случае циркуляция по контуру, показанному пунктиром, была бы отлична от нуля.

### § 13. Теорема Гаусса

В предыдущем параграфе мы выяснили, чему равен ротор электростатического поля. Теперь найдем дивергенцию поля. С этой целью рассмотрим поле точечного заряда  $q$  и вычислим поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $S$ , заключающую в себе заряд (рис. 13.1). В § 5 мы показали, что количество линий вектора  $\mathbf{E}$ , начинающихся на точечном заряде  $+q$  или заканчивающихся на заряде  $-q$ , численно равно  $q/\epsilon_0$ .

Согласно формуле (11.10) поток вектора  $\mathbf{E}$  через любую замкнутую поверхность равен числу линий, выходящих наружу, т. е. начинающихся на заряде, если он положителен, и числу линий, входящих внутрь, т. е. оканчивающихся на заряде, если он отрицателен. Учтя, что количество начинающихся или оканчивающихся на точечном заряде линий численно равно  $q/\epsilon_0$ , можно написать, что

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда  $q$ . Размерность обеих частей равенства (13.1) одинакова.

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находятся  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . В силу принципа суперпозиции напряженность  $\mathbf{E}$  поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей  $\mathbf{E}_i$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности:  $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$ . Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S \left( \sum_i \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S}.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, равен  $q_i/\epsilon_0$ . Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (13.2)$$

Доказанное нами утверждение носит название теоремы Гаусса. Эта теорема гласит, что *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$* .

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т. е. зарядами, образованными огромным числом элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) струк-

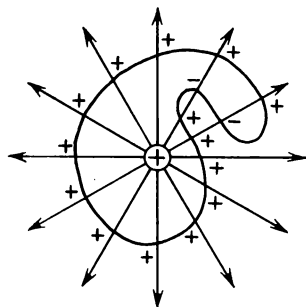


Рис. 13.1.

туры этих зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с конечной всюду плотностью. Объемная плотность заряда  $\rho$  определяется по аналогии с плотностью массы как отношение заряда  $dq$  к физически бесконечно малому объему  $dV$ , в котором заключен этот заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (13.3)$$

В данном случае под физически бесконечно малым объемом нужно понимать такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы плотность в пределах его можно было считать одинаковой, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность заряда.

Зная плотность заряда в каждой точке пространства, можно найти суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ . Для этого нужно вычислить интеграл от  $\rho$  по объему, ограниченному поверхностью:

$$\Sigma q_i = \int_V \rho dV.$$

Таким образом, формуле (13.2) можно придать вид

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (13.4)$$

Заменив в соответствии с (11.41) поверхностный интеграл объемным, получим

$$\int_V \Delta \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Соотношение, к которому мы пришли, должно выполняться для любого произвольно выбранного объема  $V$ . Это возможно лишь в том случае, если значения подынтегральных функций в каждой точке пространства одинаковы. Следовательно, дивергенция вектора  $\mathbf{E}$  связана с плотностью заряда в той же точке равенством

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (13.5)$$

Это равенство выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме.

В случае текущей жидкости  $\nabla \mathbf{v}$  дает удельную мощность источников жидкости в данной точке. По аналогии говорят, что заряды являются источниками электрического поля.

#### § 14. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса

Теорема Гаусса позволяет в ряде случаев найти напряженность поля гораздо более простыми средствами, чем с использованием формулы (5.3) для напряженности поля точечного заряда и прин-

ципа суперпозиций полей. Продемонстрируем возможности теоремы Гаусса на нескольких полезных для дальнейшего примерах. Прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, введем понятия поверхностной и линейной плотностей заряда.

Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое несущего заряд тела, распределение заряда в пространстве можно охарактеризовать с помощью поверхностной плотности  $\sigma$ , которая определяется выражением

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (14.1)$$

Здесь  $dq$  — заряд, заключенный в слое площади  $dS$ . Под  $dS$  подразумевается физически бесконечно малый участок поверхности.

Если заряд распределен по объему или поверхности цилиндрического тела (равномерно в каждом сечении), используется линейная плотность заряда

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (14.2)$$

( $dl$  — длина физически бесконечно малого отрезка цилиндра,  $dq$  — заряд, сосредоточенный на этом отрезке).

**Поле бесконечной однородно заряженной плоскости.** Пусть поверхностная плотность заряда во всех точках плоскости одинакова и равна  $\sigma$ ; для определенности будем считать заряд положительным. Из соображений симметрии вытекает, что напряженность поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное к плоскости. Действительно, поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, нет никаких оснований к тому, чтобы вектор  $E$  отклонялся в какую-либо сторону от нормали к плоскости. Далее очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность поля одинакова по величине и противоположна по направлению.

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями величины  $\Delta S$ , расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 14.1). В силу симметрии  $E' = E'' = E$ . Применим к поверхности теорему Гаусса. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, поскольку  $E_n$  в каждой ее точке равна нулю. Для оснований  $E_n$  совпадает с  $E$ . Следовательно, суммарный поток через поверхность равен  $2E \Delta S$ . Внутри поверхности заключен заряд  $\sigma \Delta S$ . Согласно теореме Гаусса должно выполняться условие

$$2E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

из которого

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (14.3)$$

Полученный нами результат не зависит от длины цилиндра. Это означает, что на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Вид линий напряженности показан на рис. 14.2. Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, лишь направление вектора  $\mathbf{E}$  и линий напряженности изменится на обратное.

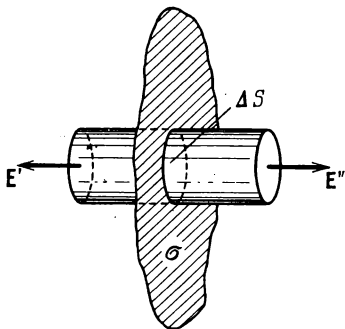


Рис. 14.1.

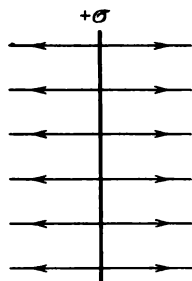


Рис. 14.2.

Если взять плоскость конечных размеров, например заряженную тонкую пластинку<sup>1</sup>, то полученный выше результат будет справедливым только для точек, расстояние которых от края пластинки значительно превышает расстояние от самой пластинки (на рис. 14.3

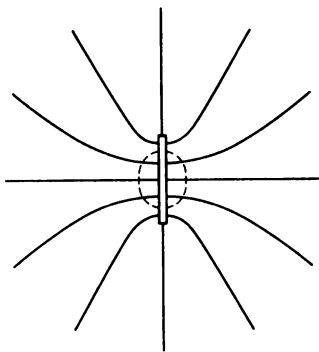


Рис. 14.3.

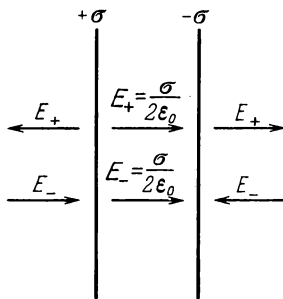


Рис. 14.4.

область этих точек обведена пунктирной кривой). По мере удаления от плоскости или приближения к ее краям поле будет все больше отличаться от поля бесконечной заряженной плоскости. Характер

<sup>1</sup> В случае пластинки под  $\sigma$  в формуле (14.3) следует понимать заряд, сосредоточенный на  $1 \text{ м}^2$  пластинки по всей ее толщине. У металлических тел заряд распределяется по внешней поверхности. Поэтому под  $\sigma$  нужно подразумевать удвоенную величину плотности заряда на ограничивающих металлическую пластинку поверхностях.

поля на больших расстояниях легко представить, если учесть, что на расстояниях, значительно превышающих размеры пластинки, создаваемое ею поле можно рассматривать как поле точечного заряда.

**Поле двух разноименно заряженных плоскостей.** Поле двух параллельных бесконечных плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , можно найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности (рис. 14.4). В области между плоскостями складываемые поля имеют одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (14.4)$$

Вне объема, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между плоскостями. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению; следовательно, поле однородно. Линии напряженности представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых.

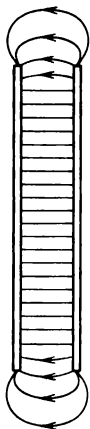


Рис. 14.5.

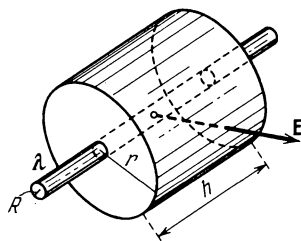


Рис. 14.6.

Полученный нами результат приближенно справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями много меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности наблюдаются только вблизи краев пластин (рис. 14.5).

**Поле бесконечного заряженного цилиндра.** Пусть поле создается бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса  $R$ , заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Из соображений симметрии следует, что напряженность поля в любой точке должна быть



направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а величина напряженности может зависеть только от расстояния  $r$  от оси цилиндра. Представим себе мысленно коаксиальную с заряженной поверхностью замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса  $r$  и высоты  $h$  (рис. 14.6). Для оснований цилиндра  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$  (заряд предполагаем положительным). Следовательно, поток вектора  $\mathbf{E}$  через рассматриваемую поверхность равен  $E(r) \cdot 2\pi r h$ . Если  $r > R$ , внутрь поверхности попадает заряд  $q = \lambda h$  ( $\lambda$  — линейная плотность заряда). Применив теорему Гаусса, получим

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

Отсюда

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (r \geq R). \quad (14.5)$$

Если  $r < R$ , рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, вследствие чего  $E(r) = 0$ .

Таким образом, внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности бесконечной длины поле отсутствует. Напряженность поля вне поверхности определяется линейной плотностью заряда  $\lambda$  и расстоянием  $r$  от оси цилиндра.

Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля цилиндра, заряженного положительно, только направлением вектора  $\mathbf{E}$ .

Из формулы (14.5) следует, что, уменьшая радиус цилиндра  $R$  (при неизменной линейной плотности заряда  $\lambda$ ), можно получить вблизи поверхности цилиндра поле с очень большой напряженностью.

Подставив в (14.5)  $\lambda = 2\pi R\sigma$  и положив  $r = R$ , получим для напряженности поля в непосредственной близости к поверхности цилиндра значение

$$E(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (14.6)$$

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндрических поверхностей, заряженных с одинаковой по величине,

но отличающейся знаком линейной плотности  $\lambda$  (рис. 14.7). Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами величина напряженности поля определяется формулой (14.5). Это справедливо и для цилиндрических поверхностей конечной длины, если зазор между поверхностями

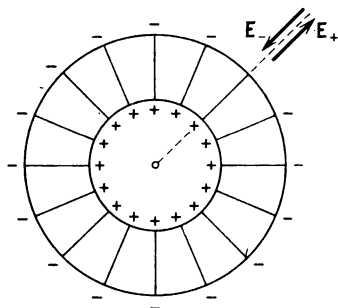


Рис. 14.7.

ми много меньше их длины (цилиндрический конденсатор). Заметные отступления от поля поверхностей бесконечной длины будут наблюдаться только вблизи краев цилиндров.

**Поле заряженной сферической поверхности.** Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса  $R$ , заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , будет, очевидно, центрально-симметричным. Это означает, что направление вектора  $\mathbf{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а величина напряженности является функцией расстояния  $r$  от центра сферы. Вообразим концентрическую с заряженной сферой поверхность радиуса  $r$ . Для всех точек этой поверхности  $E_n = E(r)$ . Если  $r > R$ , внутрь поверхности попадает весь заряд  $q$ , распределенный по сфере. Следовательно,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (14.7)$$

Сферическая поверхность радиуса  $r$ , меньшего, чем  $R$ , не будет содержать зарядов, вследствие чего для  $r < R$  получается  $E(r)=0$ .

Таким образом, внутри сферической поверхности, заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , поле отсутствует. Вне этой поверхности поле тождественно с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центр сферы.

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что поле двух концентрических сферических поверхностей (сферический конденсатор), несущих одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды  $+q$  и  $-q$ , сосредоточено в зазоре между поверхностями, причем величина напряженности поля в этом зазоре определяется формулой (14.7).

**Поле объемно-заряженного шара.** Пусть шар радиуса  $R$  заряжен с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Поле в этом случае обладает центральной симметрией. Легко сообразить, что для поля вне шара получается тот же результат (см. формулу (14.7)), что и в случае поверхностно-заряженной сферы. Однако для точек внутри шара результат будет иным. Сферическая поверхность радиуса  $r$  ( $r < R$ ) заключает в себе заряд, равный  $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ . Поэтому теорема Гаусса для такой поверхности запишется следующим образом:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Отсюда, заменив  $\rho$  через  $q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ , получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r \quad (r \leq R). \quad (14.8)$$

Таким образом, внутри шара напряженность поля растет линейно с расстоянием  $r$  от центра шара. Вне шара напряженность убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

## ГЛАВА II

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

#### § 15. Полярные и неполярные молекулы

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Идеальных изоляторов в природе не существует. Все вещества хотя бы в ничтожной степени проводят электрический ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят ток в  $10^{15}$ — $10^{20}$  раз хуже, чем вещества, называемые проводниками.

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенные изменения. Чтобы понять, почему это происходит, нужно учесть, что в составе атомов и молекул имеются положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны.

Всякая молекула представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю. Линейные размеры этой системы очень малы (порядка нескольких ангстрем<sup>1</sup>). В § 10 мы установили, что поле, создаваемое подобной системой, определяется величиной и ориентацией дипольного электрического момента

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (15.1)$$

(суммирование производится как по электронам, так и по ядрам). Правда, электроны в молекуле движутся так, что этот момент все время изменяется. Однако скорости электронов столь велики, что практически обнаруживается среднее по времени значение момента (15.1). Поэтому в дальнейшем под дипольным моментом молекулы мы будем подразумевать величину

$$\mathbf{p} = \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle \quad (15.2)$$

(для ядер в этой сумме в качестве  $\langle \mathbf{r}_i \rangle$  берется просто  $\mathbf{r}_i$ ). Иначе говоря, мы будем считать, что электроны находятся относительно

---

<sup>1</sup> Ангстрем (Å) — очень удобная в атомной физике единица длины, равная  $10^{-10}$  м.

ядер в покое в некоторых точках, полученных усреднением положений электронов по времени.

Поведение молекулы во внешнем электрическом поле также определяется ее дипольным моментом. В этом можно убедиться, вычислив потенциальную энергию молекулы во внешнем электрическом поле. Выбрав начало координат внутри молекулы и воспользовавшись малостью  $\langle r_i \rangle$ , представим потенциал в той точке, где находится  $i$ -й заряд, в виде

$$\varphi_i = \varphi + \nabla\varphi \cdot \langle r_i \rangle,$$

где  $\varphi$  — потенциал в начале координат (см. формулу (11.2)). Тогда

$$W_p = \sum q_i \varphi_i = \sum q_i (\varphi + \nabla\varphi \cdot \langle r_i \rangle) = \varphi \sum q_i + \nabla\varphi \sum q_i \langle r_i \rangle.$$

Учтя, что  $\sum q_i = 0$ , и заменив  $\nabla\varphi$  через  $-\mathbf{E}$ , получим

$$W_p = -\mathbf{E} \sum q_i \langle r_i \rangle = -\mathbf{p} \mathbf{E} = -pE \cos \alpha.$$

Продифференцировав это выражение по  $\alpha$ , получим для вращательного момента выражение (9.11); взяв производную по  $x$ , придем к силе (9.16).

Таким образом, молекула как в отношении создаваемого ею поля, так и в отношении испытываемых ею во внешнем поле сил эквивалентна диполю. Положительный заряд этого диполя равен суммарному заряду ядер и помещается в «центре тяжести» положительных зарядов; отрицательный заряд равен суммарному заряду электронов и помещается в «центре тяжести» отрицательных зарядов.

У симметричных молекул (таких как  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ) в отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом и называются **неполярными**. У несимметричных молекул (таких, например, как  $\text{CO}$ ,  $\text{NH}$ ,  $\text{HCl}$  и т. п.) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом и называются **полярными**.

Под действием внешнего электрического поля заряды в неполярной молекуле смещаются друг относительно друга: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. В результате молекула приобретает дипольный момент, величина которого, как показывает опыт, пропорциональна напряженности поля. В рационализованной системе коэффициент пропорциональности записывают в виде  $\epsilon_0 \beta$ , где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная, а  $\beta$  — величина, называемая **поляризуемостью молекулы**. Учтя, что направления  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают, можно написать

$$\mathbf{p} = \beta \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (15.3)$$

Дипольный момент имеет размерность, равную  $[q]L$ . Согласно формуле (5.3) размерность  $\epsilon_0 E$  равна  $[q]L^{-2}$ . Следовательно, поляризуемость молекулы  $\beta$  обладает размерностью  $L^3$ .

Процесс поляризации неполярной молекулы протекает так, как если бы положительные и отрицательные заряды молекулы были связаны друг с другом упругими силами. Поэтому говорят, что неполярная молекула ведет себя во внешнем поле как упругий диполь.

Действие внешнего поля на полярную молекулу сводится в основном к стремлению повернуть молекулу так, чтобы ее дипольный момент установился по направлению поля. На величину дипольного момента внешнее поле практически не влияет. Следовательно, полярная молекула ведет себя во внешнем поле как жесткий диполь.

## § 16. Поляризация диэлектриков

Обычно в отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика либо равны нулю (неполярные молекулы), либо распределены по направлениям в пространстве хаотическим образом (полярные молекулы). В обоих случаях суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю<sup>1</sup>.

Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется. Это означает, что результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля. В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, естественно взять дипольный момент единицы объема. Если поле или диэлектрик (или оба они) неоднородны, степень поляризации в разных точках диэлектрика будет различна. Чтобы охарактеризовать поляризацию в данной точке, нужно выделить заключающий в себе эту точку физически бесконечно малый объем  $\Delta V$ , найти сумму  $\sum_{\Delta V} \mathbf{p}$  моментов заключенных в этом объеме молекул и взять отношение

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}. \quad (16.1)$$

Векторная величина  $\mathbf{P}$ , определяемая формулой (16.1), называется **поляризованностью диэлектрика**.

Дипольный момент  $\mathbf{p}$  имеет размерность  $[q]L$ . Следовательно, размерность  $\mathbf{P}$  равна  $[q]L^{-2}$ , т. е. совпадает с размерностью  $\epsilon_0 E$  (см. формулу (5.3)).

У изотропных диэлектриков любого типа поляризованность связана с напряженностью поля в той же точке простым соотношением:

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (16.2)$$

<sup>1</sup> В § 23 мы познакомимся с веществами, которые могут обладать дипольным моментом в отсутствие внешнего поля.

где  $\kappa$  — не зависящая от  $\mathbf{E}$  величина, называемая диэлектрической восприимчивостью диэлектрика<sup>1</sup>. Выше было указано, что размерности  $\mathbf{P}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  одинаковы. Следовательно,  $\kappa$  — безразмерная величина.

В гауссовой системе формула (16.2) имеет вид

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \quad (16.3)$$

Для диэлектриков, построенных из неполярных молекул, формула (16.2) вытекает из следующих простых соображений. В пределы объема  $\Delta V$  попадает количество молекул, равное  $n \Delta V$ , где  $n$  — число молекул в единице объема. Каждый из моментов  $\mathbf{p}$  определяется в этом случае формулой (15.3). Следовательно,

$$\sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p} = n \Delta V \beta \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Разделив это выражение на  $\Delta V$ , получим поляризованность  $\mathbf{P} = n \beta \epsilon_0 \mathbf{E}$ . Наконец, введя обозначение  $\kappa = n \beta$ , приходим к формуле (16.2).

В случае диэлектриков, построенных из полярных молекул, ориентирующему действию внешнего поля противится тепловое движение молекул, стремящееся разбросать их дипольные моменты по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов молекул в направлении поля. Соответствующий статистический расчет показывает в согласии с опытом, что поляризованность пропорциональна напряженности поля, т. е. приводит к формуле (16.2). Диэлектрическая восприимчивость таких диэлектриков обратно пропорциональна абсолютной температуре.

В ионных кристаллах отдельные молекулы утрачивают свою обособленность. Весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами. При действии на ионы кристалла внешнего поля обе решетки сдвигаются друг относительно друга, что приводит к поляризации диэлектрика. Поляризованность и в этом случае связана

<sup>1</sup> В анизотропных диэлектриках направления  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, не совпадают. В этом случае связь между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  описывается формулами

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\kappa_{xx} E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z), \\ P_y &= \epsilon_0 (\kappa_{yx} E_x + \kappa_{yy} E_y + \kappa_{yz} E_z), \\ P_z &= \epsilon_0 (\kappa_{zx} E_x + \kappa_{zy} E_y + \kappa_{zz} E_z). \end{aligned}$$

Совокупность девяти величин  $\kappa_{ik}$  образует симметричный тензор 2-го ранга, называемый тензором диэлектрической восприимчивости (ср. с формулой (40.3) 1-го тома). Этот тензор характеризует электрические свойства анизотропного диэлектрика.

с напряженностью поля соотношением (16.2). Отметим, что описываемая формулой (16.2) линейная зависимость между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  имеет место лишь в не слишком сильных полях (аналогичное замечание относится и к формуле (15.3)).

## § 17. Поле внутри диэлектрика

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются *связанными*. Под действием поля связанные заряды могут лишь немного смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.

Заряды, которые, хотя и находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, мы, следуя Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу<sup>1</sup>, будем называть *сторонними*<sup>2</sup>.

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ , создаваемого сторонними зарядами, и поля  $\mathbf{E}_{\text{связ}}$  связанных зарядов. Результирующее поле называется *микроскопическим* (или *истинным*):

$$\mathbf{E}_{\text{микро}} = \mathbf{E}_{\text{стор}} + \mathbf{E}_{\text{связ}}. \quad (17.1)$$

Микроскопическое поле сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Вследствие движения связанных зарядов поле  $\mathbf{E}_{\text{микро}}$  изменяется также и со временем. При макроскопическом рассмотрении указанные изменения не обнаруживаются. Поэтому в качестве характеристики поля используется усредненное по физически бесконечно малому объему значение величины (17.1):

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \mathbf{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \mathbf{E}_{\text{связ}} \rangle.$$

В дальнейшем усредненное поле сторонних зарядов мы будем обозначать через  $\mathbf{E}_0$ , а усредненное поле связанных зарядов — через  $\mathbf{E}'$ . Соответственно *макроскопическим* полем мы будем называть величину

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (17.2)$$

Поляризованность  $\mathbf{P}$  представляет собой макроскопическую величину. Поэтому под  $\mathbf{E}$  в соотношении (16.2) следует понимать напряженность, определяемую формулой (17.2).

<sup>1</sup> См. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957, стр. 57.

<sup>2</sup> Принято называть такие заряды свободными. Однако такое название крайне неудачно, так как в ряде случаев сторонние заряды бывают отнюдь не свободными.

В отсутствие диэлектриков (т. е. в «вакууме») макроскопическое поле равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E}_{\text{стоп}} \rangle.$$

Именно эта величина должна подразумеваться под  $\mathbf{E}$  в формуле (13.5).

Если сторонние заряды неподвижны, поле, определяемое выражением (17.2), обладает теми же свойствами, что и электростатическое поле в вакууме. В частности, его можно характеризовать с помощью потенциала  $\phi$ , который связан с напряженностью (17.2) соотношениями (8.2) и (8.6).

### § 18. Объемные и поверхностные связанные заряды

Когда диэлектрик не поляризован, объемная плотность  $\rho'$  и поверхностная плотность  $\sigma'$  связанных зарядов равны нулю. В результате поляризации поверхностная плотность, а в некоторых случаях и объемная плотность связанных зарядов становятся отличными от нуля.

На рис. 18.1 изображен схематически поляризованный диэлектрик с неполярными (а) и полярными (б) молекулами. Из рисунка

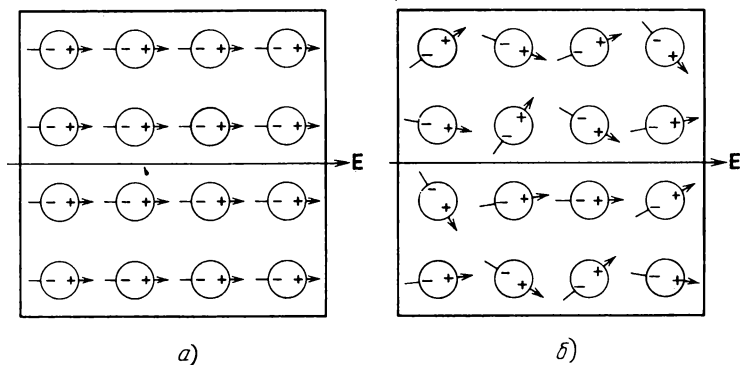


Рис. 18.1.

видно, что поляризация сопровождается возникновением в тонком поверхностном слое диэлектрика избытка связанных зарядов одного знака. Если нормальная составляющая напряженности поля  $\mathbf{E}$  для данного участка поверхности отлична от нуля, то под действием поля заряды одного знака уходят внутрь, а другого знака выходят наружу.

Между поляризованностью  $\mathbf{P}$  и поверхностной плотностью связанных зарядов  $\sigma'$  имеется простая связь. Для ее нахождения рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однород-



ного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле (рис. 18.2). Выделим мысленно в пластине элементарный объем в виде очень тонкого цилиндра с образующими, параллельными  $\mathbf{E}$  в диэлектрике, и с основаниями площади  $\Delta S$ , совпадающими с поверхностями пластины. Величина этого объема равна

$$\Delta V = l \Delta S \cos \alpha,$$

где  $l$  — расстояние между основаниями цилиндра,  $\alpha$  — угол между вектором  $\mathbf{E}$  и внешней нормалью к положительно заряженной поверхности диэлектрика. Объем  $\Delta V$  имеет дипольный электрический момент

$$P \Delta V = Pl \Delta S \cos \alpha$$

( $P$  — модуль поляризованности).

С макроскопической точки зрения рассматриваемый объем эквивалентен диполю, образованному зарядами  $+\sigma' \Delta S$  и  $-\sigma' \Delta S$ , отстоящими друг от друга на расстояние  $l$ . Поэтому его электрический момент можно представить в виде  $\sigma' \Delta S l$ . Приравняв друг другу оба выражения для электрического момента, получим

$$Pl \Delta S \cos \alpha = \sigma' \Delta S l.$$

Отсюда вытекает искомое соотношение между  $\sigma'$  и  $\mathbf{P}$ :

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (18.1)$$

где  $P_n$  — проекция поляризованности на внешнюю нормаль к соответствующей поверхности. Для правой поверхности на рис. 18.2  $P_n > 0$ , соответственно  $\sigma'$  для нее положительна; для левой поверхности  $P_n < 0$ , соответственно  $\sigma'$  для нее отрицательна.

Выразив согласно (16.2)  $\mathbf{P}$  через  $\kappa$  и  $\mathbf{E}$ , придем к формуле

$$\sigma' = \kappa \epsilon_0 E_n, \quad (18.2)$$

где  $E_n$  — нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика. В соответствии с (18.2) в тех местах, где линии напряженности выходят из диэлектрика ( $E_n > 0$ ), на поверхности выступают положительные связанные заряды, там же, где линии напряженности входят в диэлектрик ( $E_n < 0$ ), появляются отрицательные поверхностные заряды.

Формулы (18.1) и (18.2) справедливы и в самом общем случае, когда неоднородный диэлектрик произвольной формы находится в неоднородном электрическом поле. Под  $P_n$  и  $E_n$  в этом случае нужно понимать нормальную составляющую соответствующего

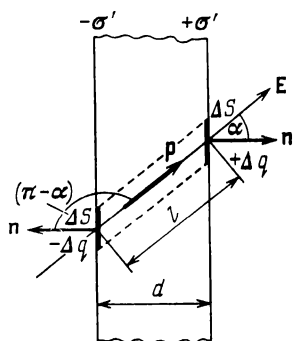


Рис. 18.2.

зектора, взятую в непосредственной близости к тому элементу поверхности, для которого определяется  $\sigma'$ .

Теперь обратимся к нахождению объемной плотности связанных зарядов, возникающих внутри неоднородного диэлектрика. Рассмотрим в неоднородном изотропном диэлектрике с неполярными молекулами воображаемую малую площадку  $\Delta S$  (рис. 18.3). Пусть в единице объема диэлектрика имеется  $n$  одинаковых частиц с зарядом  $+e$  и  $n$  одинаковых частиц с зарядом  $-e$ . В небольшой окрестности площадки  $\Delta S$  электрическое поле и диэлектрик можно считать однородными. Поэтому все положительные заряды, находящиеся вблизи  $\Delta S$ , сместятся при включении поля в направлении  $\mathbf{E}$  на одинаковое расстояние  $l_1$ , а все отрицательные заряды сместятся в противоположном направлении на одинаковое расстояние  $l_2$  (см. рис. 18.3). При этом через площадку  $\Delta S$

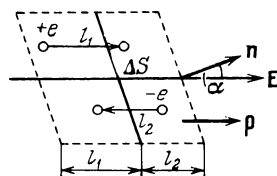


Рис. 18.3.

пройдет в направлении нормали к ней некоторое количество зарядов одного знака (положительных, если  $\alpha < \pi/2$ , отрицательных, если  $\alpha > \pi/2$ ) и в направлении, противоположном  $\mathbf{n}$ , некоторое количество зарядов другого знака (отрицательных, если  $\alpha < \pi/2$ , положительных, если  $\alpha > \pi/2$ ). Площадку  $\Delta S$  пересекут все заряды  $+e$ , которые до включения поля отстояли от нее не более чем на  $l_1 \cos \alpha$ , т. е. все  $+e$ , заключенные в косом цилиндре объемом  $l_1 \Delta S \cos \alpha$ . Число этих зарядов равно  $n l_1 \Delta S \cos \alpha$ , а переносимый ими в направлении нормали к площадке заряд равен  $en l_1 \Delta S \cos \alpha$  (при  $\alpha > \pi/2$  заряд, переносимый в направлении нормали за счет смещения зарядов  $+e$ , будет отрицательным). Аналогично площадку  $\Delta S$  пересекут все заряды  $-e$ , заключенные в объеме  $l_2 \Delta S \cos \alpha$ . Эти заряды перенесут в направлении нормали к площадке заряд, равный  $en l_2 \Delta S \cos \alpha$  (из рис. 18.3 видно, что при  $\alpha < \pi/2$  заряды  $-e$  перенесут через  $\Delta S$  в направлении, противоположном  $\mathbf{n}$ , заряд  $-en l_2 \Delta S \cos \alpha$ , что эквивалентно переносу в направлении  $\mathbf{n}$  заряда  $en l_2 \Delta S \cos \alpha$ ).

Итак, при включении поля через площадку  $\Delta S$  переносится в направлении нормали к ней заряд

$$\Delta q' = en l_1 \Delta S \cos \alpha + en l_2 \Delta S \cos \alpha = en(l_1 + l_2) \Delta S \cos \alpha.$$

Сумма  $l_1 + l_2$  есть расстояние  $l$ , на которое смещаются друг относительно друга положительные и отрицательные связанные заряды в диэлектрике. В результате этого смещения каждая пара зарядов приобретает дипольный момент  $p = el = e(l_1 + l_2)$ . Число таких пар в единице объема равно  $n$ . Следовательно, произведение  $e(l_1 + l_2)n = = eln = pn$  дает модуль поляризованности  $P$ . Таким образом, заряд, проходящий при включении поля через площадку  $\Delta S$  в направлении

нормали к ней, равен

$$\Delta q' = \mathbf{Pn} \Delta S.$$

Поскольку диэлектрик изотропный, направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  совпадают (см. рис. 18.3). Следовательно,  $\alpha$  есть угол между векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{n}$ , в связи с чем можно написать

$$\Delta q' = \mathbf{Pn} \Delta S.$$

Перейдя от дельт к дифференциалам, получим

$$dq' = \mathbf{Pn} dS = \mathbf{P} dS.$$

Мы нашли связанный заряд  $dq'$ , который проходит при включении поля через элементарную площадку  $dS$  в направлении нормали к ней;  $\mathbf{P}$  есть поляризованность, возникающая под действием поля в том месте, где расположена площадка  $dS$ .

Представим себе внутри диэлектрика замкнутую поверхность  $S$ . При включении поля эту поверхность пересечет и выйдет наружу связанный заряд  $q'$ , равный

$$q'_{\text{выш}} = \oint_S dq' = \oint_S \mathbf{P} dS$$

(мы условились в случае замкнутых поверхностей брать внешнюю нормаль к площадкам  $dS$ ). В результате в объеме, ограниченном поверхностью  $S$ , возникнет избыточный связанный заряд

$$q'_{\text{изб}} = -q'_{\text{выш}} = -\oint_S \mathbf{P} dS = -\Phi_P \quad (18.3)$$

( $\Phi_P$  — поток вектора  $\mathbf{P}$  через поверхность  $S$ ).

Введя объемную плотность связанных зарядов  $\rho'$ , можно написать

$$q'_{\text{изб}} = \int_V \rho' dV$$

(интеграл берется по объему, ограниченному поверхностью  $S$ ). Таким образом, мы приходим к формуле

$$\int_V \rho' dV = -\oint_S \mathbf{P} dS.$$

Преобразуем поверхностный интеграл по теореме Остроградского—Гаусса (см. (11.41)). В результате получится соотношение

$$\int_V \rho' dV = -\int_V \nabla \mathbf{P} dV.$$

Это соотношение должно выполняться для любого произвольно выбранного объема  $V$ , что возможно лишь в том случае, если в

каждой точке диэлектрика выполняется равенство

$$\rho' = -\nabla \mathbf{P}. \quad (18.4)$$

Следовательно, плотность связанных зарядов равна дивергенции поляризованности  $\mathbf{P}$ , взятой с обратным знаком.

Мы получили (18.4), рассматривая диэлектрик с неполярными молекулами. Однако эта формула справедлива и для диэлектриков с полярными молекулами.

Формуле (18.4) можно дать наглядную интерпретацию. Точки с положительной  $\nabla \mathbf{P}$  служат источниками поля вектора  $\mathbf{P}$ , из этих точек линии  $\mathbf{P}$  расходятся (рис. 18.4). Точки с отрицательной  $\nabla \mathbf{P}$  служат стоками поля вектора  $\mathbf{P}$ , к этим точкам линии  $\mathbf{P}$  сходятся. При поляризации диэлектрика положительные связанные заряды смещаются в направлении вектора  $\mathbf{P}$ , т. е. в направлении линий  $\mathbf{P}$ ; отрицательные же связанные заряды смещаются в противоположном направлении (на рисунке обведены овалами связанные заряды, принадлежащие отдельным молекулам).

В результате в местах с положительной  $\nabla \mathbf{P}$  образуется избыток отрицательных связанных зарядов, а в местах с отрицательной  $\nabla \mathbf{P}$  — избыток положительных связанных зарядов.

Связанные заряды отличаются от сторонних лишь тем, что не могут покинуть пределы молекул, в состав которых они входят. В остальном же их свойства таковы, как и у всех прочих зарядов. В частности, они служат источниками электрического поля. Поэтому в случае, когда плотность связанных зарядов  $\rho'$  отлична от нуля, формулу (13.5) нужно писать в виде

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho'). \quad (18.5)$$

Здесь  $\rho$  — плотность сторонних зарядов.

Подставим в (18.4) выражение (16.2) для  $\mathbf{P}$  и воспользуемся формулой (11.36). В результате получим

$$\rho' = -\nabla(\kappa \epsilon_0 \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \nabla(\kappa \mathbf{E}) = -\epsilon_0(\mathbf{E} \nabla \kappa + \kappa \nabla \mathbf{E}).$$

Заменив  $\nabla \mathbf{E}$  в соответствии с (18.5), придем к уравнению

$$\rho' = -\epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \kappa - \kappa \rho - \kappa \rho'.$$

Отсюда

$$\rho' = -\frac{1}{1+\kappa}(\epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \kappa + \kappa \rho). \quad (18.6)$$

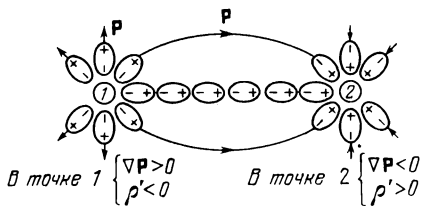


Рис. 18.4.

Из формулы (18.6) вытекает, что объемная плотность связанных зарядов может быть отличной от нуля в двух случаях: 1) если диэлектрик неоднороден ( $\nabla\kappa \neq 0$ ), 2) если в данном месте диэлектрика плотность сторонних зарядов отлична от нуля ( $\rho \neq 0$ ).

В случае, когда внутри диэлектрика сторонних зарядов нет, объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{1+\kappa} \nabla \kappa. \quad (18.7)$$

### § 19. Вектор электрического смещения

В предыдущем параграфе мы отмечали, что источниками поля служат не только сторонние, но и связанные заряды. В соответствии с этим

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho') \quad (19.1)$$

(см. (18.5)). Формула (19.1) малоприспособна для нахождения вектора  $\mathbf{E}$ , так как она выражает свойства неизвестной величины  $\mathbf{E}$  через связанные заряды, которые в свою очередь определяются неизвестной  $\mathbf{E}$  (см. (18.2) и (18.6)).

Вычисление полей во многих случаях упрощается, если ввести вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды  $\rho$ . Чтобы установить вид этой величины, подставим в (19.1) выражение (18.4) для  $\rho'$ :

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \mathbf{P}).$$

Отсюда следует, что

$$\nabla(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (19.2)$$

(мы внесли  $\varepsilon_0$  под знак  $\nabla$ ). Выражение, стоящее в (19.2) в скобках, представляет собой искомую величину. Ее обозначают буквой  $\mathbf{D}$  и называют электрическим смещением (или электрической индукцией).

Итак, электрическим смещением (электрической индукцией) называется величина, определяемая соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (19.3)$$

Подставив выражение (16.2) для  $\mathbf{P}$ , получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E}. \quad (19.4)$$

Безразмерную величину

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (19.5)$$

называют относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической про-

и ц а е м о с т ь ю среды<sup>1</sup>. Таким образом, соотношение (19.4) можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (19.6)$$

Согласно (19.6) вектор  $\mathbf{D}$  пропорционален вектору  $\mathbf{E}$ . Напомним, что мы рассматриваем изотропные диэлектрики. В анизотропных диэлектриках векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , вообще говоря, неколлинеарны.

В соответствии с формулами (5.3) и (19.6) электрическое смещение поля точечного заряда в вакууме равно

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (19.7)$$

Единицей электрического смещения служит кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

Согласно (19.2)

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (19.8)$$

Проинтегрируем это соотношение по произвольному объему  $V$ :

$$\int_V \nabla \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Преобразуем левую часть по теореме Остроградского — Гаусса (см. (11.41)):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (19.9)$$

Слева стоит  $\Phi_D$  — поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность  $S$ , справа — сумма сторонних зарядов  $\sum q_i$ , заключенных внутри этой поверхности. Поэтому равенство (19.9) можно представить в виде

$$\Phi_D = \sum q_i. \quad (19.10)$$

Формулы (19.9) и (19.10) выражают теорему Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ : *поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.*

В вакууме  $\mathbf{P} = 0$ , так что определяемая выражением (19.3) величина  $\mathbf{D}$  превращается в  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  и формулы (19.9) и (19.10) переходят в формулы (13.4) и (13.2).

Единицей потока вектора электрического смещения является кулон. Согласно (19.10) заряд в 1 Кл создает через охватывающую его поверхность поток смещения в 1 Кл.

<sup>1</sup> В электротехнике вводят так называемую абсолютную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ . Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

Поле вектора  $\mathbf{D}$  можно изобразить с помощью линий электрического смещения (мы будем для краткости называть их линиями смещения), направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий вектора  $\mathbf{E}$  (см. § 5). Линии вектора  $\mathbf{E}$  могут начинаться и заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах. Источниками поля вектора  $\mathbf{D}$  служат только сторонние заряды. Поэтому линии смещения могут начинаться или заканчиваться лишь на сторонних зарядах. Через точки, в которых помещаются связанные заряды, линии смещения проходят, не прерываясь.

Электрическую индукцию<sup>1</sup> в гауссовой системе определяют соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (19.11)$$

Подстановка в него значения (16.3) для  $\mathbf{P}$  дает

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\kappa)\mathbf{E}. \quad (19.12)$$

Величину

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (19.13)$$

называют диэлектрической проницаемостью. Введя эту величину в формулу (19.12), получим

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}. \quad (19.14)$$

В гауссовой системе электрическая индукция в вакууме совпадает с напряженностью поля  $\mathbf{E}$ . Следовательно, электрическая индукция поля точечного заряда в вакууме определяется формулой (5.4).

Согласно формуле (19.7) электрическое смещение, создаваемое зарядом в 1 Кл на расстоянии 1 м, составляет

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 1} = \frac{1}{4\pi} \text{ Кл/м}^2.$$

В гауссовой системе электрическая индукция в этом случае равна

$$D = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$$

Таким образом, 1 Кл/м<sup>2</sup> соответствует  $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$  СГСЭ-ед. электрической индукции.

В гауссовой системе выражения теоремы Гаусса имеют вид

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV, \quad (19.15)$$

$$\Phi_D = 4\pi \sum q_i. \quad (19.16)$$

Согласно (19.16) заряд в 1 Кл создает поток вектора электрической индукции, равный  $4\pi q = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$  СГСЭ-единиц. Таким образом, между единицами потока вектора  $\mathbf{D}$  существует соотношение

$$1 \text{ Кл} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. потока.}$$

<sup>1</sup> Термин «электрическое смещение» применительно к величине (19.11) не употребляется.

## § 20. Примеры на вычисление поля в диэлектриках

Чтобы выяснить смысл величин  $\mathbf{D}$  и  $\epsilon$ , рассмотрим несколько примеров полей в диэлектриках.

**Поле внутри плоской пластины.** Рассмотрим две бесконечные параллельные разноименно заряженные плоскости. Пусть создаваемое ими в вакууме поле характеризуется напряженностью  $\mathbf{E}_0$  и смещением  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ . Внесем в это поле пластину из однородного изотропного диэлектрика и расположим ее так, как показано на рис. 20.1. Под действием поля диэлектрик поляризуется, и на его поверхностях появятся связанные заряды плотности  $\sigma'$ . Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле, напряженность которого согласно формуле (14.4) равна  $E' = \sigma'/\epsilon_0$ . Вне диэлектрика в данном случае  $E' = 0$ . Напряженность поля  $E_0$  равна  $\sigma/\epsilon_0$ . Оба поля направлены навстречу друг другу, следовательно, внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma'). \quad (20.1)$$

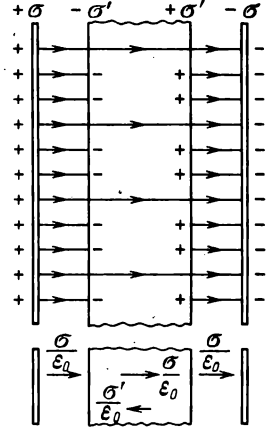


Рис. 20.1.

Вне диэлектрика  $E = E_0$ .

Поляризация диэлектрика обусловлена полем (20.1). Это поле перпендикулярно к поверхностям пластины. Поэтому  $E_n = E$  и в соответствии с (18.2)  $\sigma' = \kappa \epsilon_0 E$ . Подставив это значение в формулу (20.1), получим

$$E = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (20.2)$$

Итак, в рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Умножив (20.2) на  $\epsilon_0 \epsilon$ , получим электрическое смещение внутри пластины

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E_0 = D_0. \quad (20.3)$$

Таким образом, электрическое смещение внутри пластины совпадает с электрическим смещением внешнего поля  $D_0$ . Заменяя в (20.3)  $E_0$  через  $\sigma/\epsilon_0$ , получим, что

$$D = \sigma. \quad (20.4)$$



Чтобы найти  $\sigma'$ , выразим в (20.2)  $E$  и  $E_0$  через плотности зарядов

$$\frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Отсюда

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma. \quad (20.5)$$

Рис. 20.1 выполнен в предположении, что  $\epsilon = 3$ . В соответствии с этим густота линий  $\mathbf{E}$  в диэлектрике в три раза меньше, чем вне пластины. Линии проведены на одинаковых расстояниях друг от друга, поскольку поле однородно. В данном случае  $\sigma'$  можно найти, не прибегая к формуле (20.5). Действительно, раз напряженность поля внутри пластины в три раза меньше, чем вне ее, то из трех линий напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на сторонних зарядах, две должны заканчиваться (соответственно начинаться) на связанных зарядах. Отсюда вытекает, что плотность связанных зарядов должна быть равна  $2/3$  плотности сторонних зарядов.

В гауссовой системе напряженность  $E'$ , создаваемая связанными зарядами  $\sigma'$ , равна  $4\pi\sigma'$ . Поэтому соотношение (20.1) имеет вид

$$E = E_0 - E' = E_0 - 4\pi\sigma'.$$

Поверхностная плотность  $\sigma'$  связана с напряженностью  $E$  соотношением  $\sigma' = \kappa E_{\text{л}}$ . Следовательно, можно написать, что

$$E = E_0 - 4\pi\kappa E.$$

Отсюда

$$E = \frac{E_0}{1 + 4\pi\kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , так же как и  $\epsilon$  в СИ, показывает, во сколько раз ослабляется поле внутри диэлектрика. Следовательно, значения  $\epsilon$  в СИ и в гауссовой системе совпадают. Отсюда, приняв во внимание (19.5) и (19.13), заключаем, что диэлектрическая восприимчивость в гауссовой системе ( $\kappa_{\text{ГС}}$ ) и в СИ ( $\kappa_{\text{СИ}}$ ) отличаются друг от друга множителем  $4\pi$ :

$$\kappa_{\text{СИ}} = 4\pi\kappa_{\text{ГС}}. \quad (20.6)$$

**Поле внутри шарового слоя.** Окружим заряженную сферу радиуса  $R$  концентрическим шаровым слоем из однородного изотропного диэлектрика (рис. 20.2). На внутренней поверхности слоя появится связанный заряд  $q'_1$ , распределенный с плотностью  $\sigma'_1$  ( $q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1$ ), на наружной — заряд  $q'_2$ , распределенный с плотностью  $\sigma'_2$  ( $q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2$ ). Знак заряда  $q'_2$  совпадает со знаком заряда  $q$  сферы, знак  $q'_1$  ему противоположен. Заряды  $q'_1$  и  $q'_2$  создают на расстоянии  $r$ , превышающем соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , поле, совпадающее с полем точечного заряда такой же величины (см. формулу (14.7)). Внутри поверхностей, по которым они распределены, заряды  $q'_1$  и  $q'_2$  поля не создают. Следовательно, напряжен-

ность поля  $E'$  внутри диэлектрика равна

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1^2 \sigma'_1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2}$$

и противоположна по направлению напряженности поля  $E_0$ . Результирующее поле в диэлектрике

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2} \quad (20.7)$$

убывает по закону  $1/r^2$ . Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2}, \text{ т. е. } E(R_1) = E(r) \frac{r^2}{R_1^2},$$

где  $E(R_1)$  — напряженность поля в диэлектрике в непосредствен-

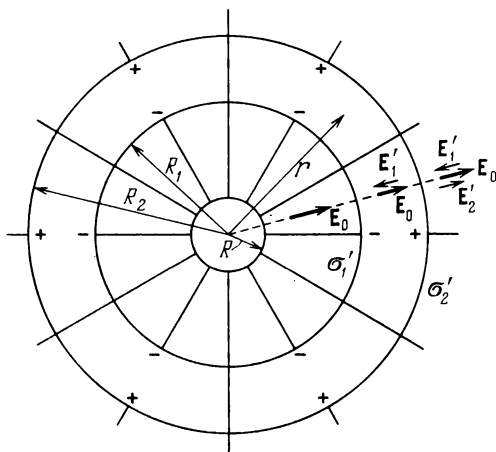


Рис. 20.2.

ной близости к внутренней поверхности слоя. Именно эта напряженность определяет величину  $\sigma'_1$ :

$$\sigma'_1 = \kappa \epsilon_0 E(R_1) = \kappa \epsilon_0 E(r) \frac{r^2}{R_1^2} \quad (20.8)$$

(в каждой точке поверхности  $|E_n| = E$ ).

Подставив выражение (20.8) в формулу (20.7), получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \kappa \epsilon_0 E(r) r^2}{r^2 R_1^2} = E_0(r) - \kappa E(r).$$

Отсюда находим, что внутри диэлектрика  $E = E_0/\epsilon$  и, следовательно,  $D = \epsilon_0 E_0$  (ср. с формулами (20.2) и (20.3)).

Поле внутри диэлектрика изменяется по закону  $1/r^2$ . Поэтому имеет место соотношение  $\sigma'_1/\sigma'_2 = R_2^2/R_1^2$ . Отсюда вытекает, что  $q'_1 = q'_2$ . Следовательно, поля, создаваемые этими зарядами, на расстояниях, превышающих  $R_2$ , взаимно уничтожают друг друга, так что вне шарового слоя  $E' = 0$  и  $E = E_0$ .

Положив  $R_1$  равным  $R$ , а  $R_2 = \infty$ , придем к случаю заряженной сферы, погруженной в безграничный однородный и изотропный диэлектрик. Напряженность поля вне такой сферы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (20.9)$$

Такова же будет напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом.

Оба рассмотренных примера характерны тем, что диэлектрик был однородным и изотропным, а ограничивающие его поверхности совпадали с эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов. Полученный нами в этих случаях результат является общим. Если однородный и изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, то вектор электрического смещения совпадает с вектором напряженности поля сторонних зарядов, умноженным на  $\epsilon_0$ , и, следовательно, напряженность поля внутри диэлектрика в  $\epsilon$  раз меньше, чем напряженность поля сторонних зарядов.

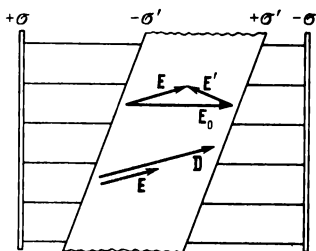


Рис. 20.3.

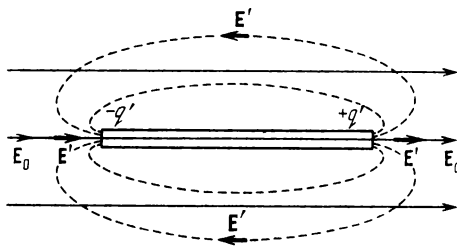


Рис. 20.4.

Если упомянутые условия не соблюдаются, векторы  $\mathbf{D}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  не совпадают. На рис. 20.3 показано поле в пластине диэлектрика, перекошенной относительно плоскостей, несущих сторонние заряды. Вектор  $\mathbf{E}'$  перпендикулярен к граням пластины, поэтому  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_0$  неколлинеарны. Вектор  $\mathbf{D}$  направлен так же, как  $\mathbf{E}$ , следовательно,  $\mathbf{D}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$  не совпадают по направлению. Можно показать, что они не совпадают и по величине.

В рассмотренных выше примерах из-за специально выбранной формы диэлектрика поле  $\mathbf{E}'$  было отлично от нуля только внутри диэлектрика. В общем случае  $\mathbf{E}'$  может быть отлично от нуля и за пределами диэлектрика. Поместим в первоначально однородное поле стержень из диэлектрика (рис. 20.4). Вследствие поляризации на

концах стержня образуются связанные заряды противоположных знаков. Их поле вне стержня эквивалентно полю диполя (линии  $\mathbf{E}'$  показаны на рисунке пунктиром). Легко сообразить, что результирующее поле  $\mathbf{E}$  вблизи концов стержня больше поля  $\mathbf{E}_0$ .

## § 21. Условия на границе двух диэлектриков

Вблизи поверхности раздела двух диэлектриков векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  должны удовлетворять определенным граничным условиям, которые вытекают из соотношений

$$[\nabla \mathbf{E}] = 0, \quad \nabla \mathbf{D} = \rho \quad (21.1)$$

(см. (12.3) и (19.8)).

Рассмотрим границу между двумя диэлектриками с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 21.1). Выберем на этой поверхности произвольно направленную ось  $x$ . Возьмем небольшой прямоугольный контур длины  $a$  и ширины  $b$ , который частично проходит в первом диэлектрике, частично — во втором. Ось  $x$  проходит через середины сторон  $b$ .

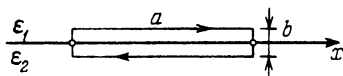


Рис. 21.1.

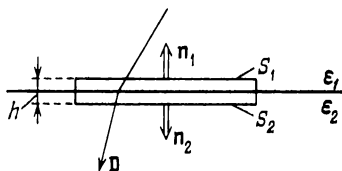


Рис. 21.2.

Пусть в диэлектриках создано поле, напряженность которого в первом диэлектрике равна  $\mathbf{E}_1$ , а во втором  $\mathbf{E}_2$ . Вследствие того, что  $[\nabla \mathbf{E}] = 0$ , циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по выбранному нами контуру должна быть равна нулю (см. формулу (12.1)). При малых размерах контура и указанном на рис. 21.1 направлении обхода циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  может быть представлена в виде

$$\oint \mathbf{E}_i dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle \cdot 2b, \quad (21.2)$$

где  $\langle E_b \rangle$  — среднее значение  $E_l$  на перпендикулярных к границе участках контура. Приравняв это выражение нулю, придем к соотношению

$$(E_{2x} - E_{1x})a = \langle E_b \rangle \cdot 2b.$$

В пределе, при стремящейся к нулю ширине контура  $b$ , получается равенство

$$E_{1x} = E_{2x}. \quad (21.3)$$

Значения проекций векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  на ось  $x$  берутся в непосредственной близости к границе диэлектриков.

Соотношение (21.3) выполняется при произвольном выборе оси  $x$ , нужно лишь, чтобы эта ось лежала в плоскости раздела диэлектриков. Из (21.3) следует, что при таком выборе оси  $x$ , при котором  $E_{1x} = 0$ , проекция  $E_{2x}$  также будет равна нулю. Это означает, что векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в двух близких точках, взятых по разные стороны границы, лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела. Представим каждый из векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{1\tau}; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2n} + \mathbf{E}_{2\tau}.$$

В соответствии с (21.3)

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (21.4)$$

Здесь  $E_{i\tau}$  — проекция вектора  $\mathbf{E}_i$  на орт  $\boldsymbol{\tau}$ , направленный вдоль линии пересечения плоскости раздела диэлектриков с плоскостью, в которой лежат векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ .

Заменяя согласно (19.6) проекции вектора  $\mathbf{E}$  проекциями вектора  $\mathbf{D}$ , деленными на  $\epsilon_0\epsilon$ , получим соотношение

$$\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_0\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_0\epsilon_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (21.5)$$

Теперь возьмем на границе диэлектриков воображаемую цилиндрическую поверхность высоты  $h$  (рис. 21.2). Основание  $S_1$  расположено в первом диэлектрике, основание  $S_2$  — во втором. Оба основания одинаковы по величине ( $S_1 = S_2 = S$ ) и настолько малы, что в пределах каждого из них поле можно считать однородным. Применим к этой поверхности теорему Гаусса (см. (19.10)). Если сторонних зарядов на границе между диэлектриками нет, правая часть в (19.10) равна нулю. Следовательно,  $\Phi_D = 0$ .

Поток через основание  $S_1$  равен  $D_{1n}S$ , где  $D_{1n}$  — проекция вектора  $\mathbf{D}$  в первом диэлектрике на нормаль  $\mathbf{n}_1$ . Аналогично поток через основание  $S_2$  равен  $D_{2n}S$ , где  $D_{2n}$  — проекция вектора  $\mathbf{D}$  во втором диэлектрике на нормаль  $\mathbf{n}_2$ . Поток через боковую поверхность можно представить в виде  $\langle D_n \rangle S_{\text{бок}}$ , где  $\langle D_n \rangle$  — значение  $D_n$ , усредненное по всей боковой поверхности,  $S_{\text{бок}}$  — величина этой поверхности. Таким образом, можно написать

$$\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n \rangle S_{\text{бок}} = 0. \quad (21.6)$$

Если устремить высоту цилиндра  $h$  к нулю,  $S_{\text{бок}}$  также будет стремиться к нулю. Поэтому в пределе получится соотношение

$$D_{1n} = -D_{2n}.$$

Здесь  $D_{in}$  — проекция на  $\mathbf{n}_i$  вектора  $\mathbf{D}$  в  $i$ -м диэлектрике в непосредственной близости к его границе с другим диэлектриком. Знаки проекций оказались разными вследствие того, что нормали  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если проектировать  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  на одну и ту же нормаль, получится условие

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (21.7)$$

Заменив согласно (19.6) проекции  $\mathbf{D}$  соответствующими проекциями вектора  $\mathbf{E}$ , умноженными на  $\epsilon_0\epsilon$ , получим соотношение

$$\epsilon_0\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0\epsilon_2 E_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (21.8)$$

Полученные нами результаты означают, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора  $\mathbf{D}$  и нормальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  при переходе через границу раздела претерпевают разрыв.

Соотношения (21.4), (21.5), (21.7) и (21.8) определяют условия, которым должны удовлетворять векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  на границе двух диэлектриков (в том случае, если на этой границе нет сторонних зарядов). Мы получили эти соотношения для электростатического поля. Однако они справедливы и для полей, изменяющихся со временем (см. § 112).

Найденные нами условия справедливы и для границы диэлектрика с вакуумом. В этом случае одну из диэлектрических проницаемостей нужно положить равной единице.

Заметим, что условие (21.7) можно получить, исходя из того факта, что линии смещения проходят через границу раздела двух диэлектриков, не прерываясь (рис. 21.3). В соответствии с правилом проведения линий число линий, приходящих к площадке  $\Delta S$  из первого диэлектрика, равно  $D_1\Delta S_1 = D_1\Delta S \cos \alpha_1$ . Аналогично число линий, выходящих из площадки  $\Delta S$  во второй диэлектрик, равно  $D_2\Delta S_2 = D_2\Delta S \cos \alpha_2$ . Если линии не терпят на границе разрыва, оба эти числа должны быть одинаковыми:

$$D_1\Delta S \cos \alpha_1 = D_2\Delta S \cos \alpha_2.$$

Сократив на  $\Delta S$  и приняв во внимание, что произведение  $D \cos \alpha$  дает величину нормальной составляющей вектора  $\mathbf{D}$ , придем к условию (21.7).

На границе диэлектриков линии смещения терпят излом (преломляются), вследствие чего угол  $\alpha$  между нормалью к поверхно-

сти раздела и линией  $\mathbf{D}$  изменяется. Из рис. 21.4 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} : \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}},$$

откуда с учетом формул (21.5) и (21.7) получается закон прелом-

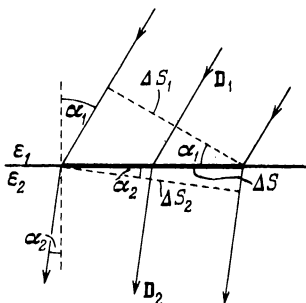


Рис. 21.3.

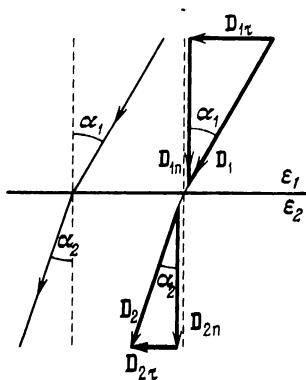


Рис. 21.4.

ления линий электрического смещения:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (21.9)$$

При переходе в диэлектрик с меньшей  $\epsilon$  угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, следовательно, линии располагаются реже; при переходе в диэлектрик с большей  $\epsilon$  линии смещения, напротив, сгущаются.

## § 22. Силы, действующие на заряд в диэлектрике

Если в электрическое поле в вакууме внести заряженное тело столь малых размеров, что внешнее поле в пределах тела можно считать однородным, то на тело будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (22.1)$$

Чтобы заряженное тело поместить в поле, созданное в диэлектрике, в последнем нужно сделать полость. В жидком или газообразном диэлектрике такую полость образует само тело, вытесняя диэлектрик из занимаемого им объема. Поле внутри полости  $\mathbf{E}_{\text{пол}}$  будет отлично от поля  $\mathbf{E}$  в сплошном диэлектрике. Таким образом, силу, действующую на помещенное в полость заряженное тело, нельзя вычислять как произведение заряда  $q$  на напряженность поля  $\mathbf{E}$ , существовавшую в диэлектрике до внесения в него тела.

Вычисляя силу, действующую на заряженное тело в жидком или газообразном диэлектрике, нужно учитывать еще одно обстоятельство. На границе с телом в диэлектрике возникают механические натяжения, что приводит к появлению дополнительной механической силы  $F_{\text{нат}}$ , действующей на тело.

Таким образом, сила, действующая на заряженное тело в диэлектрике, вообще говоря, не может быть определена по формуле (22.1), и задача ее вычисления обычно бывает весьма сложной. Для жидкого и газообразного диэлектрика вычисления дают любопытный результат. Оказывается, что результирующая электрической силы  $qE_{\text{пол}}$  и механической силы  $F_{\text{нат}}$  равна в точности  $qE$ , где  $E$  — напряженность поля в сплошном диэлектрике:

$$F = qE_{\text{пол}} + F_{\text{нат}} = qE. \quad (22.2)$$

Напряженность поля, создаваемого в однородном безграничном диэлектрике точечным зарядом, определяется формулой (20.9). Следовательно, для силы взаимодействия двух точечных зарядов, погруженных в однородный безграничный диэлектрик, получается выражение

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{\epsilon r^2}. \quad (22.3)$$

Эта формула выражает закон Кулона для зарядов, находящихся в диэлектрике. Она справедлива только для жидких и газообразных диэлектриков.

В некоторых книгах формулу (22.3) выдают за «самое общее выражение закона Кулона». В связи с этим приведем следующие слова Р. Фейнмана: «Во многих старых книгах по электричеству изложение начинается с «основного» закона, по которому сила, действующая между зарядами, есть ... (приводится формула (22.3))..., а эта точка зрения абсолютно неприемлема. Во-первых, это не всегда верно; это справедливо только в мире, заполненном жидкостью; во-вторых, так получается лишь для постоянного значения  $\epsilon$ , что для большинства реальных материалов выполняется приближенно» («Фейнмановские лекции по физике», вып. 5, «Мир», 1966, стр. 208).

Вопросов, касающихся сил, действующих на заряд внутри полости, сделанной в твердом диэлектрике, мы касаться не будем.

## § 23. Сегнетоэлектрики

Существует группа веществ, которые могут обладать спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью в отсутствие внешнего поля. Это явление было первоначально открыто для сегнетовой соли, в связи с чем все подобные вещества получили название сегнетоэлектриков. Первое детальное исследование элек-



трических свойств сегнетовой соли было осуществлено советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей:

1. В то время как у обычных диэлектриков  $\epsilon$  составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например,  $\epsilon = 81$ ), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч.

2. Зависимость  $P$  от  $E$  не является линейной (см. ветвь 1 кривой, изображенной на рис. 23.1). Следовательно, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от напряженности поля.

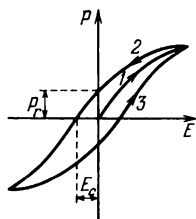


Рис. 23.1.

3. При изменениях поля значения поляризованности  $P$  (а следовательно, и смещения  $D$ ) отстают от напряженности поля  $E$ , в результате чего  $P$  и  $D$  определяются не только величиной  $E$  в данный момент, но и предшествующими значениями  $E$ , т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом (от греческого «гистерезис» — запаздывание). При циклических изменениях поля зависимость  $P$  от  $E$  следует изображенной

на рис. 23.1 кривой, называемой петлей гистерезиса. При первоначальном включении поля поляризованность растет с  $E$  в соответствии с ветвью 1 кривой. Уменьшение  $P$  происходит по ветви 2. При обращении  $E$  в нуль вещество сохраняет значение поляризованности  $P_r$ , называемое остаточной поляризованностью. Только под действием противоположно направленного поля напряженности  $E_c$  поляризованность становится равной нулю. Это значение напряженности называется коэрцитивной силой. При дальнейшем изменении  $E$  получается ветвь 3 петли гистерезиса, и т. д.

Поведение поляризованности сегнетоэлектриков аналогично поведению намагниченности ферромагнетиков (см. § 59). По этой причине сегнетоэлектрики называют иногда ферроэлектриками.

Сегнетоэлектриками могут быть только кристаллические вещества, причем такие, у которых отсутствует центр симметрии. Так, например, кристаллы сегнетовой соли принадлежат к ромбической системе (см. § 111 1-го тома). Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях одинаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же в кристалле возникают области, в пределах каждой из которых дипольные моменты параллельны друг другу, однако направления поляризации раз-

ных областей бывают различны, так что результирующий момент всего кристалла может быть равен нулю. Области спонтанной (самопроизвольной) поляризации называются также *доменами*. Под действием внешнего поля моменты доменов поворачиваются как целое, устанавливаясь по направлению поля.

Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, при которой вещество утрачивает необычные свойства и становится нормальным диэлектриком. Эта температура называется *точкой Кюри*. Сегнетова соль имеет две точки Кюри:  $-15^{\circ}\text{C}$  и  $+22,5^{\circ}\text{C}$ , причем она ведет себя как сегнетоэлектрик лишь в температурном интервале, ограниченном указанными значениями. При температуре ниже  $-15^{\circ}\text{C}$  и выше  $+22,5^{\circ}\text{C}$  электрические свойства сегнетовой соли обычны.

## ГЛАВА III

### ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

#### § 24. Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение следующих условий:

1. Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю,

$$E = 0. \quad (24.1)$$

В соответствии с (8.2) это означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным ( $\varphi = \text{const}$ ).

2. Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности:

$$E = E_n. \quad (24.2)$$

Следовательно, в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд  $q$ , то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Представим себе произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. При равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует; поэтому поток вектора электрического смещения через поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для поверхности любых размеров, проведенной внутри проводника произвольным образом. Следовательно, при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов — все они распределяются по поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ .

Поскольку в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Таким образом, избыточный заряд распределяется на полом проводнике так же, как и на сплошном, т. е.

по его наружной поверхности. На поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут. Этот вывод вытекает также из того, что одноименные элементарные заряды, образующие данный заряд  $q$ , взаимно отталкиваются и, следовательно, стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга.

Представим себе небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями величины  $dS$ , одно из которых расположено внутри, а другое вне проводника (рис. 24.1). Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $\mathbf{E}$ , а значит и  $\mathbf{D}$ , равно нулю. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля  $\mathbf{E}$  направлена по нормали к поверхности. Поэтому для выступающей наружу боковой поверхности цилиндра  $D_n = 0$ , а для внешнего основания  $D_n = D$  (внешнее основание предполагается расположенным очень близко к поверхности проводника). Следовательно, поток смещения через рассматриваемую поверхность равен  $DdS$ , где  $D$  — величина смещения в непосредственной близости к поверхности проводника. Внутри цилиндра содержится сторонний заряд  $\sigma dS$  ( $\sigma$  — плотность заряда в данном месте поверхности проводника). Применив теорему Гаусса, получим:  $DdS = \sigma dS$ , т. е.  $D = \sigma$ . Отсюда следует, что напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

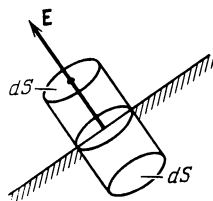


Рис. 24.1.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (24.3)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник (ср. с формулой (14.6), полученной для случая  $\epsilon = 1$ ).

Рассмотрим поле, создаваемое изображенным на рис. 24.2 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности имеют характерную для точечного заряда форму сферы (на рисунке из-за недостатка места сферическая поверхность изображена на небольшом расстоянии от проводника; пунктиром показаны линии напряженности поля). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит, и напряженность поля здесь больше. Отсюда следует, что плотность зарядов на выступах особенно велика (см. (24.3)). К такому же выводу можно прийти, учтя, что из-за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности расположены реже (см. рис. 24.3). Соответственно напряженность поля и плотность зарядов в этих местах будут меньше. Вообще, плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности — она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной

кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность зарядов на остриях. Поэтому напряженность поля вблизи остриев может быть настолько большой, что возникает ионизация молекул

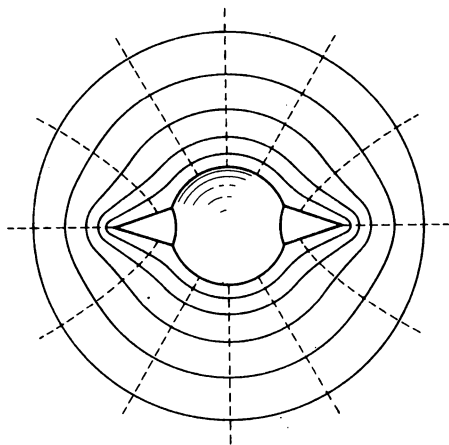


Рис. 24.2.

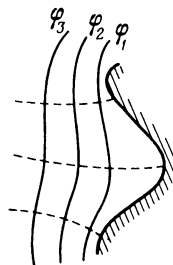


Рис. 24.3.

газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем  $q$ , притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и  $q$ , начинают двигаться от проводника, увлекая с собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ощутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается, он как бы стекает с острия и уносится ветром. Поэтому такое явление называют истечением заряда с острия.

## § 25. Проводник во внешнем электрическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные — в направлении вектора  $\mathbf{E}$ , отрицательные — в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 25.1; пунктиром показаны линии напряженности внешнего поля). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Следовательно, накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не будут выполнены условия (24.1) и (24.2), т. е. пока напряженность поля внутри

проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными к его поверхности (см. рис. 25.1). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности — они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

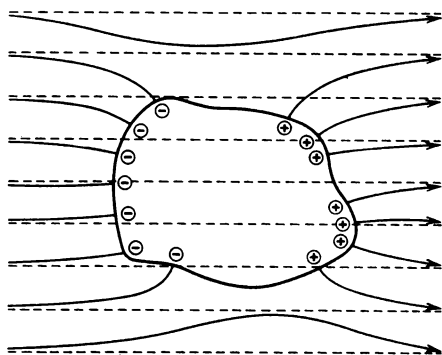


Рис. 25.1.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

## § 26. Електроємкост

Сообщенный проводнику заряд  $q$  распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Такое распределение является единственным. Поэтому, если проводнику, уже несущему заряд  $q$ , сообщить еще заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый, в противном случае он создаст в проводнике поле, отличное от нуля. Следует оговорить, что это справедливо лишь для удаленного от других тел (уединенного) проводника. Если вблизи данного проводника находятся другие тела, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов на этих телах. В результате подобие в распределении различных порций заряда будет нарушено.

Итак, различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике подобным образом (отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же). Отсюда вытекает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находя-

щемся на нем заряду. Действительно, увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно в такое же число раз возрастет работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т. е. потенциал проводника. Таким образом, для уединенного проводника

$$q = C\varphi. \quad (26.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между потенциалом и зарядом называется **емкостью** (сокращенно просто емкостью) проводника. Из (26.1) следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (26.2)$$

В соответствии с (26.2) емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Вычислим потенциал заряженного шара радиуса  $R$ . Между разностью потенциалов и напряженностью поля существует соотношение (8.6). Поэтому потенциал шара  $\varphi$  можно найти, проинтегрировав выражение (20.9) по  $r$  от  $R$  до  $\infty$  (потенциал на бесконечности полагаем равным нулю):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (26.3)$$

Сопоставив (26.3) с (26.2), найдем, что емкость уединенного шара радиуса  $R$ , погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (26.4)$$

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица емкости называется **фарадом** ( $\Phi$ ).

В гауссовой системе формула для емкости уединенного шара имеет вид  $C = \epsilon R$ . Поскольку  $\epsilon$  — безразмерная величина, емкость имеет размерность длины. За единицу емкости принимается емкость уединенного шара радиуса 1 см, находящегося в вакууме. Эту единицу емкости называют **сантиметром**. Согласно (26.2)

$$1 \Phi = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ СГСЭ-ед. емкости} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Емкостью в 1  $\Phi$  обладал бы уединенный шар радиуса  $9 \cdot 10^9$  м, т. е. радиуса, в 1500 раз большего радиуса Земли. Следовательно, фарад — очень большая величина. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарада: миллифарадом ( $\text{м}\Phi$ ), микрофарадом ( $\text{мк}\Phi$ ), нанофарадом ( $\text{н}\Phi$ ) и пикофарадом ( $\text{п}\Phi$ ) (см. 1-й том, § 20, табл. 20.1).

## § 27. Конденсаторы

Уединенные проводники обладают небольшой емкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет емкость всего лишь 700 мкФ. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливали бы на себе («конденсировали») заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых **к о н д е н с а т о р а м и**, положен тот факт, что электроемкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника  $q$ , располагаются ближе к проводнику, чем одноименные с  $q$ , и, следовательно, оказывают большое влияние на его потенциал. Поэтому при поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле (26.2) это означает увеличение емкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, помещенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют его обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 14) две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, сторонние заряды, возникающие на обкладках, имеют одинаковую величину и различны по знаку.

Основной характеристикой конденсатора является его емкость, под которой понимают величину, пропорциональную заряду  $q$  и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (27.1)$$

Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  называют напряжением между соответствующими точками<sup>1</sup>. Мы будем обозначать напряжение буквой  $U$ .

---

<sup>1</sup> Более общее определение величины, называемой напряжением, будет дано в § 33 (см. формулу (33.6)).



Воспользовавшись этим обозначением, можно придать формуле (27.1) вид

$$C = \frac{q}{U}. \quad (27.2)$$

Здесь  $U$  — напряжение между обкладками.

Емкость конденсаторов измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенных проводников (см. предыдущий параграф).

Величина емкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок и величиной зазора между ними), а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками. Найдем формулу для емкости плоского конденсатора. Если площадь обкладки  $S$ , а заряд на ней  $q$ , то напряженность поля между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$$

(см. формулы (14.4) и (20.2);  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей зазор между обкладками).

В соответствии с (8.6) разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

Отсюда для емкости плоского конденсатора получается формула

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (27.3)$$

где  $S$  — площадь обкладки,  $d$  — величина зазора между обкладками,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.

Отметим, что емкость реального плоского конденсатора определяется формулой (27.3) с тем большей точностью, чем меньше зазор  $d$  по сравнению с линейными размерами обкладок.

Из формулы (27.3) следует, что размерность электрической постоянной  $\epsilon_0$  равна размерности емкости, деленной на размерность длины. В соответствии с этим  $\epsilon_0$  измеряется в фарадах на метр (см. (4.2)).

Если пренебречь рассеянием поля вблизи краев обкладок, нетрудно получить для емкости цилиндрического конденсатора формулу

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (27.4)$$

где  $l$  — длина конденсатора,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней обкладок. Эта формула определяет емкость реального

конденсатора с тем большей точностью, чем меньше зазор между обкладками  $d = R_2 - R_1$  по сравнению с  $l$  и  $R_1$ .

Емкость сферического конденсатора равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (27.5)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней обкладок.

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением  $U_{\max}$ , которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

## ГЛАВА IV

### ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### § 28. Энергия заряженного проводника

Заряд  $q$ , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов  $\Delta q$ . В § 7 мы получили для энергии взаимодействия системы зарядов выражение (см. формулу (7.5))

$$W_p = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i. \quad (28.1)$$

Здесь  $\varphi_i$  — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в той точке, где помещается заряд  $q_i$ .

Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциалы тех точек, в которых находятся точечные заряды  $\Delta q$ , одинаковы и равны потенциалу  $\varphi$  проводника. Воспользовавшись формулой (28.1), получим для энергии заряженного проводника выражение

$$W_p = \frac{1}{2} \sum \varphi \Delta q = \frac{1}{2} \varphi \sum \Delta q = \frac{1}{2} \varphi q. \quad (28.2)$$

Приняв во внимание соотношение (26.2), можно написать

$$W_p = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (28.3)$$

Любое из этих выражений дает энергию заряженного проводника.

#### § 29. Энергия заряженного конденсатора

Пусть потенциал обкладки конденсатора, на которой находится заряд  $+q$ , равен  $\varphi_1$ , а потенциал обкладки, на которой находится заряд  $-q$ , равен  $\varphi_2$ . Тогда каждый из элементарных зарядов  $\Delta q$ , на которые можно разделить заряд  $+q$ , находится в точке с потенциалом  $\varphi_1$ , а каждый из зарядов, на которые можно разделить заряд  $-q$ , — в точке с потенциалом  $\varphi_2$ . Согласно

формуле (28.1) энергия такой системы зарядов равна

$$W_p = \frac{1}{2}[(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qU. \quad (29.1)$$

Воспользовавшись соотношением (27.2), можно написать три выражения для энергии заряженного конденсатора:

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (29.2)$$

Формулы (29.2) отличаются от формул (28.3) только заменой  $\varphi$  на  $U$ .

С помощью выражения для потенциальной энергии можно найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Допустим, что расстояние между пластинами может меняться. Свяжем начало оси  $x$  с левой пластиной (рис. 29.1). Тогда координата  $x$  второй пластины будет определять зазор  $d$  между обкладками. Согласно формулам (27.3) и (29.2)

$$W_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}x.$$

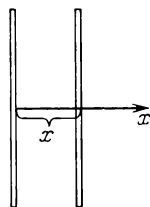


Рис. 29.1.

Продифференцируем это выражение по  $x$ , полагая заряд на обкладках неизменным (конденсатор отключен от источника напряжения). В результате получим проекцию на ось  $x$  силы, действующей на правую пластину:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}.$$

Модуль этого выражения дает величину силы, с которой обкладки притягивают друг друга:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}. \quad (29.3)$$

Теперь попытаемся вычислить силу притяжения между обкладками плоского конденсатора как произведение напряженности поля, создаваемого одной из обкладок, на заряд, сосредоточенный на другой. Согласно формуле (14.3) напряженность поля, создаваемого одной обкладкой, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}. \quad (29.4)$$

Диэлектрик ослабляет поле в  $\epsilon$  раз, но это имеет место только внутри диэлектрика (см. формулу (20.2) и связанный с нею текст). Заряды на обкладках располагаются вне диэлектрика и поэтому находятся под действием поля напряженности (29.4). Умножив заряд обкладки  $q$  на эту напряженность, получим для

силы выражение

$$F' = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (29.5)$$

Формулы (29.3) и (29.5) не совпадают. С опытом согласуется значение силы (29.3), получающееся из выражения для энергии. Это объясняется тем, что, кроме «электрической» силы (29.5), на обкладки действуют со стороны диэлектрика механические силы, стремящиеся их раздвинуть (см. § 22; отметим, что мы имеем в виду жидкий или газообразный диэлектрик). У края обкладок имеется рассеянное поле, убывающее по величине при удалении от краев (рис. 29.2). Молекулы диэлектрика, обладая дипольным моментом, испытывают действие силы, втягивающей их в область более сильного поля (см. формулу (9.16)). В результате давление между обкладками повышается и появляется сила, ослабляющая действие силы (29.5) в  $\epsilon$  раз.

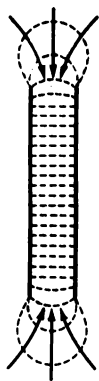


Рис. 29.2.

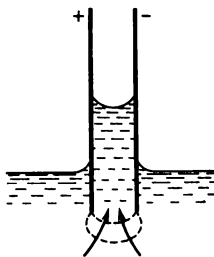


Рис. 29.3.

Если заряженный конденсатор с воздушным зазором частично погрузить в жидкий диэлектрик, наблюдается втягивание диэлектрика в пространство между пластинами (рис. 29.3). Это явление объясняется следующим образом. Диэлектрическая проницаемость воздуха практически равна единице. Поэтому до погружения пластин в диэлектрик емкость конденсатора можно считать равной  $C_0 = \epsilon_0 S/d$ , а энергию равной  $W_0 = q^2/2C_0$ . При частичном заполнении зазора диэлектриком конденсатор можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора, один из которых имеет площадь обкладки, равную  $xS$  ( $x$  — относительная часть зазора, заполненная жидкостью), и заполнен диэлектриком с  $\epsilon > 1$ , второй с воздушным зазором имеет площадь обкладки, равную  $(1-x)S$ . При параллельном включении конденсаторов емкости складываются:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S(1-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon xS}{d} = C_0 + \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)S}{d}x > C_0.$$

Поскольку  $C > C_0$ , энергия  $W = q^2/2C$  будет меньше, чем  $W_0$  (заряд  $q$  предполагается неизменным — перед погружением в жидкость конденсатор был отключен от источника напряжения). Следовательно, заполнение зазора диэлектриком оказывается энергетически выгодным. Поэтому диэлектрик втягивается в конденсатор и уровень его в зазоре поднимается. Это в свою очередь приводит к возрастанию потенциальной энергии диэлектрика в поле сил тяжести. В конечном итоге уровень диэлектрика в зазоре установится на некоторой высоте, соответствующей минимуму суммарной энергии (электрической и гравитационной). Рассмотренное явление сходно с капиллярным поднятием жидкости в узком зазоре между пластинками (см. § 119 1-го тома).

Втягивание диэлектрика в зазор между обкладками можно объяснить также и с микроскопической точки зрения. У краев пластин конденсатора имеется неоднородное поле. Молекулы диэлектрика обладают собственным дипольным моментом либо приобретают его под действием поля; поэтому на них действуют силы, стремящиеся переместить их в область сильного поля, т. е. внутрь конденсатора. Под действием этих сил жидкость втягивается в зазор до тех пор, пока электрические силы, действующие на жидкость у края пластин, не будут уравновешены весом столба жидкости.

### § 30. Энергия электрического поля

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками. Сделаем это для плоского конденсатора. Подстановка в формулу  $W_p = CU^2/2$  (см. (29.2)) выражения (27.3) для емкости дает

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 Sd.$$

Частное  $U/d$  равно напряженности поля в зазоре; произведение  $Sd$  представляет собой объем  $V$ , занимаемый полем. Следовательно,

$$W_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (30.1)$$

Формула  $W_p = q^2/2C$  связывает энергию конденсатора с зарядом на его обкладках, формула (30.1) — с напряженностью поля. Логично поставить вопрос: где же локализована (т. е. сосредоточена) энергия, что является носителем энергии — заряды или поле? В пределах электростатики, которая изучает постоянные по времени поля неподвижных зарядов, дать ответ на этот вопрос невозможно. Постоянные поля и обусловившие их заряды не могут существовать обособленно друг от друга. Однако меняющиеся во времени поля могут существовать независимо от возбудивших их заря-

дов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. В частности, энергия, за счет которой существует жизнь на Земле, доставляется от Солнца электромагнитными волнами; энергия, заставляющая звучать радиоприемник, переносится от передающей станции электромагнитными волнами, и т. д. Эти факты заставляют признать, что носителем энергии является поле.

Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плоскостью  $\omega$ , равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем. Из формулы (30.1) следует, что плотность энергии поля напряженности  $E$ , созданного в среде с проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (30.2)$$

С учетом соотношения (19.6) формулу (30.2) можно представить в виде

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (30.3)$$

В изотропном диэлектрике направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают. Поэтому формуле для плотности энергии можно придать вид

$$\omega = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}.$$

Заменив в этой формуле  $\mathbf{D}$  его значением (19.3), получим для  $\omega$  следующее выражение:

$$\omega = \frac{\mathbf{E}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{2} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{E}\mathbf{P}}{2}. \quad (30.4)$$

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с плотностью энергии поля  $\mathbf{E}$  в вакууме. Второе слагаемое, как мы сейчас докажем, представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика.

Поляризация диэлектрика заключается в том, что заряды, входящие в состав молекул, смещаются из своих положений под действием электрического поля  $\mathbf{E}$ . В расчете на единицу объема диэлектрика работа, затрачиваемая на смещение зарядов  $q_i$  на величины  $d\mathbf{r}_i$ , равна

$$dA = \sum_{i=1} q_i \mathbf{E} d\mathbf{r}_i = E d \left( \sum_{i=1} q_i r_i \right)$$

(для простоты мы считаем, что поле однородно). Согласно формуле (15.1)  $\sum_{i=1} q_i r_i$  равна дипольному моменту единицы объема,

т. е. поляризованности диэлектрика  $\mathbf{P}$ . Следовательно,

$$dA = \mathbf{E} d\mathbf{P}. \quad (30.5)$$

Вектор  $\mathbf{P}$  связан с вектором  $\mathbf{E}$  соотношением  $\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$  (см. (16.2)). Отсюда  $d\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 d\mathbf{E}$ . Подставив это значение  $d\mathbf{P}$  в (30.5), получим выражение

$$dA = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = d\left(\frac{\kappa \epsilon_0 E^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathbf{E} \mathbf{P}}{2}\right).$$

Наконец, произведя интегрирование, найдем для работы, затрачиваемой на поляризацию единицы объема диэлектрика, выражение

$$A = \frac{\mathbf{E} \mathbf{P}}{2}, \quad (30.6)$$

которое совпадает со вторым слагаемым в формуле (30.4). Таким образом, выражения (30.3) включают в себя, кроме собственно энергии поля  $\epsilon_0 E^2/2$ , еще и энергию  $\mathbf{E} \mathbf{P}/2$ , затрачиваемую при создании поля на поляризацию диэлектрика.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме  $V$ . Для этого нужно вычислить интеграл

$$W = \int w dV = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (30.7)$$

В качестве примера вычислим энергию поля заряженного проводящего шара радиуса  $R$ , помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в этом случае является функцией только от  $r$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщины  $dr$ . Объем слоя равен  $dV = 4\pi r^2 dr$ . В нем заключена энергия

$$dW = w dV = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

Энергия поля равна

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

(согласно (26.4)  $4\pi\epsilon_0 \epsilon R$  есть емкость шара).

Полученное нами выражение совпадает с выражением для энергии проводника, обладающего емкостью  $C$  и несущего на себе заряд  $q$  (см. формулу (28.3)).



## ГЛАВА V

### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### § 31. Электрический ток

Если через некоторую воображаемую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, говорят, что через эту поверхность течет электрический ток. Ток может течь в твердых телах (металлы, полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах<sup>1</sup>.

Для протекания тока необходимо наличие в данном теле (или в данной среде) заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела. Такие частицы называются носителями тока. Ими могут быть электроны, либо ионы, либо, наконец, макроскопические частицы, несущие на себе избыточный заряд (например, заряженные пылинки и капельки).

Ток возникает при условии, что внутри тела существует электрическое поле. Носители заряда принимают участие в молекулярном тепловом движении и, следовательно, движутся с некоторой скоростью  $\mathbf{v}$  и в отсутствие поля. Но в этом случае через произвольную площадку, проведенную мысленно в теле, проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей любого знака, так что ток равен нулю. При включении поля на хаотическое движение носителей со скоростью  $\mathbf{v}$  накладывается упорядоченное движение со скоростью  $\mathbf{u}$ <sup>2</sup>. Таким образом, скорость носителей будет  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ . Так как среднее значение  $\mathbf{v}$  (но не  $v$ ) равно нулю, то средняя скорость носителей равна  $\langle \mathbf{u} \rangle$ :

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle.$$

Из сказанного следует, что электрический ток можно определить как упорядоченное движение электрических зарядов.

---

<sup>1</sup> Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом.

<sup>2</sup> Подобно этому в потоке газа на хаотическое тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение.

Количественной характеристикой электрического тока служит величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Ее называют силой тока. Отметим, что сила тока есть по существу поток заряда через поверхность (ср. с потоком жидкости, потоком энергии и т. п.).

Если за время  $dt$  через поверхность переносится заряд  $dq$ , то сила тока равна

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (31.1)$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Если ток создается носителями обоих знаков, причем за время  $dt$  через данную поверхность положительные носители переносят заряд  $dq^+$  в одном направлении, а отрицательные — заряд  $dq^-$  в противоположном, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}.$$

За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ . Этот вектор численно равен силе тока  $dI$  через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей площадку  $dS_\perp$ , отнесенной к величине этой площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}. \quad (31.2)$$

За направление  $\mathbf{j}$  принимается направление вектора скорости  $\mathbf{u}^+$  упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора  $\mathbf{u}^-$ ).

Поле вектора плотности тока можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся так же, как и линии тока в текущей жидкости, линии вектора  $\mathbf{E}$  и т. д.

Зная вектор плотности тока в каждой точке пространства, можно найти силу тока  $I$  через любую поверхность  $S$ :

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (31.3)$$

Из (31.3) следует, что сила тока есть поток вектора плотности тока через поверхность (см. формулу (11.7)).

Пусть в единице объема содержится  $n^+$  положительных носителей и  $n^-$  отрицательных. Алгебраическая величина зарядов носителей равна соответственно  $e^+$  и  $e^-$ . Если под действием поля носители приобретают средние скорости  $u^+$  и  $u^-$ , то за единицу времени через единичную площадку пройдет  $n^+u^+$  положительных носителей<sup>1</sup>, которые перенесут заряд  $e^+n^+u^+$ . Аналогично отрицательные носители перенесут в противоположную сторону заряд  $e^-n^-u^-$ . Таким образом, для плотности тока получается следующее выражение:

$$j = e^+n^+u^+ + |e^-|n^-u^-. \quad (31.4)$$

Этому выражению можно придать векторную форму:

$$\mathbf{j} = e^+n^+\mathbf{u}^+ + e^-n^-\mathbf{u}^- \quad (31.5)$$

(оба слагаемых имеют одинаковое направление: вектор  $\mathbf{u}^-$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{j}$ , при умножении его на отрицательный скаляр  $e^-$  получается вектор одинакового направления с  $\mathbf{j}$ ).

Произведение  $e^+n^+$  дает плотность заряда положительных носителей  $\rho^+$ , аналогично  $e^-n^-$  дает плотность заряда отрицательных носителей  $\rho^-$ . Следовательно, выражение (31.5) можно написать в виде

$$\mathbf{j} = \rho^+\mathbf{u}^+ + \rho^-\mathbf{u}^-. \quad (31.6)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется **п о с т о я н н ы м**. Для постоянного тока справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t}, \quad (31.7)$$

где  $q$  — заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечное время  $t$ .

В СИ единица силы тока **а м п е р (А)** является основной. Ее определение будет дано позже (см. § 39). Единица заряда **к у л о н** определяется как заряд, переносимый за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока в 1 А.

За единицу силы тока в СГСЭ-системе принимается сила такого тока, при котором через данную поверхность переносится за 1 с одна СГСЭ-единица заряда. Из соотношений (31.7) и (3.3) следует, что

$$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. силы тока.} \quad (31.8)$$

<sup>1</sup> Выражение для числа молекул, пролетающих в единицу времени через единичную площадку, содержит, кроме того, множитель  $1/4$ , обусловленный тем, что молекулы движутся хаотически (см. формулу (95.6) 1-го тома). В данном случае этого множителя нет, так как все носители данного знака движутся упорядоченно в одном направлении.

### § 32. Уравнение непрерывности

Рассмотрим в некоторой среде, в которой течет ток, воображаемую замкнутую поверхность  $S$  (рис. 32.1). Выражение  $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$  дает заряд, выходящий в единицу времени из объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ . В силу сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда  $q$ , содержащегося в данном объеме:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Представив  $q$  в виде  $\int_V \rho dV$ , получим соотношение

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (32.1)$$

Под знаком интеграла мы написали частную производную  $\rho$  по  $t$ , поскольку плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат (интеграл  $\int_V \rho dV$  есть функция только времени).

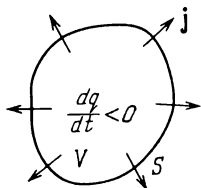


Рис. 32.1.

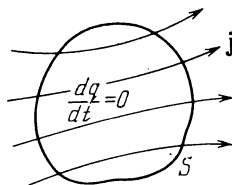


Рис. 32.2.

Преобразуем левую часть равенства (32.1) по теореме Остроградского — Гаусса. В результате получим

$$\int_V \nabla \mathbf{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (32.2)$$

Равенство (32.2) должно выполняться при произвольном выборе объема  $V$ , по которому берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если в каждой точке пространства выполняется условие

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (32.3)$$

Соотношение (32.3) называют уравнением непрерывности. Оно (равно как и уравнение (32.1)) выражает закон сохранения заряда. Согласно (32.3) в точках, которые являются источниками вектора  $\mathbf{j}$ , происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока потенциал в разных точках, плотность заряда и другие величины являются неизменными. Следовательно, для стационарного (т. е. постоянного) тока уравнение (32.3) имеет вид

$$\nabla j = 0. \quad (32.4)$$

Таким образом, в случае постоянного тока вектор  $j$  не имеет источников. Это означает, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Следовательно, линии постоянного тока всегда замкнуты. Соответственно  $\oint j dS$  равен нулю. Поэтому для постоянного тока картина, аналогичная изображенной на рис. 32.1, имеет вид, показанный на рис. 32.2.

### § 33. Электродвижущая сила

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом (носители тока предполагаются положительными) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить (рис. 33.1). Иными словами,

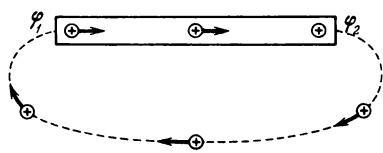


Рис. 33.1.

необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока замкнуты (см. предыдущий параграф).

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители движутся в сторону убывания потенциала  $\phi$ , должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания  $\phi$ , т. е. против сил электростатического поля (см. изображенную пунктиром часть цепи на рис. 33.1). Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Таким образом, для поддержания тока необходимы сторонние силы, действующие либо на всем протяжении цепи, либо на отдельных ее участках. Эти силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями (см. § 69), и т. д.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется электродвижущей силой (э.д.с.)  $\mathcal{E}$ , действующей в цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом  $q$  равна  $A$ , то

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \quad (33.1)$$

Из сопоставления формул (33.1) и (6.11) вытекает, что размерность э.д.с. совпадает с размерностью потенциала. Поэтому  $\mathcal{E}$  измеряется в тех же единицах, что и  $\phi$ .

Стороннюю силу  $\mathbf{F}_{\text{ст}}$ , действующую на заряд  $q$ , можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{\text{ст}} = \mathbf{E}^* q. \quad (33.2)$$

Векторную величину  $\mathbf{E}^*$  называют напряженностью поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом  $q$  на участке цепи 1—2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ст}} d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Разделив эту работу на  $q$ , получим э.д.с., действующую на данном участке:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}. \quad (33.3)$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст э.д.с., действующую в этой цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}^* d\mathbf{l}. \quad (33.4)$$

Таким образом, э.д.с., действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на заряд действуют силы электростатического поля  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ . Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд  $q$ , равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{\text{ст}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом  $q$  на участке цепи 1—2, определяется выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} + q \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l} = q(\phi_1 - \phi_2) + q\mathcal{E}_{12}. \quad (33.5)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением  $U$  на данном участке цепи. В соответствии с формулой (33.5)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (33.6)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным. Для однородного участка цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (33.7)$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка.

### § 34. Закон Ома. Сопротивление проводников

Ом экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока, текущего по однородному* (в смысле отсутствия сторонних сил) *металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения  $U$  на проводнике:*

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (34.1)$$

Напомним, что в случае однородного проводника напряжение  $U$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (см. (33.6)).

Обозначенная в формуле (34.1) буквой  $R$  величина называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей сопротивления служит ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1 В течет ток силой 1 А.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (34.2)$$

где  $l$  — длина проводника,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $\rho$  — зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением вещества. Если  $l = 1$  и  $S = 1$ , то  $R$  численно равно  $\rho$ . В СИ  $\rho$  измеряется в ом-метрах (Ом·м).

Найдем связь между векторами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  в одной и той же точке проводника. В изотропном проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Поэтому на-

правления векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают<sup>1</sup>. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  (рис. 34.1). Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой  $j dS$ . Напряжение, приложенное к цилиндру, равно  $E dl$ , где  $E$  — напряженность поля в данном месте. Наконец, сопротивление цилиндра, согласно формуле (34.2), равно  $\rho(dl/dS)$ . Подставив эти значения в формулу (34.1), придем к соотношению

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl, \text{ или } j = \frac{1}{\rho} E.$$

Воспользовавшись тем, что векторы  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  имеют одинаковое направление, можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (34.3)$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Фигурирующая в (34.3) обратная  $\rho$  величина  $\sigma$  называется удельной электрической проводимостью материала. Единица, обратная ому, называется сименсом (См). Соответственно единицей  $\sigma$  является сименс на метр (См/м).

Допустим для простоты, что в проводнике имеются носители лишь одного знака. Согласно формуле (31.5) плотность тока в этом случае равна

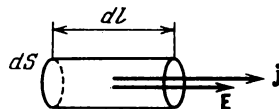


Рис. 34.1.

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u}. \quad (34.4)$$

Сравнение этого выражения с формулой (34.3) приводит к выводу, что скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна напряженности поля  $\mathbf{E}$ , т. е. силе, сообщающей носителям упорядоченное движение. Пропорциональность скорости приложенной к телу силе наблюдается в тех случаях, когда кроме силы, вызвавшей движение, на тело действует сила сопротивления среды. Эта сила вызывается взаимодействием носителей тока с частицами, из которых построено вещество проводника. Наличие силы сопротивления упорядоченному движению носителей тока обуславливает электрическое сопротивление проводника.

Способность вещества проводить электрический ток характеризуется его удельным сопротивлением  $\rho$  либо удельной проводимостью  $\sigma$ . Их величина определяется химической природой веществ.

<sup>1</sup> В анизотропных телах направления векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, не совпадают. В таких телах связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  осуществляется с помощью тензора проводимости.



ва и условиями, в частности температурой, при которых оно находится.

Для большинства металлов при температурах, близких к комнатной,  $\rho$  изменяется пропорционально абсолютной температуре  $T$ :

$$\rho \sim T. \quad (34.5)$$

При низких температурах наблюдаются отступления от этой закономерности (рис. 34.2). В большинстве случаев зависимость  $\rho$  от  $T$

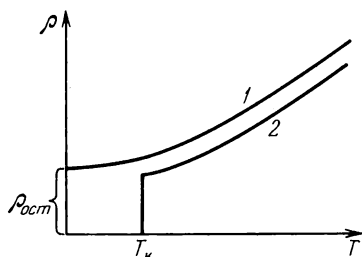


Рис. 34.2.

следует кривой 1. Величина остаточного сопротивления  $\rho_{ост}$  в сильной степени зависит от чистоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце. Поэтому после отжига  $\rho_{ост}$  заметно уменьшается. У абсолютно чистого металла с идеальной кристаллической решеткой при абсолютном нуле  $\rho = 0$ .

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких кельвинов сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 34.2). Впервые это явление, названное *сверхпроводимостью*, было обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом для ртути. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца, олова, цинка, алюминия и других металлов, а также у ряда сплавов. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура  $T_k$ , при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. При действии на сверхпроводник магнитного поля сверхпроводящее состояние нарушается. Величина критического поля  $B_k^1$ , разрушающего сверхпроводимость, равна нулю при  $T = T_k$  и растет с понижением температуры.

Полное теоретическое объяснение сверхпроводимости было дано академиком Н. Н. Боголюбовым и независимо от него Дж. Бардином, Л. Купером и Дж. Шриффером (см. § 56 тома 3).

Зависимость электрического сопротивления от температуры положена в основу термометров сопротивления. Такой термометр представляет собой металлическую (обычно платиновую) проволочку, намотанную на фарфоровый или слюдяной каркас. Проградуированный по постоянным температурным точкам термометр сопротивления позволяет измерять с погрешностью порядка нескольких сотых градуса как низкие, так и высокие температуры. В последнее время все большее применение находят термометры сопротивления из полупроводников.

<sup>1</sup> Буквой  $B$  обозначают индукцию магнитного поля (см. § 40).

### § 35. Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электростатических сил  $eE$ , сторонние силы  $eE^*$ . Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, как и силы электростатические. В предыдущем параграфе мы выяснили, что в однородном проводнике средняя скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна электростатической силе  $eE$ . Очевидно, что там, где, кроме электростатической силы, на носители действуют сторонние силы, средняя скорость упорядоченного движения носителей будет пропорциональна суммарной силе  $eE + eE^*$ . Соответственно плотность тока в этих точках оказывается пропорциональной сумме напряженностей  $E + E^*$ :

$$j = \sigma (E + E^*). \quad (35.1)$$

Формула (35.1) обобщает формулу (34.3) на случай неоднородного проводника. Она выражает в дифференциальной форме закон Ома для неоднородного участка цепи.

От закона в дифференциальной форме можно перейти к интегральной форме закона Ома. Рассмотрим неоднородный участок цепи. Допустим, что внутри этого участка существует линия (мы будем называть ее контуром тока), удовлетворяющая следующим условиям: 1) в каждом сечении, перпендикулярном к контуру, величины  $j$ ,  $\sigma$ ,  $E$ ,  $E^*$  имеют с достаточной точностью одинаковые значения; 2) векторы  $j$ ,  $E$  и  $E^*$  в каждой точке направлены по касательной к контуру. Поперечное сечение проводника может быть непостоянным (рис. 35.1).

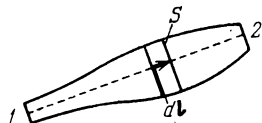


Рис. 35.1.

Выберем произвольно направление движения по контуру. Пусть выбранное направление соответствует перемещению от конца 1 к концу 2 участка цепи (направление 1—2). Спроектируем векторы, входящие в соотношение (35.1), на элемент контура  $dl$ . В результате получим

$$j_l = \sigma (E_l + E_l^*). \quad (35.2)$$

В силу сделанных предположений проекция каждого из векторов равна модулю вектора, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того, как направлен вектор по отношению к  $dl$ . Например,  $j_l = j$ , если ток течет в направлении 1—2, и  $j_l = -j$ , если ток течет в направлении 2—1.

Вследствие сохранения заряда сила постоянного тока в каждом сечении должна быть одинаковой. Поэтому величина  $I = j_l S$  постоянна вдоль контура. Силу тока в данном случае нужно рассматривать как алгебраическую величину. Напомним, что направление

$I$ —2 мы выбрали произвольно. Поэтому, если ток течет в выбранном направлении, его следует считать положительным; если же ток течет в противоположном направлении (т. е. от конца 2 к концу 1), его силу следует считать отрицательной.

Заменим в (35.2)  $j_l$  отношением  $I/S$ , а проводимость  $\sigma$  — удельным сопротивлением  $\rho$ . В итоге получим соотношение

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*.$$

Умножим это соотношение на  $dl$  и проинтегрируем вдоль контура:

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 E_l^* dl.$$

Выражение  $\rho dl/S$  представляет собой сопротивление участка контура длины  $dl$ , а интеграл от этого выражения — сопротивление  $R$  участка цепи. Первый интеграл в правой части дает  $\varphi_1 - \varphi_2$ , а второй интеграл — э. д. с.  $\mathcal{E}_{12}$ , действующую на участке. Таким образом, мы приходим к формуле

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (35.3)$$

Э. д. с.  $\mathcal{E}_{12}$ , как и сила тока  $I$ , есть величина алгебраическая. В случае, когда э. д. с. способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении (в направлении  $I$ —2),  $\mathcal{E}_{12} > 0$ . Если э. д. с. препятствует движению положительных носителей в данном направлении,  $\mathcal{E}_{12} < 0$ .

Напишем (35.3) в виде

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (35.4)$$

Эта формула выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. Положив  $\varphi_1 = \varphi_2$ , получим выражение закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (35.5)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — э. д. с., действующая в цепи,  $R$  — суммарное сопротивление всей цепи.

### § 36. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. У з л о м называется точка, в которой сходится более чем два проводника (рис. 36.1). Ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), текущий от узла — имеющим другой знак (минус или плюс).

Первое правило Кирхгофа гласит, что *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum I_k = 0. \quad (36.1)$$

Это правило вытекает из уравнения непрерывности, т. е., в конечном счете, из закона сохранения заряда. Для постоянного тока  $\nabla \mathbf{j}$  всюду равна нулю (см. (32.4)). Следовательно, поток вектора  $\mathbf{j}$  (т. е. алгебраическая сумма токов, текущих через окружающую узел воображаемую замкнутую поверхность) должен быть равен нулю.

Уравнение (36.1) можно написать для каждого из  $N$  узлов цепи. Однако независимыми являются только  $N-1$  уравнений,  $N$ -е будет следствием из них.

Второе правило относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру (см., например, контур 1—2—3—4—1 на рис. 36.2). Зададимся направлением обхода (например, по часовой стрелке, как указано на

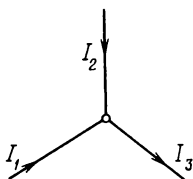


Рис. 36.1.

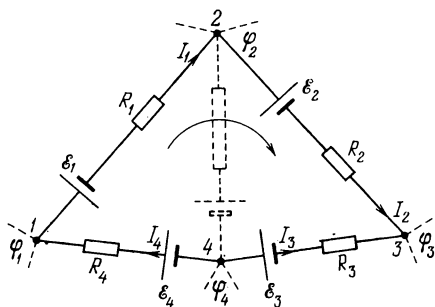


Рис. 36.2.

рисунке) и применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1, \\ I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2, \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3, \\ I_4 R_4 &= \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4. \end{aligned}$$

При сложении этих выражений потенциалы сокращаются и получается уравнение

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k, \quad (36.2)$$

которое выражает второе правило Кирхгофа.

Уравнение (36.2) может быть составлено для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. Однако независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров

друг на друга. Так, например, для цепи, изображенной на рис. 36.3, можно составить три уравнения:

- 1) для контура  $1-2-3-6-1$ ,
- 2) для контура  $3-4-5-6-3$ ,
- 3) для контура  $1-2-3-4-5-6-1$ .

Последний контур получается наложением первых двух. Поэтому уравнения не будут независимыми. В качестве независимых можно взять любые два уравнения из трех.

При составлении уравнений второго правила Кирхгофа токам и э. д. с. нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Например, ток  $I_1$  на рис. 36.3 нужно считать отрицательным, так как он течет навстречу выбранному направлению обхода.

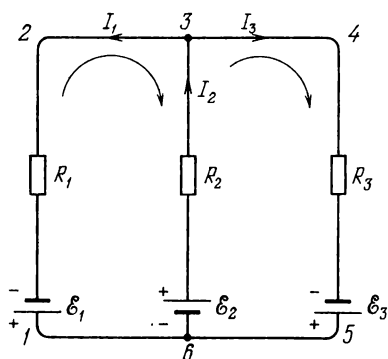


Рис. 36.3.

Э. д. с.  $\varepsilon_1$  также нужно приписать знак минус, так как она действует в направлении, противоположном направлению обхода, и т. д.

Направления обхода в каждом из контуров можно выбирать совершенно произвольно и независимо от выбора направлений в других контурах. При этом может случиться, что один и тот же ток либо одна и та же э. д. с. войдет в разные уравнения с различными знаками (так получается с током  $I_2$  на рис. 36.3 при указанных направлениях

обхода в контурах). Это, однако, не имеет никакого значения, потому что изменение направления обхода вызывает лишь изменение всех знаков в уравнении (36.2) на обратные.

Составляя уравнения, следует помнить, что через любое сечение неразветвленного участка цепи течет один и тот же ток. Например, на участке от точки 6 до источника тока  $\varepsilon_2$  течет такой же ток  $I_2$ , как на участке от источника  $\varepsilon_2$  до точки 3.

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, оказывается равным числу различных токов, текущих в разветвленной цепи. Поэтому, если заданы э. д. с. и сопротивления для всех неразветвленных участков, то могут быть вычислены все токи. Можно решить и задачи иного рода, например, найти э. д. с., которые нужно включить в каждый из участков цепи, чтобы получить при заданных сопротивлениях нужные токи.

### § 37. Мощность тока

Рассмотрим произвольный участок цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $t$  через каждое сечение проводника проходит заряд  $q = It$ . Это равносильно тому, что заряд  $It$  переносится за время  $t$  из одного конца проводника в другой. При этом силы электростатического поля и сторонние силы, действующие на данном участке, совершают работу

$$A = Uq = UIt \quad (37.1)$$

(напомним, что напряжение  $U$  определяется как работа, совершаемая электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда; см. формулу (33.6)).

Разделив работу  $A$  на время  $t$ , за которое она совершается, получим мощность, развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon_{12}I. \quad (37.2)$$

Эта мощность может расходоваться на совершение рассматриваемым участком цепи работы над внешними телами (для этого участок должен перемещаться в пространстве), на протекание химических реакций и, наконец, на нагревание данного участка цепи.

Отношение мощности  $\Delta P$ , развиваемой током в объеме проводника  $\Delta V$ , к величине этого объема называется удельной мощностью тока  $P_{уд}$ , отвечающей данной точке проводника. По определению удельная мощность равна

$$P_{уд} = \frac{\Delta P}{\Delta V}. \quad (37.3)$$

Условно говоря, удельная мощность есть мощность, развиваемая в единице объема проводника.

Выражение для удельной мощности тока можно получить, исходя из следующих соображений. Сила  $e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$  развивает при движении носителя тока мощность, равную

$$P' = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)(\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

Усредним это выражение по носителям, заключенным в объеме  $\Delta V$ , в пределах которого  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^*$  можно считать постоянными. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle P' \rangle &= e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \\ &= e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{v} \rangle + e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

(напомним, что  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ ).

Мощность  $\Delta P$ , развиваемую в объеме  $\Delta V$ , можно найти, умножив  $\langle P' \rangle$  на число носителей тока в этом объеме, которое равно  $n \Delta V$

( $n$  — число носителей в единице объема). Таким образом,

$$\Delta P = \langle P' \rangle n \Delta V = e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle n \Delta V = \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \Delta V$$

(см. (34.4)). Отсюда

$$P_{\text{уд}} = \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (37.4)$$

Это выражение представляет собой дифференциальную форму интегрального выражения (37.2).

### § 38. Закон Джоуля — Ленца

В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не совершается, работа тока (37.1) затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. Принято говорить, что при протекании тока в проводнике выделяется тепло

$$Q = UIt.$$

Заменив в соответствии с законом Ома  $U$  через  $RI$ , получим формулу

$$Q = RI^2t. \quad (38.1)$$

Соотношение (38.1) было установлено экспериментально Джоулем и, независимо от него, Ленцем и носит название **з а к о н а Дж о у л я — Л е н ц а**.

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты, выделяющееся за время  $t$ , вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^t RI^2 dt. \quad (38.2)$$

От формулы (38.1), определяющей тепло, выделяющееся во всем проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника. Выделим в проводнике таким же образом, как это было сделано при выводе формулы (34.3), элементарный объем в виде цилиндра (см. рис. 34.1). Согласно закону Джоуля — Ленца за время  $dt$  в этом объеме выделяется тепло

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt \quad (38.3)$$

( $dV = dS dl$  — величина элементарного объема).

Разделив выражение (38.3) на  $dV$  и  $dt$ , найдем количество теплоты, выделяющееся в единице объема в единицу времени:

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2. \quad (38.4)$$

По аналогии с наименованием величины (37.3), величину  $Q_{\text{уд}}$  можно назвать **удельной тепловой мощностью тока**.

Формула (38.4) представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля — Ленца. Ее можно получить из соотношения (37.4). Заменяя в (37.4)  $E + E^*$  через  $j/\sigma = \rho j$  (см. (35.1)), приходим к выражению

$$P_{уд} = \rho j^2,$$

которое совпадает с (38.4).

Отметим, что Джоуль и Ленц установили свой закон для однородного участка цепи. Однако, как следует из выкладок, приведенных в данном параграфе, формулы (38.1) и (38.4) справедливы и для неоднородного участка при условии, что действующие в нем сторонние силы имеют нехимическое происхождение.



## Г Л А В А VI

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

#### § 39. Взаимодействие токов

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи (мы будем называть их прямыми токами), притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкивают, если токи противоположны. Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величинам токов в них  $I_1$  и  $I_2$  и обратно пропорциональна расстоянию  $b$  между ними:

$$F_{\text{ед}} = k \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (39.1)$$

По соображениям, которые станут ясными в дальнейшем, коэффициент пропорциональности мы обозначили через  $2k$ .

Закон взаимодействия токов был установлен в 1820 г. Ампером. Общее выражение этого закона, пригодное для проводников любой формы, будет дано в § 44.

На основании соотношения (39.1) устанавливается единица силы тока в СИ и в абсолютной электромагнитной системе единиц (СГСМ-системе). Единица силы тока в СИ — а м п е р — определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

Единицу заряда, называемую к у л о н о м, определяют как заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника, по которому течет постоянный ток силой 1 А. В соответствии с этим кулон называют также а м п е р - с е к у н д о й (А·с).

В рационализованном виде формула (39.1) записывается следующим образом:

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}, \quad (39.2)$$

где  $\mu_0$  — так называемая магнитная постоянная (ср. с формулой (4.1)). Чтобы найти числовое значение  $\mu_0$ , воспользуемся тем, что согласно определению ампера при  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $b = 1$  м сила  $F_{\text{ед}}$  получается равной  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м. Подставим эти значения в формулу (39.2):

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1}.$$

Отсюда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}^1. \quad (39.3)$$

Коэффициент  $k$  в формуле (39.1) можно сделать равным единице за счет выбора единицы силы тока. Так устанавливается абсолютная электромагнитная единица силы тока (СГСМ-ед. силы тока), которая определяется как сила такого тока, который, протекая по тонкому прямолинейному бесконечно длинному проводу, действует на равный и параллельный ему прямой ток, отстоящий на 1 см, с силой в 2 дин на каждый сантиметр длины.

В СГСЭ-системе  $k$  оказывается отличной от единицы размерной величиной. Согласно формуле (39.1) размерность  $k$  определяется следующим выражением:

$$[k] = \frac{[F_{\text{ед}} b]}{[I]^2} = \frac{[F]}{[I]^2}. \quad (39.4)$$

Мы учли, что размерность  $F_{\text{ед}}$  есть размерность силы, деленная на размерность длины; поэтому размерность произведения  $F_{\text{ед}} b$  равна размерности силы. Согласно формулам (3.2) и (31.7)

$$[F] = \frac{[q]^2}{L^2}; \quad [I] = \frac{[q]}{T}.$$

Подставив эти значения в выражение (39.4), найдем, что

$$[k] = \frac{T^2}{L^2}.$$

Следовательно, в СГСЭ-системе  $k$  можно представить в виде

$$k = \frac{1}{c^2}, \quad (39.5)$$

где  $c$  — имеющая размерность скорости величина, называемая электродинамической постоянной. Чтобы найти ее числовое значение, воспользуемся соотношением (3.3) между кулоном и СГСЭ-единицей заряда, которое было установлено опытным путем. Сила в  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м эквивалентна  $2 \cdot 10^{-4}$  дин/см. Согласно формуле (39.1) с такой силой взаимодействуют токи по  $3 \cdot 10^9$  СГСЭ-единиц (т. е. 1 А) каждый при  $b = 100$  см. Таким образом,

$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{c^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100},$$

откуда

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (39.6)$$

Значение электродинамической постоянной совпадает с величиной скорости света в вакууме. Из теории Максвелла вытекает существование электромагнитных волн, скорость которых в вакууме равна электродинамической постоянной  $c$ . Совпадение  $c$  со скоростью света в вакууме дало Максвеллу основание предположить, что свет есть электромагнитная волна.

<sup>1</sup> Генри на метр (см. § 64).

Значение  $k$  в формуле (39.1) равно 1 в СГСМ-системе и  $1/c^2 = 1/(3 \cdot 10^{10})^2 \text{ с}^2/\text{см}^2$  в СГСЭ-системе. Отсюда следует, что ток силой в 1 СГСМ-единицу эквивалентен току силой в  $3 \cdot 10^{10}$  СГСЭ-единиц:

$$1 \text{ СГСМ-ед. силы тока} = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ-ед. силы тока} = 10 \text{ А.} \quad (39.7)$$

Умножив это соотношение на 1 с, получим

$$1 \text{ СГСМ-ед. заряда} = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ-ед. заряда} = 10 \text{ Кл.} \quad (39.8)$$

Таким образом,

$$I_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} I_{\text{СГСЭ}}. \quad (39.9)$$

Соответственно

$$q_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} q_{\text{СГСЭ}}. \quad (39.10)$$

Между постоянными  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  и  $c$  имеется связь. Для установления этой связи найдем размерность и числовое значение произведения  $\epsilon_0 \mu_0$ . В соответствии с формулой (4.1), размерность  $\epsilon_0$  равна

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]^2}{L^2 [F]}. \quad (39.11)$$

Согласно (39.2)

$$[\mu_0] = \frac{[F_{\text{эн}} b]}{[I]^2} = \frac{[F] T^2}{[q]^2}. \quad (39.12)$$

Перемножив выражения (39.11) и (39.12), получим

$$[\epsilon_0 \mu_0] = \frac{T^2}{L^2} = \frac{1}{[v]^2} \quad (39.13)$$

( $v$  — скорость).

С учетом (4.2) и (39.3) числовое значение произведения  $\epsilon_0 \mu_0$  равно

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}. \quad (39.14)$$

Наконец, приняв во внимание (39.6), (39.13) и (39.14), получим интересующую нас связь:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (39.15)$$

## § 40. Магнитное поле

Взаимодействие токов осуществляется через поле, называемое **магнитным**. Это название происходит от того, что, как обнаружил в 1820 г. Эрстед, поле, возбуждаемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда проволока, по которой тек ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавлива-

лась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока заставляло стрелку повернуться в противоположную сторону.

Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту величину принято обозначать буквой **B**. Логично было бы по аналогии с напряженностью электрического поля **E** назвать **B** напряженностью магнитного поля. Однако по историческим причинам основную силовую характеристику магнитного поля называли магнитной индукцией. Название же «напряженность магнитного поля» оказалось присвоенным вспомогательной величине **H**, аналогичной вспомогательной характеристике **D** электрического поля.

Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.

Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака движутся в противоположную сторону (либо покоятся). Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства — создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.

Опыт дает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: *поле **B**, порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей **B<sub>i</sub>**, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:*

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \quad (40.1)$$

(ср. с (5.7)).

## § 41. Поле движущегося заряда

Пространство изотропно, поэтому, если заряд неподвижен, все направления оказываются равноправными. Этим обусловлен тот факт, что создаваемое точечным зарядом электростатическое поле является сферически-симметричным.

В случае движения заряда со скоростью **v** в пространстве появляется выделенное направление (направление вектора **v**). Поэтому можно ожидать, что магнитное поле, создаваемое движущимся зарядом, обладает осевой симметрией. Отметим, что имеется в виду свободное движение заряда, т. е. движение с постоянной скоростью. Чтобы возникло ускорение, необходимо действие на заряд какого-то поля (электрического или магнитного). Это поле само по себе нарушило бы изотропию пространства.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое в некоторой точке  $P$  точечным зарядом  $q$ , движущимся с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  (рис. 41.1). Возмущения поля передаются от точки к точке с конечной скоростью  $c$ . Поэтому индукция  $\mathbf{B}$  в точке  $P$  в момент времени  $t$  определяется не положением заряда в тот же момент  $t$ , а положением заряда в некоторый более ранний момент времени  $t - \tau$ :

$$\mathbf{B}(P, t) = f\{q, \mathbf{v}, \mathbf{r}(t - \tau)\}.$$

Здесь  $P$  означает совокупность координат точки  $P$ , определяемых в некоторой неподвижной системе отсчета,  $\mathbf{r}(t - \tau)$  — радиус-вектор, проведенный в точку  $P$  из той точки, в которой находился заряд в момент времени  $t - \tau$ .

Если скорость движения заряда  $v$  много меньше  $c$  ( $v \ll c$ ), время запаздывания  $\tau$  будет пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что значение  $\mathbf{B}$  в момент  $t$  определяется положением заряда в тот же момент времени  $t$ . При этом условии

$$\mathbf{B}(P, t) = f\{q, \mathbf{v}, \mathbf{r}(t)\} \quad (41.1)$$

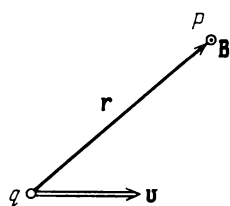


Рис. 41.1.

(напомним, что  $\mathbf{v} = \text{const}$ , поэтому  $\mathbf{v}(t - \tau) = \mathbf{v}(t)$ ).

Вид функции (41.1) может быть установлен только экспериментально. Однако прежде чем привести результат эксперимента, попытаемся уяснить себе, какой может быть эта зависимость. Простейшее предположение заключается в том, что величина вектора  $\mathbf{B}$  пропорциональна заряду  $q$  и скорости  $v$  (при  $\mathbf{v} = 0$  магнитное поле отсутствует). Требуется «сконструировать» из скаляра  $q$  и двух заданных векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  интересующий нас вектор  $\mathbf{B}$ . Это можно сделать, перемножив заданные векторы векторно и умножив затем получившийся результат на скаляр. В итоге получится выражение

$$q [\mathbf{v} \mathbf{r}]. \quad (41.2)$$

С удалением от заряда (с увеличением  $r$ ) модуль этого выражения возрастает. Неправдоподобно, чтобы так вела себя характеристика поля, — в случае известных нам полей (электростатического, гравитационного) при удалении от источника поле не усиливается, но, напротив, ослабляется, изменяясь как  $1/r^2$ . Допустим, что магнитное поле движущегося заряда ведет себя с изменением  $r$  таким же образом. Обратную пропорциональность квадрату  $r$  можно получить, разделив выражение (41.2) на  $r^3$ . В результате получится выражение

$$\frac{q [\mathbf{v} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (41.3)$$

Опыт дает, что в случае, когда  $v \ll c$ , магнитная индукция поля движущегося заряда определяется формулой

$$\mathbf{B} = k' \frac{q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (41.4)$$

где  $k'$  — коэффициент пропорциональности.

Следует еще раз подчеркнуть, что рассуждения, которые привели нас к выражению (41.3), ни в коем случае нельзя рассматривать как вывод формулы (41.4). Эти рассуждения не имеют доказательной силы. Их назначение заключается в том, чтобы помочь осмыслить и запомнить формулу (41.4). Сама же эта формула может быть получена только экспериментально.

Из соотношения (41.4) вытекает, что вектор  $\mathbf{B}$  в каждой точке  $P$  направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через направление вектора  $\mathbf{v}$  и точку  $P$ , причем так, что вращение в направлении  $\mathbf{B}$  образует с направлением  $\mathbf{v}$  правовинтовую систему (см. кружок с точкой на рис. 41.1). Отметим, что  $\mathbf{B}$  представляет собой псевдовектор.

Значение коэффициента пропорциональности  $k'$  зависит от выбора единиц величин, фигурирующих в формуле (41.4). В рационализованной форме соотношение (41.4) записывается следующим образом

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (41.5)$$

Этой формуле можно придать вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\mathbf{v}\mathbf{e}_r]}{r^2} \quad (41.6)$$

(ср. с (5.3)). Отметим, что в аналогичных формулах в тех случаях, когда  $\epsilon_0$  стоит в знаменателе,  $\mu_0$  стоит в числителе, и наоборот.

Единица магнитной индукции в СИ называется т е с л а (Тл).

В системах СГСЭ и СГСМ единицы магнитной индукции  $B$  выбираются так, чтобы коэффициент  $k'$  в формуле (41.4) был равен единице. Следовательно, между единицами  $B$  в этих системах имеется то же соотношение, что и между единицами заряда:

$$1 \text{ СГСМ-ед. } B = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ-ед. } B \quad (41.7)$$

(см. (39.8)). СГСМ-единица магнитной индукции имеет специальное название — г а у с с (Гс).

Ученый Гаусс предложил систему единиц, в которой все электрические величины (заряд, сила тока, напряженность электрического поля и т. п.) измеряются в единицах СГСЭ-системы, а магнитные величины (магнитная индукция, магнитный момент и т. п.) — в единицах СГСМ-системы. Эта система единиц получила название г а у с с о в о й.

В гауссовой системе вследствие соотношений (39.9) и (39.10) во все формулы, содержащие наряду с магнитными величинами силу тока или заряд, входит по одному множителю  $1/c$  на каждую стоящую в формуле величину  $I$  или  $q$ . Этот множитель превращает значение соответствующей величины ( $I$  или  $q$ ), выраженное в единицах СГСЭ, в значение, выраженное в единицах СГСМ (система единиц

СГСМ построена так, что коэффициенты пропорциональности во всех формулах равны 1). Например, в гауссовой системе формула (41.4) имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}. \quad (41.8)$$

Отметим, что появление при движении заряда выделенного направления в пространстве (направление вектора  $\mathbf{v}$ ) приводит к тому, что и электрическое поле движущегося заряда утрачивает сферическую симметрию и становится осесимметричным. Соответствующий расчет дает, что линии  $\mathbf{E}$  поля свободно движущегося заряда имеют вид, показанный на рис. 41.2. Вектор  $\mathbf{E}$  в точке  $P$  направлен вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из точки, в которой находится заряд в данный момент, в точку  $P$ . Величина же напряженности поля определяется формулой

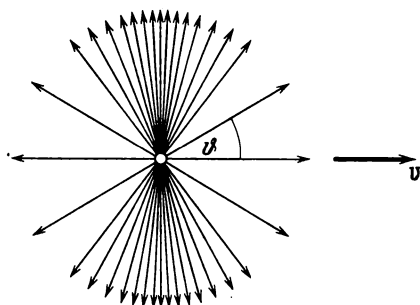


Рис. 41.2.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2\phi]^{3/2}}, \quad (41.9)$$

где  $\phi$  — угол между направлением скорости  $\mathbf{v}$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ .

При  $v \ll c$  электрическое поле свободно движущегося заряда в каждый момент времени

практически не отличается от электростатического поля, создаваемого неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент находится движущийся заряд. Однако нужно помнить, что это «электростатическое» поле перемещается вместе с зарядом, вследствие чего поле в каждой точке пространства изменяется со временем.

При  $v$ , сравнимых с  $c$ , поле в направлениях, перпендикулярных к  $\mathbf{v}$ , оказывается заметно сильнее, чем в направлении движения на таком же расстоянии от заряда (см. рис. 41.2, выполненный для  $v/c = 0.8$ ). Поле «сплющивается» в направлении движения, сосредоточиваясь в основном вблизи проходящей через заряд плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{v}$ .

## § 42. Закон Био — Савара

Выясним характер магнитного поля, создаваемого произвольным тонким проводом, по которому течет ток. Рассмотрим малый элемент провода длины  $dl$ . В этом элементе содержится  $nS dl$  носителей тока ( $n$  — число носителей в единице объема,  $S$  — площадь поперечного сечения провода в том месте, где взят элемент

$dl$ ). В точке, положение которой относительно элемента  $dl$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 42.1), отдельный носитель тока  $e$  создает поле с индукцией

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{r}]}{r^3}$$

(см. формулу (41.5)). Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость хаотического движения, а  $\mathbf{u}$  — скорость упорядоченного движения носителя.

Значение магнитной индукции, усредненное по носителям тока, заключенным в элементе  $dl$ , равно

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{r}]}{r^3}$$

( $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ ). Умножив это выражение на число носителей в элементе провода (равное  $nS dl$ ), получим вклад в поле, вносимый элементом  $dl$ :

$$d\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle nS dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S [(ne \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{r}] dl}{r^3}$$

(мы внесли скалярные множители  $n$  и  $e$  под знак векторного произведения). Приняв во внимание, что  $ne \langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{j}$ , можно написать

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S [\mathbf{j}, \mathbf{r}] dl}{r^3}. \quad (42.1)$$

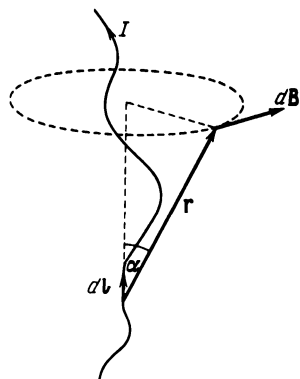


Рис. 42.1.

Введем вектор  $d\mathbf{l}$ , направленный по оси элемента тока длиной  $dl$  в сторону, в которую течет ток. Модуль этого вектора равен  $dl$ . Поскольку направления векторов  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{l}$  совпадают, имеет место равенство

$$\mathbf{j} dl = \mathbf{j} d\mathbf{l}. \quad (42.2)$$

Произведя такую замену в формуле (42.1), получим

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S \mathbf{j} [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Наконец, учтя, что произведение  $S\mathbf{j}$  дает силу тока  $I$  в проводе, придем к окончательному выражению, определяющему магнитную индукцию поля, создаваемого элементом тока длины  $dl$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (42.3)$$

Мы вывели формулу (42.3) из соотношения (41.5). В действительности формула (42.3) была установлена экспериментально до того, как стало известно соотношение (41.5). Более того, это соотношение было выведено из формулы (42.3).

Био и Савар провели в 1820 г. исследование магнитных полей, текущих по тонким проводам различной формы. Лаплас проанализировал



зировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и нашел, что магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками токов. Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока длины  $dl$ , Лаплас получил формулу (42.3). В связи с этим соотношение (42.3) носит название з а к о н а Б и о — С а в а р а — Л а п л а с а или более кратко з а к о н а Б и о — С а в а р а.

Из рис. 42.1 видно, что вектор  $d\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно

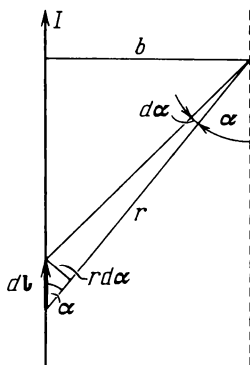


Рис. 42.2.

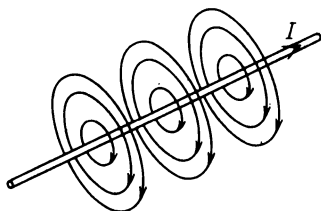


Рис. 42.3.

к плоскости, проходящей через  $d\mathbf{l}$  и точку, в которой вычисляется поле, причем так, что вращение вокруг  $d\mathbf{l}$  в направлении  $d\mathbf{B}$  связано с  $d\mathbf{l}$  правилом правого винта. Модуль  $d\mathbf{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (42.4)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ .

Применим формулу (42.3) для вычисления поля прямого тока, т. е. поля, создаваемого током, текущим по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 42.2). Все векторы  $d\mathbf{B}$  в данной точке имеют одинаковое направление (в нашем случае за чертеж). Поэтому сложение векторов  $d\mathbf{B}$  можно заменить сложением их модулей. Точка, для которой мы вычисляем магнитную индукцию, находится на расстоянии  $b$  от провода.

Из рис. 42.2 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставим эти значения в формулу (42.4):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол  $\alpha$  для всех элементов бесконечного прямого тока изменяется

в пределах от 0 до  $\pi$ . Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (42.5)$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод concentрических окружностей (рис. 42.3).

### § 43. Сила Лоренца

На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую мы будем называть **магнитной**. Эта сила определяется зарядом  $q$ , скоростью его движения  $\mathbf{v}$  и магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  в той точке, где находится заряд в рассматриваемый момент времени. Простейшее предположение заключается в том, что модуль силы  $F$  пропорционален каждой из трех величин  $q$ ,  $v$  и  $B$ . Кроме того, можно ожидать, что  $F$  зависит от взаимной ориентации векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Направление вектора  $\mathbf{F}$  должно определяться направлениями векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

Для того чтобы «сконструировать» вектор  $\mathbf{F}$  из скаляра  $q$  и векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ , перемножим  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  векторно и умножим затем получившийся результат на скаляр  $q$ . В итоге получим выражение

$$q[\mathbf{vB}]. \quad (43.1)$$

Опытным путем установлено, что сила  $\mathbf{F}$ , действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, определяется формулой

$$\mathbf{F} = kq[\mathbf{vB}], \quad (43.2)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц фигурирующих в формуле величин.

Необходимо иметь в виду, что рассуждения, приведшие нас к выражению (43.1), нельзя рассматривать как вывод формулы (43.2). Эти рассуждения не носят доказательной силы. Их назначение состоит в том, чтобы облегчить запоминание формулы (43.2). Справедливость же этой формулы может быть установлена только экспериментально.

Отметим, что соотношение (43.2) можно рассматривать как определение магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Единица магнитной индукции  $B$  — тесла — определяется так, чтобы коэффициент пропорциональности  $k$  в формуле (43.2) был

равен единице. Следовательно, в СИ эта формула имеет вид

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{vB}]. \quad (43.3)$$

Модуль магнитной силы равен

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (43.4)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Из (43.4) вытекает, что заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля, не испытывает действия магнитной силы.

Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Если заряд  $q$  положителен, направление силы совпадает с направлением вектора  $[\mathbf{vB}]$ . В случае отрицательного  $q$  направления векторов  $\mathbf{F}$  и  $[\mathbf{vB}]$  противоположны (рис. 43.1).

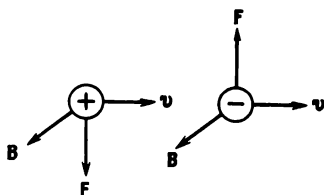


Рис. 43.1.

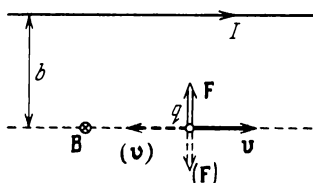


Рис. 43.2.

Поскольку магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{vB}]. \quad (43.5)$$

Это выражение было получено Х. Лоренцем путем обобщения экспериментальных данных и носит название *силы Лоренца* или *лоренцевой силы*.

Пусть заряд  $q$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$  параллельно прямому бесконечному проводу, по которому течет ток силы  $I$  (рис. 43.2). Согласно формулам (42.5) и (43.4) на заряд действует в этом случае магнитная сила, равная по модулю

$$F = qvB = qv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}, \quad (43.6)$$

где  $b$  — расстояние от заряда до провода. В случае положительно-го заряда сила направлена к проводу, если направления тока и движения заряда одинаковы, и от провода, если направления тока и движения заряда противоположны (см. рис. 43.2). В случае отрицательного заряда направление силы изменяется на обратное.

Рассмотрим два одноименных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , движущихся вдоль параллельных прямых с одинаковой скоростью  $v$ ; много меньшей  $c$  (рис. 43.3). При  $v \ll c$  электрическое поле практически не отличается от поля неподвижных зарядов (см. § 41). Поэтому величину электрической силы  $F_э$ , действующей на заряды, можно считать равной

$$F_{э1} = F_{э2} = F_э = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (43.7)$$

Согласно формулам (41.5) и (43.3) для магнитной силы  $F_m$ , действующей на заряды, получается выражение

$$F_{m1} = F_{m2} = F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r^2} \quad (43.8)$$

(радиус-вектор  $\mathbf{r}$  перпендикулярен к  $\mathbf{v}$ ).

Найдем отношение магнитной силы к электрической. Из (43.7) и (43.8) следует, что

$$\frac{F_m}{F_э} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (43.9)$$

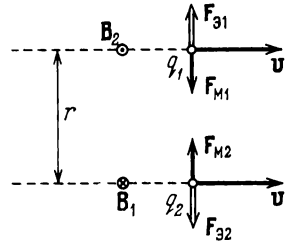


Рис. 43.3.

(см. (39.15)). Мы получили соотношение (43.9) в предположении, что  $v \ll c$ . Однако это соотношение оказывается справедливым при любых  $v$ .

Направления сил  $\mathbf{F}_э$  и  $\mathbf{F}_m$  противоположны. Рис. 43.3 выполнен для одноименных и притом положительных зарядов. Для одноименных отрицательных зарядов направления сил останутся теми же, а направления векторов  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  изменятся на противоположные. Для разноименных зарядов направления электрических и магнитных сил будут противоположны показанным на рисунке.

Из (43.9) следует, что магнитная сила слабее кулоновской на множитель, равный квадрату отношения скорости заряда к скорости света. Это объясняется тем, что магнитное взаимодействие между движущимися зарядами является релятивистским эффектом (см. § 45). Магнетизм исчез бы, если бы скорость света оказалась бесконечно большой.

## § 44. Закон Ампера

Если провод, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей тока действует сила

$$\mathbf{F} = e[(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{B}] \quad (44.1)$$

(см. (43.3)). Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость хаотического движения носителя,  $\mathbf{u}$  — скорость упорядоченного движения. От носителя тока действие этой силы передается проводнику, по которому он перемеща-

ется. В результате на провод с током, находящийся в магнитном поле, действует сила.

Найдем величину силы  $d\mathbf{F}$ , действующей на элемент провода длины  $dl$ . Усредним выражение (44.1) по носителям тока, содержащимся в элементе  $dl$ :

$$\langle \mathbf{F} \rangle = e[(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}] = e[\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{B}] \quad (44.2)$$

( $\mathbf{B}$  — магнитная индукция в том месте, где помещается элемент  $dl$ ). В элементе провода содержится число носителей, равное  $nS dl$  ( $n$  — число носителей в единице объема,  $S$  — площадь

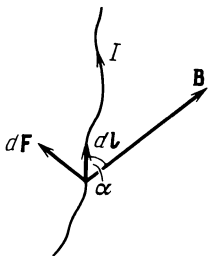


Рис. 44.1.

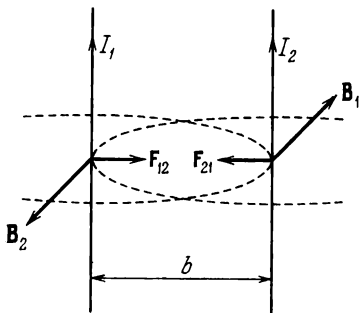


Рис. 44.2.

поперечного сечения провода в данном месте). Умножив выражение (44.2) на число носителей, найдем интересующую нас силу:

$$d\mathbf{F} = \langle \mathbf{F} \rangle nS dl = [(ne\langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}] S dl.$$

Приняв во внимание, что  $ne\langle \mathbf{u} \rangle$  есть плотность тока  $\mathbf{j}$ , а  $Sdl$  дает объем элемента провода  $dV$ , можно написать

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]dV. \quad (44.3)$$

Отсюда можно получить выражение для плотности силы, т. е. для силы, действующей на единицу объема проводника:

$$\mathbf{F}_{\text{ед.об}} = [\mathbf{jB}]. \quad (44.4)$$

Напишем формулу (44.3) в виде

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]Sdl.$$

Заменив согласно (42.2)  $\mathbf{jS dl}$  через  $\mathbf{jS dl} = I d\mathbf{l}$ , придем к формуле

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (44.5)$$

Эта формула определяет силу, действующую на элемент тока  $d\mathbf{l}$  в магнитном поле. Соотношение (44.5) было установлено экспериментально Ампером и носит название закона Ампера.

Мы получили закон Ампера, исходя из выражения (43.3) для магнитной силы. В действительности выражение для магнитной силы было получено из установленного экспериментально соотношения (44.5).

Модуль силы (44.5) вычисляется по формуле

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (44.6)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 44.1). Направлена сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$ .

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами  $b$  (рис. 44.2), то каждый элемент тока  $I_2$  будет находиться в магнитном поле, индукция которого равна  $B_1 = (\mu_0/4\pi)(2I_1/b)$  (см. формулу (42.5)). Угол  $\alpha$  между элементами тока  $I_2$  и вектором  $\mathbf{B}_1$  прямой. Следовательно, согласно (44.6) на единицу длины тока  $I_2$  действует сила

$$F_{21\text{ед}} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (44.7)$$

Выражение (44.7) совпадает с формулой (39.2).

Для силы  $F_{12\text{ед}}$  действующей на единицу длины тока  $I_1$ , получается аналогичное выражение. Легко убедиться в том, что при одинаковом направлении токов они притягивают друг друга, а при различном — отталкивают.

## § 45. Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект

Между электричеством и магнетизмом имеется глубокая связь. Основываясь на постулатах теории относительности и на инвариантности электрического заряда, можно показать, что магнитное взаимодействие зарядов и токов является следствием закона Кулона. Мы покажем это на примере заряда, движущегося параллельно бесконечному прямому току со скоростью  $v_0$ <sup>1</sup> (рис. 45.1).

Согласно формуле (43.6) магнитная сила, действующая на заряд в рассматриваемом случае, равна

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \quad (45.1)$$

(смысл буквенных обозначений ясен из рис. 45.1). Направлена сила к проводнику с током ( $q > 0$ ).

Прежде чем приступить к выводу формулы (45.1), исходя из закона Кулона и релятивистских соотношений, рассмотрим следующий эффект. Пусть имеется бесконечная линейная цепочка точечных зарядов одинаковой величины  $e$ , отстоящих друг от друга на

<sup>1</sup> Чтобы сделать обозначения аналогичными обозначениям в гл. VIII 1-го тома, мы обозначили скорость заряда через  $v_0$ .

малый отрезок  $l_0$  (рис. 45.2). В силу малости  $l_0$  можно говорить о линейной плотности зарядов  $\lambda_0$ , которая, очевидно, равна

$$\lambda_0 = e/l_0. \quad (45.2)$$

Приведем заряды в движение вдоль цепочки с одинаковой скоростью  $u$ . Тогда расстояние между зарядами сократится и станет равным

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

(см. формулу (64.1) 1-го тома). Величина же зарядов вследствие

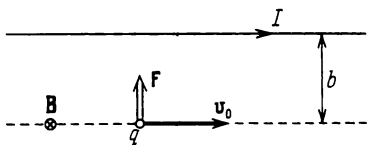


Рис. 45.1.

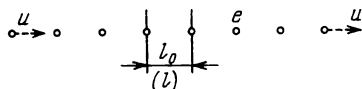


Рис. 45.2.

их инвариантности останется прежней. В результате линейная плотность зарядов, наблюдаемая в системе отсчета, относительно которой заряды движутся, изменится и станет равной

$$\lambda = e/l = \lambda_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (45.3)$$

Теперь рассмотрим в системе отсчета  $K$  две практически совмещенные друг с другом бесконечные цепочки, образованные зарядами одинаковой величины, но разных знаков, движущимися в противоположные стороны с одинаковой скоростью  $u$  (рис. 45.3, а). Совокупность этих цепочек эквивалентна прямому бесконечному току силы

$$I = 2\lambda u = 2\lambda_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (45.4)$$

где  $\lambda$  — величина, определяемая формулой (45.3). Суммарная линейная плотность зарядов цепочки равна нулю, поэтому электрическое поле отсутствует. На заряд  $q$  действует магнитная сила, величина которой согласно (45.1) и (45.4) равна

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (45.5)$$

Перейдем в систему отсчета  $K'$ , относительно которой заряд  $q$  покоится (рис. 45.3, б). В этой системе на заряд  $q$  также действует сила (обозначим ее  $F'$ ). Однако эта сила не может быть магнитного происхождения, поскольку заряд  $q$  неподвижен. Сила  $F'$  имеет чисто электрическое происхождение. Возникает она потому, что линейные плотности положительных и отрицательных зарядов в цепочках теперь не одинаковы (ниже мы увидим, что плотность отрицательных зарядов больше). Избыточный отрицательный заряд, распределенный по цепочке, создает электрическое поле, которое

действует на положительный заряд  $q$  с силой  $F'$ , направленной к цепочке (см. рис. 45.3, б).

Вычислим силу  $F'$  и убедимся в том, что она «равна» силе  $F$ , определяемой формулой (45.5). Мы взяли слово «равна» в кавычки, потому что сила не является инвариантной величиной. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой сила преобразуется по довольно сложному закону. В частном случае,

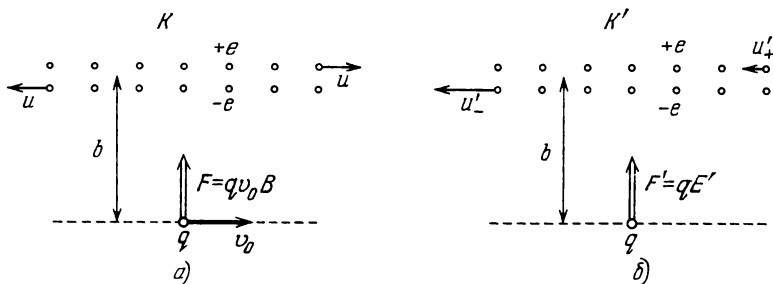


Рис. 45.3.

когда сила  $\mathbf{F}'$  перпендикулярна к относительной скорости систем  $K$  и  $K'$  ( $\mathbf{F}' \perp \mathbf{v}_0$ ), преобразование имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}' \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + \mathbf{v}_0 (\mathbf{F}' \mathbf{v}')/c^2}{1 + \mathbf{v}_0 \mathbf{v}'/c^2}$$

( $\mathbf{v}'$  — измеренная в системе  $K'$  скорость частицы, на которую действует сила  $\mathbf{F}'$ ). Если  $\mathbf{v}' = 0$  (что имеет место в рассматриваемой нами задаче), формула преобразования силы выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \sqrt{1 - v_0^2/c^2}.$$

Из этой формулы вытекает, что перпендикулярная к  $\mathbf{v}_0$  сила, действующая на покоящуюся в системе  $K'$  частицу, оказывается и в системе  $K$  перпендикулярной к вектору  $\mathbf{v}_0$ . Модуль же силы в этом случае преобразуется по формуле

$$F = F' \sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (45.6)$$

Плотности зарядов в положительной и отрицательной цепочках, измеренные в системе  $K'$ , имеют величины (см. (45.3))

$$\lambda'_+ = \lambda_0 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad (45.7)$$

где  $u'_+$  и  $u'_-$  — скорости зарядов  $+e$  и  $-e$ , измеренные в системе  $K'$ . При переходе от системы  $K$  к системе  $K'$  проекция скорости частицы на направление  $x$ , совпадающее с направлением  $\mathbf{v}_0$ , пре-



образуется по формуле

$$u'_x = \frac{u_x - u_0}{1 - u_x v_0 / c^2}$$

(см. формулу (66.2) 1-го тома; мы заменили  $v$  и  $v'$  на  $u$  и  $u'$ ). Для зарядов  $+e$  компонента  $u_x$  равна  $u$ , для зарядов  $-e$  она равна  $-u$  (см. рис. 45.3, а). Следовательно,

$$(u'_x)_+ = \frac{u - v_0}{1 - uv_0/c^2}, \quad (u'_x)_- = \frac{-u - v_0}{1 + uv_0/c^2}.$$

Поскольку остальные проекции равны нулю, получаем

$$u'_+ = \frac{|u - v_0|}{1 - uv_0/c^2}, \quad u'_- = \frac{u + v_0}{1 + uv_0/c^2}. \quad (45.8)$$

Для упрощения выкладок перейдем к относительным скоростям

$$\beta_0 = v_0/c, \quad \beta = u/c, \quad \beta'_+ = u'_+/c, \quad \beta'_- = u'_-/c.$$

Тогда формулы (45.7) и (45.8) примут вид

$$\lambda'_+ = \lambda_0 / \sqrt{1 - \beta_+^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0 / \sqrt{1 - \beta_-^2}, \quad (45.9)$$

$$\beta'_+ = \frac{|\beta - \beta_0|}{1 - \beta\beta_0}, \quad \beta'_- = \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}. \quad (45.10)$$

С учетом этих формул получаем для суммарной плотности зарядов выражение

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta\beta_0}\right)^2}} - \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{\lambda_0(1 - \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2}} - \frac{\lambda_0(1 + \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2}}. \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что

$$(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2 = (1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2 = (1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2).$$

Следовательно,

$$\lambda' = \frac{-2\lambda_0\beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = \frac{-2\lambda_0 uv_0}{c^2 \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (45.11)$$

В соответствии с формулой (14.5) бесконечно длинная нить, несущая заряд плотности  $\lambda'$ , создает поле, напряженность которого на расстоянии  $b$  от нити равна

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda'}{b}.$$

В этом поле на заряд  $q$  действует сила

$$F' = qE' = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 b}.$$

Подстановка выражения (45.11) дает (знак минус опускаем)

$$F' = \frac{q\lambda_0 u v_0}{\pi \epsilon_0 b c^2 \sqrt{1-v_0^2/c^2} \sqrt{1-u^2/c^2}} = q v_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b \sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \quad (45.12)$$

(напомним, что  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ ; см. (39.15)).

Полученное выражение отличается от выражения (45.5) лишь множителем  $1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$ . Следовательно, можно написать, что

$$F = F' \sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

где  $F$  — сила, определяемая выражением (45.5), а  $F'$  — сила, определяемая выражением (45.12). Сравнение с (45.6) показывает, что  $F$  и  $F'$  суть значения одной и той же силы, определенные в системах  $K$  и  $K'$ .

Отметим, что в системе  $K''$ , которая двигалась бы относительно системы  $K$  со скоростью, отличной от скорости заряда  $v_0$ , сила, действующая на заряд, слагалась бы из электрической и магнитной сил.

Полученные нами результаты означают, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле. При специальном выборе системы отсчета поле может оказаться чисто электрическим или чисто магнитным. Однако относительно других систем отсчета то же поле представляет собой совокупность электрического и магнитного полей.

В разных инерциальных системах отсчета электрическое и магнитное поля одной и той же совокупности зарядов оказываются различными. Вывод, выходящий за рамки курса общей физики, приводит к следующим формулам преобразования полей при переходе от системы отсчета  $K$  к движущейся относительно нее со скоростью  $v_0$  системе отсчета  $K'$ :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ B'_x &= B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v_0 E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v_0 E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.13)$$

Здесь  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  — компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , характеризующих электромагнитное поле в системе  $K$ ; аналогичные символы со штрихами — компоненты векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ , характеризующих поле в системе  $K'$ ; буквой  $\beta$  обозначено отношение  $v_0/c$ .

Разложив векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а также  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  на параллельные вектору  $\mathbf{v}_0$  (а значит, и осям  $x$  и  $x'$ ) и перпендикулярные к этому вектору составляющие (т. е. представив, например,  $\mathbf{E}$  в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$  и т. д.), можно написать формулы (45.13) в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c^2)[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.14)$$

В гауссовой системе единиц формулы (45.14) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (1/c)[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c)[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.15)$$

В случае, когда  $\beta \ll 1$  (т. е.  $v_0 \ll c$ ), формулы (45.14) упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]. \end{aligned}$$

Сложив попарно эти выражения, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}] = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}] = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]. \end{aligned} \quad (45.16)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{B}_{\parallel}$  коллинеарны, их векторное произведение равно нулю. Поэтому  $[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\parallel}] + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]$ . Аналогично  $[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]$ . С учетом этого формулам (45.16) можно придать вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]. \quad (45.17)$$

По этим формулам преобразовываются поля в случае, если относительная скорость систем отсчета  $v_0$  много меньше скорости света в вакууме  $c$  ( $v_0 \ll c$ ).

В гауссовой системе формулы (45.17) выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]. \quad (45.18)$$

В рассмотренном в начале этого параграфа примере в системе  $K$ , в которой заряд  $q$  двигался параллельно проводу с током со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , имелось только перпендикулярное к  $\mathbf{v}_0$  магнитное поле  $\mathbf{B}_{\perp}$ ; составляющие  $\mathbf{B}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}$  и  $\mathbf{E}_{\parallel}$  были равны нулю. Согласно формулам (45.14) в системе  $K'$ , в которой заряд  $q$  покоится (эта система движется относительно  $K$  со скоростью  $\mathbf{v}_0$ ), наблюдается составляющая  $\mathbf{B}'_{\perp}$ , равная  $\mathbf{B}_{\perp}/\sqrt{1-\beta^2}$ , и, кроме того, перпендикулярная составляющая электрического поля  $\mathbf{E}'_{\perp} = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]/\sqrt{1-\beta^2}$ .

В системе  $K$  на заряд действует сила

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]. \quad (45.19)$$

Поскольку заряд  $q$  в системе  $K'$  покоится, на него в этой системе действует лишь электрическая сила

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{q[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (45.20)$$

Сопоставление формул (45.19) и (45.20) дает  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'\sqrt{1-\beta^2}$ , что совпадает с (45.6).

### § 46. Контур с током в магнитном поле

Выясним, как ведет себя контур с током в магнитном поле. Начнем со случая, когда поле однородно ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ). Согласно (44.5) на элемент контура  $d\mathbf{l}$  действует сила

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (46.1)$$

Результирующая таких сил равна

$$\mathbf{F} = \oint I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (46.2)$$

Вынеся постоянные величины  $I$  и  $\mathbf{B}$  за знак интеграла, получим

$$\mathbf{F} = I(\oint d\mathbf{l}), \mathbf{B}].$$

Интеграл  $\oint d\mathbf{l}$  равен нулю, поэтому  $\mathbf{F} = 0$ . Таким образом, результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Это справедливо для контуров любой формы (в том числе и неплоских) при произвольном расположении контура относительно направления поля. Существенной для равенства нулю результирующей силы является лишь однородность поля.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плоских контуров. Вычислим результирующий вращательный момент, создаваемый силами (46.1), приложенными к контуру. Поскольку в однородном поле сумма этих сил равна нулю, результирующий момент относительно любой точки будет один и тот же. Действительно, результирующий момент относительно некоторой точки  $O$  определяется выражением

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}],$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения силы  $d\mathbf{F}$ . Возьмем точку  $O'$ , смещенную относительно  $O$  на отрезок  $\mathbf{b}$ . Тогда  $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'$ , соответственно  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$ . Поэтому результирующий момент относительно точки  $O'$  равен

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \int [\mathbf{r}', d\mathbf{F}] = \int [(\mathbf{r} - \mathbf{b}), d\mathbf{F}] = \\ &= \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] - \int [\mathbf{b}, d\mathbf{F}] = \mathbf{N} - [\mathbf{b}, \oint d\mathbf{F}] = \mathbf{N} \end{aligned}$$

( $\oint d\mathbf{F} = 0$ ). Моменты, вычисленные относительно двух произвольно взятых точек  $O$  и  $O'$ , оказались совпадающими. Отсюда заключаем, что момент не зависит от выбора точки, относительно которой он берется (ср. с парой сил).

Рассмотрим произвольный плоский контур с током, находящийся в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Пусть контур ориентирован так, что положительная нормаль к контуру  $\mathbf{n}$  перпендикулярна к

вектору  $\mathbf{B}$  (рис. 46.1). Положительной называется нормаль, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта.

Разобьем площадь контура на узкие параллельные направлению вектора  $\mathbf{B}$  полоски ширины  $dy$  (см. рис. 46.1, а; на рис. 46.1, б одна такая полоска изображена в увеличенном виде). На ограничивающий полосу слева элемент контура  $dl_1$  действует сила  $dF_1$ , направленная за чертеж. Модуль этой силы равен  $dF_1 = IB dl_1 \sin \alpha_1 = IB dy$  (см. рис. 46.1, б).

На ограничивающий полосу справа элемент контура  $dl_2$  действует сила  $dF_2$ , направленная на нас. Модуль этой силы равен  $dF_2 = IB dl_2 \sin \alpha_2 = IB dy$ .

Полученный нами результат означает, что силы, приложенные к противоположным элементам контура  $dl_1$  и  $dl_2$ , образуют пару, момент которой равен

$$dN = IBx dy = IB dS$$

( $dS$  — площадь полоски). Из рис. 46.1 видно, что вектор  $d\mathbf{N}$  перпендикулярен к векторам  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}$  и, следовательно, может быть записан в виде

$$d\mathbf{N} = I[\mathbf{nB}]dS.$$

Просуммировав это выражение по всем полоскам, получим вращательный момент, действующий на контур:

$$\mathbf{N} = \int I[\mathbf{nB}]dS = I[\mathbf{nB}] \int dS = I[\mathbf{nB}]S \quad (46.3)$$

(поле предполагается однородным, поэтому произведение  $[\mathbf{nB}]$  для всех полосок одинаково и может быть вынесено за знак интеграла). Величина  $S$  в выражении (46.3) есть площадь контура.

Выражение (46.3) можно представить в виде

$$\mathbf{N} = [I\mathbf{Sn}, \mathbf{B}]. \quad (46.4)$$

Эта формула сходна с формулой (9.12), определяющей вращательный момент, действующий на электрический диполь в электрическом поле. Аналогом  $\mathbf{E}$  служит в (46.4) вектор  $\mathbf{B}$ , а аналогом дипольного электрического момента  $\mathbf{p}$  — выражение  $I\mathbf{Sn}$ . Это послужило основанием для того, чтобы назвать величину

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{Sn} \quad (46.5)$$

дипольным магнитным моментом контура с током. Направление вектора  $\mathbf{p}_m$  совпадает с направлением положительной нормали к контуру.

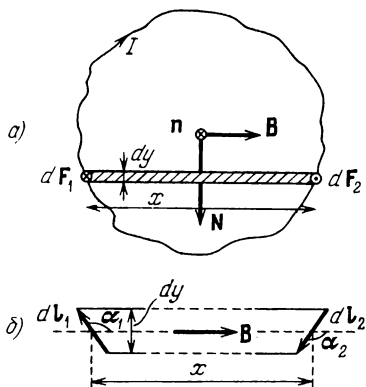


Рис. 46.1.

Воспользовавшись обозначением (46.5), можно написать формулу (46.4) следующим образом:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}] \quad (\mathbf{p}_m \perp \mathbf{B}). \quad (46.6)$$

Теперь допустим, что направление вектора  $\mathbf{B}$  совпадает с направлением положительной нормали к контуру  $\mathbf{n}$ , а следовательно, и с направлением вектора  $\mathbf{p}_m$  (рис. 46.2). В этом случае силы, действующие на разные элементы контура, лежат в одной плоскости — плоскости контура. Сила, действующая на элемент контура  $d\mathbf{l}$ , определяется выражением (46.1). Вычислим результирующий момент таких сил относительно точки  $O$ , лежащей в плоскости контура:

$$\mathbf{N} = \oint d\mathbf{N} = \oint [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] = I \oint [\mathbf{r}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]]$$

( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к элементу  $d\mathbf{l}$ ). Преобразуем подынтегральное выражение по формуле «бац минус цаб» (см. формулу (2.35) 1-го тома). В результате получим

$$\mathbf{N} = I \{ \oint (\mathbf{r}\mathbf{B})d\mathbf{l} - \oint \mathbf{B}(\mathbf{r}, d\mathbf{l}) \}.$$

Первый интеграл равен нулю вследствие того, что векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны. Скалярное произведение под знаком

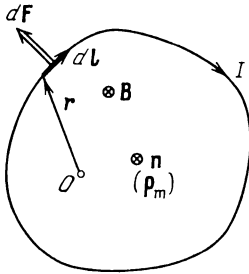


Рис. 46.2.

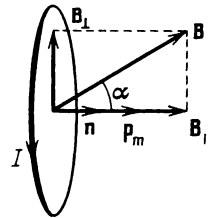


Рис. 46.3.

второго интеграла равно  $rdr = \frac{1}{2}d(r^2)$ . Поэтому второй интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{B}\oint d(r^2).$$

Под знаком интеграла стоит полный дифференциал функции  $r^2$ . Сумма приращений функции на замкнутом пути равна нулю. Следовательно, и второе слагаемое в выражении для  $\mathbf{N}$  равно нулю. Таким образом, мы доказали, что результирующий момент  $\mathbf{N}$  относительно любой точки  $O$ , лежащей в плоскости контура, равен нулю. Такое же значение имеет результирующий момент относительно всех других точек (см. выше).

Итак, в случае, когда векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  имеют одинаковое направление, магнитные силы, действующие на отдельные участки контура, не стремятся ни повернуть контур, ни сдвинуть его с места; они лишь стремятся растянуть контур в его плоскости. Если векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  имеют противоположные направления, магнитные силы стремятся сжать контур.

Пусть направления векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  образуют произвольный угол  $\alpha$  (рис. 46.3). Разложим магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  на две составляющие:  $\mathbf{B}_{\parallel}$  — параллельную и  $\mathbf{B}_{\perp}$  — перпендикулярную вектору  $\mathbf{p}_m$ , и рассмотрим действие каждой составляющей отдельно. Составляющая  $\mathbf{B}_{\parallel}$  будет обуславливать силы, растягивающие или сжимающие контур. Составляющая  $\mathbf{B}_{\perp}$ , величина которой равна  $B \sin \alpha$ , приведет к возникновению вращательного момента, который можно вычислить по формуле (46.6):

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}_{\perp}].$$

Из рис. 46.3 видно, что

$$[\mathbf{p}_m, \mathbf{B}_{\perp}] = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}].$$

Следовательно, в самом общем случае вращательный момент, действующий на плоский контур с током в однородном магнитном поле, определяется формулой

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (46.7)$$

Модуль вектора  $\mathbf{N}$  равен

$$N = p_m B \sin \alpha. \quad (46.8)$$

Для того чтобы угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  увеличить на  $d\alpha$ , нужно совершить против сил, действующих на контур в магнитном поле, работу

$$dA = N d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (46.9)$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над каким-нибудь телом. Следовательно, работа (46.9) идет на увеличение потенциальной энергии  $W_{\text{р мех}}$ , которой обладает контур с током в магнитном поле,

$$dW_{\text{р мех}} = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя, находим

$$W_{\text{р мех}} = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Если положить  $\text{const} = 0$ , формула приобретает вид

$$W_{\text{р мех}} = -p_m B \cos \alpha = -p_m \mathbf{B} \quad (46.10)$$

(ср. с формулой (9.15)).

Параллельная ориентация векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  отвечает минимуму энергии (46.10) и, следовательно, положению устойчивого равновесия контура.

Величина (46.10) представляет собой не полную потенциальную энергию контура с током, а лишь ту ее часть, которая обусловлена существованием вращательного момента (46.7). Чтобы подчеркнуть это, мы снабдили символ величины (46.10) индексом «мех». Полная потенциальная энергия контура включает, кроме (46.10), еще другие слагаемые.

Теперь рассмотрим плоский контур с током в неоднородном магнитном поле. Для простоты будем вначале считать контур круговым. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении  $x$ , совпадающем с направлением  $\mathbf{B}$  в том месте, где расположен центр контура, и что магнитный момент контура ориентирован по полю (рис. 46.4, а).

В рассматриваемом случае  $\mathbf{B} \neq \text{const}$  и выражение (46.2) не обнулено быть нулем. Сила  $d\mathbf{F}$ , действующая на элемент контура, перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ , т. е. к линии магнитной индукции в месте пересечения ее с  $d\mathbf{l}$ . Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура, образуют симметричный конический веер (рис. 46.4, б). Их результирующая  $\mathbf{F}$  направлена в сторону возрастания  $B$  и, следовательно, втягивает контур в область более сильного поля. Очевидно,

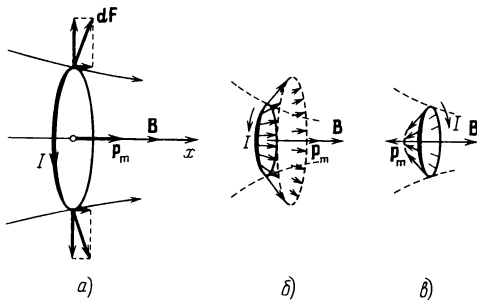


Рис. 46.4.

что чем сильнее изменяется поле (чем больше  $\partial B / \partial x$ ), тем меньше угол раствора веера и тем больше, при прочих равных условиях, результирующая сила  $\mathbf{F}$ . Если изменить направление тока на обратное (при этом  $\mathbf{p}_m$  станет противоположным  $\mathbf{B}$ ), направления всех сил  $d\mathbf{F}$  и их результирующей  $\mathbf{F}$  изменятся на обратные (рис. 46.4, в). Следовательно, при такой взаимной ориентации векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  контур будет выталкиваться из поля.

С помощью выражения (46.10) для энергии контура в магнитном поле легко найти количественное выражение для силы  $\mathbf{F}$ . Если ориентация магнитного момента по отношению к полю остается неизменной ( $\alpha = \text{const}$ ), то  $W_{\text{мех}}$  будет зависеть только от  $x$  (через  $B$ ). Продифференцировав  $W_{\text{мех}}$  по  $x$  и изменив у результата знак, получим проекцию силы на ось  $x$ :

$$F_x = - \frac{\partial W_{\text{мех}}}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$



По предположению, в других направлениях поле изменяется слабо, поэтому проекциями силы на другие оси можно пренебречь и считать, что  $F = F_x$ . Итак,

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (46.11)$$

Согласно полученной нами формуле сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, зависит от ориентации магнитного момента контура относительно направления поля. Если векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  совпадают по направлению ( $\alpha = 0$ ), сила положительна, т. е. направлена в сторону возрастания  $\mathbf{B}$  ( $\partial B / \partial x$  предполагается положительным; в противном случае знак и направление силы изменятся на противоположные, но сила по-прежнему будет втягивать контур в область сильного поля). Если  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  антипараллельны ( $\alpha = \pi$ ), сила отрицательна, т. е. направлена в сторону убывания  $\mathbf{B}$ . Этот результат мы уже получили качественно с помощью рис. 46.4.

Разумеется, что, кроме силы (46.11), на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать также вращательный момент (46.7).

## § 47. Магнитное поле контура с током

Рассмотрим поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса  $R$  (круговой ток). Определим магнитную индукцию в центре кругового тока (рис. 47.1). Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную

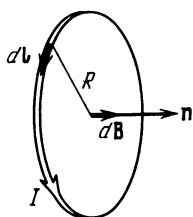


Рис. 47.1.

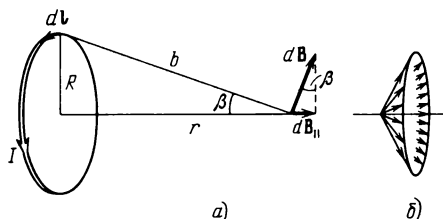


Рис. 47.2.

вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение  $d\mathbf{B}$  сводится к сложению их модулей. По формуле (42.4)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}$$

( $\alpha = \pi/2$ ). Проинтегрируем это выражение по всему контуру:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3}.$$

Выражение в скобках равно модулю дипольного магнитного момента  $p_m$  (см. (46.5)). Следовательно, магнитная индукция в центре

кругового тока имеет величину

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}. \quad (47.1)$$

Из рис. 47.1 видно, что направление вектора **B** совпадает с направлением положительной нормали к контуру, т. е. с направлением вектора **p<sub>m</sub>**. Поэтому формулу (47.1) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}. \quad (47.2)$$

Теперь найдем **B** на оси кругового тока на расстоянии *r* от центра контура (рис. 47.2). Векторы *dB* перпендикулярны к плоскостям, проходящим через соответствующий элемент *dI* и точку, в которой мы ищем поле. Следовательно, они образуют симметричный конический веер (рис. 47.2, б). Из соображений симметрии можно заключить, что результирующий вектор **B** направлен вдоль оси контура. Каждый из составляющих векторов *dB* вносит в результирующий вектор вклад *dB<sub>||</sub>*, равный по модулю *dB sin β = dB(R/b)*. Угол *α* между *dI* и **b** прямой, поэтому

$$dB_{||} = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{b^2} \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{b^3}.$$

Проинтегрировав по всему контуру и заменив *b* на  $\sqrt{R^2 + r^2}$ , получим

$$\begin{aligned} B &= \int dB_{||} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} 2\pi R = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (47.3)$$

Эта формула определяет величину магнитной индукции на оси кругового тока. Приняв во внимание, что векторы **B** и **p<sub>m</sub>** имеют одинаковое направление, можно написать формулу (47.3) в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (47.4)$$

Это выражение не зависит от знака *r*. Следовательно, в точках оси, симметричных относительно центра тока, **B** имеет одинаковую величину и направление.

При *r* = 0 формула (47.4) переходит, как и должно быть, в формулу (47.2) для магнитной индукции в центре кругового тока.

На больших расстояниях от контура в знаменателе можно пренебречь *R<sup>2</sup>* по сравнению с *r<sup>2</sup>*. Тогда формула (47.4) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \quad (\text{на оси тока}), \quad (47.5)$$

аналогичный выражению (9.9) для напряженности электрического поля на оси диполя.

Расчет, выходящий за рамки данной книги, дает, что любой системе токов или движущихся зарядов, локализованной в ограниченной части пространства, можно приписать магнитный дипольный момент  $\mathbf{p}_m$  (ср. с дипольным электрическим моментом системы зарядов). Магнитное поле такой системы на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами, определяется через  $\mathbf{p}_m$  по таким же формулам, по каким определяется через дипольный электрический момент поле системы зарядов на больших расстояниях (см. § 10). В частности, поле плоского контура любой формы на больших расстояниях имеет вид

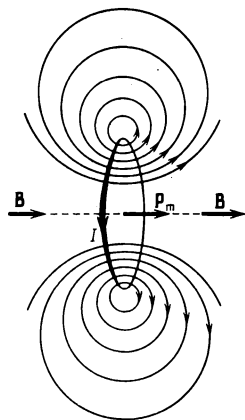


Рис. 47.3.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}, \quad (47.6)$$

где  $r$  — расстояние от контура до данной точки,  $\vartheta$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{p}_m$  и направлением от контура в данную точку поля (ср. с формулой (9.7)). При  $\vartheta = 0$  формула (47.6) дает для модуля вектора  $\mathbf{B}$  такое же значение, как и формула (47.5).

На рис. 47.3 изображены линии магнитной индукции поля кругового тока. Показаны лишь линии, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока. Подобная же картина имеет место в любой из этих плоскостей.

Из всего сказанного в предыдущем и в данном параграфах вытекает, что дипольный магнитный момент является весьма важной характеристикой контура с током. Этой характеристикой определяется как поле, создаваемое контуром, так и поведение контура во внешнем магнитном поле.

#### § 48. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длины  $l$  (рис. 48.1). Допустим, что этот контур находится во внешнем магнитном поле, которое мы будем предполагать однородным и перпендикулярным к плоскости контура. При указанных на рис. 48.1,  $a$  направлениях тока и поля сила  $\mathbf{F}$ , действующая на перемычку, будет направлена вправо и равна

$$F = IBl.$$

При перемещении перемычки вправо на  $dh$  эта сила совершит положительную работу

$$dA = F dh = IBl dh = IB dS, \quad (48.1)$$

где  $dS$  — заштрихованная площадь (см. рис. 48.1,  $a$ ).

Выясним, как изменяется при перемещении перемычки поток магнитной индукции  $\Phi$  через площадь контура. Условимся при вычислении потока через площадь контура с током всегда брать в качестве  $\mathbf{n}$  в выражении

$$\Phi = \int \mathbf{Bn} dS$$

положительную нормаль, т. е. нормаль, образующую с направлением тока в контуре праввинтовую систему (см. § 46). Тогда в случае, изображенном на рис. 48.1, а, поток будет положительным и равным  $BS$  ( $S$  — площадь контура). При перемещении перемычки вправо площадь контура получает положительное приращение  $dS$ .

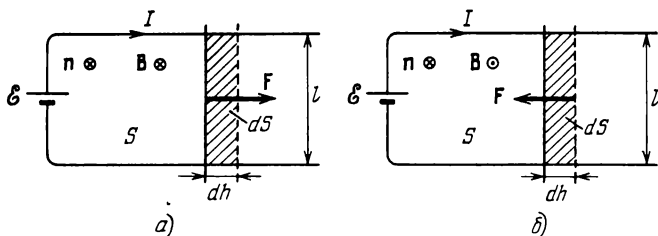


Рис. 48.1.

В результате поток также получает положительное приращение  $d\Phi = B dS$ . Поэтому выражение (48.1) можно представить в виде

$$dA = I d\Phi. \quad (48.2)$$

При направлении поля на нас (рис. 48.1, б) сила, действующая на

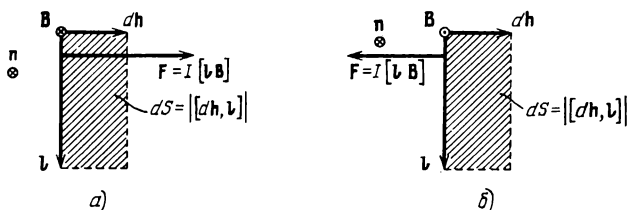


Рис. 48.2

перемычку, направлена влево. Поэтому при перемещении перемычки вправо на  $dh$  магнитная сила совершает отрицательную работу

$$dA = -IBl dh = -IB dS. \quad (48.3)$$

В этом случае поток через контур равен  $-BS$ . При увеличении площади контура на  $dS$  поток получает приращение  $d\Phi = -B dS$ . Следовательно, выражение (48.3) также можно записать в виде (48.2).

Величину  $d\Phi$  в выражении (48.2) можно трактовать как поток через площадь, описанную перемычкой при ее движении. Соответ-

ственно можно сказать, что работа, совершаемая магнитной силой над участком контура с током, равна произведению силы тока на величину магнитного потока через поверхность, описанную этим участком при своем движении.

Формулы (48.1) и (48.3) можно объединить в одно векторное выражение. Для этого сопоставим перемычке вектор  $\mathbf{l}$ , имеющий направление тока (рис. 48.2). Независимо от направления вектора  $\mathbf{B}$  (от нас или на нас), силу, действующую на перемычку, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = I [\mathbf{B}].$$

При перемещении перемычки на  $d\mathbf{h}$  сила совершает работу

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{h} = I [\mathbf{B}] d\mathbf{h}.$$

Осуществим в смешанном произведении векторов циклическую перестановку сомножителей (см. формулу (2.34) 1-го тома). В результате получим

$$dA = I \mathbf{B} [d\mathbf{h}, \mathbf{l}]. \quad (48.4)$$

Из рис. 48.2 видно, что векторное произведение  $[d\mathbf{h}, \mathbf{l}]$  равно по величине площади  $dS$ , описанной перемычкой при ее движении, и имеет направление положительной нормали  $\mathbf{n}$ . Следовательно,

$$dA = I \mathbf{B} \mathbf{n} dS. \quad (48.5)$$

В случае, изображенном на рис. 48.2, а,  $\mathbf{B} \mathbf{n} = B$ , и мы приходим к формуле (48.1). В случае, изображенном на рис. 48.2, б,  $\mathbf{B} \mathbf{n} = -B$ , и мы приходим к формуле (48.3).

Выражение  $\mathbf{B} \mathbf{n} dS$  определяет приращение магнитного потока через контур, обусловленное перемещением перемычки. Таким образом, формулу (48.5) можно записать в виде (48.2). Однако формула (48.5) имеет преимущество перед (48.2), поскольку из нее «автоматически» получается знак  $d\Phi$ , а следовательно, и знак  $dA$ .

Рассмотрим жесткий или деформируемый контур, который, находясь в магнитном поле, перемещается из некоторого исходного положения в бесконечно мало отличающееся от исходного конечное положение. Силу тока  $I$  в контуре будем считать при этом перемещении постоянной. Пусть элемент контура  $d\mathbf{l}$  претерпевает произвольное перемещение, которое можно представить как смещение параллельно самому себе на отрезок  $d\mathbf{h}$  и последующий поворот на угол  $d\varphi$  (рис. 48.3). При этом элемент  $d\mathbf{l}$  опишет площадь, равную

$$[[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]] + \frac{1}{2} d\mathbf{l}^2 d\varphi.$$

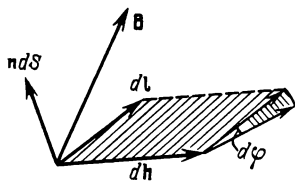


Рис. 48.3.

Второе слагаемое более высокого порядка малости, чем первое. Совершаемая над  $d\mathbf{l}$  работа пропорциональна магнитному потоку через описанную  $d\mathbf{l}$  поверхность (см. выше). Поэтому работа при повороте элемента  $d\mathbf{l}$  будет более высокого порядка малости, чем работа при поступательном перемещении, и ею можно пренебречь.

Таким образом, при вычислении работы можно пренебречь поворотом элемента  $d\mathbf{l}$  на угол  $d\varphi$  и считать совершаемую магнитной силой над элементом контура работу равной

$$dA_{эл} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]d\mathbf{h}. \quad (48.6)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция в том месте, где находится элемент контура  $d\mathbf{l}$ .

Осуществив в (48.6) циклическую перестановку сомножителей, получим

$$dA_{эл} = I\mathbf{B}[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]. \quad (48.7)$$

Векторное произведение  $[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]$  равно по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах  $d\mathbf{h}$  и  $d\mathbf{l}$ , т. е. площади  $dS$ , описываемой элементом  $d\mathbf{l}$  при его перемещении. Направление векторного произведения совпадает с направлением положительной нормали к площадке  $dS$ . Следовательно,

$$\mathbf{B}[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}] = \mathbf{B}n dS = d\Phi_{эл}, \quad (48.8)$$

где  $d\Phi_{эл}$  — приращение магнитного потока через контур, обусловленное перемещением элемента контура  $d\mathbf{l}$ .

Приняв во внимание равенство (48.8), напомним (48.7) в виде

$$dA_{эл} = I d\Phi_{эл}. \quad (48.9)$$

Просуммировав выражение (48.9) по всем элементам контура, получим выражение для работы магнитных сил при произвольном бесконечно малом перемещении контура:

$$dA = \int dA_{эл} = \int I d\Phi_{эл} = I \int d\Phi_{эл} = I d\Phi \quad (48.10)$$

( $d\Phi$  — полное приращение потока через контур).

Чтобы найти работу, совершаемую при конечном произвольном перемещении контура, просуммируем выражение (48.10) по всем элементарным перемещениям:

$$A_{12} = \int dA = I \int d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (48.11)$$

Здесь  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях. Таким образом, работа, совершаемая магнитными силами над контуром, равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через контур.

В частности, при повороте плоского контура в однородном поле из положения, в котором векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противополо-

ложные стороны (в этом положении  $\Phi = -BS$ ), в положение, при котором эти векторы совпадают по направлению (в этом положении  $\Phi = BS$ ), магнитные силы совершают над контуром работу

$$A = I\{BS - (-BS)\} = 2IBS.$$

Тот же результат получается с помощью выражения (46.10) для потенциальной энергии контура в магнитном поле:

$$A = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = p_m B - (-p_m B) = 2p_m B = 2ISB$$

$$(p_m = IS).$$

Отметим, что работа (48.11) совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет источника, поддерживающего неизменным ток в контуре. В § 61 будет показано, что при изменениях магнитного потока, пронизывающего контур, в этом контуре возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i = -(d\Phi/dt)$ . Следовательно, источник, кроме работы, затрачиваемой на выделение ленц-джоулева тепла, должен совершать дополнительную работу против э. д. с. индукции, определяемую выражением

$$A = \int dA = - \int \mathcal{E}_i I dt = \int \frac{d\Phi}{dt} I dt = \int I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

которое совпадает с (48.11).

#### § 49. Дивергенция и ротор магнитного поля

Отсутствие в природе магнитных зарядов<sup>1</sup> приводит к тому, что линии вектора  $\mathbf{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Поэтому в соответствии с формулой (11.10) поток вектора  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность должен быть равен нулю. Таким образом, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$  имеет место условие

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (49.1)$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора  $\mathbf{B}$ : *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Заменив в соответствии с (11.41) поверхностный интеграл в (49.1) объемным, получим, что

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0.$$

<sup>1</sup> Дирак высказал предположение, что в природе должны существовать магнитные заряды (названные монополями Дирака). Поиски этих зарядов пока не дали никаких результатов, так что вопрос о существовании монополей Дирака остается открытым.

Условие, к которому мы пришли, должно выполняться для любого произвольно выбранного объема  $V$ . Это возможно лишь в том случае, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция всюду равна нулю:

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (49.2)$$

Теперь обратимся к циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ . По определению циркуляция равна интегралу

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}. \quad (49.3)$$

Проще всего вычислить этот интеграл в случае поля прямого тока. Пусть замкнутый контур лежит в плоскости, перпендикулярной к току (рис. 49.1; ток перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Заменим в выражении для циркуляции  $\mathbf{B} d\mathbf{l}$  через  $B dl_B$  ( $dl_B$  — проекция элемента контура на направление вектора  $\mathbf{B}$ ). Из рисунка видно, что  $dl_B$  равно  $b d\alpha$ , где  $b$  — расстояние от провода с током до  $d\mathbf{l}$ .

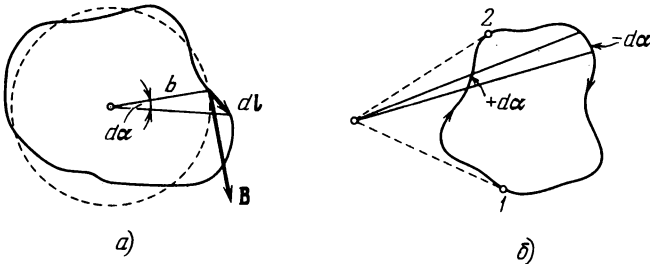


Рис. 49.1.

$d\alpha$  — угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок  $d\mathbf{l}$ . Таким образом, подставив выражение (42.5) для  $B$ , получим

$$\mathbf{B} d\mathbf{l} = B dl_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha. \quad (49.4)$$

С учетом равенства (49.4) имеем

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha. \quad (49.5)$$

При обходе по контуру, охватывающему ток, радиальная прямая все время поворачивается в одном направлении, поэтому  $\oint d\alpha = 2\pi$ . Иначе обстоит дело, если ток не охватывается контуром (рис. 49.1, б). В этом случае при обходе по контуру радиальная прямая поворачи-



вается сначала в одном направлении (участок 1—2), а затем в противоположном (участок 2—1), вследствие чего  $\oint d\alpha$  равен нулю. Учтя этот результат, можно написать

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (49.6)$$

где под  $I$  следует подразумевать ток, охватываемый контуром. Если контур тока не охватывает, циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  равна нулю.

Знак выражения (49.6) зависит от направления обхода по контуру (в этом же направлении отсчитывается угол  $\alpha$ ). Если направление обхода образует с направлением тока правовинтовую систему, величина (49.6) положительна, в противном случае — отрицательна. Знак можно учесть, полагая  $I$  алгебраической величиной, причем положительным нужно считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления будет отрицательным.

С помощью соотношения (49.6) легко восстановить в па-

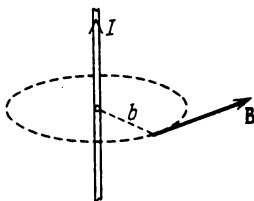


Рис. 49.2.

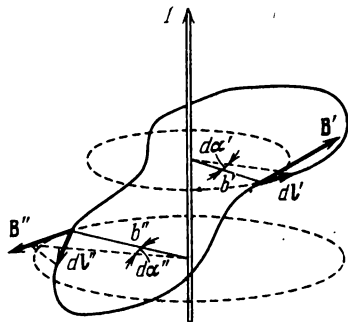


Рис. 49.3.

мяти формулу (42.5) для  $B$  поля прямого тока. Представим себе плоский контур в виде окружности радиуса  $b$  (рис. 49.2). В каждой точке этого контура вектор  $\mathbf{B}$  одинаков по величине и направлен по касательной к окружности. Следовательно, циркуляция равна произведению  $B$  на длину окружности  $2\pi b$ , и соотношение (49.6) имеет вид

$$B \cdot 2\pi b = \mu_0 I.$$

Отсюда  $B = \mu_0 I / 2\pi b$  (ср. с (42.5)).

Случай неплоского контура (рис. 49.3) отличается от рассмотренного выше случая плоского контура лишь тем, что при перемещении вдоль контура радиальная прямая не только поворачивается вокруг провода, но и перемещается вдоль него. Все выкладки, приведшие нас к формуле (49.6), остаются справедливыми, если под  $d\alpha$  подразумевать угол, на который поворачивается проекция радиальной прямой на перпендикулярную к току плоскость. Суммарный угол поворота этой проекции равен  $2\pi$ , если контур охватывает ток, и

нулю в противном случае. Следовательно, мы снова приходим к формуле (49.6).

Формула (49.6) получена нами для случая прямого тока. Можно показать, что она справедлива и для тока, текущего по проводу произвольной формы, например для кругового тока.

Допустим, что некоторый контур охватывает несколько проводов с токами. В силу принципа суперпозиции (см. (40.1))

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint \left( \sum_k \mathbf{B}_k \right) d\mathbf{l} = \sum_k \oint \mathbf{B}_k d\mathbf{l}.$$

Каждый из интегралов в этой сумме равен  $\mu_0 I_k$ . Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k I_k \quad (49.7)$$

(напомним, что  $I_k$  — алгебраическая величина).

Если токи текут во всем пространстве, где расположен контур, алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, можно представить в виде

$$\sum_k I_k = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} \mathbf{n} dS. \quad (49.8)$$

Интеграл берется по произвольной поверхности  $S$ , натянутой на контур. Вектор  $\mathbf{j}$  есть плотность тока в той точке, где расположена площадка  $dS$ ;  $\mathbf{n}$  — положительная нормаль к этой площадке (т. е. нормаль, образующая с направлением обхода по контуру при вычислении циркуляции правовинтовую систему).

Заменяя в (49.7) сумму токов выражением (49.8), получим

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, придем к равенству

$$\int_S [\nabla \mathbf{B}] d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольном выборе поверхности  $S$ , по которой берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные функции имеют в каждой точке одинаковые значения. Таким образом, мы приходим к выводу, что ротор вектора магнитной индукции пропорционален вектору плотности тока в данной точке:

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (49.9)$$

Коэффициент пропорциональности в СИ равен  $\mu_0$ .

Отметим, что формулы (49.7) и (49.9) справедливы только для поля в вакууме в отсутствие меняющихся во времени электрических полей.

Итак, мы нашли дивергенцию и ротор магнитного поля в вакууме. Сравним полученные формулы с аналогичными формулами для электростатического поля в вакууме. Согласно (13.5), (12.3), (49.2) и (49.9)

$$\begin{array}{ll} \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & [\nabla \mathbf{E}] = 0 \\ \text{(дивергенция } \mathbf{E} \text{ равна } \rho, & \text{(ротор } \mathbf{E} \text{ равен нулю)} \\ \text{деленному на } \epsilon_0) & \\ \nabla \mathbf{B} = 0 & [\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j} \\ \text{(дивергенция } \mathbf{B} \text{ равна нулю)} & \text{(ротор } \mathbf{B} \text{ равен } \mathbf{j}, \\ & \text{умноженному на } \mu_0). \end{array}$$

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно различный характер. Ротор электростатического поля равен нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано скалярным потенциалом  $\phi$ . Ротор магнитного поля в тех точках, где есть ток, отличен от нуля. Соответственно циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  пропорциональна току, охватываемому контуром. Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с  $\mathbf{B}$  соотношением, аналогичным (8.2). Этот потенциал не был бы однозначным — при каждом обходе по контуру и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное  $\mu_0 I$ . Поле, у которого ротор отличен от нуля, называется **вихревым** или **соленоидальным**.

Поскольку дивергенция вектора  $\mathbf{B}$  всюду равна нулю, этот вектор можно представить в виде ротора некоторой функции  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] \quad (49.10)$$

(дивергенция ротора всегда равна нулю; см. (11.39)). Функция  $\mathbf{A}$  называется **векторным потенциалом** магнитного поля. Некоторые сведения о векторном потенциале содержатся в Приложении III (стр. 486).

## § 50. Поле соленоида и тороида

Соленоид представляет собой провод, навитый на круглый цилиндрический каркас. Линии  $\mathbf{B}$  поля соленоида выглядят примерно так, как показано на рис. 50.1. Внутри соленоида направление этих линий образует с направлением тока в витках праввинтовую систему.

У реального соленоида имеется составляющая тока вдоль оси. Кроме того, линейная плотность тока  $j_{\text{лин}}$  (равная отношению силы тока  $dI$  к элементу длины соленоида  $dl$ ) изменяется периодически при перемещении вдоль соленоида. Среднее значение этой плотности равно

$$\langle j_{\text{лин}} \rangle = \left\langle \frac{dI}{dl} \right\rangle = nI, \quad (50.1)$$

где  $n$  — число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины,  $I$  — сила тока в соленоиде.

В учении об электромагнетизме большую роль играет воображаемый бесконечно длинный соленоид, у которого отсутствует осевая составляющая тока и, кроме того, линейная плотность тока  $j_{\text{лин}}$  постоянна по всей длине. Причина этого заключается в том, что поле такого соленоида однородно и ограничено объемом соленоида (аналогично электрическое поле бесконечного плоского конденсатора однородно и ограничено объемом конденсатора).

В соответствии со сказанным представим соленоид в виде бесконечного тонкостенного цилиндра, обтекаемого током постоянной линейной плотности

$$j_{\text{лин}} = nI. \quad (50.2)$$

Разобьем цилиндр на одинаковые круговые токи — «витки».

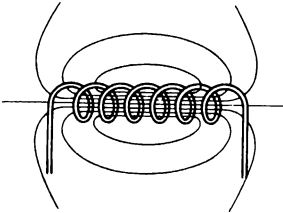


Рис. 50.1.

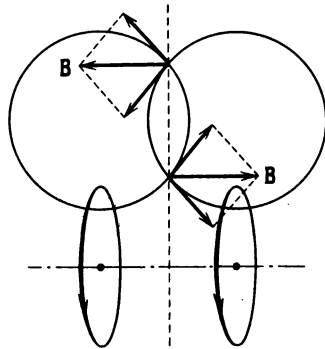


Рис. 50.2.

Из рис. 50.2 видно, что каждая пара витков, расположенных симметрично относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси соленоида, создает в любой точке этой плоскости магнитную индукцию, параллельную оси. Следовательно, и результирующее поле в любой точке внутри и вне бесконечного соленоида может иметь лишь направление, параллельное оси.

Из рис. 50.1 вытекает, что направления поля внутри и вне конечного соленоида противоположны. При увеличении длины соленоида направления полей не изменяются и в пределе при  $l \rightarrow \infty$  остаются противоположными. Для бесконечного соленоида, как и для конечного, направление поля внутри соленоида образует с направлением обтекания цилиндра током правовинтовую систему.

Из параллельности вектора  $\mathbf{B}$  оси вытекает, что поле как внутри, так и вне бесконечного соленоида должно быть однородным. Чтобы доказать это, возьмем внутри соленоида воображаемый прямоугольный контур 1—2—3—4 (рис. 50.3; участок 4—1 идет по оси соленоида). Обойдя контур по часовой стрелке, получим для циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  значение  $(B_2 - B_1)a$ . Контур не охватывает токов, поэтому циркуляция должна быть равна нулю (см. (49.7)). Отсюда

следует, что  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ . Располагая участок контура 2—3 на любом расстоянии от оси, мы каждый раз будем получать, что магнитная индукция  $\mathbf{B}_2$  на этом расстоянии равна индукции  $\mathbf{B}_1$  на оси соленоида. Таким образом, однородность поля внутри соленоида доказана.

Теперь обратимся к контуру  $1'—2'—3'—4'$ . Мы изобразили векторы  $\mathbf{B}'_1$  и  $\mathbf{B}'_2$  штриховой линией, поскольку, как выяснится в дальнейшем, поле вне бесконечного соленоида равно нулю. Пока же мы знаем лишь, что возможное направление поля вне соленоида противоположно направлению поля внутри соленоида. Контур  $1'—2'—3'—4'$  не охватывает токов; поэтому циркуляция вектора  $\mathbf{B}'$  по этому контуру, равная  $(B'_1 - B'_2)a$ , должна

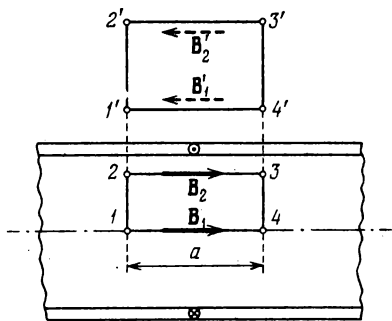


Рис. 50.3.

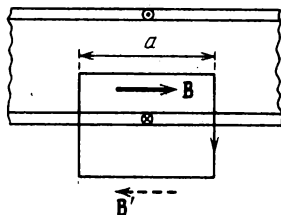


Рис. 50.4.

быть равна нулю. Отсюда вытекает, что  $\mathbf{B}'_1 = \mathbf{B}'_2$ . Расстояния от оси соленоида до участков  $1'—4'$  и  $2'—3'$  были взяты произвольно. Следовательно, значение  $\mathbf{B}'$  на любом расстоянии от оси будет вне соленоида одно и то же. Таким образом, оказывается доказанной и однородность поля вне соленоида.

Циркуляция по контуру, изображенному на рис. 50.4, равна  $a(B + B')$  (для обхода по часовой стрелке). Этот контур охватывает положительный ток величины  $j_{\text{лин}} a$ . В соответствии с (49.7) должно выполняться равенство

$$a(B + B') = \mu_0 j_{\text{лин}} a$$

или после сокращения на  $a$  и замены  $j_{\text{лин}}$  на  $nI$  (см. (50.2))

$$B + B' = \mu_0 nI. \quad (50.3)$$

Из этого равенства следует, что поле как внутри, так и снаружи бесконечного соленоида является конечным.

Возьмем плоскость, перпендикулярную к оси соленоида (рис. 50.5). Вследствие замкнутости линий  $\mathbf{B}$  магнитные потоки через внутреннюю часть  $S$  этой плоскости и через внешнюю часть  $S'$  должны быть одинаковыми. Поскольку поля однородны и перпендикулярны к плоскости, каждый из потоков равен произведению

соответствующего значения магнитной индукции и площади, пронизываемой потоком. Таким образом, получается соотношение

$$BS = B'S'.$$

Левая часть этого равенства конечна, множитель  $S'$  в правой части бесконечно большой. Отсюда следует, что  $B' = 0$ .

Итак, мы доказали, что вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю. Внутри соленоида поле однородно.

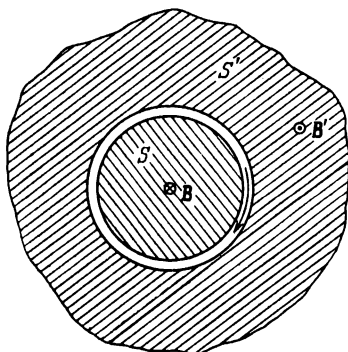


Рис. 50.5.

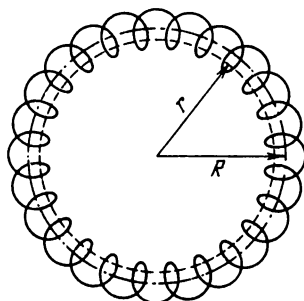


Рис. 50.6.

Положив в (50.3)  $B' = 0$ , приходим к формуле для магнитной индукции внутри соленоида:

$$B = \mu_0 n I. \quad (50.4)$$

Произведение  $nI$  называется числом ампер-витков на метр. При  $n = 1000$  витков на метр и силе тока в 1 А магнитная индукция внутри соленоида составляет  $4\pi \cdot 10^{-4}$  Тл = 4π Гс.

В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад (см. формулу (47.4)). Поэтому у конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (50.4):

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I. \quad (50.5)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (50.4) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (50.5) — для точек на оси вблизи его концов.

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 50.6). Возьмем контур в виде окружности радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром тороида. В силу сим-

метрии вектор  $\mathbf{B}$  в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру. Следовательно, циркуляция  $\mathbf{B}$  равна

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

( $\mathbf{B}$  — магнитная индукция в тех точках, где проходит контур).

Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток  $2\pi R n I$  ( $R$  — радиус тороида,  $n$  — число витков на единицу его длины). В этом случае

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi R n I,$$

откуда

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}. \quad (50.6)$$

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него  $B \cdot 2\pi r = 0$ . Таким образом, вне тороида магнитная индукция равна нулю.

Для тороида, радиус которого  $R$  значительно превосходит радиус витка, отношение  $R/r$  для всех точек внутри тороида мало отличается от единицы и вместо (50.6) получается формула, совпадающая с формулой (50.4) для бесконечно длинного соленоида. В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений тороида. В разных сечениях поле имеет различное направление, поэтому говорить об однородности поля в пределах его тороида можно только условно, имея в виду одинаковость модуля  $\mathbf{B}$ .

У реального тороида имеется составляющая тока вдоль оси. Эта составляющая создает в дополнение к полю (50.6) поле, аналогичное полю кругового тока.

## Г Л А В А VII

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

#### § 51. Намагничивание магнетика

В предыдущей главе предполагалось, что провода, по которым текут токи, создающие магнитное поле, находятся в вакууме. Если несущие ток провода находятся в какой-либо среде, магнитное поле изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является **магнетиком**, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле  **$\mathbf{B}'$** , которое накладывается на обусловленное токами поле  **$\mathbf{B}_0$** . Оба поля в сумме дают результирующее поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (51.1)$$

(ср. с (17.2)).

Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под  **$\mathbf{B}$**  подразумевается усредненное (макроскопическое) поле (см. § 17).

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (молекулярные токи). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю. В силу хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекул суммарный магнитный момент тела также равен нулю. Под действием поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего магнетик намагничивается — его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга и возникает поле  **$\mathbf{B}'$** .

Намагничивание магнетика естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **намагниченностью** и обозначают буквой  **$\mathbf{J}$** . Если магнетик намаг-



ничен неоднородно, намагниченность в данной точке определяется следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m, \quad (51.2)$$

где  $\Delta V$  — физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки,  $\mathbf{p}_m$  — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме  $\Delta V$  (ср. с формулой (16.1)).

Поле  $\mathbf{B}'$ , так же как и поле  $\mathbf{B}_0$ , не имеет источников. Поэтому дивергенция результирующего поля (51.1) равна нулю:

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla \mathbf{B}_0 + \nabla \mathbf{B}' = 0. \quad (51.3)$$

Таким образом, формула (49.2), а следовательно, и формула (49.1) справедливы не только для поля в вакууме, но и для поля в веществе.

## § 52. Напряженность магнитного поля

Напишем выражение для ротора результирующего поля (51.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = [\nabla \mathbf{B}_0] + [\nabla \mathbf{B}'].$$

Согласно (49.9)  $[\nabla \mathbf{B}_0] = \mu_0 \mathbf{j}$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность макроскопического тока. Аналогично ротор вектора  $\mathbf{B}'$  должен быть пропорционален плотности молекулярных токов:

$$[\nabla \mathbf{B}'] = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{мол.}}$$

Следовательно, ротор результирующего поля определяется формулой

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол.}}). \quad (52.1)$$

Из (52.1) вытекает, что при вычислении ротора поля в магнетиках мы сталкиваемся с затруднением, аналогичным тому, с которым мы столкнулись при рассмотрении электрического поля в диэлектриках (см. формулу (19.1)): для того чтобы определить ротор  $\mathbf{B}$ , нужно знать плотность не только макроскопических, но также и молекулярных токов. Плотность же молекулярных токов в свою очередь зависит от значения вектора  $\mathbf{B}$ . Путь, позволяющий обойти это затруднение, также аналогичен тому пути, которым мы воспользовались в § 19. Оказывается, можно найти такую вспомогательную величину, ротор которой определяется лишь плотностью макроскопических токов.

Чтобы установить вид этой вспомогательной величины, попробуем выразить плотность молекулярных токов  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$  через намагниченность магнетика  $\mathbf{J}^1$ . С этой целью вычислим алгебраическую

<sup>1</sup> В § 19 мы выразили плотность связанных зарядов через поляризованность диэлектрика  $\mathbf{P}$ .

сумму молекулярных токов, охватываемых некоторым контуром  $\Gamma$ . Эта сумма равна

$$\int_S \mathbf{j}_{\text{мол}} d\mathbf{S}, \quad (52.2)$$

где  $S$  — поверхность, натянутая на контур.

В алгебраическую сумму молекулярных токов входят только те молекулярные токи, которые оказываются «нанизанными» на контур (см. ток  $I'_{\text{мол}}$  на рис. 52.1). Токи, не «нанизанные» на контур, либо не пересекают натянутую на контур поверхность совсем, либо пересекают эту поверхность дважды — один раз в одном направлении, второй раз в другом (см. ток  $I''_{\text{мол}}$  на рис. 52.1). В результате их вклад в алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, оказывается равным нулю.

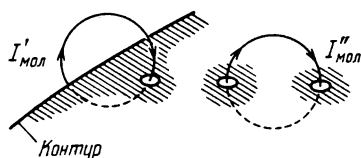


Рис. 52.1.

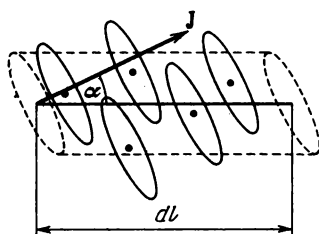


Рис. 52.2.

Из рис. 52.2 видно, что элемент контура  $dl$ , образующий с направлением намагнитченности  $\mathbf{J}$  угол  $\alpha$ , нанизывает на себя те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косоуго цилиндра с объемом  $S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$  ( $S_{\text{мол}}$  — площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Если  $n$  — число молекул в единице объема, то суммарный ток, охватываемый элементом  $dl$ , равен  $I_{\text{мол}} n S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$ . Произведение  $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$  равно магнитному моменту  $p_m$  отдельного молекулярного тока. Следовательно, выражение  $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n$  представляет собой магнитный момент единицы объема, т. е. дает модуль вектора  $\mathbf{j}$ , а  $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n \cos \alpha$  — проекцию вектора  $\mathbf{J}$  на направление элемента  $dl$ . Таким образом, суммарный молекулярный ток, охватываемый элементом  $dl$ , равен  $\mathbf{J} dl$ , а сумма молекулярных токов, охватываемых всем контуром (см. (52.2)), равна

$$\int_S \mathbf{j}_{\text{мол}} d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{J} dl.$$

Преобразовав правую часть по теореме Стокса, получим

$$\int_S \mathbf{j}_{\text{мол}} d\mathbf{S} = \int_S [\nabla \mathbf{J}] d\mathbf{S}.$$

Равенство, к которому мы пришли, должно выполняться при произвольном выборе поверхности  $S$ . Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные выражения равны в каждой точке магнетика:

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = [\nabla \mathbf{J}]. \quad (52.3)$$

Таким образом, плотность молекулярных токов определяется значением ротора намагниченности. В случае, когда  $[\nabla \mathbf{J}] = 0$ , молекулярные токи отдельных молекул ориентированы так, что их сумма в среднем равна нулю.

Формула (52.3) допускает следующую наглядную интерпретацию. На рис. 52.3 изображены векторы намагниченности  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  в непосредственной близости к некоторой точке  $P$ . Точка  $P$  и оба вектора лежат в плоскости рисунка. Изображенный пунктиром контур  $\Gamma$  также расположен в плоскости рисунка. Если характер намагниченности таков, что векторы  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  одинаковы по модулю, то циркуляция  $\mathbf{J}$  по контуру  $\Gamma$  будет равна нулю. Соответственно  $[\nabla \mathbf{J}]$  в точке  $P$  также будет равен нулю.

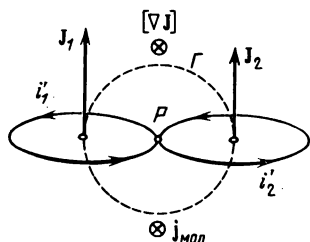


Рис. 52.3.

Намагниченностям  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  можно сопоставить молекулярные токи  $i_1'$  и  $i_2'$ , текущие по контурам, изображенным на рис. 52.3 сплошными линиями. Эти контуры лежат в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. При одинаковом направлении векторов  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  направления токов  $i_1'$  и  $i_2'$  в точке  $P$  будут взаимно противоположными. В силу  $J_1 = J_2$  токи  $i_1'$  и  $i_2'$  одинаковы по величине, вследствие чего результирующий молекулярный ток в точке  $P$  оказывается, как и  $[\nabla \mathbf{J}]$ , равным нулю:  $\mathbf{j}_{\text{мол}} = 0$ .

Теперь допустим, что  $J_1 > J_2$ . Тогда циркуляция  $\mathbf{J}$  по контуру  $\Gamma$  окажется отличной от нуля. Соответственно поле вектора  $\mathbf{J}$  в точке  $P$  будет характеризоваться вектором  $[\nabla \mathbf{J}]$ , направленным за чертеж. Большей намагниченности отвечает больший молекулярный ток; поэтому  $i_1' > i_2'$ . В итоге в точке  $P$  будет наблюдаться отличный от нуля результирующий ток, характеризующийся плотностью  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ , направленной так же, как и  $[\nabla \mathbf{J}]$ , за чертеж. В случае  $J_1 < J_2$  векторы  $[\nabla \mathbf{J}]$  и  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$  будут направлены не за чертеж, а на нас.

Итак, в точках, где отличен от нуля ротор намагниченности, оказывается отличной от нуля и плотность молекулярных токов, причем векторы  $[\nabla \mathbf{J}]$  и  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$  имеют одинаковое направление (см. (52.3)).

Подставим выражение (52.3) для плотности молекулярных токов в формулу (52.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 [\nabla \mathbf{J}].$$

Разделив это соотношение на  $\mu_0$  и объединив вместе роторы, получим

$$\left[ \nabla, \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) \right] = \mathbf{j}. \quad (52.4)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (52.5)$$

есть искомая нами вспомогательная величина, ротор которой определяется одними лишь макроскопическими токами. Эта величина называется напряженностью магнитного поля.

В соответствии с (52.4)

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (52.6)$$

(ротор вектора  $\mathbf{H}$  равен вектору плотности макроскопических токов).

Возьмем произвольный контур  $\Gamma$  с натянутой на него поверхностью  $S$  и образуем выражение

$$\int_S [\nabla \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Согласно теореме Стокса левая часть этого равенства эквивалентна циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $\Gamma$ . Следовательно,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (52.7)$$

Если макроскопические токи текут по проводам, охватываемым контуром, соотношение (52.7) можно написать в виде

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_k I_k. \quad (52.8)$$

Формулы (52.7) и (52.8) выражают теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ : *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.*

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  является аналогом электрического смещения  $\mathbf{D}$ . Первоначально предполагалось, что в природе имеются подобные электрическим зарядам магнитные массы, и учение о магнетизме развивалось по аналогии с учением об электричестве. В те времена и были введены названия: «магнитная индукция» для  $\mathbf{B}$  и «напряженность поля» для  $\mathbf{H}$ . Впоследствии выяснилось, что магнитных масс в природе не существует и что величина, названная магнитной индукцией, в действительности является аналогом не электрического смещения  $\mathbf{D}$ , а напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  (соответственно  $\mathbf{H}$  — аналогом не  $\mathbf{E}$ , а  $\mathbf{D}$ ). Однако изменять уже установившуюся терминологию не ста-

ли, тем более, что вследствие различной природы электрического и магнитного полей (электростатическое поле потенциально, магнитное — соленоидально<sup>1</sup> величины  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  обнаруживают много сходства в своем поведении (например, линии  $\mathbf{B}$ , как и линии  $\mathbf{D}$ , не прерываются разрывами на границе двух сред).

В вакууме  $\mathbf{J} = 0$ , поэтому  $\mathbf{H}$  превращается в  $\mathbf{B}/\mu_0$  и формулы (52.6) и (52.8) переходят в формулы (49.9) и (49.7).

В соответствии с (42.5) напряженность поля прямого тока в вакууме определяется выражением

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}, \quad (52.9)$$

из которого следует, что напряженность магнитного поля имеет размерность, равную размерности силы тока, деленной на размерность длины. В связи с этим единица напряженности магнитного поля в СИ носит название ампер на метр (А/м).

В гауссовой системе напряженностью магнитного поля называют величину

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}. \quad (52.10)$$

Из этого определения следует, что в вакууме  $\mathbf{H}$  совпадает с  $\mathbf{B}$ . В соответствии с этим единица  $\mathbf{H}$  в гауссовой системе, называемая эрстедом (Э), имеет ту же величину и размерность, что и единица магнитной индукции — гаусс (Гс). По существу эрстед и гаусс суть разные названия одной и той же единицы. Если этой единицей измеряют  $\mathbf{H}$ , ее называют эрстедом, если измеряют  $\mathbf{B}$ , то — гауссом.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Полагают, что в каждой точке магнетика

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (52.11)$$

где  $\chi$  — характерная для данного магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью<sup>2</sup>. Опыт показывает, что для слабомагнитных (неферромагнитных) веществ при не слишком сильных полях  $\chi$  не зависит от  $\mathbf{H}$ . Согласно (52.5) размерность  $\mathbf{H}$  совпадает с размерностью  $\mathbf{J}$ . Следовательно,  $\chi$  — безразмерная величина.

Подставив в формулу (52.5) выражение (52.11) для  $\mathbf{J}$ , получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (52.12)$$

<sup>1</sup> Соленоидальным называется поле, не имеющее источников. В каждой точке такого поля дивергенция равна нулю.

<sup>2</sup> В анизотропных средах направления векторов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, не совпадают. Для таких сред связь между векторами  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$  осуществляется тензором магнитной восприимчивости (см. подстрочное примечание на стр. 63).

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (52.13)$$

называется относительной магнитной проницаемостью или просто магнитной проницаемостью вещества<sup>1</sup>.

В отличие от диэлектрической восприимчивости  $\kappa$ , которая может иметь лишь положительные значения (поляризованность  $\mathbf{P}$  в изотропном диэлектрике всегда направлена по полю  $\mathbf{E}$ ), магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы.

С учетом (52.13) формуле (52.12) можно придать вид

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (52.14)$$

Таким образом, напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор  $\mathbf{B}$ , но в  $\mu_0 \mu$  раз меньший по модулю (в анизотропных средах векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ , вообще говоря, не совпадают по направлению).

Соотношение (52.11), связывающее векторы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$ , имеет точно такой вид и в гауссовой системе. Подставив это выражение в формулу (52.10), получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\chi\mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{1 + 4\pi\chi}. \quad (52.15)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (52.16)$$

называется магнитной проницаемостью вещества. Введя эту величину в формулу (52.15), получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \quad (52.17)$$

Значение  $\mu$  в гауссовой системе совпадает со значением  $\mu$  в СИ. Сопоставление формул (52.13) и (52.16) показывает, что значение магнитной восприимчивости в СИ превосходит в  $4\pi$  раз значение  $\chi$  в гауссовой системе:

$$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{Гс}}. \quad (52.18)$$

## § 53. Вычисление поля в магнетиках

Рассмотрим поле, создаваемое бесконечно длинным круглым намагниченным стержнем. Намагниченность  $\mathbf{J}$  будем считать всюду одинаковой и направленной по оси стержня. Разобьем мысленно стержень на перпендикулярные к оси слои толщины  $dl$ . Каждый

<sup>1</sup> В электротехнике вводят так называемую абсолютную магнитную проницаемость  $\mu_a = \mu_0 \mu$ . Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

слой разобьем в свою очередь на малые цилиндрические элементы с основаниями произвольной формы (рис. 53.1, а). Каждый такой элемент обладает магнитным моментом

$$dp_m = J dS dl, \quad (53.1)$$

где  $dS$  — площадь основания.

Поле  $d\mathbf{B}'$ , создаваемое элементом на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, эквивалентно полю, которое создавал бы ток силы  $I = J dl$ , обтекающий элемент по его боковой поверхности (см. рис. 53.1, б). Действительно, магнитный момент такого тока равен  $dp_m = I dS = J dl dS$  (ср. с (53.1)), магнитное же поле

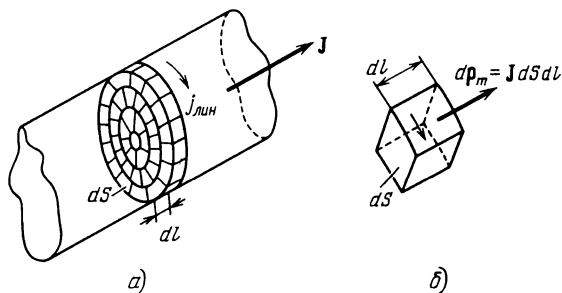


Рис. 53.1.

на больших расстояниях определяется только величиной и направлением магнитного момента (см. § 47).

Воображаемые токи, текущие по общему для двух соседних элементов участку поверхности, одинаковы по величине и противоположны по направлению, поэтому сумма их равна нулю. Таким образом, при суммировании токов, обтекающих боковые поверхности элементов одного слоя, некомпенсированными оказываются лишь токи, текущие по боковой поверхности слоя.

Из сказанного вытекает, что слой стержня толщины  $dl$  создает поле, эквивалентное полю, которое создавал бы ток силы  $J dl$ , обтекающий слой по боковой поверхности (линейная плотность этого тока равна  $j_{\text{лин}} = J$ ). Весь же бесконечный намагниченный стержень создает поле, эквивалентное полю цилиндра, обтекаемого током с линейной плотностью  $j_{\text{лин}} = J$ . В § 50 мы выяснили, что вне такого цилиндра поле равно нулю, а внутри цилиндра поле однородно и равно по величине  $\mu_0 j_{\text{лин}}$ .

Таким образом, мы выяснили характер поля  $\mathbf{B}'$ , создаваемого однородно намагниченным бесконечно длинным круглым стержнем. Вне стержня это поле равно нулю. Внутри стержня поле однородно и равно

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (53.2)$$

Пусть имеется однородное поле  $\mathbf{B}_0$ , создаваемое макротоками в вакууме. Согласно (52.14) напряженность этого поля равна

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}. \quad (53.3)$$

Внесем в это поле (мы будем называть его внешним) бесконечно длинный круглый стержень из однородного и изотропного магнетика, расположив его вдоль направления  $\mathbf{B}_0$ . Из соображений симметрии следует, что возникающая в стержне намагниченность  $\mathbf{J}$  коллинеарна с вектором  $\mathbf{B}_0$ .

Намагниченный стержень создает внутри себя поле  $\mathbf{B}'$ , определяемое формулой (53.2). В результате поле внутри стержня станет равным

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (53.4)$$

Подставив это значение  $\mathbf{B}$  в формулу (52.5), получим напряженность поля внутри стержня

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0$$

(см. (53.3)). Таким образом, напряженность поля в стержне оказывается совпадающей с напряженностью внешнего поля.

Умножив  $\mathbf{H}$  на  $\mu_0 \mu$ , получим магнитную индукцию внутри стержня:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (53.5)$$

Отсюда следует, что магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике (ср. с (20.2)).

Заметим, что поскольку поле  $\mathbf{B}'$  отлично от нуля только внутри стержня, магнитное поле вне стержня остается без изменений.

Полученный нами результат бывает справедлив в тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик заполняет объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями напряженности внешнего поля<sup>1</sup>. В противном случае напряженность поля, определяемая формулой (52.5), не совпадает с  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$ .

Условно полагают, что напряженность поля в магнетике равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_\infty, \quad (53.6)$$

где  $\mathbf{H}_0$  — внешнее поле, а  $\mathbf{H}_\infty$  — так называемое размагничивающее поле, которое предполагается пропорциональным намагниченности:

$$\mathbf{H}_\infty = N \mathbf{J}. \quad (53.7)$$

<sup>1</sup> Напомним, что в случае электрического поля  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$  при условии, что однородный и изотропный диэлектрик заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, т. е. поверхностями, ортогональными линиям напряженности внешнего поля.



Коэффициент пропорциональности  $N$  называется размагничивающим фактором. Он зависит от формы магнетика. Для тела, поверхность которого не пересекается линиями напряженности внешнего поля, как мы видели,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , т. е. размагничивающий фактор равен нулю. Для тонкого диска, перпендикулярного к внешнему полю,  $N = 1$ , для шара  $N = 1/3$ .

Соответствующий расчет дает, что в случае, когда однородный и изотропный магнетик, имеющий форму эллипсоида, помещается в однородное внешнее поле, магнитное поле в нем хотя и отлично от внешнего, но также однородно. То же справедливо для шара, представляющего собой частный случай эллипсоида, а также для длинного стержня и тонкого диска, которые можно считать предельными случаями эллипсоида.

В заключение найдем напряженность поля бесконечно длинного соленоида, заполненного однородным и изотропным магнетиком (или погруженного в безграничный однородный и изотропный магнетик). Применив к контуру, изображенному на рис. 50.4, теорему о циркуляции (см. (52.8)), получим соотношение  $Ha = naI$ . Отсюда

$$H = nI. \quad (53.8)$$

Таким образом, напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида равна произведению силы тока на число витков, приходящееся на единицу длины. Вне соленоида напряженность поля равна нулю.

## § 54. Условия на границе двух магнетиков

Вблизи поверхности раздела двух магнетиков векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  должны удовлетворять определенным граничным условиям, которые вытекают из соотношений

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (54.1)$$

(см. формулы (51.3) и (52.6)). Мы рассматриваем стационарные, т. е. не изменяющиеся со временем поля.

Возьмем на границе двух магнетиков с проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  воображаемую цилиндрическую поверхность высоты  $h$  с основаниями  $S_1$  и  $S_2$ , расположенными по разные стороны поверхности раздела (рис. 54.1). Поток вектора  $\mathbf{B}$  через эту поверхность равен

$$\Phi_B = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{\text{бок}} \quad (54.2)$$

(ср. с (21.6)).

В соответствии с тем, что  $\nabla \mathbf{B} = 0$ , поток вектора  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю. Приравняв нулю выражение (54.2) и сделав переход  $h \rightarrow 0$ , придем к соотношению  $B_{1n} = -B_{2n}$ . Если проектировать  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  на одну и ту же нормаль, получится

условие

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (54.3)$$

(ср. с (21.7)).

Заменив согласно (52.14) составляющие **B** соответствующими составляющими вектора **H**, умноженными на  $\mu_0\mu$ , получим соотношение

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (54.4)$$

Теперь возьмём на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 54.2) и вычислим для него циркуляцию **H**. При малых размерах контура циркуляцию можно представить в виде

$$\oint H_l dl = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_l \rangle 2b, \quad (54.5)$$

где  $\langle H_l \rangle$  — среднее значение  $H_l$  на перпендикулярных к границе участках контура. Если по границе раздела не текут макроскопические токи,  $[\nabla \mathbf{H}]$  в пределах контура будет равен нулю. Поэтому

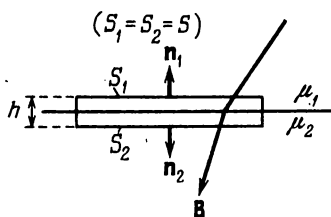


Рис. 54.1.

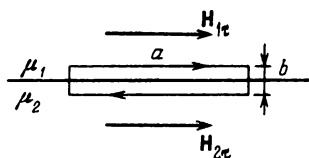


Рис. 54.2.

и циркуляция будет равна нулю. Положив выражение (54.5) равным нулю и осуществив предельный переход  $b \rightarrow 0$ , придем к соотношению

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (54.6)$$

(ср. с (21.4)).

Заменив составляющие **H** соответствующими составляющими вектора **B**, деленными на  $\mu_0\mu$ , получим соотношение

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (54.7)$$

Резюмируя, можно сказать, что при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора **B** и тангенциальная составляющая вектора **H** изменяются непрерывно.

Тангенциальная же составляющая вектора **B** и нормальная составляющая вектора **H** при переходе через границу раздела претерпевают разрыв. Таким образом, при переходе через границу раздела двух сред вектор **B** ведет себя аналогично вектору **D**, а вектор **H** — аналогично вектору **E**.

На рис. 54.3 показано поведение линий **B** при пересечении границы раздела двух магнетиков. Обозначим углы между линиями **B** и нормалью к поверхности раздела соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Отношение тангенсов этих углов равно

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

откуда с учетом (54.3) и (54.7) получается аналогичный (21.9) закон преломления линий магнитной индукции:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (54.8)$$

При переходе в магнетик с большей  $\mu$  линии магнитной индукции отклоняются от нормали к поверхности. Это приводит к сгущению линий. Сгущение линий **B** в веществе с большой магнитной проницаемостью дает возможность формировать магнитные пучки, т. е. придавать им необходимую форму и направление. В частности, для того чтобы осуществить магнитную защиту некоторого объема, его окружают железным экраном. Из рис. 54.4

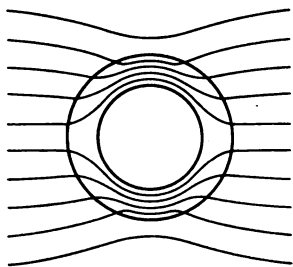


Рис. 54.4.

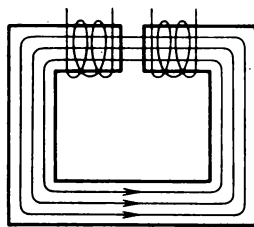


Рис. 54.5.

видно, что сгущение линий магнитной индукции в толще экрана приводит к ослаблению поля внутри.

На рис. 54.5 дана схема лабораторного электромагнита. Он состоит из железного сердечника, на который насажены питаемые током катушки. Линии магнитной индукции оказываются сосредоточенными в основном внутри сердечника. Лишь в узком воздушном зазоре они проходят в среде с малой  $\mu$ . Вектор **B** пересекает границы

между воздушным зазором и сердечником по нормали к поверхности раздела. Отсюда согласно (54.3) следует, что магнитная индукция в зазоре и в сердечнике одинакова по величине. Применим теорему о циркуляции  $\mathbf{H}$  к контуру, проходящему по оси сердечника. Напряженность поля можно считать всюду в железе одинаковой и равной  $H_{\text{ж\acute{e}л}} = B/\mu_0\mu_{\text{ж\acute{e}л}}$ . В воздухе  $H_{\text{возд}} = B/\mu_0\mu_{\text{возд}}$ . Обозначим длину участка контура в железе через  $l_{\text{ж\acute{e}л}}$ , а в зазоре — через  $l_{\text{возд}}$ . Тогда циркуляцию можно представить в виде  $H_{\text{ж\acute{e}л}}l_{\text{ж\acute{e}л}} + H_{\text{возд}}l_{\text{возд}}$ . Согласно (52.8) эта циркуляция должна быть равна  $NI$ , где  $N$  — суммарное число витков катушек электромагнита,  $I$  — сила тока. Таким образом,

$$\frac{B}{\mu_0\mu_{\text{ж\acute{e}л}}} l_{\text{ж\acute{e}л}} + \frac{B}{\mu_0\mu_{\text{возд}}} l_{\text{возд}} = NI.$$

Отсюда

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\frac{l_{\text{возд}}}{\mu_{\text{возд}}} + \frac{l_{\text{ж\acute{e}л}}}{\mu_{\text{ж\acute{e}л}}}} \approx \mu_0 I \frac{N}{l_{\text{возд}} + \frac{l_{\text{ж\acute{e}л}}}{\mu_{\text{ж\acute{e}л}}}}$$

( $\mu_{\text{возд}}$  отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой).

Обычно  $l_{\text{возд}}$  бывает порядка 0,1 м,  $l_{\text{ж\acute{e}л}}$  — порядка 1 м,  $\mu_{\text{ж\acute{e}л}}$  достигает значений порядка нескольких тысяч. Поэтому вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь и написать, что

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l_{\text{возд}}}. \quad (54.9)$$

Следовательно, магнитная индукция в зазоре электромагнита имеет такую величину, какую она имела бы внутри тороида без сердечника, на единицу длины которого было бы намотано число витков, равное  $N/l_{\text{возд}}$  (см. (50.6)). Увеличивая общее число витков и уменьшая размеры воздушного зазора, можно получать поля с большим значением  $B$ . Практически с помощью электромагнитов с железным сердечником удается получать поля с  $B$  порядка нескольких тесла (несколько десятков тысяч гаусс).

## § 55. Виды магнетиков

Формула (52.11) определяет магнитную восприимчивость  $\chi$  единицы объема вещества. Часто вместо этой восприимчивости пользуются отнесенной к одному молю вещества молярной (для химически простых веществ — атомной) восприимчивостью  $\chi_m$  ( $\chi_{\text{ат}}$ ). Очевидно, что  $\chi_m = \chi V_m$ , где  $V_m$  — объем моля вещества. В то время как  $\chi$  — безразмерная величина,  $\chi_m$  измеряется в м<sup>3</sup>/моль.

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) диамагнетики, у которых  $\chi$  отрицательна и мала по абсолютной величине ( $|\chi_m| \sim 10^{-11} \div 10^{-10}$  м<sup>3</sup>/моль);

2) парамагнетики, у которых  $\chi$  тоже невелика, но положительна ( $\chi_m \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$ );

3) ферромагнетики, у которых  $\chi$  положительна и достигает очень больших значений ( $\chi_m \sim 1 \text{ м}^3/\text{моль}$ ). Кроме того, в отличие от диа- и парамагнетиков, для которых  $\chi$  не зависит от  $H$ , восприимчивость ферромагнетиков является функцией напряженности магнитного поля.

Таким образом, в изотропных веществах намагниченность  $\mathbf{J}$  может как совпадать по направлению с  $\mathbf{H}$  (у пара- и ферромагнетиков), так и быть направленной в противоположную сторону (у диамагнетиков). Напомним, что у изотропных диэлектриков поляризованность всегда направлена в ту же сторону, что и  $\mathbf{E}$ .

### § 56. Магнитомеханические явления

Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Движение электронов в атомах подчиняется квантовым законам; в частности, понятие траектории к электронам, движущимся в атоме, не применимо. Однако диамагнетизм вещества удается объяснить, пользуясь моделью Бора, согласно которой электроны в атомах движутся по стационарным круговым орбитам<sup>1</sup>.

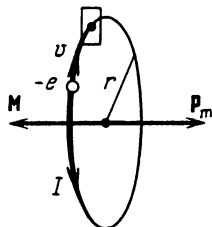


Рис. 56.1.

Пусть электрон движется со скоростью  $v$  по орбите радиуса  $r$  (рис. 56.1). Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, переносится в единицу времени заряд  $ev$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $v$  — число оборотов в секунду. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы  $I = ev$ . Поскольку заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент создаваемого электроном тока равен

$$p_m = IS = ev\pi r^2.$$

Произведение  $2\pi r v$  дает скорость движения электрона  $v$ , поэтому

$$p_m = \frac{evr}{2}. \quad (56.1)$$

Момент (56.1) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего он называется орбитальным магнитным моментом электрона. Направление вектора  $\mathbf{p}_m$  образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (см. рис. 56.1).

<sup>1</sup> Устойчивость таких орбит противоречит законам классической физики (см. § 14 тома 3).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$M = mvr \quad (56.2)$$

( $m$  — масса электрона). Вектор  $\mathbf{M}$  называют орбитальным механическим моментом электрона. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{M}$  противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется магнито механическим (или гиромантическим) отношением. Для электрона оно равно

$$\frac{p_m}{M} = - \frac{e}{2m} \quad (56.3)$$

( $m$  — масса электрона; знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны).

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых магнито механических явлений, заключающихся в том, что намагничивание магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничивание. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Хаасом, второго — Барнеттом.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааса лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из магнетика, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты — против поля. В результате суммарный механический момент электронов  $\sum \mathbf{M}_i$  станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации отдельных моментов он был равен нулю). Момент импульса системы стержень + электроны должен остаться без изменений. Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный  $-\sum \mathbf{M}_i$ , и, следовательно, приходит во вращение. Изменение направления намагниченности приведет к изменению направления вращения стержня.

Механическую модель этого опыта можно осуществить, посадив человека на вращающийся стул и дав ему в руки вращающееся массивное колесо. Повернув колесо осью вверх, человек приходит во вращение в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Повернув колесо осью вниз, человек начинает вращаться в другую сторону.

Опыт Эйнштейна и де Хааса осуществлялся следующим образом (рис. 56.2). Тонкий железный стержень подвешивался на упругой нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничивании стержня постоянным магнитным полем получалось весьма малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса — соленоид питался переменным током, частота которого

подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигала значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено магнитомеханическое отношение, которое оказалось равным  $-e/m$ . Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил ожидаемое значение магнитомеханического отношения (56.3) в два раза.

Чтобы понять опыт Барнетта, вспомним, что при попытках во-  
 влечь гироскоп во вращение вокруг некоторого направления ось гироскопа поворачивается так, чтобы направления собственного и принудительного вращений гироскопа совпали (см. § 44 1-го тома). Если установить гироскоп, закрепленный в карданном подвесе, на диск центробежной машины и привести ее во вращение, то ось гироскопа установится по вертикали, причем так, что направление вращения гироскопа совпадет с направлением вращения диска. При изменении направления вращения центробежной машины ось гироскопа поворачивается на  $180^\circ$ , т. е. так, чтобы направления обоих вращений снова совпали.

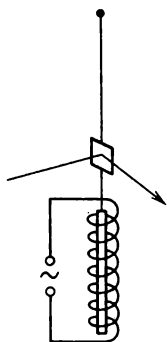


Рис. 56.2.

Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничение. Из результатов этого опыта Барнетт также получил для магнитомеханического отношения величину, в два раза превышающую значение (56.3).

В дальнейшем выяснилось, что, кроме орбитальных моментов (56.1) и (56.2), электрон обладает собственными механическим  $M_s$  и магнитным  $p_{ms}$  моментами, для которых магнитомеханическое отношение равно

$$\frac{p_{ms}}{M_s} = -\frac{e}{m}, \quad (56.4)$$

т. е. совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна и де Хааса и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название *спин* (от английского *to spin* — вращаться). Однако вскоре обнаружилось, что такое представление приводит к ряду противоречий, и

от гипотезы о «вращающемся» электроны пришлось отказаться. В настоящее время принимается, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Спин<sup>1</sup> элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным величины  $\hbar$ , которая равна постоянной Планка  $h$ , деленной на  $2\pi$ :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}. \quad (56.5)$$

В частности, для электрона  $M_s = \frac{1}{2}\hbar$ , в связи с чем говорят, что спин электрона равен  $\frac{1}{2}$ . Таким образом,  $\hbar$  представляет собой естественную единицу момента импульса, подобно тому как элементарный заряд  $e$  является естественной единицей заряда.

В соответствии с (56.4) собственный магнитный момент электрона равен

$$\rho_m = -\frac{e}{m} M_s = -\frac{e}{m} \frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (56.6)$$

Величину

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл} = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}^2 \quad (56.7)$$

называют магнетон<sup>2</sup> Бора. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Магнитный момент атома складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц — протонов и нейтронов). Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов; поэтому при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Магнитный момент молекулы также можно считать равным сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

Экспериментальное определение магнитных моментов атомов было осуществлено Штерном и Герлахом. В их опытах пучок атомов пропусклся через сильно неоднородное магнитное поле. Неоднородность поля достигалась за счет специальной формы полюсных наконечников электромагнита (рис. 56.3). Согласно формуле (46.11)

<sup>1</sup> Точнее, максимальное значение проекции спина на выделенное в пространстве направление, например на направление внешнего поля.

<sup>2</sup> Согласно формуле  $W = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}$  размерность магнитного момента равна размерности энергии (джоуль или эрг), деленной на размерность магнитной индукции (тесла или гаусс).



на атомы пучка должна действовать сила

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

величина и знак которой зависят от угла  $\alpha$ , образуемого вектором  $p_m$  с направлением поля. При хаотическом распределении моментов атомов по направлениям в пучке имеются частицы, для которых значения  $\alpha$  изменяются в пределах от 0 до  $\pi$ . В соответствии с этим предполагалось, что узкий пучок атомов после прохождения между полюсами образует на экране сплошной растянутый след, края которого соответствуют атомам с ориентациями под углами  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  (рис. 56.4). Опыт дал неожиданные результаты. Вместо сплошного растянутого следа получились отдельные линии, расположенные симметрично относительно следа пучка, полученного в отсутствие поля.

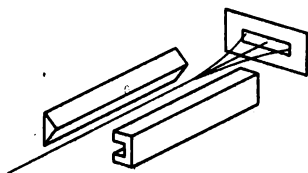


Рис. 56.3.

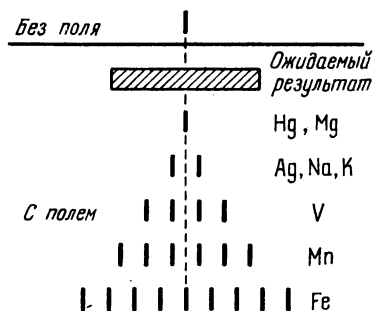


Рис. 56.4.

Опыт Штерна и Герлаха показал, что углы, под которыми ориентируются магнитные моменты атомов по отношению к магнитному полю, могут иметь только дискретные значения, т. е. что проекция магнитного момента на направление поля квантуется.

Число возможных значений проекции магнитного момента на направление магнитного поля для разных атомов различно. Для атомов серебра, алюминия, меди и щелочных металлов оно равно двум, для ванадия, азота и галсгенов — четырем, для кислорода — пяти, марганца — шести, железа — девяти, кобальта — десяти и т. д.

Для магнитных моментов атомов измерения дали значения порядка нескольких магнетонов Бора. Некоторые атомы не обнаружили отклонения (см., например, след атомов ртути и магния на рис. 56.4), что указывает на отсутствие у них магнитного момента.

## § 57. Диамагнетизм

Электрон, движущийся по орбите, подобен волчку. Поэтому ему должны быть свойственны все особенности поведения гироскопов под действием внешних сил; в частности, при соответствующих условиях должна возникать прецессия электронной орбиты. Условия,

необходимые для прецессии, осуществляются, если атом находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$  (рис. 57.1). В этом случае на орбиту действует вращательный момент  $\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$ , стремящийся установить орбитальный магнитный момент электрона  $\mathbf{p}_m$  по направлению поля (при этом механический момент  $\mathbf{M}$  установится против поля). Под действием момента  $\mathbf{N}$  векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{M}$  совершают прецессию вокруг направления вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , скорость которой легко найти (см. § 44 1-го тома).

За время  $dt$  вектор  $\mathbf{M}$  получает приращение  $d\mathbf{M}$ , равное

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N} dt.$$

Вектор  $d\mathbf{M}$ , как и вектор  $\mathbf{N}$ , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$ ; его модуль равен

$$|d\mathbf{M}| = p_m B \sin \alpha dt,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

За время  $dt$  плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{M}$ , повернется вокруг направления  $\mathbf{B}$  на угол

$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{M}|}{M \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{M \sin \alpha} = \frac{p_m}{M} B dt.$$

Разделив этот угол на время  $dt$ , найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{M} B.$$

Подставив значение (56.3) отношения магнитного и механического моментов электрона, получим

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (57.1)$$

Частоту (57.1) называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона вокруг направления поля. Если бы расстояние  $r'$  электрона от параллельной  $\mathbf{B}$  оси, проходящей через центр орбиты, не изменялось, дополнительное движение электрона происходило бы

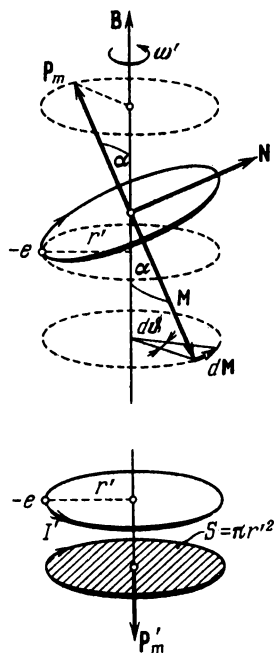


Рис. 57.1.

по окружности радиуса  $r'$  (см. верхнюю окружность в нижней части рис. 57.1). Ему соответствовал бы круговой ток (см. нижнюю окружность, ограничивающую заштрихованную площадь)  $I' = e(\omega_L/2\pi)$ , магнитный момент которого

$$p'_m = I'S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2 \quad (57.2)$$

направлен в сторону, противоположную  $\mathbf{B}$  (см. рисунок). Этот момент называется индуцированным (наведенным) магнитным моментом.

В действительности, вследствие движения электрона по орбите, расстояние  $r'$  все время изменяется. Поэтому в формуле (57.2) нужно брать вместо  $r'^2$  его среднее по времени значение  $\langle r'^2 \rangle$ . Это

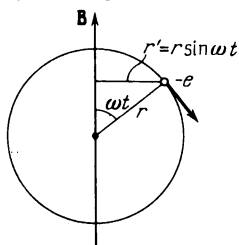


Рис. 57.2.

среднее зависит от угла  $\alpha$ , характеризующего ориентацию плоскости орбиты по отношению к  $\mathbf{B}$ . В частности, для орбиты, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{B}$ ,  $r'$  постоянно и равно радиусу орбиты  $r$ . Для орбиты, плоскость которой проходит через направление  $\mathbf{B}$ ,  $r'$  изменяется по закону  $r' = r \sin \omega t$ , где  $\omega$  — угловая скорость обращения электрона по орбите (рис. 57.2; вектор  $\mathbf{B}$  и орбита лежат в плоскости рисунка). Следовательно,  $\langle r'^2 \rangle = \langle r^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} r^2$  ( $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ). Если произвести усреднение по всем возможным значениям  $\alpha$ , считая их равновероятными, то получается

$$\langle r'^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2. \quad (57.3)$$

Подставив в (57.2) значение (57.1) для  $\omega_L$  и (57.3) для  $\langle r'^2 \rangle$ , получим для среднего значения индуцированного магнитного момента одного электрона следующее выражение:

$$\langle p'_m \rangle = - \frac{e^2}{6m} r^2 B \quad (57.4)$$

(знак минус отражает то обстоятельство, что векторы  $\langle p'_m \rangle$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противоположные стороны). Мы предполагали орбиту круговой. В общем случае (например, для эллиптической орбиты) вместо  $r^2$  нужно взять  $\langle r^2 \rangle$ , т. е. средний квадрат расстояния электрона от ядра.

Просуммировав выражение (57.4) по всем электронам, найдем индуцированный магнитный момент атома:

$$p'_{m \text{ ат}} = \sum \langle p'_m \rangle = - \frac{e^2 B}{6m} \sum_{k=1}^Z \langle r_k^2 \rangle \quad (57.5)$$

( $Z$  — атомный номер химического элемента; число электронов в атоме равно  $Z$ ).

Итак, под действием внешнего магнитного поля происходит прецессия электронных орбит с одинаковой для всех электронов угловой скоростью (57.1). Обусловленное прецессией дополнительное движение электронов приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома (57.5), направленного против поля. Ларморова прецессия возникает у всех без исключения веществ. Однако в тех случаях, когда атомы обладают сами по себе магнитным моментом, магнитное поле не только индуцирует момент (57.5), но и оказывает на магнитные моменты атомов ориентирующее действие, устанавливая их по направлению поля. Возникающий при этом положительный (т. е. направленный по полю) магнитный момент бывает значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент. Поэтому результирующий момент оказывается положительным и вещество ведет себя как парамагнетик.

Диамагнетизм обнаруживают только те вещества, у которых атомы не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов атома равна нулю). Если для такого вещества умножить равенство (57.5) на число Авогадро  $N_A$ , получится магнитный момент моля вещества. Разделив его на напряженность поля  $H$ , найдем молярную магнитную восприимчивость  $\chi_m$ . Магнитная проницаемость диамагнетиков практически равна единице. Поэтому можно положить  $B/H = \mu_0$ . Таким образом,

$$\chi_m = \frac{N_A p'_{m \text{ ат}}}{H} = - \frac{\mu_0 N_A e^2}{6m} \sum_{k=1}^Z \langle r_k^2 \rangle. \quad (57.6)$$

Отметим, что строгая квантовомеханическая теория приводит к точно такому выражению.

Подстановка в (57.6) числовых значений  $\mu_0$ ,  $N_A$ ,  $e$  и  $m$  дает

$$\chi_m = -3,55 \cdot 10^9 \sum_{k=1}^Z \langle r_k^2 \rangle.$$

Радиусы электронных орбит имеют величину порядка  $10^{-10}$  м. Следовательно, молярная диамагнитная восприимчивость получается порядка  $10^{-11} \div 10^{-10}$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

## § 58. Парамагнетизм

Если магнитный момент  $p_m$  атомов отличен от нуля, вещество оказывается парамагнитным. Магнитное поле стремится установить магнитные моменты атомов вдоль  $\mathbf{B}$ , тепловое движение стремится разбросать их равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация моментов вдоль поля, тем большая, чем больше  $B$ , и тем меньшая, чем выше температура.

Кюри экспериментально установил закон, согласно которому восприимчивость парамагнитного вещества равна

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (58.1)$$

где  $C$  — постоянная Кюри, зависящая от рода вещества,  $T$  — абсолютная температура.

Классическая теория парамагнетизма была развита Ланжевром в 1905 г. Мы ограничимся изложением этой теории для случая не слишком сильных полей и не очень низких температур.

Согласно формуле (46.10) атом обладает в магнитном поле потенциальной энергией  $W = -p_m B \cos \vartheta$ , которая зависит от угла  $\vartheta$  между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ . Поэтому равновесное распределение моментов по направлениям должно подчиняться закону Больцмана (см. § 100 1-го тома). Согласно этому закону вероятность того, что магнитный момент атома будет образовывать с направлением вектора  $\mathbf{B}$  угол, заключенный в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ , пропорциональна

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{\frac{p_m B \cos \vartheta}{kT}}.$$

Введя обозначение

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (58.2)$$

выражение, определяющее вероятность, можно записать в виде

$$e^{a \cos \vartheta}. \quad (58.3)$$

В отсутствие поля все направления магнитных моментов равновероятны. Следовательно, вероятность того, что направление момента образует с некоторым направлением  $z$  угол в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ , равна

$$(dP_\vartheta)_{B=0} = \frac{d\Omega_\vartheta}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (58.4)$$

Здесь  $d\Omega_\vartheta = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  — телесный угол, заключенный между конусами с углами раствора  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$  (рис. 58.1).

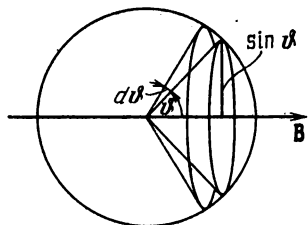


Рис. 58.1.

При наличии поля в выражении вероятности появляется множитель (58.3):

$$dP_\vartheta = A e^{a \cos \vartheta} \cdot \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta \quad (58.5)$$

( $A$  — неизвестный пока коэффициент пропорциональности).

Магнитный момент атома имеет величину порядка одного магнетона Бора, т. е.  $\sim 10^{-23}$  Дж/Тл (см. (56.7)). При достигаемых обычно полях магнитная индукция бывает порядка 1 Тл ( $10^4$  Гс). Следовательно,  $p_m B$  имеет порядок  $10^{-23}$  Дж. Величина  $kT$  при

комнатной температуре равна примерно  $4 \cdot 10^{-21}$  Дж. Таким образом,  $a = \frac{p_m B}{kT} \ll 1$  и  $e^{a \cos \vartheta}$  можно заменить приближенно через  $1 + a \cos \vartheta$ . В этом приближении выражение (58.5) принимает вид

$$dP_{\vartheta} = A (1 + a \cos \vartheta) \cdot \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Коэффициент  $A$  можно найти исходя из того, что сумма вероятностей всех возможных значений угла  $\vartheta$  должна быть равна единице:

$$1 = \int_0^{\pi} A (1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta = A.$$

Отсюда  $A = 1$ , так что

$$dP_{\vartheta} = \frac{1}{2} (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Пусть в единице объема парамагнетика содержится  $n$  атомов. Тогда число атомов, магнитные моменты которых образуют с направлением поля углы от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ , будет равно

$$dn_{\vartheta} = n dP_{\vartheta} = \frac{1}{2} n (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Каждый из этих атомов вносит в результирующий магнитный момент вклад, равный  $p_m \cos \vartheta$ . Следовательно, для магнитного момента единицы объема (т. е. для намагниченности) получается выражение

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} p_m \cos \vartheta dn_{\vartheta} = \frac{1}{2} n p_m \int_0^{\pi} (1 + a \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} n p_m \frac{2a}{3} = \frac{n p_m a}{3}. \end{aligned}$$

Подстановка вместо  $a$  его значения (58.2) дает

$$J = \frac{n p_m^2 B}{3kT}.$$

Наконец, разделив  $J$  на  $H$  и положив  $B/H = \mu_0$  (для парамагнетика  $\mu$  практически равна единице), найдем восприимчивость:

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}. \quad (58.6)$$

Заменив  $n$  числом Авогадро  $N_A$ , получим выражение для молярной восприимчивости:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT}. \quad (58.7)$$

Мы пришли к закону Кюри. Сопоставление формул (58.1) и (58.7) дает для постоянной Кюри следующее выражение:

$$C = \frac{\mu_0 N_A \rho_m^2}{3k}. \quad (58.8)$$

Напомним, что формула (58.7) получена в предположении, что  $\rho_m B \ll kT$ . В очень сильных полях и при низких температурах наблюдаются отступления от пропорциональности между намагниченностью парамагнетика  $J$  и напряженностью поля  $H$ ; в частности, может наступить состояние магнитного насыщения, при котором все  $\rho_m$  выстраиваются по полю и дальнейшее увеличение  $H$  не приводит к возрастанию  $J$ .

Значения  $\chi_m$ , вычисленные по формуле (58.7), в ряде случаев хорошо согласуются со значениями, полученными из опыта.

Квантовая теория парамагнетизма учитывает тот факт, что возможны лишь дискретные ориентации магнитного момента атома относительно поля. Она приводит к выражению для  $\chi_m$ , аналогичному (58.7).

## § 59. Ферромагнетизм

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу — они получили название ферромагнетиков. Их число кроме железа принадлежат никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность в огромное (до  $10^{10}$ ) число раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков, принадлежащих к категории слабомагнитных веществ.

Намагниченность слабомагнитных веществ изменяется с напряженностью поля линейно. Намагниченность ферромагнетиков зависит от  $H$  сложным образом. На рис. 59.1 дана кривая намагничивания ферромагнетика, магнитный момент которого первоначально был равен нулю (она называется основной или нулевой кривой намагничивания). Уже в полях порядка нескольких эрстед ( $\sim 100$  А/м) намагниченность  $J$  достигает насыщения. Основная кривая намагничивания на диаграмме  $B-H$  приведена на рис. 59.2 (кривая 0-1). Напомним, что  $B = \mu_0(H + J)$ . Поэтому по достижении насыщения  $B$  продолжает расти с  $H$  по линейному закону:  $B = \mu_0 H + \text{const}$ , где  $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$ .

Кривая намагничивания железа была впервые получена и подробно исследована русским ученым А. Г. Столетовым. Разработан-

ный им баллистический метод измерения магнитной индукции находит широкое применение до настоящего времени (см. § 62).

Кроме нелинейной зависимости между  $H$  и  $J$  (или между  $H$  и  $B$ ), для ферромагнетиков характерно также наличие гистерезиса. Если довести намагничение до насыщения (точка 1 на рис. 59.2) и затем уменьшать напряженность магнитного поля, то индукция  $B$  следует не по первоначальной кривой  $0-1$ , а изменяется в соответствии с кривой  $1-2$ . В результате, когда напряженность внешнего поля станет равной нулю (точка 2), намагничение не исчезает и характеризуется величиной  $B_r$ , которая называется остаточной индукцией. Намагниченность имеет

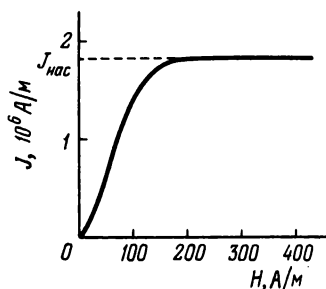


Рис. 59.1.

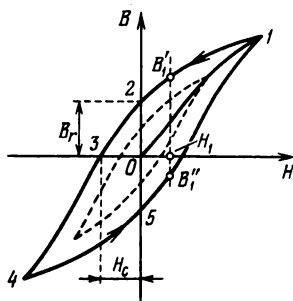


Рис. 59.2.

при этом значение  $J_r$ , называемое остаточной намагниченностью.

Индукция  $B$  обращается в нуль лишь под действием поля  $H_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничение. Напряженность  $H_c$  называется коэрцитивной силой.

Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление постоянных магнитов, т. е. тел, которые без затраты энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен.

При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция изменяется в соответствии с кривой  $1-2-3-4-5-1$  (рис. 59.2), которая называется петлей гистерезиса (аналогичная петля получается и на диаграмме  $J-H$ ). Если максимальные значения  $H$  таковы, что намагниченность достигает насыщения, получается так называемая максимальная петля гистерезиса (сплошная петля на рис. 59.2). Если



при амплитудных значениях  $H$  насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (пунктирная петля на рисунке). Частных циклов существует бесконечное множество, все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

Гистерезис приводит к тому, что намагничение ферромагнетика не является однозначной функцией  $H$ ; оно в сильной мере зависит от предыстории образца — от того, в каких полях он побывал прежде. Например, в поле напряженности  $H_1$  (рис. 59.2) индукция может иметь любое значение в пределах от  $B'_1$  до  $B''_1$ .

Из всего сказанного о ферромагнетиках следует, что они очень похожи по своим свойствам на сегнетоэлектрики (см. § 23).

В связи с неоднозначностью зависимости  $B$  от  $H$  понятие магнитной проницаемости применяется лишь к основной кривой намагничения. Магнитная проницаемость ферромагнетиков  $\mu$  (а следовательно, и магнитная восприимчивость  $\chi$ ) является функцией напряженности поля. На рис. 59.3, а изображена основная кривая намагничения. Проведем из начала координат прямую линию, проходящую через произвольную точку кривой. Тангенс угла наклона этой

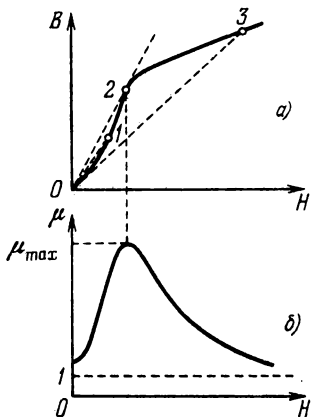


Рис. 59.3.

прямой пропорционален отношению  $B/H$ , т. е. магнитной проницаемости  $\mu$  для соответствующего значения напряженности поля. При увеличении  $H$  от нуля угол наклона (а значит и  $\mu$ ) сначала растет. В точке 2 он достигает максимума (прямая  $0-2$  является касательной к кривой), а затем убывает. На рис. 59.3, б дан график зависимости  $\mu$  от  $H$ . Из рисунка видно, что максимальное значение проницаемости достигается несколько раньше, чем насыщение. При неограниченном возрастании  $H$  проницаемость асимптотически приближается к единице. Это следует из того, что  $J$  в выражении  $\mu = 1 + J/H$  не может превысить значения  $J_{\text{нас}}$ .

Величины  $B_r$  (или  $J_r$ ),  $H_c$  и  $\mu_{\text{max}}$  являются основными характеристиками ферромагнетика. Если коэрцитивная сила  $H_c$  велика, ферромагнетик называется жестким. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой  $H_c$  (и соответственно узкой петлей гистерезиса) называется мягким. В зависимости от назначения берутся ферромагнетики с той или иной характеристикой. Так, для постоянных магнитов употребляются жесткие ферромагнетики, а для сердечников трансформаторов — мягкие. В табл. 59.1 приведены характеристики нескольких различных ферромагнетиков.

Т а б л и ц а 59.1

Материал	Состав	$\mu_{\text{max}}$	$B_r$ , Тл	$H_c$ , А/м
Железо	99,9% Fe	5 000	—	80
Супермаллой	79% Ni, 5% Mo, 16% Fe	800 000	—	0,3
Алнико	10% Al, 19% Ni, 18% Co, 53% Fe	—	0,9	52 000

Основы теории ферромагнетизма были созданы Я. И. Френкелем и В. Гейзенбергом в 1928 г. Из опытов по изучению магнитомеханических явлений (см. § 56) следует, что ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы<sup>1</sup>, которые заставляют магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничения, которые называют также доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. Направления этих моментов для разных доменов различны (рис. 59.4), так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент всего тела равен нулю. Домены имеют размеры порядка 1—10 мкм.

Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничения оказывается различным. Вначале, при слабых полях, наблюдается смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют с  $\mathbf{H}$  меньший угол, за счет доменов, у которых угол  $\vartheta$  между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{H}$  больше. Например, домены 1 и 3 (рис. 59.4) увеличиваются за счет доменов 2 и 4. С увеличением напряженности поля этот процесс идет все дальше и дальше, пока домены с меньшими  $\vartheta$  (которые обладают в магнитном поле меньшей энергией) не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены. На следующей стадии имеет место поворот магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения их строгой параллельности друг другу. Эти процессы (исключая небольшие смещения границ между доменами в очень

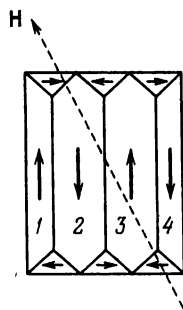


Рис. 59.4.

<sup>1</sup> Эти силы называются обменными. Их объяснение дается только квантовой механикой.

слабых полях) являются необратимыми, что и служит причиной гистерезиса.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура  $T_c$ , при которой области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется точкой Кюри. Для железа она равна  $768^\circ\text{C}$ , для никеля  $365^\circ\text{C}$ . При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри — Вейсса

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c} \quad (59.1)$$

(ср. с формулой (58.1)). При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри в нем снова возникают домены.

В некоторых случаях обменные силы приводят к возникновению так называемых антиферромагнетиков (хром, марганец и др.). Существование антиферромагнетиков было предсказано Л. Д. Ландау в 1933 г. В антиферромагнетиках собственные магнитные моменты электронов самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу. Такая ориентация охватывает попарно соседние атомы. В результате антиферромагнетики обладают крайне малой магнитной восприимчивостью и ведут себя как очень слабые парамагнетики. Для антиферромагнетиков также существует температура  $T_N$ , при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает. Эта температура называется антиферромагнитной точкой Кюри или точкой Нееля. У некоторых антиферромагнетиков (например, у эрбия, диспрозия, сплавов марганца и меди) таких температур две (верхняя и нижняя точки Нееля), причем антиферромагнитные свойства наблюдаются только при промежуточных температурах. Выше верхней точки вещество ведет себя как парамагнетик, а при температурах, меньших нижней точки Нееля, становится ферромагнетиком.

## ГЛАВА VIII

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## § 60. Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток индукционным.

Явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$ . Величина  $\mathcal{E}_i$  не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока  $\Phi$ , и определяется лишь скоростью изменения  $\Phi$ , т. е. значением  $d\Phi/dt$ . При изменении знака  $d\Phi/dt$  направление  $\mathcal{E}_i$  также меняется.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 60.1 изображен контур 1, силу тока в котором  $I_1$  можно изменять с помощью реостата. Этот ток создает магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток  $I_1$ , поток магнитной индукции  $\Phi$  через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока  $I_2$ , регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока  $I_1$  обусловит убывание магнитного потока через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток  $I_2$  можно вызвать также, приближая контур 2 к контуру 1 или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока противоположны. Наконец, электромагнитную индукцию можно вы-

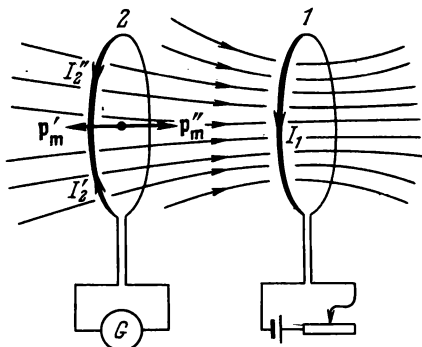


Рис. 60.1.

звать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы изменялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Ленц установил правило, позволяющее найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Если, например, изменение  $\Phi$  вызвано перемещением контура 2, то возникает индукционный ток такого направления, что сила взаимодействия с первым контуром противится движению контура. При приближении контура 2 к контуру 1 (см. рис. 60.1) возникает ток  $I_2'$ , магнитный момент которого направлен противоположно полю тока  $I_1$  (угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{p}_m'$  и  $\mathbf{B}$  равен  $\pi$ ). Следовательно, на контур 2 будет действовать сила, отталкивающая его от контура 1 (см. формулу (46.11)). При удалении контура 2 от контура 1 возникает ток  $I_2''$ , момент которого  $\mathbf{p}_m''$  совпадает по направлению с полем тока  $I_1$  ( $\alpha = 0$ ), так что сила, действующая на контур 2, направлена к контуру 1.

Пусть оба контура неподвижны и ток в контуре 2 индуцируется путем изменения тока  $I_1$  в контуре 1. В этом случае возникает ток  $I_2$  такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока, приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении  $I_1$ , т. е. возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникает ток  $I_2'$ , создающий поток, направленный влево. При уменьшении  $I_1$  возникает ток  $I_2''$ , собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

### § 61. Электродвижущая сила индукции

В предыдущем параграфе мы выяснили, что изменения магнитного потока  $\Phi$  через контур вызывают возникновение в контуре электродвижущей силы индукции  $\mathcal{E}_i$ . Чтобы найти связь между  $\mathcal{E}_i$  и скоростью изменения  $\Phi$ , рассмотрим следующий пример.

Возьмем контур с подвижной перемычкой длины  $l$  (рис. 61.1, а). Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура и направленное за чертеж. Приведем перемычку в движение со скоростью  $v$ . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители тока в перемычке — электроны. В результате на каждый электрон начнет действовать направленная вдоль перемычки магнитная сила.

$$\mathbf{F}_{||} = -e [\mathbf{vB}] \quad (61.1)$$

(см. (43.3); заряд электрона равен  $-e$ ). Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля напряженности

$$\mathbf{E} = [\mathbf{vB}].$$

Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает величину э. д. с., индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l} = \int_1^2 [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l} \quad (61.2)$$

(подынтегральная функция отлична от нуля лишь на образуемом перемычкой участке 1—2).

Чтобы по знаку  $\mathcal{E}_i$  можно было судить о направлении, в котором действует э. д. с., будем считать  $\mathcal{E}_i$  положительной в том случае, когда ее направление образует с направлением нормали к контуру правовинтовую систему.

Выберем нормаль так, как показано на рис. 61.1. Тогда при вычислении циркуляции нужно обходить контур по часовой стрелке и соответственно выбирать направление векторов  $d\mathbf{l}$ . Если вынести в (61.2) постоянный вектор  $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  за знак интеграла, получим

$$\mathcal{E}_i = [\mathbf{v}\mathbf{B}] \int_1^2 d\mathbf{l} = [\mathbf{v}\mathbf{B}] \mathbf{l},$$

где  $\mathbf{l}$  — вектор, показанный на рис. 61.1, б. Осуществим в полученном выражении циклическую перестановку сомножителей, после чего умножим и разделим его на  $dt$ :

$$\mathcal{E}_i = \mathbf{B} [\mathbf{l}\mathbf{v}] = \frac{\mathbf{B} [\mathbf{l}, \mathbf{v} dt]}{dt}. \quad (61.3)$$

Из рис. 61.1, б видно, что

$$[\mathbf{l}, \mathbf{v} dt] = -n dS,$$

где  $dS$  — приращение площади контура за время  $dt$ . По определению потока выражение  $\mathbf{B} dS = \mathbf{Bn} dS$  представляет собой поток через площадку  $dS$ , т. е. приращение потока  $d\Phi$  через контур. Таким образом,

$$\mathbf{B} [\mathbf{l}, \mathbf{v} dt] = -\mathbf{Bn} dS = -d\Phi.$$

С учетом этого выражению (61.3) можно придать вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (61.4)$$

Мы получили, что  $d\Phi/dt$  и  $\mathcal{E}_i$  имеют противоположные знаки. Знак потока и знак  $\mathcal{E}_i$  связаны с выбором направления нормали к плоскости контура. При сделанном нами выборе нормали (см.

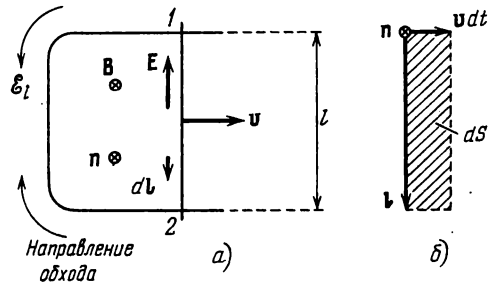


Рис. 61.1.

рис. 61.1) знак  $d\Phi/dt$  положительный, а знак  $\mathcal{E}_i$  отрицательный. Если бы мы выбрали нормаль, направленную не за чертеж, а на нас, знак  $d\Phi/dt$  был бы отрицательным, а знак  $\mathcal{E}_i$  положительным.

Единицей потока магнитной индукции в СИ служит вебер (Вб), который представляет собой поток через поверхность в  $1 \text{ м}^2$ , пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с  $B$ , равной 1 Тл. При скорости изменения потока, равной 1 Вб/с, в контуре индуцируется э. д. с., равная 1 В.

В гауссовой системе формула (61.4) имеет вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (61.5)$$

Единицей  $\Phi$  в этой системе является максвелл (Мкс), равный потоку через поверхность в  $1 \text{ см}^2$  при  $B = 1 \text{ Гс}$ . Формула (61.5) дает  $\mathcal{E}_i$  в СГСЭ-единицах потенциала. Чтобы получить  $\mathcal{E}_i$  в вольтах, нужно умножить полученный результат на 300. Поскольку  $300/c = 10^{-8}$ ,

$$\mathcal{E}_i (B) = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \frac{(\text{Мкс})}{(\text{с})}. \quad (61.6)$$

В рассуждениях, которые привели нас к формуле (61.4), роль сторонних сил, поддерживающих ток в контуре, играют магнитные силы. Работа этих сил над единичным положительным зарядом, равная по определению э. д. с., оказывается отличной от нуля. Это обстоятельство находится в кажущемся противоречии с высказанным в § 43 утверждением о том, что магнитная сила работы над зарядом совершать не может. Противоречие устраняется, если учесть, что сила (61.1) представляет собой не полную магнитную силу, действующую на электрон, а лишь параллельную проводу составляющую этой силы, обусловленную скоростью  $v$  (см. силу  $F_{\parallel}$  на рис. 61.2). Под действием этой составляющей электрон приходит в движение вдоль провода со скоростью  $u$ , в результате чего возникает перпендикулярная к проводу составляющая магнитной силы

$$F_{\perp} = -e [uB]$$

(эта составляющая не вносит вклада в циркуляцию, так как перпендикулярна к  $dl$ ).

Полная магнитная сила, действующая на электрон,

$$F = F_{\parallel} + F_{\perp},$$

а работа этой силы над электроном за время  $dt$

$$dA = F_{\parallel} u dt + F_{\perp} v dt = F_{\parallel} u dt - F_{\perp} v dt$$

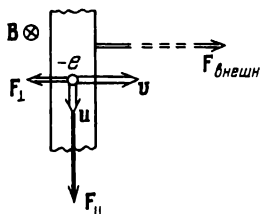


Рис. 61.2.

(направления векторов  $\mathbf{F}_{\parallel}$  и  $\mathbf{v}$  одинаковы, а векторов  $\mathbf{F}_{\perp}$  и  $\mathbf{v}$  противоположны; см. рис. 61.2). Подставив значения модулей сил:  $F_{\parallel} = evB$  и  $F_{\perp} = euB$ , получим, что работа полной магнитной силы равна нулю.

Сила  $\mathbf{F}_{\perp}$  направлена противоположно скорости перемычки  $\mathbf{v}$ . Поэтому, для того чтобы перемычка перемещалась с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ , к ней нужно приложить внешнюю силу  $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ , уравновешивающую сумму сил  $\mathbf{F}_{\perp}$ , приложенных ко всем электронам, содержащимся в перемычке. За счет работы этой силы и будет возникать энергия, выделяемая в контуре индуцированным током.

Рассмотренное нами объяснение возникновения э. д. с. индукции относится к случаю, когда магнитное поле постоянно, а изменяется геометрия контура. Однако магнитный поток через контур может изменяться также за счет изменения  $\mathbf{B}$ . В этом случае объяснение возникновения э. д. с. оказывается в принципе другим. Изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$  (подробнее об этом говорится в § 69). Под действием поля  $\mathbf{E}$  носители тока в проводнике приходят в движение — возникает индуцированный ток. Связь между э. д. с. индукции и изменениями магнитного потока и в этом случае описывается формулой (61.4).

Пусть контур, в котором индуцируется э. д. с., состоит не из одного витка, а из  $N$  витков, например представляет собой соленоид. Поскольку витки соединяются последовательно,  $\mathcal{E}_i$  будет равна сумме э. д. с., индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sum \Phi).$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (61.7)$$

называют потокоцеплением или полным магнитным потоком. Ее измеряют в тех же единицах, что и  $\Phi$ . Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков,

$$\Psi = N\Phi. \quad (61.8)$$

Э. д. с., индуцируемая в сложном контуре, определяется формулой

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (61.9)$$

## § 62. Методы измерения магнитной индукции

Пусть полный магнитный поток, сцепленный с некоторым контуром, изменяется от значения  $\Psi_1$  до  $\Psi_2$ . Найдем заряд  $q$ , который протекает при этом через каждое сечение контура. Мгновенное



значение силы тока в контуре равно

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Отсюда

$$dq = I dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Psi.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд:

$$q = \int dq = -\frac{1}{R} \int_1^2 d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (62.1)$$

Соотношение (62.1) лежит в основе разработанного А. Г. Столетовым баллистического способа измерения магнитной индукции,

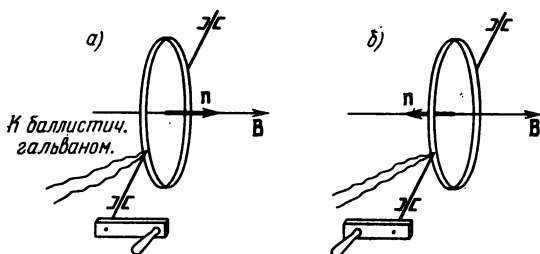


Рис. 62.1.

который заключается в следующем. В исследуемое поле помещают небольшую катушку, имеющую  $N$  витков. Катушку располагают так, чтобы вектор  $\mathbf{B}$  оказался перпендикулярным к плоскости витков (рис. 62.1, а). Тогда полный магнитный поток, сцепленный с катушкой, будет равен

$$\Psi_1 = NBS,$$

где  $S$  — площадь одного витка, которая должна быть настолько малой, чтобы поле в ее пределах можно было считать однородным.

При повороте катушки на  $180^\circ$  (рис. 62.1, б) потокосцепление становится равным  $\Psi_2 = -NBS$  ( $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противоположные стороны). Следовательно, изменение полного потока при повороте катушки равно  $\Psi_1 - \Psi_2 = 2NBS$ . Если поворот катушки осуществить достаточно быстро, в контуре возникает импульс тока, при котором протекает заряд

$$q = \frac{1}{R} 2NBS \quad (62.2)$$

(см. формулу (62.1)).

Заряд, протекающий по цепи при кратковременном импульсе тока, можно измерить с помощью так называемого баллистического

гальванометра, который представляет собой гальванометр с большим периодом собственных колебаний. Измерив  $q$  и зная  $R$ ,  $N$  и  $S$ , можно по формуле (62.2) найти  $B$ . Под  $R$  в этом случае подразумевается полное сопротивление цепи, включающее сопротивление катушки, соединительных проводов и гальванометра.

Вместо того чтобы поворачивать катушку, можно включать (либо выключать) исследуемое магнитное поле, или изменять его направление на обратное.

Для измерения  $B$  используют также то обстоятельство, что электрическое сопротивление висмута сильно возрастает под действием магнитного поля — примерно на 5% на каждую десятую долю тесла (на каждую 1000 Гс).

Поэтому, помещая предварительно програвдуированную висмутую спираль (рис. 62.2) в магнитное поле и измеряя относительное изменение ее сопротивления, можно определить магнитную индукцию поля.

Отметим, что у других металлов электрическое сопротивление также возрастает в магнитном поле, но в гораздо меньшей степени. У меди, например, увеличение сопротивления примерно в  $10^4$  раз меньше, чем у висмута.

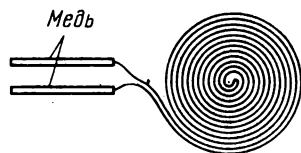


Рис. 62.2.

### § 63. Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае их называют **токами Фуко** или **вихревыми токами**. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень большой силы.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим пользуются для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 63.1), которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и исчезает, когда пластинка неподвижна.

Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления.

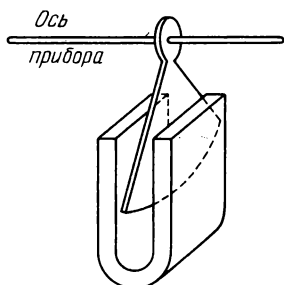


Рис. 63.1.

Таким способом осуществляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными, и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание токами Фуко сердечников трансформаторов, эти сердечники набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками.

Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (полупроводниковых магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

Токи Фуко, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется скин-эффектом (от английского *skin* — кожа) или поверхностным эффектом. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют проводники в виде трубок.

## § 64. Явление самоиндукции

Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток  $\Psi$ . При изменениях  $I$  изменяется также и  $\Psi$ , вследствие чего в контуре индуцируется э. д. с. Это явление называется самоиндукцией.

В соответствии с законом Био — Савара магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает,

что ток  $I$  в контуре и создаваемый им полный магнитный поток  $\Psi$  через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI. \quad (64.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура.

Линейная зависимость  $\Psi$  от  $I$  наблюдается только в том случае, если магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которой окружен контур, не зависит от напряженности поля  $H$ , т. е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае  $\mu$  является сложной функцией от  $I$  (через  $H$ ; см. рис. 59.3, б), и, поскольку  $B = \mu_0 \mu H$ , зависимость  $\Psi$  от  $I$  также будет довольно сложной. Однако соотношения (64.1) распространяют и на этот случай, считая индуктивность  $L$  функцией от  $I$ . При неизменной силе тока  $I$  полный поток  $\Psi$  может изменяться за счет изменений формы и размеров контура.

Из сказанного следует, что индуктивность  $L$  зависит от геометрии контура (т. е. его формы и размеров), а также от магнитных свойств (от  $\mu$ ) окружающей контур среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность  $L$  является постоянной величиной.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем в 1 А возникает сцепленный с ним полный поток  $\Psi$ , равный 1 Вб. Эту единицу называют генри (Гн).

В гауссовой системе индуктивность имеет размерность длины. В соответствии с этим единицу индуктивности в этой системе называют сантиметром. Индуктивностью в 1 см обладает такой контур, с которым при силе тока в 1 СГСМ-единицу (т. е. 10 А) сцеплен поток, равный 1 Мкс ( $10^{-8}$  Вб).

Вычислим индуктивность соленоида. Возьмем соленоид такой длины, чтобы его можно было практически считать бесконечным. При протекании по нему тока  $I$  внутри соленоида возбуждается однородное поле, индукция которого равна  $B = \mu_0 \mu n I$  (см. формулы (50.4) и (53.5)). Поток через каждый из витков равен  $\Phi = BS$ , а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом,

$$\Psi = N\Phi = n l B S = \mu_0 \mu n^2 l S I, \quad (64.2)$$

где  $l$  — длина соленоида (которая предполагается очень большой),  $S$  — площадь поперечного сечения,  $n$  — число витков на единицу длины (произведение  $n l$  дает полное число витков  $N$ ).

Сопоставление формул (64.1) и (64.2) дает для индуктивности очень длинного соленоида выражение

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (64.3)$$

где  $V = l S$  — объем соленоида.

Из (64.3) следует, что размерность  $\mu_0$  равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины. В соответствии с этим  $\mu_0$  измеряется в генри на метр (см. (39.3)).

При изменениях силы тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , равная

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (64.4)$$

Если при изменениях силы тока индуктивность остается постоянной (что возможно лишь при отсутствии ферромагнетиков), выражение для э. д. с. самоиндукции имеет вид

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (64.5)$$

Знак минус в этой формуле обусловлен правилом Ленца, согласно которому индукционный ток бывает направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. В рассматриваемом случае причиной, вызывающей  $\mathcal{E}_s$ , является изменение силы тока в цепи. Примем в качестве положительного направление обхода по часовой стрелке. При этом условии сила тока будет положительной, если ток течет в цепи по часовой стрелке, и отрицательной, если ток течет против часовой стрелки. Аналогично  $\mathcal{E}_s$  будет положительной, если она действует в направлении по часовой стрелке, и отрицательной, если она действует в направлении против часовой стрелки.

Производная  $dI/dt$  положительна в двух случаях: либо при возрастании положительного тока, либо при убывании по модулю отрицательного тока. Из (64.5) следует что в этих случаях  $\mathcal{E}_s < 0$ . Это означает, что э. д. с. самоиндукции направлена против часовой стрелки и, следовательно, противится указанным изменениям тока (нарастанию положительного либо убыванию отрицательного тока).

Производная  $dI/dt$  отрицательна также в двух случаях: либо при убывании положительного тока, либо при увеличении по модулю отрицательного тока. В этих случаях  $\mathcal{E}_s > 0$  и, следовательно, противится изменениям тока (убыванию положительного либо возрастанию по модулю отрицательного тока).

Соотношение (64.5) дает возможность определить индуктивность как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого э. д. с. самоиндукции. Однако такое определение правомерно лишь в случае, когда  $L = \text{const}$ . В присутствии ферромагнетиков  $L$  недеформируемого контура будет функцией от  $I$  (через  $H$ ); следовательно,  $dL/dt$  можно записать как  $(dL/dI)(dI/dt)$ . Произведя такую подстановку в формуле (64.4), получим

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}. \quad (64.6)$$

Отсюда видно, что при наличии ферромагнетиков коэффициент пропорциональности между  $dI/dt$  и  $\mathcal{E}_s$  отнюдь не равен  $L$ .

### § 65. Ток при замыкании и размыкании цепи

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения тока при размыкании цепи. Пусть в цепь с не зависящей от  $I$  индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  включен источник тока э.д.с.  $\mathcal{E}$  (рис. 65.1).

В цепи будет течь постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (65.1)$$

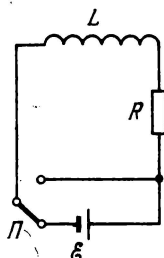


Рис. 65.1.

(сопротивление источника тока считаем пренебрежимо малым). В момент времени  $t = 0$  отключим источник тока, замкнув одновременно цепь накоротко переключателем  $\Pi$ . Как только сила тока в цепи начнет убывать, возникнет э. д. с. самоиндукции, противодействующая этому убыванию. Сила тока в цепи будет удовлетворять уравнению

$$IR = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0. \quad (65.2)$$

Уравнение (65.2) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Разделив переменные, получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Отсюда

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln \text{const}$$

(имея в виду дальнейшие преобразования, мы постоянную интегрирования написали в виде  $\ln \text{const}$ ). Потенцирование этого соотношения дает

$$I = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad (65.3)$$

Выражение (65.3) является общим решением уравнения (65.2). Значение  $\text{const}$  найдем из начальных условий. При  $t = 0$  сила тока имела значение (65.1). Следовательно,  $\text{const} = I_0$ . Подставив это

значение в (65.3), придем к выражению

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (65.4)$$

Итак, после отключения источника э. д. с. сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (65.4). График убывания  $I$  дан на рис. 65.2 (кривая 1).

Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (65.5)$$

которую называют постоянной времени цепи. Заменяв в (65.4)  $R/L$  через  $1/\tau$ , получим

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (65.6)$$

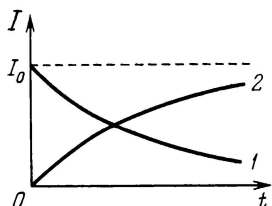


Рис. 65.2.

В соответствии с этой формулой  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз. Из (65.5) видно, что чем больше индуктивность цепи  $L$  и меньше ее сопротивление  $R$ , тем больше постоянная времени  $\tau$  и тем медленнее спадает ток в цепи.

Для упрощения расчетов мы считали, что цепь в момент отключения источника тока замыкается накоротко. Если просто разорвать цепь с большой индуктивностью, возникающее высокое индуцированное напряжение создает искру или дугу в месте разрыва.

Теперь рассмотрим случай замыкания цепи. После подключения источника э. д. с., до тех пор пока сила тока не достигнет установившегося значения (65.1), в цепи кроме э. д. с.  $\mathcal{E}$  будет действовать э. д. с. самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (65.7)$$

Мы пришли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению, которое отличается от уравнения (65.2) лишь тем, что в правой части вместо нуля в нем стоит постоянная величина  $\mathcal{E}/L$ . Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения (см. § 52 1-го тома). Общее решение однородного уравнения имеет вид (65.3). Легко убедиться в том, что  $I = \mathcal{E}/R = I_0$  является частным решением уравнения (65.7).

Следовательно, общим решением уравнения (65.7) будет функция

$$I = I_0 + \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В начальный момент сила тока  $I$  равна нулю. Отсюда  $\text{const} = -I_0$ . Таким образом,

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (65.8)$$

Эта функция описывает нарастание тока в цепи после подключения к ней источника э. д. с. График функции (65.8) дан на рис. 65.2 (кривая 2).

### § 66. Взаимная индукция

Возьмем два контура 1 и 2, расположенные близко друг к другу (рис. 66.1). Если в контуре 1 течет ток силы  $I_1$ , он создает через контур 2 пропорциональный  $I_1$  полный магнитный поток

$$\Psi_2 = L_{21}I_1 \quad (66.1)$$

(поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями). При изменениях тока  $I_1$  в контуре 2 индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (66.2)$$

(мы предполагаем, что ферромагнетиков вблизи контура нет).

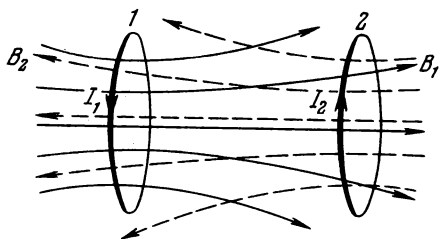


Рис. 66.1.

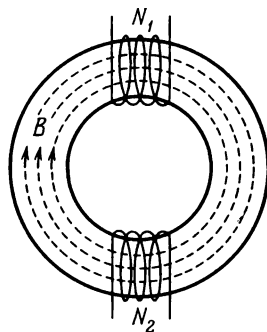


Рис. 66.2.

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока силы  $I_2$  возникает сцепленный с контуром 1 поток

$$\Psi_1 = L_{12}I_2 \quad (66.3)$$

(поле, создающее этот поток, изображено пунктирными линиями).



При изменениях тока  $I_2$  в контуре  $2$  индуцируется э.д.с.

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (66.4)$$

Контур  $1$  и  $2$  называются связанными, а явление возникновения э.д.с. в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью контуров. Соответствующий расчет дает, что в отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (66.5)$$

Их величина зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей среды. Измеряется  $L_{12}$  в тех же единицах, что и индуктивность  $L$ .

Найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник (рис. 66.2). Линии магнитной индукции сосредотачиваются внутри сердечника (см. текст, следующий за формулой (54.8)), поэтому можно считать, что возбуждаемое любой из обмоток магнитное поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность. Если первая обмотка имеет  $N_1$  витков и по ней течет ток силы  $I_1$ , то согласно теореме о циркуляции (см. (52.8))

$$Hl = N_1 I_1 \quad (66.6)$$

( $l$  — длина сердечника).

Магнитный поток через поперечное сечение сердечника  $\Phi = BS = \mu_0 \mu H S$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника. Подставив сюда значение  $H$  из (66.6) и умножив получившееся выражение на  $N_2$ , получим полный поток, сцепленный со второй обмоткой:

$$\Psi_2 = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2 I_1.$$

Сопоставление этого выражения с формулой (66.1) дает, что

$$L_{21} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2. \quad (66.7)$$

Вычисления потока  $\Psi_1$ , сцепленного с первой обмоткой в том случае, когда по второй обмотке течет ток силы  $I_2$ , приводят к выражению

$$L_{12} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2, \quad (66.8)$$

по форме совпадающему с  $L_{21}$  (см. (66.7)). Однако в данном случае нельзя утверждать, что  $L_{12} = L_{21}$ . Множитель  $\mu$ , входящий в вы-

ражения для этих коэффициентов, зависит от напряженности поля  $H$  в сердечнике. Если  $N_1 \neq N_2$ , один и тот же ток, пропускаемый один раз по первой, а другой раз по второй обмотке, создаст в сердечнике поле различной напряженности  $H$ . Соответственно значения  $\mu$  в обоих случаях будут различными, так что при  $I_1 = I_2$  числовые значения  $L_{12}$  и  $L_{21}$  не совпадают.

### § 67. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 67.1. При замкнутом ключе в соленоиде установится ток  $I$ , который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если разомкнуть ключ, то через сопротивление  $R$  будет некоторое время течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде э. д. с. самоиндукции. Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , равна

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = - \frac{d\Psi}{dt} I dt = - I d\Psi. \quad (67.1)$$

Если индуктивность соленоида не зависит от  $I$  ( $L = \text{const}$ ), то  $d\Psi = L dI$  и выражение (67.1) принимает вид

$$dA = - LI dI. \quad (67.2)$$

Проинтегрировав это выражение по  $I$  в пределах от первоначального значения  $I$  до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля,

$$A = - \int_I^0 LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (67.3)$$

Работа (67.3) идет на приращение внутренней энергии сопротивления  $R$ , соленоида и соединительных проводов (т. е. на их нагревание). Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (67.3). Таким образом, мы приходим к выводу, что проводник с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток силы  $I$ , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad (67.4)$$

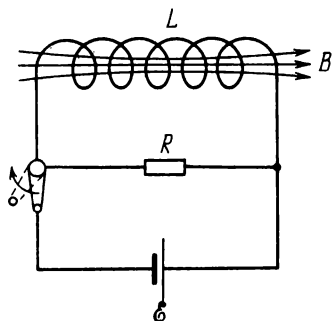


Рис. 67.1.

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле (ср. эту формулу с выражением  $CU^2/2$  для энергии заряженного конденсатора; см. (29.2)).

Выражение (67.3) можно трактовать как работу, которую необходимо совершить против э. д. с. самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до  $I$  и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (67.4). Действительно, работа, совершаемая против э. д. с. самоиндукции, равна

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) I dt.$$

Проделав преобразования, подобные тем, которые привели нас к выражению (67.2), получим

$$A' = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}, \quad (67.5)$$

что совпадает с (67.3). Работа (67.5) совершается при установлении тока за счет источника э. д. с. и идет целиком на создание магнитного поля, сцепленного с витками соленоида. Выражение (67.5) не учитывает той работы, которую источник э. д. с. затрачивает в процессе установления тока на нагревание проводников.

Выразим энергию магнитного поля (67.4) через величины, характеризующие само поле. В случае очень длинного (практически бесконечного) соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V; \quad H = nI, \text{ или } I = \frac{H}{n}$$

(см. формулы (64.3) и (53.8)). Подставив эти значения  $L$  и  $I$  в выражение (67.4) и произведя преобразования, получим

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (67.6)$$

В § 50 было показано, что магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия (67.6) локализована внутри соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью  $w$ , которую можно найти, разделив  $W$  на  $V$ . Произведя это деление, получим

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (67.7)$$

Воспользовавшись соотношением (52.14), формуле для плотности энергии магнитного поля можно придать вид

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (67.8)$$

Полученные нами выражения для плотности энергии магнитного поля отличаются от выражений (30.3) для плотности энергии электрического поля лишь тем, что электрические величины в них заменены соответствующими магнитными.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме  $V$ . Для этого нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (67.9)$$

Можно показать, что в случае связанных контуров (в отсутствие ферромагнетиков) энергия поля определяется формулой

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}. \quad (67.10)$$

Для энергии  $N$  связанных друг с другом контуров получается аналогичное выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (67.11)$$

где  $L_{ik} = L_{ki}$  — взаимная индуктивность  $i$ -го и  $k$ -го контуров, а  $L_{ii} = L_i$  — индуктивность  $i$ -го контура.

## § 68. Работа перемангничивания ферромагнетика

Изменения тока в цепи сопровождаются совершением против э. д. с. самоиндукции работы

$$dA' = (-\mathcal{E}_s) Idt = \frac{d\Psi}{dt} Idt = Id\Psi. \quad (68.1)$$

Если индуктивность цепи  $L$  остается постоянной (что возможно только в отсутствие ферромагнетиков), эта работа полностью идет на создание энергии магнитного поля:  $dA' = dW$ . Иначе, как мы сейчас выясним, обстоит дело при наличии ферромагнетиков.

В случае очень длинного («бесконечного») соленоида  $H = nI$ ,  $\Psi = nIBS$ . Соответственно

$$I = \frac{H}{n}, \quad d\Psi = nISdB.$$

Подставив эти выражения в (68.1), получим

$$dA' = HdB \cdot V, \quad (68.2)$$

где  $V = IS$  — объем соленоида, т. е. объем, в котором создано однородное магнитное поле.

Выясним, можно ли отождествить выражение (68.2) с приращением энергии магнитного поля. Напомним, что энергия — функция состояния. Поэтому сумма ее приращений для кругового

процесса равна нулю:

$$\oint dW = 0.$$

Если заполнить соленоид ферромагнетиком, то связь между  $B$  и  $H$  изображается кривой, показанной на рис. 68.1. Выражение  $HdB$  дает площадь заштрихованной полоски. Следовательно, интеграл  $\oint HdB$ , вычисленный вдоль петли гистерезиса, равен площади  $S_n$ , охватываемой петлей. Таким образом, интеграл от выражения (68.2), т. е.  $\oint dA'$ , отличен от нуля. Отсюда вытекает, что при на-

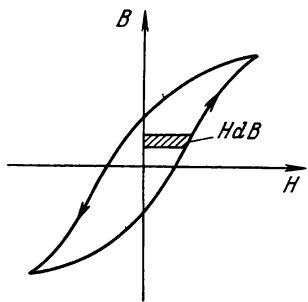


Рис. 68.1.

личии ферромагнетиков работа (68.2) не может быть приравнена приращению энергии магнитного поля. По завершении цикла перемагничивания  $H$  и  $B$ , а значит, и магнитная энергия будут иметь первоначальную величину. Следовательно, работа  $\oint dA'$  идет не на создание энергии магнитного поля. Как показывает опыт, она идет на увеличение внутренней энергии ферромагнетика, т. е. на его нагревание.

Итак, при совершении одного цикла перемагничивания ферромагнетика затрачивается в расчете на единицу объема работа, численно равная площади петли гистерезиса:

$$A'_{\text{ед. об.}} = \oint HdB = S_n \quad (68.3)$$

Эта работа идет на нагревание ферромагнетика.

В отсутствие ферромагнетиков  $B$  является однозначной функцией  $H$  ( $B = \mu_0 \mu H$ , где  $\mu = \text{const}$ ). Поэтому выражение  $HdB = \mu_0 \mu H dH$  представляет собой полный дифференциал

$$dw = HdB, \quad (68.4)$$

определяющий приращение энергии магнитного поля. Интегрирование выражения (68.4) в пределах от 0 до  $H$  приводит к формуле (67.7) для плотности энергии поля (прежде чем осуществлять интегрирование, нужно преобразовать  $HdB$ , заменив  $dB$  через  $\mu_0 \mu dH$ ).

## ГЛАВА IX

### УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

#### § 69. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда проводочный контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения магнитного потока обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводе; они также не могут быть магнитными силами, потому что такие силы работы над зарядами не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля  $\mathbf{E}_B$  (это обозначение, равно как и применяемое в дальнейшем обозначение  $\mathbf{E}_q$ , является вспомогательным; впоследствии индексы  $B$  и  $q$  мы опустим). Электродвижущая сила равна циркуляции вектора  $\mathbf{E}_B$  по данному контуру:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_B d\mathbf{l}. \quad (69.1)$$

Подстановка в формулу  $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$  выражения (69.1) для  $\mathcal{E}_i$  и выражения  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S}$  для  $\Phi$  приводит к соотношению

$$\oint \mathbf{E}_B d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

(интеграл в правой части равенства берется по произвольной поверхности, опирающейся на контур). Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \mathbf{E}_B d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (69.2)$$

В связи с тем, что вектор  $\mathbf{B}$  зависит, вообще говоря, как от времени, так и от координат, мы написали под знаком интеграла символ

частной производной по времени (интеграл  $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$  является функцией только от времени).

Преобразуем левую часть равенства (69.2) по теореме Стокса. В результате получим

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}_B] d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство

$$[\nabla \mathbf{E}_B] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (69.3)$$

Ротор поля  $\mathbf{E}_B$  в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора  $\mathbf{B}$ .

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве поля  $\mathbf{E}_B$ , независимо от присутствия в этом пространстве проводочного контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле  $\mathbf{E}_B$  существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля  $\mathbf{E}_q$ . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Ротор вектора  $\mathbf{E}_q$  в любой точке равен нулю:

$$[\nabla \mathbf{E}_q] = 0 \quad (69.4)$$

(см. формулу (12.3)). Согласно (69.3) ротор вектора  $\mathbf{E}_B$  отличен от нуля. Следовательно, поле  $\mathbf{E}_B$  как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности поля  $\mathbf{E}_B$  замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным ( $\mathbf{E}_q$ ), так и вихревым ( $\mathbf{E}_B$ ). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля  $\mathbf{E}_q$ , создаваемого зарядами, и поля  $\mathbf{E}_B$ , обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив вместе соотношения (69.4) и (69.3), получим для ротора напряженности суммарного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$  следующее уравнение:

$$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (69.5)$$

Это уравнение является одним из основных в электромагнитной теории Максвелла.

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями (выражаемой, в частности, уравнением (69.5)) служит причиной того, что раздельное рассмотрение электрического и магнит-

ного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электрическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, порождают не только электрическое, но и магнитное поле. Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод находится в движении. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой точке с данными координатами  $x, y, z$  будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле.

### § 70. Ток смещения

В случае стационарного (т. е. не изменяющегося со временем) электромагнитного поля ротор вектора  $\mathbf{H}$  равен в каждой точке плотности тока проводимости:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (70.1)$$

(см. (52.6)). Вектор  $\mathbf{j}$  связан с плотностью заряда в той же точке уравнением непрерывности (32.3):

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (70.2)$$

Электромагнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  не зависят от времени. В этом случае согласно (70.2) дивергенция  $\mathbf{j}$  равна нулю.

Поэтому линии тока (линии вектора  $\mathbf{j}$ ) не имеют источников и являются замкнутыми.

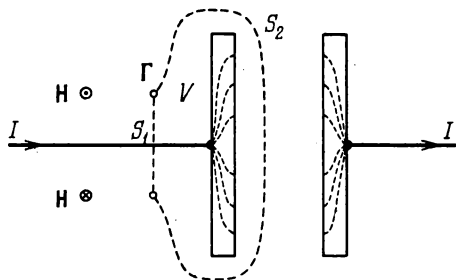


Рис. 70.1.

Выясним, является ли уравнение (70.1) справедливым в случае изменяющихся со временем полей. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения  $U$  (рис. 70.1). Этот ток непостоянен во времени (в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным  $U$ , ток прекращается). Линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора (на



рисунке линии тока внутри обкладок показаны штриховыми линиями).

Возьмем круговой контур  $\Gamma$ , охватывающий провод, по которому течет ток к конденсатору, и проинтегрируем соотношение (70.1) по пересекающей провод поверхности  $S_1$ , ограниченной контуром:

$$\oint_{S_1} [\nabla \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = I \quad (70.3)$$

( $I$  — сила тока, заряжающего конденсатор). Прделав такие же вычисления для поверхности  $S_2$ , не пересекающей провод с током (см. рис. 70.1), придем к явно неверному соотношению

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (70.4)$$

Полученный нами результат указывает на то, что в случае изменяющихся со временем полей уравнение (70.1) перестает быть справедливым. Напрашивается вывод, что в этом уравнении отсутствует слагаемое, зависящее от производных полей по времени. Для стационарных полей это слагаемое обращается в нуль.

На неправомочность уравнения (70.1) в случае нестационарных полей указывают также следующие соображения. Возьмем дивергенцию от обеих частей соотношения (70.1):

$$\nabla [\nabla \mathbf{H}] = \nabla \mathbf{j}.$$

Дивергенция ротора обязана быть равной нулю (см. (11.39)). Таким образом, мы приходим к выводу, что дивергенция вектора  $\mathbf{j}$  также должна быть всегда равной нулю. Однако этот вывод противоречит уравнению непрерывности (70.2). Действительно, при нестационарных процессах  $\rho$  может меняться со временем (это, в частности, происходит с плотностью заряда на обкладках заряжаемого конденсатора). В этом случае согласно (70.2) дивергенция  $\mathbf{j}$  отлична от нуля.

Чтобы согласовать уравнения (70.1) и (70.2), Максвелл ввел в правую часть уравнения (70.1) дополнительное слагаемое. Естественно, что это слагаемое должно иметь размерность плотности тока. Максвелл назвал его плотностью тока смещения. Таким образом, согласно Максвеллу уравнение (70.1) должно иметь вид

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смещ.}} \quad (70.5)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током. Плотность полного тока равна

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смещ}} \quad (70.6)$$

Если положить дивергенцию тока смещения равной дивергенции тока проводимости, взятой с обратным знаком,

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{смещ}} = -\nabla \mathbf{j}, \quad (70.7)$$

то дивергенция правой части уравнения (70.5), так же как и дивергенция левой части, всегда будет равна нулю.

Заменив в (70.7)  $\nabla \mathbf{j}$  согласно (70.2) через  $\partial \rho / \partial t$ , получим следующее выражение для дивергенции тока смещения:

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (70.8)$$

Чтобы связать ток смещения с величинами, характеризующими изменение электрического поля со временем, воспользуемся соотношением (19.8), согласно которому дивергенция вектора электрического смещения равна плотности сторонних зарядов:

$$\nabla \mathbf{D} = \rho.$$

Продифференцировав это соотношение по времени, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Теперь поменяем в левой части порядок дифференцирования по времени и по координатам. В результате придем к следующему выражению для производной  $\rho$  по  $t$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (70.8) дает

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{смещ}} = \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (70.9)$$

Подставив выражение (70.9) в формулу (70.5), придем к уравнению

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (70.10)$$

которое, как и уравнение (69.5), является одним из основных в теории Максвелла.

Подчеркнем, что термин «ток смещения» является чисто условным. По существу ток смещения — это изменяющееся со временем

электрическое поле. Основанием для того, чтобы назвать «током» величину (70.9), служит лишь то, что размерность этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним — способностью создавать магнитное поле.

Введение тока смещения, определяемого выражением (70.9), «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции вытекает, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Из уравнения (70.10) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле. В частности, он существует и внутри проводов, по которым течет переменный электрический ток. Однако внутри проводов ток смещения обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Отметим, что равенство (70.3) является приближенным. Для того чтобы оно стало вполне строгим, к его правой части нужно добавить слагаемое, учитывающее ток смещения, обусловленный слабым рассеянным электрическим полем, имеющимся в окрестности поверхности  $S_1$ .

Убедимся в том, что поверхностный интеграл от правой части уравнения (70.5) имеет одинаковое значение для поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 70.1). Через поверхность  $S_1$  «течет» как ток проводимости, так и ток смещения, обусловленный электрическим полем, имеющимся вне конденсатора. Следовательно, для первой поверхности имеем

$$\text{Инт}_1 = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = I + \frac{d}{dt} \Phi_{\text{I втек}}$$

(мы поменяли во втором слагаемом порядок операций дифференцирования по времени и интегрирования по координатам). Величина, обозначенная буквой  $I$ , есть сила тока, текущего по проводу к левой обкладке конденсатора,  $\Phi_{\text{I втек}}$  — поток вектора  $\mathbf{D}$ , вытекающий в объем  $V$ , ограниченный поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 70.1).

Для второй поверхности  $\mathbf{j} = 0$ , следовательно,

$$\text{Инт}_2 = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \Phi_{2 \text{ вытек}},$$

где  $\Phi_{2 \text{ вытек}}$  есть поток вектора  $\mathbf{D}$ , вытекающий из объема  $V$  через поверхность  $S_2$ .

Разность интегралов равна

$$\text{Инт}_2 - \text{Инт}_1 = \frac{d}{dt} \Phi_{2 \text{ вытек}} - \frac{d}{dt} \Phi_{\text{I втек}} - I.$$

Силу тока  $I$  можно представить как  $dq/dt$ , где  $q$  — заряд на обкладке конденсатора. Поток, втекающий внутрь через поверхность  $S_1$ , равен взятому с обратным знаком потоку, вытекающему через ту же поверхность наружу. Заменяв  $\Phi_{\text{I втек}}$  на  $-\Phi_{\text{I вытек}}$ , а  $I$  на  $dq/dt$ , получим

$$\text{Инт}_2 - \text{Инт}_1 = \frac{d}{dt}(\Phi_{2 \text{ вытек}} + \Phi_{1 \text{ вытек}}) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\Phi_D - q), \quad (70.11)$$

где  $\Phi_D$  — поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность, образованную поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Согласно (19.10) этот поток должен быть равен заряду, заключенному внутри поверхности. В данном случае это заряд  $q$  на обкладке конденсатора. Таким образом, правая часть соотношения (70.11) равна нулю. Отсюда следует, что величина поверхностного интеграла от вектора плотности полного тока не зависит от выбора поверхности, по которой вычисляется интеграл.

Для тока смещения, как и для тока проводимости, можно строить линии тока. Согласно формуле (20.4) электрическое смещение в зазоре конденсатора равно поверхностной плотности заряда на обкладке:  $D = \sigma$ . Отсюда

$$\dot{D} = \dot{\sigma}.$$

Левая часть дает плотность тока смещения в зазоре, правая часть — плотность тока проводимости внутри обкладок. Равенство этих плотностей означает, что на границе обкладок линии тока проводимости непрерывно переходят в линии тока смещения. Следовательно, линии полного тока оказываются замкнутыми.

## § 71. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (69.5) и (51.3):

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (71.1)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (71.2)$$

Первое из этих уравнений связывает значение  $\mathbf{E}$  с изменениями вектора  $\mathbf{B}$  во времени и является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т. е. магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (70.10) и (19.8):

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (71.3)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (71.4)$$

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что источниками вектора  $\mathbf{D}$  служат сторонние заряды.

Уравнения (71.1) — (71.4) представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Отметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Во второй же паре фигурируют только вспомогательные величины  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ .

Каждое из векторных уравнений (71.1) и (71.3) эквивалентно трем скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств. Воспользовавшись формулами (11.14) и (11.25) — (11.27), представим уравнения Максвелла в скалярной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (71.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (71.6)$$

(первая пара уравнений),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}, \quad (71.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (71.8)$$

(вторая пара уравнений).

Всего получилось 8 уравнений, в которые входят 12 функций (по три компоненты векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ). Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных функций, уравнений (71.1) — (71.4) недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов. Чтобы осуществить расчет полей, нужно

дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$ , а также  $\mathbf{H}$  с  $\mathbf{B}$ . Эти уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (71.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (71.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (71.11)$$

(см. (19.6), (52.14) и (34.3)).

Совокупность уравнений (71.1) — (71.4) и (71.9) — (71.11) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Уравнения

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (71.12)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (71.13)$$

(первая пара) и

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (71.14)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (71.15)$$

(вторая пара) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме.

Уравнение (71.12) получается путем интегрирования соотношения (71.1) по произвольной поверхности  $S$  с последующим преобразованием левой части по теореме Стокса в интеграл по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему поверхность  $S$ . Уравнение (71.14) получается таким же способом из соотношения (71.3). Уравнения (71.13) и (71.15) получаются из соотношений (71.2) и (71.4) путем интегрирования по произвольному объему  $V$  с последующим преобразованием левой части по теореме Остроградского — Гаусса в интеграл по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ .

## ГЛАВА X

### ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

#### § 72. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Представим себе заряд  $e'$ , движущийся в однородном магнитном поле со скоростью  $v$ , перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ . Магнитная сила сообщает заряду перпендикулярное к скорости ускорение

$$\omega_n = \frac{F}{m} = \frac{e'}{m} v B \quad (72.1)$$

(см. формулу (43.3); угол между  $v$  и  $\mathbf{B}$  прямой). Это ускорение изменяет лишь направление скорости, величина же скорости остается неизменной. Следовательно, и ускорение (72.1) будет постоянным по величине. При этих условиях заряженная частица движется равномерно по окружности, радиус которой определяется соотношением  $\omega_n = v^2/R$ . Подставив сюда значение (72.1) для  $\omega_n$  и решив получившееся уравнение относительно  $R$ , получим

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \quad (72.2)$$

Итак, в случае, когда заряженная частица движется в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости, в которой происходит движение, траектория частицы является окружностью. Радиус этой окружности зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы  $e'$  к ее массе  $m$ . Отношение  $e'/m$  называется **удельным зарядом**.

Найдем время  $T$ , затрачиваемое частицей на один оборот. Для этого разделим длину окружности  $2\pi R$  на скорость частицы  $v$ . В результате получим

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \quad (72.3)$$

Из (72.3) следует, что период обращения частицы не зависит от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

Выясним характер движения заряженной частицы в случае, когда ее скорость образует с направлением однородного магнитного поля угол  $\alpha$ , отличный от прямого. Разложим вектор  $\mathbf{v}$  на две составляющие;  $\mathbf{v}_\perp$  — перпендикулярную к  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{v}_\parallel$  — параллельную  $\mathbf{B}$  (рис. 72.1). Модули этих составляющих равны

$$v_\perp = v \sin \alpha, \quad v_\parallel = v \cos \alpha.$$

Магнитная сила имеет модуль

$$F = e'vB \sin \alpha = e'v_\perp B$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ . Создаваемое этой силой ускорение является для составляющей  $\mathbf{v}_\perp$  нормальным.

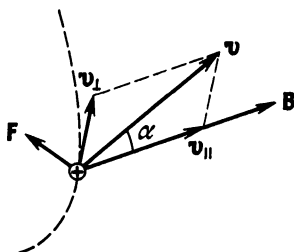


Рис. 72.1.

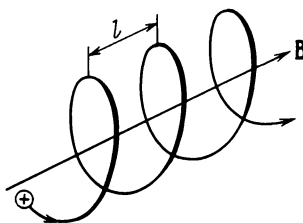


Рис. 72.2.

Составляющая магнитной силы в направлении  $\mathbf{B}$  равна нулю; поэтому повлиять на величину  $\mathbf{v}_\parallel$  эта сила не может. Таким образом, движение частицы можно представить как наложение двух движений: 1) перемещения вдоль направления  $\mathbf{B}$  с постоянной скоростью  $v_\parallel = v \cos \alpha$  и 2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{B}$ . Радиус окружности определяется формулой (72.2) с заменой  $v$  на  $v_\perp = v \sin \alpha$ . Траектория движения представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с направлением  $\mathbf{B}$  (рис. 72.2). Шаг линии  $l$  можно найти, умножив  $v_\parallel$  на определяемый формулой (72.3) период обращения  $T$ :

$$l = v_\parallel T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v \cos \alpha. \quad (72.4)$$

Направление, в котором закручивается траектория, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен, траектория закручивается против часовой стрелки. Траектория, по которой движется отрицательно заряженная частица, закручивается по часовой стрелке (предполагается, что мы смотрим на траекторию вдоль направления  $\mathbf{B}$ ; частица при этом летит от нас, если  $\alpha < \pi/2$ , и на нас, если  $\alpha > \pi/2$ ).



### § 73. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями

Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц (например, электронов), попадающий в отсутствие полей на перпендикулярный к нему экран в точке  $O$  (рис. 73.1). Определим смещение следа пучка, вызываемое перпендикулярным к пучку однородным электрическим полем, действующим на пути длиной  $l_1$ . Пусть первоначально скорость частиц равна  $v_0$ . Войдя в область поля, каждая частица будет двигаться с постоянным по величине и направле-

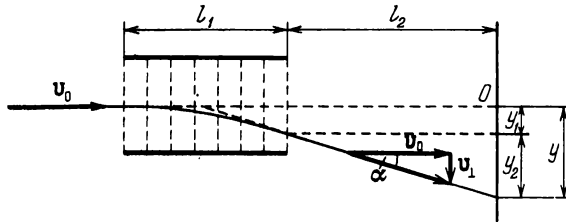


Рис. 73.1.

нию, перпендикулярным к  $v_0$  ускорением  $\omega_{\perp} = (e'/m)E$  ( $e'/m$  — удельный заряд частицы). Движение под действием поля продолжается время  $t = l_1/v_0$ . За это время частицы сместятся на расстояние

$$y_1 = \frac{1}{2} \omega_{\perp} t^2 = \frac{1}{2} \frac{e'}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2} \quad (73.1)$$

и приобретут перпендикулярную к  $v_0$  составляющую скорости

$$v_{\perp} = \omega_{\perp} t = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0}.$$

В дальнейшем частицы летят прямолинейно в направлении, которое образует с вектором  $v_0$  угол  $\alpha$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (73.2)$$

В результате в дополнение к смещению (73.1) пучок получает смещение

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{e'}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

где  $l_2$  — расстояние от границы области, в которой имеется поле, до экрана.

Таким образом, смещение следа пучка относительно точки  $O$  равно

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (73.3)$$

Приняв во внимание формулу (73.2), выражению для смещения

можно придать вид

$$y = \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда вытекает, что частицы, покинув поле, летят так, как если бы они вылетели из центра конденсатора, создающего поле, под углом  $\alpha$ , который определяется формулой (73.2).

Теперь предположим, что на имеющем протяженность  $l_1$  пути частиц включается перпендикулярное к их скорости  $v_0$  однородное магнитное поле (рис. 73.2; поле перпендикулярно к плоскости рисунка, область поля обведена пунктирной окружностью). Под действием поля каждая частица получит постоянное по величине

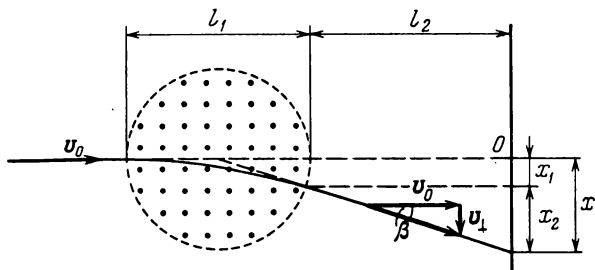


Рис. 73.2.

ускорение  $\omega_{\perp} = (e'/m)v_0 B$ . Ограничиваясь случаем, когда отклонение пучка полем невелико, можно считать, что ускорение  $\omega_{\perp}$  постоянно по направлению и перпендикулярно к  $v_0$ . Тогда для расчета смещения можно использовать полученные нами формулы, заменив в них ускорение  $\omega_{\perp} = (e'/m)E$  значением  $\omega_{\perp} = (e'/m)v_0 B$ . В результате для смещения, которое мы теперь обозначим буквой  $x$ , получится выражение

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (73.4)$$

Угол, на который отклонится пучок магнитным полем, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0}. \quad (73.5)$$

С учетом (73.5) формулу (73.4) можно представить в виде

$$x = \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \beta.$$

Следовательно, при небольших отклонениях частицы, покинув магнитное поле, летят так, как если бы они вылетели из центра области, в которой имеется отклоняющее поле, под углом  $\beta$ , величина которого определяется выражением (73.5).

Из формул (73.3) и (73.4) видно, что как отклонение электрическим, так и отклонение магнитным полем пропорционально удельному заряду частиц.

Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электронно-лучевых трубках. Внутри трубки с электрическим отклонением (рис. 73.3), кроме так называемого электронного прожектора, создающего узкий пучок быстрых электронов (электронный луч), помещаются две пары взаимно перпендикулярных отклоняющих пластин. Подавая напряжение на лю-

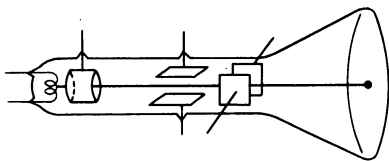


Рис. 73.3.

бую пару пластин, можно вызвать пропорциональное ему смещение электронного луча в направлении, перпендикулярном к данным пластинам. Экран трубки покрывают флуоресцирующим составом. Поэтому в месте попадания на экран электронного луча возникает ярко светящееся пятно.

Электронно-лучевые трубки применяются в осциллографах — приборах, позволяющих изучать быстротекущие процессы. На одну пару отклоняющих пластин подают напряжение, изменяющееся со временем линейно (напряжение развертки); на другую — исследуемое напряжение. Вследствие ничтожной инерционности электронного луча его отклонение практически без запаздывания следует за изменениями напряжений на обеих парах отклоняющих пластин, причем луч вычерчивает на экране осциллографа график зависимости исследуемого напряжения от времени. Многие неэлектрические величины могут быть с помощью соответствующих устройств (датчиков) преобразованы в электрические напряжения. Поэтому с помощью осциллографов исследуют самые различные процессы.

Электронно-лучевая трубка является неотъемлемой частью телевизионных устройств. В телевидении чаще применяются трубки с магнитным управлением электронным лучом. У таких трубок вместо отклоняющих пластин имеются две расположенные снаружи взаимно перпендикулярные системы катушек, каждая из которых создает перпендикулярное к лучу магнитное поле. Изменяя ток в катушках, вызывают перемещение светового пятна, создаваемого электронным лучом на экране.

## § 74. Определение заряда и массы электрона

Удельный заряд электрона (т. е. отношение  $e/m$ ) был впервые измерен Томсоном в 1897 г. с помощью разрядной трубки, изображенной на рис. 74.1. Выходящий из отверстия в аноде  $A$  электронный пучок (катодные лучи; см. § 85) проходил между пластинами

плоского конденсатора и попадал на флуоресцирующий экран, создавая на нем светящееся пятно. Подавая напряжение на пластины конденсатора, можно было воздействовать на пучок практически однородным электрическим полем. Трубка помещалась между полюсами электромагнита, с помощью которого можно было создавать на том же участке пути электронов перпендикулярное к электрическому однородное магнитное поле (область этого поля обведена на рис. 74.1 пунктирной окружностью). При выключенных полях пучок попадал на экран в точке  $O$ . Каждое из полей в отдельности вызывало смещение пучка в вертикальном направлении. Величины смещений определяются полученными в предыдущем параграфе формулами (73.3) и (73.4).

Включив магнитное поле и измерив вызванное им смещение следа пучка

$$x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (74.1)$$

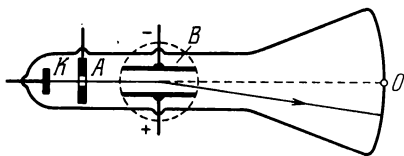


Рис. 74.1.

Томсон включал также электрическое поле и подбирал его значение так, чтобы пучок снова попадал в точку  $O$ . В этом случае электрическое и магнитное поля действовали на электроны пучка одновременно с одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами. При этом выполнялось условие

$$eE = ev_0 B. \quad (74.2)$$

Решая совместно уравнения (74.1) и (74.2), Томсон вычислял  $e/m$  и  $v_0$ .

Буш применил для определения удельного заряда электронов метод магнитной фокусировки. Суть этого метода заключается в следующем. Допустим, что в однородном магнитном поле вылетает из некоторой точки слегка расходящийся симметричный относительно направления поля пучок электронов, имеющих одинаковую по величине скорость  $v$ . Направления, по которым вылетают электроны, образуют с направлением  $\mathbf{B}$  небольшие углы  $\alpha$ . В § 72 было выяснено, что электроны движутся в этом случае по спиральным траекториям, совершая за одинаковое время

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

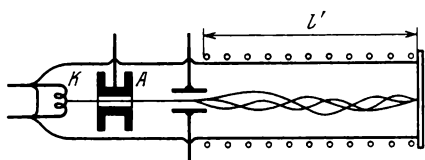
полный оборот и смещаясь вдоль направления поля на расстояние  $l$ , равное

$$l = v \cos \alpha \cdot T. \quad (74.3)$$

Вследствие малости угла  $\alpha$  расстояния (74.3) для разных электронов оказываются практически одинаковыми и равными  $vT$  (для малых углов  $\cos\alpha \approx 1$ ). Следовательно, слегка расходящийся пучок сфокусируется в точке, отстоящей от точки вылета электронов на расстояние

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \quad (74.4)$$

В опыте Буша электроны, испущенные раскаленным катодом  $K$  (рис. 74.2), ускоряются, проходя разность потенциалов  $U$ , приложенную между катодом  $K$  и анодом  $A$ . В результате они приобретают скорость  $v$ , значение которой может быть найдено из соотношения



$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (74.5)$$

Рис. 74.2.

Вылетев затем из отверстия в аноде, электроны образуют узкий пучок, направленный вдоль оси эвакуированной трубки, вставленной внутрь соленоида. На входе в соленоид помещается конденсатор, на который подается переменное напряжение. Поле, создаваемое конденсатором, отклоняет электроны пучка от оси прибора на небольшие изменяющиеся со временем углы  $\alpha$ . Это приводит к «завихрению» пучка — электроны начинают двигаться по различным спиральным траекториям. На выходе из соленоида ставится флуоресцирующий экран. Если подобрать магнитную индукцию  $B$  так, чтобы расстояние  $l'$  от конденсатора до экрана удовлетворяло условию

$$l' = nl \quad (74.6)$$

( $l$  — шаг спирали,  $n$  — целое число), то точка пересечения траекторий электронов попадет на экран — электронный пучок окажется сфокусированным в этой точке и возбудит на экране резкое светящееся пятно. Если условие (74.6) не соблюдается, светящееся пятно на экране будет размытым. Решив совместно уравнения (74.4), (74.5) и (74.6), можно найти  $e/m$  и  $v$ .

Наиболее точное значение удельного заряда электрона, установленное с учетом результатов, полученных разными методами, равно

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ-ед./г.} \quad (74.7)$$

Величина (74.7) дает отношение заряда электрона к его массе покоя  $m$ . В опытах Томсона, Буша и других аналогичных опытах определялось отношение заряда к релятивистской массе, равной

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (74.8)$$

В опытах Томсона скорость электронов составляла примерно 0,1 с. При такой скорости релятивистская масса превышает массу покоя на 0,5%. В последующих опытах скорость электронов достигала очень больших значений. Во всех случаях было обнаружено уменьшение измеряемых значений  $e/m$  с ростом  $v$ , происходившее в точном соответствии с формулой (74.8).

Заряд электрона был определен с большой точностью Милликоном в 1909 г. В закрытое пространство между горизонтально расположенными пластинами конденсатора (рис. 74.3) Милликен вводил мельчайшие капельки масла. При разбрызгивании капельки электризовались, и их можно было устанавливать неподвижно, подбирая величину и знак напряжения на конденсаторе. Равновесие наступало при условии

$$P' = e'E; \quad (74.9)$$

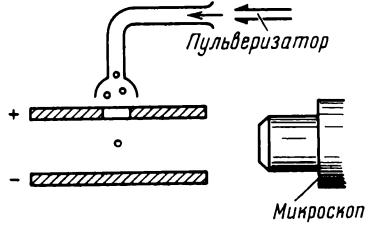


Рис. 74.3.

здесь  $e'$  — заряд капельки,  $P'$  — результирующая силы тяжести и архимедовой силы, равная

$$P' = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \quad (74.10)$$

( $\rho$  — плотность капельки,  $r$  — ее радиус,  $\rho_0$  — плотность воздуха).

Из формул (74.9) и (74.10), зная  $r$ , можно было найти  $e$ . Для определения радиуса измерялась скорость  $v_0$  равномерного падения капелек в отсутствие поля. Равномерное движение капелек устанавливается при условии, что сила  $P'$  уравнивается силой сопротивления  $F = 6\pi\eta rv$  (см. формулу (78.1) 1-го тома;  $\eta$  — вязкость воздуха):

$$P' = 6\pi\eta rv_0. \quad (74.11)$$

Движение капельки наблюдалось с помощью микроскопа. Для измерения  $v_0$  определялось время, за которое капля проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа.

Точно зафиксировать равновесие капельки очень трудно. Поэтому вместо поля, отвечающего условию (74.9), включалось такое поле, под действием которого капля начинала двигаться с небольшой скоростью вверх. Установившаяся скорость подъема  $v_E$  определяется из условия, что сила  $P'$  и сила  $6\pi\eta rv$  в сумме уравнивают силу  $e'E$ :

$$P' + 6\pi\eta rv_E = e'E. \quad (74.12)$$

Исключив из уравнения (74.10), (74.11) и (74.12)  $P'$  и  $r$ , получим выражение для  $e'$ :

$$e' = 9\pi\sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{(\rho - \rho_0)g}} \frac{v_0 + v_E}{E}$$

(в эту формулу Милликен вносил поправку, учитывающую, что размеры капелек были сравнимы с длиной свободного пробега молекул воздуха).

Итак, измерив скорость свободного падения капельки  $v_0$  и скорость ее подъема  $v_E$  в известном электрическом поле  $E$ , можно было найти заряд капельки  $e'$ . Произведя измерение скорости  $v_E$  при некотором значении заряда  $e'$ , Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами рентгеновскими лучами. Отдельные ионы, прилипая к капельке, изменяли ее заряд, в результате чего скорость  $v_E$  также менялась. После измерения нового значения скорости снова облучалось пространство между пластинами и т. д.

Измеренные Милликеном изменения заряда капельки  $\Delta e'$  и сам заряд  $e'$  каждый раз получались целыми кратными одной и той же величины  $e$ . Тем самым была экспериментально доказана дискретность электрического заряда, т. е. тот факт, что всякий заряд складывается из элементарных зарядов одинаковой величины.

Значение элементарного заряда, установленное с учетом измерений Милликена и данных, полученных другими методами, равно

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ-ед.} \quad (74.13)$$

Такую же величину имеет заряд электрона.

Из (74.7) и (74.13) получается для массы покоя электрона значение

$$m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ г}, \quad (74.14)$$

приблизительно в 1840 раз меньшее массы самого легкого из атомов — атома водорода.

В обнаружении дискретной природы электричества сыграли большую роль законы электролиза, установленные экспериментально Фарадеем в 1836 г. Согласно этим законам масса  $m$  вещества, выделяющегося при прохождении тока через электролит<sup>1</sup>, пропорциональна переносимому током заряду  $q$ :

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{z} q. \quad (74.15)$$

Здесь  $M$  — масса моля выделяющегося вещества,  $z$  — валентность этого вещества,  $F$  — постоянная Фарадея (число Фарадея), равная

$$F = 96,5 \cdot 10^3 \text{ Кл/моль.} \quad (74.16)$$

<sup>1</sup> Электролитами называются растворы солей, щелочей или кислот в воде и некоторых других жидкостях, а также расплавы солей, являющихся в твердом состоянии ионными кристаллами. В электролитах при прохождении через них тока происходят химические превращения. Такие вещества называются проводниками второго рода, в отличие от проводников первого рода, у которых прохождение тока не сопровождается химическими превращениями.

Разделив обе части равенства (74.15) на массу иона, получим

$$N = \frac{1}{F} \frac{N_A}{z} q$$

( $N_A$  — число Авогадро,  $N$  — количество ионов, содержащихся в массе  $m$ ). Отсюда для заряда одного иона получается значение

$$e' = \frac{q}{N} = \frac{F}{N_A} z.$$

Следовательно, заряд иона оказывается целым кратным величины

$$e = \frac{F}{N_A}, \quad (74.17)$$

которая представляет собой элементарный заряд.

Таким образом, из анализа законов электролиза вытекает дискретность зарядов, которыми могут обладать ионы в электролитах.

Подстановка в (74.17) значения (74.16) для  $F$  и найденного из опытов Перрена (см. § 101 1-го тома) значения  $N_A$  дает для  $e$  величину, хорошо согласующуюся со значением, найденным Милликоном.

Поскольку точность, с которой определяется постоянная Фарадея  $F$ , и точность значения  $e$ , полученного Милликоном, намного превосходят точность опытов Перрена по определению  $N_A$ , соотношение (74.17) было использовано для определения числа Авогадро. При этом было взято значение  $F$ , найденное из опытов по электролизу, и значение  $e$ , полученное Милликоном.

## § 75. Определение удельного заряда ионов. Масс-спектрографы

Описанные в предыдущем параграфе методы определения удельного заряда пригодны в том случае, если все частицы в пучке имеют одинаковую скорость. Все образующие пучок электроны ускоряются одинаковой разностью потенциалов, приложенной между катодом, из которого они вылетают, и анодом; поэтому разброс значений скоростей электронов в пучке очень мал. Если бы это было не так, электронный пучок давал бы на экране сильно размытое пятно, и измерения были бы невозможны.

Ионы образуются за счет ионизации молекул газа, происходящей в объеме, имеющем заметную протяженность. Возникая в разных местах этого объема, ионы проходят затем неодинаковую разность потенциалов, вследствие чего их скорости бывают различными. Таким образом, методы, которыми был определен удельный заряд электронов, к ионам неприменимы. В 1907 г. Томсоном был разработан «метод парабол», который позволил обойти отмеченное затруднение.



В опыте Томсона тонкий пучок положительных ионов проходил через область, в которой на него одновременно воздействовали параллельные друг другу электрическое и магнитное поля (рис. 75.1). Оба поля были практически однородными и образовывали с первоначальным направлением пучка прямой угол. Они вызывали отклонения ионов: магнитное — в направлении оси  $x$ , электрическое — вдоль оси  $y$ . Согласно формулам (73.4) и (73.3) эти отклонения равны

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad y = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (75.1)$$

где  $v$  — скорость данного иона с удельным зарядом  $e'/m$ ,  $l_1$  — протяженность области, в которой поля действуют на пучок,  $l_2$  — расстояние от границы этой области до фотопластинки, регистрировавшей попадавшие на нее ионы.

Выражения (75.1) представляют собой координаты точки, в которую попадает на пластинку ион, имеющий данные значения  $e'/m$

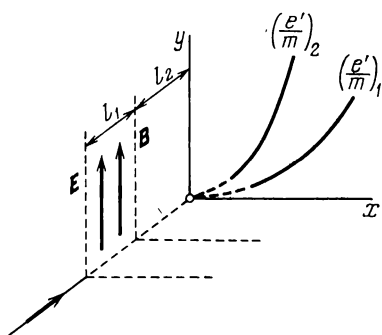


Рис. 75.1.

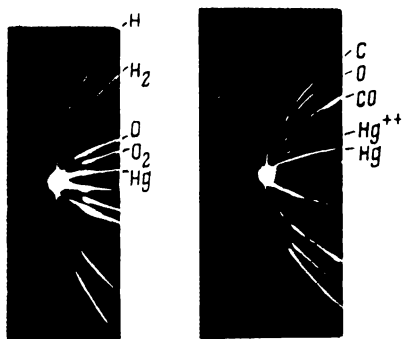


Рис. 75.2.

и скорости  $v$ . Ионы с одинаковым удельным зарядом, но различными скоростями попадали в разные точки пластинки. Исключив из формул (75.1) скорость  $v$ , получим уравнение кривой, вдоль которой располагались следы ионов с одним и тем же значением  $e'/m$ :

$$y = \frac{E}{B^2 l_1 (0,5 l_1 + l_2)} \frac{m}{e'} x^2. \quad (75.2)$$

Из (75.2) следует, что ионы с одинаковым  $e'/m$  и различными  $v$  оставляли на пластинке след в виде параболы. Ионы с различными  $e'/m$  располагались вдоль разных парабол. Зная параметры прибора (т. е.  $E$ ,  $B$ ,  $l_1$  и  $l_2$ ) и измеряя смещения  $x$  и  $y$ , можно было по формуле (75.2) находить удельный заряд ионов, соответствующих каждой параболе. При изменении направления одного из полей

соответствующая координата изменяла знак на обратный, так что получались параболы, симметричные первоначальным. Деля пополам расстояние между аналогичными точками симметричных парабол, можно было находить  $x$  и  $y$ . След, оставляемый на пластинке пучком при выключенных полях, давал начало координат. На рис. 75.2 показаны первые параболы, полученные Томсоном.

Произведя опыт с химически чистым неоном, Томсон обнаружил, что этот газ давал две параболы, соответствующие относительным атомным массам, равным 20 и 22. Этот результат послужил основанием для предположения о том, что существуют две химически неразличимые разновидности атомов неона (по современной терминологии — два изотопа неона). Доказательство этого предположения было дано Астоном, усовершенствовавшим метод определения удельного заряда ионов.

Прибор Астона, названный им масс-спектрографом, имел следующее устройство (рис. 75.3). Пучок ионов, выделенный

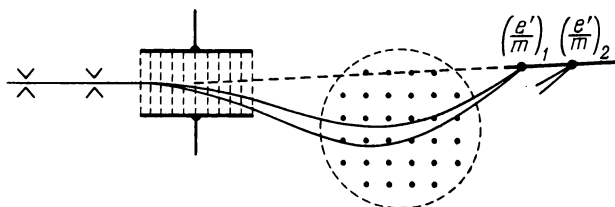


Рис. 75.3.

системой щелей, пропускался последовательно через электрическое и магнитное поля, направленные так, что они вызывали отклонения ионов в противоположные стороны. При прохождении электрического поля ионы с данным  $e'/m$  отклонялись тем сильнее, чем с меньшей скоростью они двигались. Поэтому из электрического поля ионы выходили в виде расходящегося пучка. В магнитном поле траектории ионов также искривлялись тем сильнее, чем меньше была их скорость. Поскольку направления, в которых отклонялись ионы полями, были противоположны, после выхода из магнитного поля ионы образовывали пучок, сходящийся в одной точке.

Ионы с другими значениями удельного заряда фокусировались в других точках (на рис. 75.3 показаны траектории ионов лишь для одного значения  $e'/m$ ). Соответствующий расчет дает, что точки, в которых сходятся пучки, образованные ионами с различными  $e'/m$ , лежат приблизительно на одной прямой (на рисунке она показана штриховой линией). Располагая вдоль этой прямой фотопластинку, Астон получал на ней ряд штрихов, каждый из которых соответствовал определенному значению  $e'/m$ . Сходство получающегося на пластинке изображения с фотографией оптического

линейчатого спектра послужило причиной того, что Астон назвал его масс-спектрограммой, а свой прибор — масс-спектрографом. На рис. 75.4 приведены полученные Астоном масс-спектрограммы (против штрихов указаны массовые числа ионов).

Бейнбридж создал прибор другого типа. В масс-спектрографе Бейнбриджа (рис. 75.5) пучок ионов проходит сначала через так

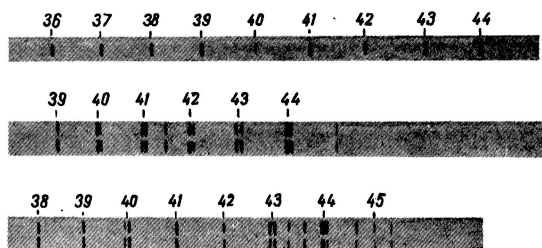


Рис. 75.4.

называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих

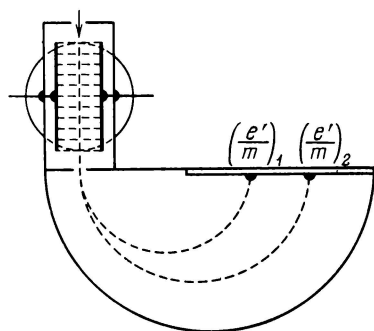


Рис. 75.5.

ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при условии, что  $e'E = e'vB$ . Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их массы и заряда, имеют одинаковое значение, равное  $v = E/B$ .

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией  $B'$ .

В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых зависят от  $e'/m$ :

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}$$

(см. (72.2)). Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных  $2R$ . Следовательно,

ионы каждого сорта (определяемого значением  $e'/m$ ) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ , по найденным значениям  $e'/m$  можно определить массы ионов.

В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

### § 76. Ускорители заряженных частиц

В физике атомного ядра и элементарных частиц большую роль играют опыты, использующие пучки заряженных частиц высоких энергий. Устройства, применяемые для получения таких пучков, называются ускорителями заряженных частиц. Имеется много типов таких устройств. Мы познакомимся с принципами действия некоторых из них.

**Генератор Ван-де-Граафа.** В 1929 г. Ван-де-Грааф предложил конструкцию электростатического генератора, основывающегося на том, что избыточные заряды располагаются по внешней поверхности проводника. Схема генератора показана на рис. 76.1. Полый металлический шар, называемый кондуктором, устанавливается на изолирующей колонне. Внутрь шара введена надетая на валики бесконечная движущаяся лента из шелка или прорезиненной ткани. У основания колонны вблизи ленты установлена гребенка из остриев, с которых стекает на ленту заряд, возбуждаемый генератором напряжения ( $ГН$ ) на несколько десятков киловольт. Внутри кондуктора установлена вторая гребенка, на острия которой переходит заряд с ленты. Эта гребенка соединена с кондуктором, так что снятый с ленты заряд сразу же переходит на его внешнюю поверхность. По мере накопления на кондукторе зарядов его потенциал растет, пока утечка заряда не станет равной подводимому заряду. Утечка происходит в основном за счет ионизации газа вблизи поверхности кондуктора. Возникающее вследствие этого прохождение тока через газ называется коронным разрядом или коронированием (см. § 87). Чтобы уменьшить коронирование, поверхность кондуктора тщательно шлифуют.

Потенциал, до которого можно зарядить кондуктор, ограничивается тем, что при напряженности поля около 3 МВ/м (30 кВ/см) в воздухе при атмосферном давлении возникает разряд. Для шара  $E = \varphi/r$ . Поэтому для получения больших разностей потенциалов приходится делать кондуктор больших размеров (до 10 м в диаметре). Предельная разность потенциалов, которую можно практически получить с помощью генератора Ван-де-Граафа, составляет около 10 МВ ( $10^7$  В).

Ускорение частиц осуществляется в разрядной трубке (РТ), к электродам которой прикладывается разность потенциалов, получаемая на генераторе. Иногда генератор Ван-де-Граафа строят в виде двух одинаковых расположенных поблизости колонн, кондукторы которых заряжаются разноименно. В этом случае разрядная трубка включается между кондукторами.

Заметим, что лента генератора, кондуктор, разрядная трубка и земля образуют замкнутую цепь постоянного тока. Внутри трубки заряды движутся под действием электростатического поля. Перенос зарядов от земли к кондуктору осуществляется сторонними силами, роль которых выполняют механические силы, приводящие в движение ленту генератора.

**Бетатрон.** Так называют индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем. Этот прибор состоит из тороидальной эвакуированной камеры, помещающейся

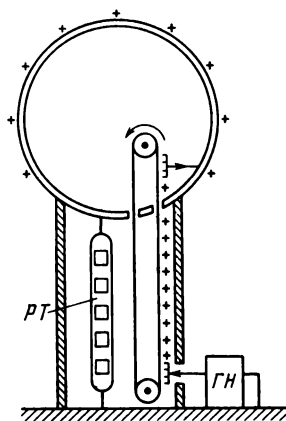


Рис. 76.1.

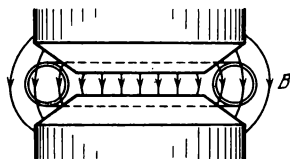


Рис. 76.2.

между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 76.2). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой порядка 100 Гц. Возникающее при этом переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны, и, во-вторых, удерживает электроны на орбите, совпадающей с осью камеры.

Чтобы удержать электрон на орбите постоянного радиуса, нужно по мере возрастания его скорости увеличивать магнитную индукцию поля (согласно формуле (72.2) радиус орбиты пропорционален  $v/B$ ). Поэтому для ускорения могут быть использованы только 2-я и 4-я четверти периода тока, в начале которых ток в обмотке магнита равен нулю. Таким образом, бетатрон работает в импульсном режиме. В начале импульса в камеру подается из электронной пушки пучок электронов, который подхватывается вихревым электрическим полем и начинает со все возрастающей скоростью двигаться по круговой орбите. За время нарастания магнитного поля ( $\sim 10^{-3}$  с) электроны успевают сделать до миллиона оборотов и приобретают

энергию, которая может достигать нескольких сотен МэВ. При такой энергии скорость электронов почти равна скорости света  $c$ .

Для того чтобы ускоряемый электрон двигался по круговой орбите радиуса  $r_0$ , между магнитной индукцией поля на орбите и внутри нее должно выполняться простое соотношение, которое мы сейчас выведем. Вихревое электрическое поле направлено по касательной к орбите, по которой движется электрон. Следовательно, циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по этой орбите равна  $2\pi r_0 E$ . Вместе с тем согласно (71.12) циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  равна  $-(d\Phi/dt)$ , где  $\Phi$  — магнитный поток через поверхность, охватываемую орбитой. Знак минус указывает направление  $\mathbf{E}$ . Нас будет интересовать лишь модуль напряженности поля, поэтому мы минус опустим. Приравняв оба выражения для циркуляции, найдем, что

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Поэтому можно положить  $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$ , где  $\langle B \rangle$  — среднее по площади орбиты значение магнитной индукции. Тогда имеем

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d}{dt}(\pi r_0^2 \langle B \rangle) = \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle. \quad (76.1)$$

Напишем релятивистское уравнение движения электрона по орбите:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}\mathbf{B}_{\text{орб}}] \quad (76.2)$$

( $\mathbf{B}_{\text{орб}}$  — магнитная индукция поля на орбите).

Скорость электрона, движущегося по окружности радиуса  $r_0$ , можно представить в виде  $\mathbf{v} = \omega r_0 \boldsymbol{\tau}$ , где  $\omega$  — скорость, с которой поворачивается радиус-вектор электрона,  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к орбите в той точке, где находится электрон. Вектор  $\mathbf{E}$  можно представить в виде

$$\mathbf{E} = E\boldsymbol{\tau} = \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau}$$

(см. (76.1)). Наконец, произведение  $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  можно представить в виде  $vB\mathbf{n} = \omega r_0 B\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — орт нормали к орбите в той точке, где находится электрон. С учетом сказанного напомним уравнение (76.2) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\omega r_0 \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} \right) = -\frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau} - e\omega r_0 B_{\text{орб}} \cdot \mathbf{n}. \quad (76.3)$$

Производная по времени орта  $\boldsymbol{\tau}$  равна  $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \omega \mathbf{n}$  (см. формулу (2.56) 1-го тома; угловая скорость вращения орта совпадает с угловой скоростью радиуса-вектора электрона). Следовательно, произведя диф-

ференцирование в левой части уравнения (76.3), придем к равенству

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\omega r_0}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}} \right) \cdot \tau + \frac{m\omega r_0}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}} \omega \mathbf{n} = -\frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \tau - e\omega r_0 B_{орб} \cdot \mathbf{n}.$$

Приравняв множители при аналогичных ортах в левой и правой частях равенства, получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\omega r_0}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}} \right) = -\frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle, \quad (76.4)$$

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}} = -er_0 B_{орб} \quad (76.5)$$

Из (76.4) следует, что

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}} = -\frac{er_0}{2} \langle B \rangle \quad (76.6)$$

( $\omega$  и  $\langle B \rangle$  в начале импульса равны нулю).

Сопоставление выражений (76.5) и (76.6) приводит к искомому соотношению

$$B_{орб} = \frac{1}{2} \langle B \rangle.$$

Таким образом, для того чтобы электрон все время двигался по круговой орбите, магнитная индукция на орбите должна составлять половину среднего значения магнитной индукции внутри орбиты. Это достигается за счет изготовления полюсных наконечников в виде усеченных конусов (см. рис. 76.2).

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет ускоренные электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны испускают жесткое электромагнитное излучение ( $\gamma$ -лучи, рентгеновские лучи).

Применяются бетатроны главным образом в ядерных исследованиях. Небольшие ускорители, на энергию до 50 МэВ, нашли применение в промышленности как источники очень жесткого рентгеновского излучения, используемого для дефектоскопии массивных изделий.

**Циклотрон.** В основу называемого так ускорителя положена независимость периода обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости (см. (72.3)). Этот прибор состоит из двух электродов в виде половинок круглой невысокой коробки (рис. 76.3), получивших название дуантов. Дуанты заключены в откачиваемый корпус, который помещается между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно к плоскости дуантов. На

дуанты подается переменное напряжение, возбуждаемое генератором высокой частоты.

Введем в зазор между дуантами в тот момент, когда напряжение достигнет наибольшей величины, заряженную частицу. Частица будет подхвачена электрическим полем и втянута внутрь одного из дуантов. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, поэтому частица в нем будет находиться под действием только магнитного поля. В этом случае частица движется по окружности, радиус которой пропорционален скорости частицы (см. (72.2)). Подберем частоту изменения напряжения между дуантами так, чтобы к моменту, когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, разность потенциалов между ними изменила знак и достигла амплитудного значения. Тогда частица будет снова ускорена и влетит во второй дуант с энергией в два раза большей, чем та, с которой она двигалась в первом дуанте. Обладая большей скоростью, частица будет двигаться во втором дуанте по окружности большего радиуса ( $R \sim v$ ), но время, за которое она пройдет половину окружности, останется прежним. Поэтому к моменту, когда частица влетит в зазор между дуантами, напряжение между ними снова изменит свой знак и примет амплитудное значение.

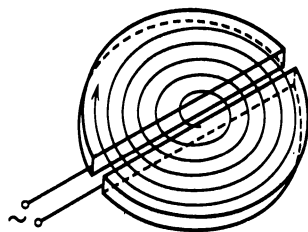


Рис. 76.3.

Таким образом, частица движется по кривой, близкой к спирали, получая при каждом прохождении через зазор между дуантами дополнительную порцию энергии, равную  $e'U_m$  ( $e'$  — заряд частицы,  $U_m$  — амплитуда напряжения, вырабатываемого генератором). Располагая источником переменного напряжения сравнительно небольшой величины ( $U_m \sim 10^5$  В), можно с помощью циклотрона ускорить протоны до энергий порядка 25 МэВ. При более высоких энергиях начинает сказываться зависимость массы протонов от скорости — период обращения увеличивается (согласно (72.3) он пропорционален  $m$ ) и синхронизм между движением частиц и изменениями ускоряющего поля оказывается нарушенным.

Чтобы избежать нарушения синхронизма и получить частицы больших энергий, делают изменяющейся либо частоту напряжения, питающего дуанты, либо индукцию магнитного поля. Прибор, в котором в процессе ускорения каждой порции частиц соответствующим образом уменьшается частота ускоряющего напряжения, называется **ф а з о т р о н о м** (либо **с и н х р о ц и к л о т р о н о м**). Ускоритель, в котором частота остается постоянной, а индукция магнитного поля изменяется так, чтобы отношение  $m/v$  было постоянным, называют **с и н х р о т р о н о м** (ускорители этого типа применяются только для ускорения электронов).



В ускорителе, называемом синхрофазотроном или протонным синхротроном, изменяются и частота ускоряющего напряжения, и индукция магнитного поля. Ускоряемые частицы движутся в синхрофазотроне не по спирали, а по круговой траектории. По мере увеличения скорости и массы частиц индукция магнитного поля растет так, чтобы определяемый формулой (72.2) радиус оставался постоянным. При этом период обращения изменяется как из-за возрастания массы частиц, так и вследствие увеличения  $B$ . Для того чтобы ускоряющее напряжение было синхронно с движением частиц, частота этого напряжения делается изменяющейся по соответствующему закону. Дуантов в синхрофазотроне нет, ускорение частиц происходит на отдельных участках траектории с помощью электрического поля, создаваемого генераторами напряжения меняющейся частоты.

Самый мощный в настоящее время (в 1981 г.) ускоритель — протонный синхротрон — запущен в 1974 г. в лаборатории имени Ферми в Батейвии (под Чикаго). Он ускоряет протоны до энергии в 500 ГэВ ( $5 \cdot 10^{11}$  эВ). Скорость протонов, обладающих такой энергией, отличается от скорости света в вакууме менее чем на 0,0002% ( $v = 0,9999982 c$ ).

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

### § 77. Природа носителей тока в металлах

Для выяснения природы носителей тока в металлах был поставлен ряд опытов. Прежде всего отметим опыт Рикке, осуществленный в 1901 г. Рикке взял три цилиндра — два медных и один алюминиевый с тщательно отшлифованными торцами. После взвешивания цилиндры были сложены вместе в последовательности: медь—алюминий — медь. Через такой составной проводник пропусклся непрерывно ток одного и того же направления в течение года. За все время через цилиндры прошел заряд, равный  $3,5 \cdot 10^6$  Кл. Взвешивание показало, что пропускание тока не оказало на массу цилиндров никакого влияния. При исследовании соприкасавшихся торцов под микроскопом не было обнаружено проникновения одного металла в другой. Результаты опыта свидетельствовали о том, что перенос заряда в металлах осуществляется не атомами, а какими-то частицами, входящими в состав всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. Томсоном электроны.

Чтобы отождествить носители тока в металлах с электронами, нужно было определить знак и числовое значение удельного заряда носителей. Опыты, поставленные с этой целью, основывались на следующих соображениях. Если в металлах имеются способные перемещаться заряженные частицы, то при торможении металлического проводника эти частицы должны некоторое время продолжать двигаться по инерции, в результате чего в проводнике возникнет импульс тока и будет перенесен некоторый заряд.

Пусть проводник движется вначале со скоростью  $v_0$  (рис. 77.1). Начнем тормозить его с ускорением  $w$ . Продолжая двигаться по

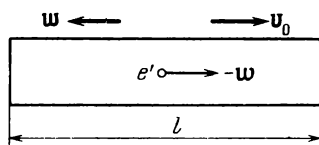


Рис. 77.1.

инерции, носители тока приобретут относительно проводника ускорение  $-\mathbf{w}$ . Такое же ускорение можно сообщить носителям в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле напряженности  $\mathbf{E} = -m\mathbf{w}/e'$ , т. е. приложить к концам проводника разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_1^2 \frac{m\mathbf{w}}{e'} d\mathbf{l} = - \frac{mwl}{e'}$$

( $m$  и  $e'$  — масса и заряд носителя,  $l$  — длина проводника). В этом случае по проводнику потечет ток силы  $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$ , где  $R$  — сопротивление проводника ( $I$  считается положительной, если ток течет в направлении движения проводника). Следовательно, за время  $dt$  через каждое сечение проводника пройдет заряд

$$dq = I dt = - \frac{mwl}{e'R} dt = - \frac{ml}{e'R} dv.$$

Заряд, прошедший за все время торможения, равен

$$q = \int dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{m}{e'} \frac{lv_0}{R} \quad (77.1)$$

(заряд положителен, если он переносится в направлении движения проводника).

Таким образом, измерив  $l$ ,  $v_0$  и  $R$ , а также заряд  $q$ , проходящий по цепи при торможении проводника, можно найти удельный заряд носителей. Направление импульса тока даст знак носителей.

Первый опыт с ускоренно движущимися проводниками был поставлен в 1913 г. Мандельштамом и Папалекси. Они приводили катушку из проволоки в быстрые крутильные колебания вокруг ее оси. К концам катушки подключался телефон, в котором был слышен звук, обусловленный импульсами тока.

Количественный результат был получен Толменом и Стюартом в 1916 г. Катушка из провода длиной 500 м приводилась во вращение, при котором линейная скорость витков составляла 300 м/с. Затем катушка резко тормозилась и с помощью баллистического гальванометра измерялся заряд, протекавший в цепи за время торможения. Вычисленное по формуле (77.1) значение удельного заряда носителей получалось очень близким к  $e/m$  для электронов. Таким образом, было экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются электроны.

Ток в металлах можно вызвать крайне малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что носители тока — электроны перемещаются по металлу практически свободно. К тому же выводу приводят и результаты опыта Толмена и Стюарта.

Существование в металлах свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов

металла отщепляются слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся «коллективной» собственностью всего куска металла. Если от каждого атома отщепится по одному электрону, то концентрация свободных электронов (т. е. их число  $n$  в единице объема) будет равна количеству атомов в единице объема. Число атомов в единице объема равно  $(\delta/M) N_A$ , где  $\delta$  — плотность металла,  $M$  — масса моля,  $N_A$  — число Авогадро. Для металлов значения  $\delta/M$  заключены в пределах от  $2 \cdot 10^4$  моль/м<sup>3</sup> (для калия) до  $2 \cdot 10^5$  моль/м<sup>3</sup> (для бериллия). Следовательно, для концентрации свободных электронов (или, как их еще называют, электронов проводимости) получаются значения порядка

$$n = 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3} \quad (10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}). \quad (77.2)$$

### § 78. Элементарная классическая теория металлов

Исходя из представлений о свободных электронах, Друде создал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем. Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь  $\lambda$ . Правда, в отличие от молекул газа, пробег которых определяется соударениями молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, оценку средней скорости теплового движения электронов можно произвести по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m} \quad (78.1)$$

(см. формулу (98.26) 1-го тома). Для комнатной температуры ( $\sim 300$  К) вычисление по этой формуле приводит к следующему значению:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/с.}$$

При включении поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью  $\langle v \rangle$ , накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью  $\langle u \rangle$ . Величину этой скорости легко оценить, исходя из формулы

$$j = ne\langle u \rangle \quad (78.2)$$

(см. (34.4)). Предельная допустимая техническими нормами плотность тока для медных проводов составляет около  $10^7$  А/м<sup>2</sup>

(10 А/мм<sup>2</sup>). Взяв для  $n$  значение  $10^{29}$  м<sup>-3</sup>, получим

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Таким образом, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения зарядов  $\langle u \rangle$  примерно в  $10^8$  раз меньше средней скорости теплового движения  $\langle v \rangle$ . Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости  $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$  можно заменять модулем скорости теплового движения  $|\mathbf{v}|$ .

Найдем вызываемое полем изменение среднего значения кинетической энергии электронов. Средний квадрат результирующей скорости равен

$$\langle (\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + 2\langle \mathbf{v}\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle. \quad (78.3)$$

Два события, заключающиеся в том, что скорость теплового движения электрона примет значение  $\mathbf{v}$ , а скорость упорядоченного движения — значение  $\mathbf{u}$ , являются статистически независимыми. Поэтому согласно теореме об умножении вероятностей (см. формулу (93.4) 1-го тома)  $\langle \mathbf{v}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle$ . Но  $\langle \mathbf{v} \rangle$  равно нулю, так что второе слагаемое в (78.3) исчезает и формула принимает вид

$$\langle (\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle.$$

Отсюда вытекает, что упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов в среднем на

$$\langle \Delta \epsilon_k \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}. \quad (78.4)$$

**Закон Ома.** Друде считал, что при соударении электрона с ионом кристаллической решетки приобретенная электроном дополнительная энергия (78.4) передается иону и, следовательно, скорость  $u$  в результате соударения делается равной нулю. Предположим, что поле, ускоряющее электроны, однородно. Тогда под действием поля электрон получит постоянное ускорение, равное  $eE/m$ , и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигнет в среднем значения

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau, \quad (78.5)$$

где  $\tau$  — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Друде не учитывал распределения электронов по скоростям и приписывал всем электронам одинаковое значение скорости  $u$ . В этом приближении

$$\tau = \lambda/v$$

(напомним, что  $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$  практически равен  $|\mathbf{v}|$ ). Подставив это

значение  $\tau$  в формулу (78.5), получим

$$u_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv}. \quad (78.6)$$

Скорость  $u$  изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (78.2) дает

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Плотность тока оказалась пропорциональной напряженности поля — мы пришли к закону Ома. Согласно (34.3) коэффициент пропорциональности между  $j$  и  $E$  есть проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (78.7)$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами, помещающимися в узлах кристаллической решетки металла.

**Закон Джоуля — Ленца.** К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, среднее значение которой равно

$$\langle \Delta \epsilon_k \rangle = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2} E^2 \quad (78.8)$$

(см. формулы (78.4) и (78.6)). Столкнувшись с ионом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную энергию решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем  $1/\tau = v/\lambda$  соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (78.8). Поэтому в единице объема за единицу времени должно выделяться тепло

$$Q_{уд} = n \frac{1}{\tau} \langle \Delta \epsilon_k \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2$$

( $n$  — число электронов проводимости в единице объема).

Величина  $Q_{уд}$  есть удельная тепловая мощность тока (см. § 38). Множитель при  $E^2$  совпадает со значением (78.7) для  $\sigma$ . Перейдя в выражении  $\sigma E^2$  от  $\sigma$  и  $E$  к  $\rho$  и  $j$ , придем к формуле:  $Q_{уд} = \rho j^2$ , выражающей закон Джоуля — Ленца (см. формулу (38.4)).

**Закон Видемана — Франца.** Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман и Франц установили в 1853 г. эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$  для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре. Например, для алюминия при комнатной температуре это отношение равно  $5,8 \cdot 10^{-6}$ , для меди  $6,4 \cdot 10^{-6}$  и для свинца  $7,0 \cdot 10^{-6}$  Дж·Ом/(с·К).

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого следует, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а свободными электронами. Рассматривая эти электроны как одноатомный газ, можно заимствовать для коэффициента теплопроводности выражение кинетической теории газов:

$$\kappa = \frac{1}{3} n m v \lambda c_v$$

(см. формулу (131.7) 1-го тома;  $\rho$  заменено произведением  $nm$ , вместо  $\langle v \rangle$  взято  $v$ ). Удельная теплоемкость одноатомного газа равна  $c_v = \frac{3}{2} (R/M) = \frac{3}{2} (k/m)$ . Подставив это значение в выражение для  $\kappa$ , получим

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v \lambda.$$

Разделив  $\kappa$  на выражение (78.7) для  $\sigma$  и заменив затем  $\frac{1}{2} m v^2$  через  $\frac{3}{2} k T$ , придем к соотношению

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{k m v^2}{e^2} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T, \quad (78.9)$$

которое выражает закон Видемана — Франца.

Подстановка в (78.9) числовых значений  $k$  и  $e$  дает

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8} T.$$

При  $T = 300$  К для  $\kappa/\sigma$  получается значение  $6,7 \cdot 10^{-6}$  Дж·Ом/(с·К), хорошо согласующееся с экспериментальными данными (см. приведенные выше значения  $\kappa/\sigma$  для Al, Cu и Pb). Однако впоследствии выяснилось, что столь хорошее совпадение оказалось случайным, ибо когда Лоренц уточнил расчеты, учтя распределение электронов по скоростям, для отношения  $\kappa/\sigma$  получилось значение  $2(k/e)^2 T$ , которое хуже согласуется с данными опыта.

Итак, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Вместе с тем эта теория встретила с весьма

существенными затруднениями. Из них основными являются два. Из формулы (78.7) вытекает, что сопротивление металлов (т. е. величина, обратная  $\sigma$ ) должно возрастать как корень квадратный из  $T$ . Действительно, для предположения о зависимости величин  $n$  и  $\lambda$  от температуры нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из  $T$ . Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени  $T$ , т. е. быстрее, чем  $\sqrt{T}$  (см. формулу (34.5)).

Второе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью, равной  $\frac{3}{2}R$ . Добавив эту величину к теплоемкости решетки, составляющей  $3R$  (см. формулу (114.1) 1-го тома), получим для молярной теплоемкости металла значение  $\frac{9}{2}R$ . Таким образом, согласно классической электронной теории молярная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости неметаллических кристаллов. Объяснение такого несоответствия смогла дать лишь квантовая теория металлов<sup>1</sup>.

## § 79. Эффект Холла

Если металлическую пластинку, вдоль которой течет постоянный электрический ток, поместить в перпендикулярное к ней магнитное поле, то между гранями, параллельными направлению тока и полю, возникает разность потенциалов  $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$  (рис. 79.1). Это явление было обнаружено Холлом в 1879 г. и называется э ф ф е к т о м Х о л л а или г а л ь в а н о м а г н и т н ы м я в л е н и е м.

Холловская разность потенциалов определяется выражением

$$U_H = RbjB. \quad (79.1)$$

Здесь  $b$  — ширина пластинки,  $j$  — плотность тока,  $B$  — магнитная индукция поля,  $R$  — коэффициент пропорциональности, получивший название постоянной Холла.

Эффект Холла очень просто объясняется электронной теорией. В отсутствие магнитного поля ток в пластинке обуславливается электрическим полем  $E_0$  (рис. 79.2). Эквипотенциальные поверхности этого поля образуют систему перпендикулярных к вектору  $E_0$  плоскостей. Две из них изображены на рисунке сплошными прямыми линиями. Потенциал во всех точках каждой поверхности, а следовательно, и в точках 1 и 2 одинаков. Носители тока — электроны — имеют отрицательный заряд, поэтому скорость их упорядоченного движения  $u$  направлена противоположно вектору плотности тока  $j$ .

<sup>1</sup> Отметим, что классическая теория не могла объяснить самого главного — почему электроны в металлах оказываются свободными.



При включении магнитного поля каждый носитель оказывается под действием магнитной силы  $\mathbf{F}$ , направленной вдоль стороны  $b$  пластинки и равной по модулю

$$F = euB. \quad (79.2)$$

В результате у электронов появляется составляющая скорости, направленная к верхней (на рисунке) грани пластинки. У этой грани образуется избыток отрицательных, соответственно у нижней грани — избыток положительных зарядов. Следовательно, возникает дополнительное поперечное электрическое поле  $\mathbf{E}_B$ . Когда напряженность этого поля достигает такого значения, что его действие на заряды будет уравнивать силу (79.2), установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Соответствующее значение  $E_B$  определяется условием:  $eE_B = euB$ . Отсюда

$$E_B = uB.$$

Поле  $\mathbf{E}_B$  складывается с полем  $\mathbf{E}_0$  в результирующее поле  $\mathbf{E}$ . Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны к вектору напряженности поля. Следовательно, они повернутся и займут положение, изображенное на рис. 79.2 пунктиром. Точки 1 и 2, которые

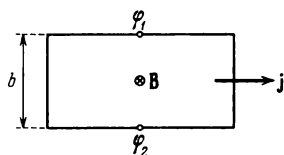


Рис. 79.1.

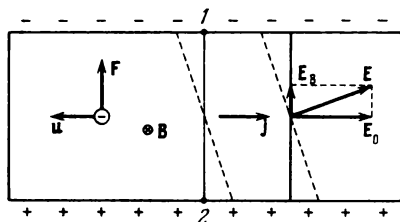


Рис. 79.2.

прежде лежали на одной и той же эквипотенциальной поверхности, теперь имеют разные потенциалы. Чтобы найти напряжение, возникающее между этими точками, нужно умножить расстояние между ними  $b$  на напряженность  $E_B$ :

$$U_H = bE_B = buB.$$

Выразим  $u$  через  $j$ ,  $n$  и  $e$  в соответствии с формулой  $j = neu$ . В результате получим

$$U_H = \frac{1}{ne} bjB. \quad (79.3)$$

Последнее выражение совпадает с (79.1), если положить

$$R = \frac{1}{ne}. \quad (79.4)$$

Из (79.4) следует, что, измерив постоянную Холла, можно найти концентрацию носителей тока в данном металле (т. е. число носителей в единице объема).

Важной характеристикой вещества является подвижность в нем носителей тока. Подвижностью носителей тока называется средняя скорость, приобретаемая носителями при напряженности электрического поля, равной единице. Если в поле напряженности  $E$  носители приобретают скорость  $u$ , то подвижность их  $u_0$  равна

$$u_0 = \frac{u}{E}. \quad (79.5)$$

Подвижность можно связать с проводимостью  $\sigma$  и концентрацией носителей  $n$ . Для этого разделим соотношение  $j = neu$  на напряженность поля  $E$ . Приняв во внимание, что отношение  $j$  к  $E$  дает  $\sigma$ , а отношение  $u$  к  $E$  — подвижность, получим

$$\sigma = neu_0. \quad (79.6)$$

Измерив постоянную Холла  $R$  и проводимость  $\sigma$ , можно по формулам (79.4) и (79.6) найти концентрацию и подвижность носителей тока в соответствующем образце.

Эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к  $n$ - или  $p$ -типу<sup>1</sup>. На рис. 79.3 сопоставлен

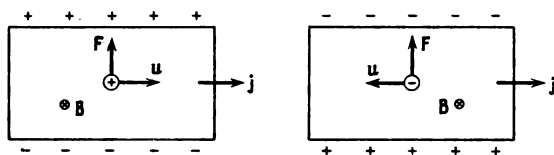


Рис. 79.3.

эффект Холла для образцов с положительными и отрицательными носителями. Направление магнитной силы изменяется на противоположное как при изменении направления движения заряда, так и при изменении его знака. Следовательно, при одинаковом направлении тока и поля магнитная сила, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление. Поэтому в случае положительных носителей потенциал верхней (на рисунке) грани выше, чем нижней, а в случае отрицательных носителей — ниже. Таким образом, определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока.

Любопытно, что у некоторых металлов знак  $U_H$  соответствует положительным носителям тока. Объяснение этой аномалии дает квантовая теория.

<sup>1</sup> В полупроводниках  $n$ -типа знак носителей тока отрицателен, а в полупроводниках  $p$ -типа — положителен (см. т. 3).

## ГЛАВА XII

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

#### § 80. Несамостоятельная и самостоятельная проводимость

Прохождение электрического тока через газы называется **газовым разрядом**. Газы в нормальном состоянии являются изоляторами, носители тока в них отсутствуют. Лишь при создании особых условий в газах могут появиться носители тока (ионы, электроны) и возникает электрический разряд.

Носители тока в газах могут возникать в результате внешних воздействий, не связанных с наличием электрического поля. В этом случае говорят о **несамостоятельной проводимости** газа. Несамостоятельный разряд может быть вызван нагреванием газа (термическая ионизация), воздействием ультрафиолетовых или рентгеновских лучей, а также воздействием излучения радиоактивных веществ.

Если носители тока возникают в результате процессов, обусловленных созданным в газе электрическим полем, проводимость называется **самостоятельной**.

Характер газового разряда зависит от многих факторов: от химической природы газа и электродов, от температуры и давления газа, от формы, размеров и взаимного расположения электродов, от напряжения, приложенного к электродам, от плотности и мощности тока и т. д. Поэтому газовый разряд может принимать весьма разнообразные формы. Некоторые виды разряда сопровождаются свечением и звуковыми эффектами — шипением, шорохами или треском.

#### § 81. Несамостоятельный газовый разряд

Пусть газ, находящийся между электродами (рис. 81.1), подвергается непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизирующего агента (например, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к тому, что от некоторых молекул газа отщепляется один или несколько электронов, в ре-

зультате чего эти молекулы превращаются в положительно заряженные ионы. При не очень низких давлениях отщепившиеся электроны обычно захватываются нейтральными молекулами, которые таким образом становятся отрицательно заряженными ионами. Число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за секунду в единице объема, обозначим через  $\Delta n_i$ .

Наряду с процессом ионизации в газе происходит рекомбинация ионов, т. е. нейтрализация разноименных ионов при их встрече или воссоединение положительного иона и электрона в нейтральную молекулу. Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. Поэтому количество рекомбинирующих за секунду в единице объема пар ионов  $\Delta n_r$  пропорционально квадрату числа имеющихся в единице объема пар ионов  $n$ :

$$\Delta n_r = rn^2 \quad (81.1)$$

( $r$  — коэффициент пропорциональности).

В состоянии равновесия число возникающих ионов равно числу рекомбинирующих, следовательно,

$$\Delta n_i = rn^2. \quad (81.2)$$

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (81.3)$$

Под действием космического излучения и следов радиоактивных веществ, имеющих в земной коре, в  $1 \text{ см}^3$  атмосферного воздуха возникает в среднем несколько пар ионов в секунду. Коэффициент  $r$  для воздуха равен  $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$ . Подстановка этих чисел в формулу (81.3) дает для равновесной концентрации ионов в воздухе значение порядка  $10^3 \text{ см}^{-3}$ . Эта концентрация недостаточна для того, чтобы обусловить заметную проводимость. Чистый сухой воздух является очень хорошим изолятором.

Если подать напряжение на электроды, то убыль ионов будет происходить не только вследствие рекомбинации, но и за счет отсасывания ионов полем к электродам. Пусть из единицы объема отсасывается ежесекундно  $\Delta n_i$  пар ионов. Если заряд каждого иона  $e'$ , то нейтрализация на электродах одной пары ионов сопровождается переносом по цепи заряда  $e'$ . Каждую секунду электродов достигает  $\Delta n_i Sl$  пар ионов ( $S$  — площадь электродов,  $l$  — расстояние между ними; произведение  $Sl$  равно объему межэлектродного пространства). Следовательно, сила тока в цепи равна

$$I = e' \Delta n_i Sl.$$

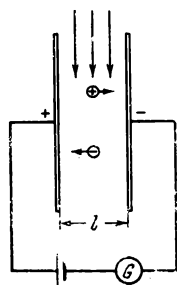


Рис. 81.1.

Отсюда

$$\Delta n_i = \frac{j}{e'lS} = \frac{j}{e'l}, \quad (81.4)$$

где  $j$  — плотность тока.

При наличии тока условие равновесия выглядит следующим образом:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Подставив сюда выражения (81.1) и (81.4) для  $\Delta n_r$  и  $\Delta n_j$ , придем к соотношению

$$\Delta n_i = rn^2 + \frac{j}{e'l}. \quad (81.5)$$

Плотность тока определяется выражением

$$j = e'n(u_0^+ + u_0^-)E, \quad (81.6)$$

где  $u_0^+$  и  $u_0^-$  — подвижности положительных и отрицательных ионов (см. формулу (79.5)).

Рассмотрим два предельных случая — случай слабых и случай сильных полей.

В случае слабых полей плотность тока будет очень мала, и слагаемым  $j/e'l$  в соотношении (81.5) можно пренебречь по сравнению с  $rn^2$  (это означает, что убыль ионов из межэлектродного пространства происходит в основном за счет рекомбинации). Тогда (81.5) переходит в (81.2), и для равновесной концентрации ионов получается выражение (81.3). Подстановка этого значения  $n$  в формулу (81.6) дает

$$j = e' \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (u_0^+ + u_0^-) E. \quad (81.7)$$

Множитель при  $E$  в полученной формуле не зависит от напряженности поля. Следовательно, в случае слабых полей несамостоятельный газовый разряд подчиняется закону Ома.

Подвижность ионов в газах имеет значение  $\sim 10^{-4}$  ( $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ ) / ( $\text{В} \cdot \text{м}^{-1}$ ) ( $1$  ( $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ ) / ( $\text{В} \cdot \text{см}^{-1}$ )). Следовательно, при равновесной концентрации  $n = 10^3 \text{ см}^{-3} = 10^9 \text{ м}^{-3}$  и напряженности поля  $E = 1 \text{ В/м}$  плотность тока составит

$$j = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 (10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 1 \sim 10^{-14} \text{ А/м}^2 = 10^{-18} \text{ А/см}^2$$

(см. формулу (81.6); ионы предполагаются однозарядными).

В случае сильных полей слагаемым  $rn^2$  в формуле (81.5) можно пренебречь по сравнению с  $j/e'l$ . Это означает, что практически все возникающие ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. При этом условии соотношение (81.5) имеет вид

$$\Delta n_i = j/e'l.$$

Отсюда

$$j = e' \Delta n_i l. \quad (81.8)$$

Эта плотность тока создается всеми ионами, порождаемыми ионизатором в заключенном между электродами столбе газа с единичным поперечным сечением. Следовательно, эта плотность тока является наибольшей при данной интенсивности ионизатора и заданном расстоянии  $l$  между электродами. Ее называют плотностью тока насыщения  $j_{\text{нас}}$ .

Вычислим  $j_{\text{нас}}$  при следующих условиях:  $\Delta n_i = 10 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} = 10^7 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  (примерно такова скорость образования ионов в атмосферном воздухе при обычных условиях),  $l = 0,1 \text{ м}$ . Подстановка этих данных в формулу (81.8) дает

$$j_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 10^{-1} \sim 10^{-13} \text{ А/м}^2 = 10^{-17} \text{ А/см}^2.$$

Этот расчет показывает, что проводимость воздуха в обычных условиях ничтожно мала.

При промежуточных значениях  $E$  происходит плавный переход от линейной зависимости  $j$  от  $E$  к насыщению, по достижении которого  $j$  перестает зависеть от  $E$  (см. сплошную кривую на рис. 81.2). За

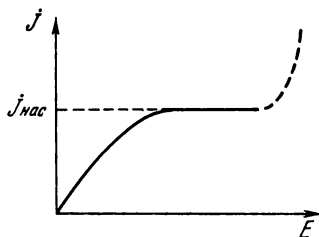


Рис. 81.2.

областью насыщения лежит область резкого возрастания тока (см. показанный штриховой линией участок кривой). Это возрастание объясняется тем, что, начиная с некоторого значения  $E$ , порождаемые внешним ионизатором электроны<sup>1</sup> успевают за время свободного пробега приобрести энергию, достаточную для того, чтобы, столкнувшись с молекулой, вызвать ее ионизацию. Возникшие при ионизации свободные электроны, разогнавшись, в свою очередь вызывают ионизацию. Таким образом, происходит лавинообразное размножение первичных ионов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока. Однако процесс не утрачивает характера несамостоятельного разряда, так как после прекращения действия внешнего ионизатора разряд продолжается только до тех пор, пока все электроны (первичные и вторичные) не достигнут анода (задняя граница пространства, в котором имеются ионизирующие частицы — электроны, перемещается к аноду). Для того чтобы разряд стал самостоятельным, необходимо наличие двух встречных лавин ионов, что возможно только в том случае, если ионизацию ударом способны вызывать носители обоих знаков.

<sup>1</sup> Вследствие большей длины свободного пробега электроны раньше приобретают способность вызывать ионизацию ударом, чем газовые ионы.

Весьма важно, что несамостоятельные разрядные токи, усиленные за счет размножения носителей, пропорциональны числу первичных ионов, создаваемых внешним ионизатором. Это свойство разряда используется в пропорциональных счетчиках (см. следующий параграф).

## § 82. Ионизационные камеры и счетчики

Ионизационные камеры и счетчики применяются для обнаружения и счета элементарных частиц, а также для измерения интенсивности рентгеновского и гамма-излучения. Действие этих приборов основано на использовании несамостоятельного газового разряда.

Принципиальные схемы ионизационной камеры и счетчика одинаковы (рис. 82.1). Отличаются они только режимом работы и конструктивными особенностями. Счетчик (рис. 82.1, б) состоит из цилиндрического корпуса, по оси которого натянута укрепленная на изоляторах тонкая нить (анод). Катодом служит корпус счетчи-

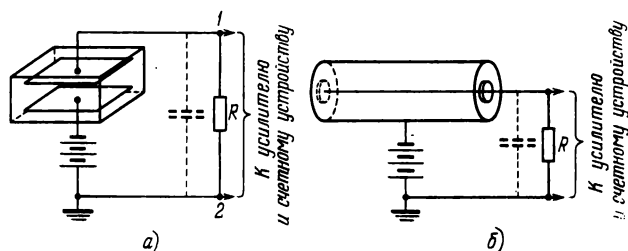


Рис. 82.1.

ка. Для впуска ионизирующих частиц в торце счетчика делается окошко из слюды или из алюминиевой фольги. Некоторые частицы, а также рентгеновское и гамма-излучение проникают в счетчик или ионизационную камеру непосредственно через их стенки. Ионизационная камера (рис. 82.1, а) может иметь электроды разной формы. В частности, они могут быть такими же, как у счетчика, либо иметь форму плоских параллельных пластин и т. д.

Допустим, что в пространство между электродами влетает быстрая заряженная частица, которая создает  $N_0$  пар первичных ионов (электронов и положительных ионов). Возникшие ионы увлекаются полем к электродам, вследствие чего через сопротивление  $R$  проходит некоторый заряд  $q$ , который мы будем называть импульсом тока. На рис. 82.2 приведена зависимость импульса тока  $q$  от напряжения  $U$  между электродами для двух различных количеств первичных ионов  $N_0$ , отличающихся в три раза ( $N_{02} = 3N_{01}$ ). На графике можно выделить шесть областей. Области I и II были рассмотрены в предыдущем параграфе. В частности, область II

есть область тока насыщения — все созданные ионизирующей частицей ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. Естественно, что при этом условии импульс тока не зависит от напряжения.

Начиная со значения  $U_p$ , напряженность поля оказывается достаточной для того, чтобы электроны могли ионизировать молекулы ударом. Поэтому количество электронов и положительных ионов лавинообразно растет. В результате на каждый из электродов падает  $AN_0$  ионов. Величина  $A$  называется коэффициентом газового усиления. В области III этот коэффициент не зависит от количества первичных ионов (но зависит от напряжения). Поэтому, если поддерживать напряжение постоянным, импульс тока будет пропорционален количеству первичных ионов. Область III называется областью пропорциональности, а напряжение  $U_p$  — порогом пропорциональной области.

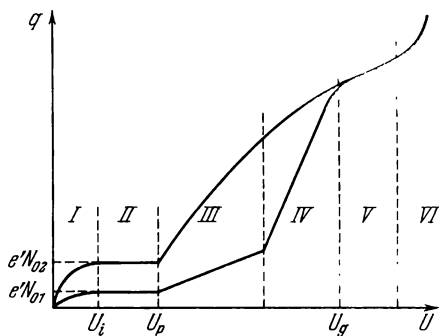


Рис. 82.2.

Коэффициент газового усиления изменяется в этой области от 1 в начале до  $10^3 \div 10^4$  в конце (рис. 82.2 выполнен без соблюдения масштаба по оси  $q$ ; выдержано лишь соотношение 1 : 3 между ординатами кривых в областях II и III).

В области IV, называемой областью частичной пропорциональности, коэффициент газового усиления  $A$  все сильнее зависит от  $N_0$ , в связи с чем различие в импульсах тока, порожденных различным количеством первичных ионов, все больше сглаживается.

При напряжениях, соответствующих области V (ее называют областью Гейгера, а напряжение  $U_g$  — порогом этой области), процесс приобретает характер самостоятельного разряда. Первичные ионы лишь создают толчок для его возникновения. Импульс тока в этой области совершенно не зависит от количества первичных ионов.

В области VI напряжение столь велико, что разряд, возникнув, не прекращается. Поэтому ее называют областью непрерывного разряда.

**Ионизационные камеры.** Ионизационной камерой называется прибор, работающий без газового усиления, т. е. при напряжениях, соответствующих области II. Существуют два типа ионизационных камер. Камеры одного типа применяются для регистрации импуль-



сов, порождаемых отдельными частицами (импульсные камеры). Влетевшая в камеру частица создает в ней некоторое количество ионов, в результате чего через сопротивление  $R$  начинает течь ток  $I$ . Это приводит к тому, что потенциал точки 1 (см. рис. 82.1, а) повышается и становится равным  $IR$  (первоначально потенциал этой точки был такой же, как и заземленной точки 2). Этот потенциал поступает на усилитель и после усиления приводит в действие счетное устройство. После того как все попавшие на внутренний электрод заряды пройдут через сопротивление  $R$ , ток прекратится и потенциал точки 1 снова станет равным нулю. Характер работы камеры зависит от длительности импульса тока, вызванного одной ионизирующей частицей.

Чтобы выяснить, от чего зависит продолжительность импульса, рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора  $C$  и сопротивления  $R$  (рис. 82.3). Если сообщить обкладкам конденсатора разноименные заряды  $+q_0$  и  $-q_0$ , через сопротивление  $R$  потечет ток, вследствие чего заряды на обкладках будут убывать. Мгновенное значение напряжения, приложенного к сопротивлению, равно  $U = q/C$ . Следовательно, для силы тока получается выражение

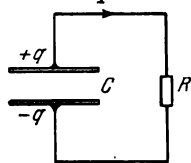


Рис. 82.3.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}. \quad (82.1)$$

Заменим силу тока через  $-dq/dt$ , где  $-dq$  — убыль заряда на обкладках за время  $dt$ . В результате получится дифференциальное уравнение

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC} \quad \text{или} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Согласно (82.1)  $dq/q = dI/I$ . Поэтому можно написать

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln I = -\frac{1}{RC} t + \ln I_0$$

(через  $\ln I_0$  обозначена постоянная интегрирования). Наконец, прологотенировав полученное выражение, придем к формуле

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (82.2)$$

Легко сообразить, что  $I_0$  представляет собой начальное значение силы тока.

Из выражения (82.2) следует, что за время

$$\tau = RC \quad (82.3)$$

сила тока уменьшается в  $e$  раз. В соответствии с этим величина (82.3) носит название постоянной времени цепи. Чем больше эта постоянная, тем медленнее спадает ток в цепи.

Схема ионизационной камеры (см. рис. 82.1, а) сходна со схемой, изображенной на рис. 82.3. Роль  $C$  играет межэлектродная емкость, показанная на схеме камеры пунктиром. С увеличением сопротивления  $R$  возрастает напряжение между точками 1 и 2 при данной силе тока и, следовательно, облегчается регистрация импульсов. Это обстоятельство побуждает применять  $R$  как можно большей величины. Вместе с тем для того, чтобы камера могла раздельно регистрировать импульсы тока, порождаемые быстро следующими друг за другом частицами, постоянная времени должна быть невелика. Поэтому при выборе величины  $R$  для импульсных камер приходится идти на компромисс. Обычно берут  $R$  порядка  $10^8$  Ом. Тогда при  $C \sim 10^{-11}$  Ф постоянная времени составляет  $10^{-3}$  с.

Другим типом ионизационных камер являются так называемые интегрирующие камеры. В них берут  $R$  порядка  $10^{15}$  Ом. При  $C \sim 10^{-11}$  Ф постоянная времени будет равна  $10^4$  с. В этом случае импульсы тока, порождаемые отдельными ионизирующими частицами, сливаются, и по сопротивлению течет постоянный ток, величина которого характеризует суммарный заряд ионов, возникающих в камере в единицу времени. Таким образом, ионизационные камеры обоих типов отличаются лишь значением постоянной времени  $RC$ .

**Пропорциональные счетчики.** Импульсы, вызываемые отдельными частицами, могут быть значительно усилены (до  $10^3 \div 10^4$  раз), если напряжение между электродами попадает в область III (см. рис. 82.2). Прибор, работающий в таком режиме, называется пропорциональным счетчиком. Анод счетчика делается в виде нити диаметром в несколько сотых миллиметра. Напряженность поля вблизи нити особенно велика. При достаточно большом напряжении между электродами электроны, возникающие вблизи нити, приобретают под действием поля энергию, достаточную для того, чтобы вызывать ионизацию молекул ударом. В результате происходит размножение ионов. Размеры объема, в пределах которого происходит размножение, увеличиваются с ростом напряжения. В соответствии с этим увеличивается и коэффициент газового усиления.

Количество первичных ионов зависит от природы и энергии частицы, вызвавшей импульс. Поэтому по величине импульсов на выходе пропорционального счетчика можно различать частицы разной природы, а также производить сортировку частиц одной и той же природы по их энергиям.

**Счетчики Гейгера — Мюллера.** Еще большего усиления импульса (до  $10^8$ ) можно достигнуть, заставив работать счетчик в области Гейгера (область V на рис. 82.2). Счетчик, работающий в этом режиме, называется счетчиком Гейгера — Мюллера

(сокращенно счетчиком Гейгера). Разряд в области Гейгера, будучи «запущен» ионизирующей частицей, в дальнейшем переходит в самостоятельный. Поэтому величина импульса не зависит от первоначальной ионизации. Для того чтобы получать от отдельных частиц отдельные импульсы, необходимо возникший разряд быстро прервать (погасить). Это достигается либо с помощью внешнего сопротивления  $R$  (в несамогасящихся счетчиках), либо за счет процессов, возникающих в самом счетчике. В последнем случае счетчик называется *самогасящимся*.

Гашение разряда с помощью внешнего сопротивления обуславливается тем, что при протекании по сопротивлению разрядного тока на нем возникает большое падение напряжения. Поэтому на межэлектродный промежуток приходится только часть приложенного напряжения, которая оказывается недостаточной для поддержания разряда.

Прекращение разряда в самогасящихся счетчиках вызывается следующими причинами. Электроны обладают примерно в 1000 раз большей подвижностью, чем положительные ионы. Поэтому за то время, за которое электроны достигают нити, положительные ионы почти не сдвигаются со своих мест. Эти ионы создают положительный пространственный заряд, ослабляющий поле вблизи нити, и разряд прекращается. Гашению разряда в этом случае препятствуют дополнительные процессы, которые мы не будем рассматривать. Для их подавления к газу, заполняющему счетчик (обычно аргону), добавляется примесь многоатомного органического газа (например, паров спирта). Такой счетчик разделяет импульсы от частиц, следующих друг за другом с интервалами порядка  $10^{-4}$  с.

### **§ 83. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде**

Прежде чем приступить к описанию различных видов самостоятельного газового разряда, рассмотрим основные процессы, приводящие к возникновению носителей тока (электронов и ионов) при подобных разрядах.

**Столкновения электронов с молекулами.** Столкновения электронов (а также ионов) с молекулами могут иметь упругий и неупругий характер. Энергия молекулы (так же как и атома) квантуется. Это означает, что она может принимать лишь дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, называемые уровнями энергии. Состояние с наименьшей энергией называется *основным*. Для того чтобы перевести молекулу из основного в различные возбужденные состояния, требуются определенные значения энергии  $W_1$ ,  $W_2$  и т. д. Сообщив молекуле достаточно большую энергию  $W_i$ , можно вызвать ее ионизацию.

Перейдя в возбужденное состояние, молекула обычно пребывает в нем всего лишь  $\sim 10^{-8}$  с, после чего переходит в основное состояние, излучив избыток энергии в виде кванта света — ф о т о н а. В некоторых возбужденных состояниях, называемых м е т а с т а б и л ь н ы м и, молекулы могут находиться значительно дольше (примерно  $10^{-3}$  с).

При соударении частиц должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Поэтому на передачу энергии при ударе накладываются определенные ограничения — не вся энергия, которой обладает ударяющая частица, может быть передана другой частице.

Если при столкновении молекуле не может быть сообщена энергия, достаточная для ее возбуждения, то суммарная кинетическая энергия частиц остается без изменений и удар будет у п р у г и м. Найдем энергию, сообщаемую ударяемой частице при упругом ударе.

Пусть частица массы  $m_1$ , имеющая скорость  $v_{10}$ , ударяется о неподвижную ( $v_{20} = 0$ ) частицу массы  $m_2$ . При центральном ударе должны выполняться условия

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частиц после удара. Из этих уравнений получается для скорости второй частицы значение

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

(см. § 28 1-го тома). Энергия, которая передается при упругом ударе второй частице, определяется выражением

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если  $m_1 \ll m_2$ , это выражение упрощается следующим образом:

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4m_1}{m_2}, \quad (83.1)$$

где  $W_{10}$  — первоначальная энергия ударяющейся частицы.

Из (83.1) вытекает, что легкая частица (электрон), ударяясь упруго о тяжелую частицу (молекулу), сообщает ей лишь малую долю своего запаса энергии. Легкая частица «отскакивает» от тяжелой, подобно мячу от стенки, с практически не изменяющейся по величине скоростью. Соответствующий расчет дает, что при нецентральной ударе доля передаваемой энергии оказывается еще меньше.

При достаточно большой энергии ударяющей частицы (электрона или иона) молекула может быть возбуждена или ионизирована. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц не со-

храняется — часть энергии затрачивается на возбуждение или ионизацию, т. е. на увеличение внутренней энергии соударяющихся частиц или на разделение одной из частиц на две.

Соударения, при которых происходит возбуждение частиц, называются неупругими столкновениями первого рода. Молекула, находящаяся в возбужденном состоянии, при столкновении с другой частицей (электроном, ионом или нейтральной молекулой) может перейти в основное состояние, не излучив избыток энергии, а передав его этой частице. В результате суммарная кинетическая энергия частиц после удара оказывается большей, чем до удара. Такие соударения называются неупругими столкновениями второго рода. Переход молекул из метастабильного состояния в основное осуществляется за счет столкновений второго рода.

При неупругом столкновении первого рода уравнения сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (83.2)$$

где  $\Delta W_{\text{вн}}$  — приращение внутренней энергии молекулы, соответствующее ее переходу в возбужденное состояние. Исключив  $v_1$  из этих уравнений, получим

$$\Delta W_{\text{вн}} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (83.3)$$

При заданной скорости ударяющей частицы ( $v_{10}$ ) приращение внутренней энергии  $\Delta W_{\text{вн}}$  зависит от скорости  $v_2$ , с которой молекула движется после удара. Найдем наибольшее возможное значение  $\Delta W_{\text{вн}}$ . Для этого продифференцируем функцию (83.3) по  $v_2$  и приравняем производную нулю:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{вн}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

Отсюда  $v_2 = m_1 v_{10} / (m_1 + m_2)$ . Подстановка этого значения  $v_2$  в формулу (83.3) дает

$$\Delta W_{\text{вн max}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \quad (83.4)$$

Если ударяющая частица значительно легче ударяемой ( $m_1 \ll m_2$ ), множитель  $m_2 / (m_1 + m_2)$  в выражении (83.4) близок к единице. Таким образом, при ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (молекулу) почти вся энергия ударяющей частицы может быть затрачена на возбуждение или ионизацию молекулы<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В случае ионизации уравнения (83.2) усложняются, так как после соударения будет не две частицы, а три. Однако заключение о возможности затраты почти всей энергии электрона на ионизацию является справедливым.

Однако даже если энергия ударяющей частицы (электрона) достаточно велика, соударение не обязательно приводит к возбуждению или ионизации молекулы. Существуют определенные вероятности этих процессов, которые зависят от энергии (а следовательно и от скорости) электрона. На рис. 83.1 показан примерный ход этих вероятностей. Чем быстрее летит электрон, тем меньший промежуток времени взаимодействует он с молекулой, пролетая вблизи нее. Поэтому обе вероятности быстро достигают максимума, а затем с увеличением энергии электрона убывают. Из рисунка видно, что электрон, имеющий, например, энергию  $W'$ , с большей вероятностью будет вызывать ионизацию молекулы, чем ее возбуждение.

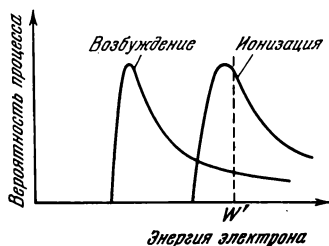


Рис. 83.1.

**Фотоионизация.** Электромагнитное излучение состоит из элементарных частиц, называемых фотонами. Энергия фотона равна  $\hbar\omega$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$  (см.

(56.5)),  $\omega$  — круговая частота излучения. Фотон может быть поглощен молекулой, причем его энергия идет на возбуждение молекулы или ее ионизацию. В этом случае ионизация молекулы называется **фотониацией**. Непосредственную (прямую) фотоионизацию способно вызвать ультрафиолетовое излучение. Энергия фотона видимого света недостаточна для отщепления электрона от молекулы. Поэтому видимое излучение не способно вызвать прямую фотоионизацию. Однако оно может обусловить так называемую **ступенчатую фотоионизацию**. Этот процесс осуществляется в два этапа. На первом этапе фотон переводит молекулу в возбужденное состояние. На втором этапе происходит ионизация возбужденной молекулы за счет ее соударения с другой молекулой.

В газовом разряде возможно возникновение коротковолнового излучения, способного вызывать прямую фотоионизацию. Достаточно быстрый электрон может при ударе не только ионизировать молекулу, но и перевести образовавшийся ион в возбужденное состояние. Переход иона в основное состояние сопровождается испусканием излучения большей частоты, чем у излучения нейтральной молекулы. Энергия фотона такого излучения оказывается достаточной для непосредственной фотоионизации.

**Испускание электронов поверхностью электродов.** Электроны могут поступать в газоразрядный объем за счет **эмиссии** (испускания) их поверхностью электродов. Такие виды эмиссии, как термоэлектронная эмиссия, вторичная электронная эмиссия и автоэлектронная эмиссия, в некоторых видах разряда играют основную роль.

Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами. Вследствие распределения по скоростям в металле всегда имеется некоторое число свободных электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер и выйти за пределы металла. При комнатной температуре количество таких электронов ничтожно мало. Однако с повышением температуры количество электронов, способных покинуть металл, очень быстро растет и при температуре порядка  $10^3$  К становится вполне ощутимым.

Вторичной электронной эмиссией называется испускание электронов поверхностью твердого или жидкого тела при бомбардировке ее электронами или ионами. Отношение числа испущенных (вторичных) электронов к числу частиц, вызвавших эмиссию, называют коэффициентом вторичной эмиссии. В случае бомбардировки поверхности металла электронами значения этого коэффициента заключены в пределах от 0,5 (для бериллия) до 1,8 (для платины).

Автоэлектронной (или холодной) эмиссией называется испускание электронов поверхностью металла, происходящее в том случае, когда вблизи поверхности создается электрическое поле очень большой напряженности ( $\sim 10^8$  В/м). Это явление иногда называют также вырыванием электронов электрическим полем.

## § 84. Газоразрядная плазма

Некоторые виды самостоятельного разряда характеризуются очень высокой степенью ионизации газа. Газ в сильно ионизированном состоянии при условии, что суммарный заряд электронов и ионов в каждом элементарном объеме равен (или почти равен) нулю, называется *плазмой*. Плазма представляет собой особое состояние вещества. В таком состоянии находится вещество в недрах Солнца и других звезд, обладающих температурой в десятки миллионов градусов. Плазма, возникшая вследствие высокой температуры вещества, называется *высокотемпературной* (или *иотермической*). Плазма, возникающая при газовом разряде, называется *газоразрядной*.

Для того чтобы плазма находилась в стационарном состоянии, необходимо наличие процессов, восполняющих убыль ионов в результате рекомбинации. В высокотемпературной плазме это осуществляется за счет термической ионизации, в газоразрядной плазме — за счет ударной ионизации электронами, ускоренными электрическим полем. Особую разновидность плазмы представляет собой *ионосфера* (один из слоев атмосферы). Высокая степень ионизации молекул ( $\sim 1\%$ ) поддерживается в ионосфере за счет

фотоионизации, обусловленной коротковолновым излучением Солнца.

Электроны в газоразрядной плазме участвуют в двух движениях — хаотическом с некоторой средней скоростью  $\langle v \rangle$  и упорядоченном движении в направлении, противоположном  $\mathbf{E}$ , со средней скоростью  $\langle u \rangle$ , гораздо меньшей, чем  $\langle v \rangle$ .

Докажем, что электрическое поле не только обуславливает упорядоченное движение электронов плазмы, но и увеличивает скорость  $\langle v \rangle$  их хаотического движения. Пусть в момент включения поля в газе имеется некоторое количество электронов, средняя скорость которых соответствует температуре газа  $T_e$  ( $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT_e$ ). За время между двумя последовательными соударениями с молекулами электрон проходит в среднем путь  $\lambda$  (рис. 84.1; траектория электрона слегка искривлена под действием силы  $-e\mathbf{E}$ ). При этом поле совершает над ним работу

$$A = eEl_F, \quad (84.1)$$

где  $l_F$  — проекция перемещения электрона на направление действующей на него силы. Вследствие соударений с молекулами направление движения электрона все время изменяется случайным образом. Соответственно изменяется величина и знак  $l_F$ . Поэтому работа (84.1) для отдельных участков траектории имеет неодинаковую величину и разный знак. На одних участках поле увеличивает энергию электрона, на других уменьшает. Если бы упорядоченное движение электронов отсутствовало, среднее значение  $l_F$ , а следовательно и работы (84.1), было бы равно нулю. Однако наличие упорядоченного движения приводит к тому, что среднее значение работы  $A$  отлично от нуля и притом положительно. Оно равно

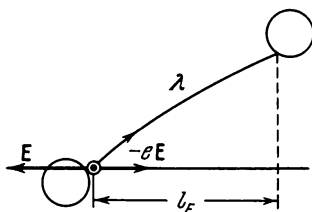


Рис. 84.1.

$$\langle A \rangle = eE\langle u \rangle \tau = eE\langle u \rangle \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (84.2)$$

где  $\tau$  — средняя продолжительность свободного пробега электронов ( $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$ ).

Таким образом, поле в среднем увеличивает энергию электронов. Правда, электрон, столкнувшись с молекулой, передает ей часть своей энергии. Но, как мы выяснили в предыдущем параграфе, относительная доля  $\delta$  переданной при упругом ударе энергии очень мала — она в среднем равна<sup>1</sup>  $\langle \delta \rangle = 2(m/M)$  ( $m$  — масса электрона,  $M$  — масса молекулы).

<sup>1</sup> Согласно формуле (83.1) при центральном ударе  $\delta = 4(m/M)$ . В случае, когда электрон и молекула лишь слегка «задевают» друг друга,  $\delta \approx 0$ .



В разреженном газе (в котором  $\lambda$  больше) и при достаточно большой напряженности поля  $E$  работа (84.2) может превзойти энергию  $^{1/2}m\langle v^2 \rangle \cdot \langle \delta \rangle$ , передаваемую в среднем молекуле при каждом столкновении. В результате энергия хаотического движения электронов будет расти. В конце концов она достигнет значения, достаточного для того, чтобы возбудить или ионизировать молекулу. Начиная с этого момента, часть соударений перестает быть упругой и сопровождается большой потерей энергии. Поэтому средняя доля передаваемой энергии  $\langle \delta \rangle$  увеличивается.

Итак, энергию, необходимую для ионизации, электроны приобретают не за один свободный пробег, а постепенно накапливают ее на протяжении ряда пробегов. Ионизация приводит к возникновению большого количества электронов и положительных ионов — возникает плазма.

Энергия электронов плазмы определяется условием, что среднее значение работы, совершаемой полем над электроном за один свободный пробег, равно среднему значению энергии, отдаваемой электроном при соударении с молекулой:

$$eE\langle u \rangle \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} \langle \delta \rangle.$$

Здесь  $\langle \delta \rangle$  есть сложная функция скорости  $\langle v \rangle$ .

Опыт дает, что для электронов в газоразрядной плазме имеет место максвелловское распределение по скоростям. Вследствие слабого взаимодействия электронов с молекулами (при упругом ударе  $\delta$  очень мало, а относительное количество неупругих соударений незначительно) средняя скорость хаотического движения электронов оказывается во много раз больше скорости, соответствующей температуре газа  $T_g$ . Если ввести температуру электронов  $T_e$ , определив ее из соотношения

$$^{1/2}m\langle v^2 \rangle = ^{3/2}kT_e,$$

то для  $T_e$  получается значение порядка нескольких десятков тысяч кельвин. Несовпадение температур  $T_g$  и  $T_e$  свидетельствует о том, что между электронами и молекулами в газоразрядной плазме нет термодинамического равновесия<sup>1</sup>.

Концентрация носителей тока в плазме очень велика. Поэтому плазма обладает хорошей проводимостью. Подвижность электронов примерно на три порядка больше, чем у ионов, вследствие чего ток в плазме создается в основном электронами.

<sup>1</sup> В высокотемпературной плазме средняя энергия молекул, электронов и ионов одинакова. Этим объясняется ее другое название — изотермическая.

### § 85. Тлеющий разряд

Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке длиной около 0,5 м, с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 85.1). На электроды подается напряжение порядка 1000 В. При атмосферном давлении тока в трубке практически нет. Если понижать давление, то примерно при 50 мм рт. ст. возникает разряд в виде светящегося извилистого тонкого шнура, соединяющего анод с катодом. По мере понижения давления шнур утолщается и приблизительно при 5 мм рт. ст. заполняет все сечение трубки — устанавливается тлеющий разряд. Его основные части показаны на рис. 85.1. Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый катодной светящейся пленкой. Между катодом и

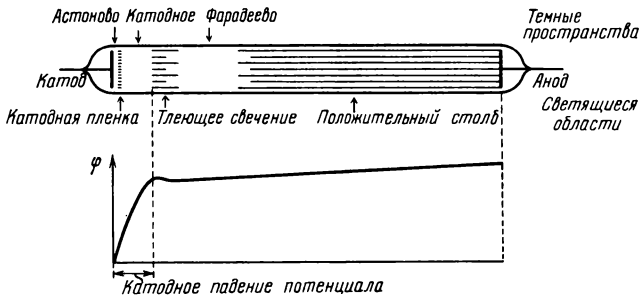


Рис. 85.1.

светящейся пленкой находится астоново темное пространство. По другую сторону светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый катодным (или круковым) темным пространством. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют тлеющим свечением. Все перечисленные слои образуют катодную часть тлеющего разряда.

С тлеющим свечением граничит темный промежуток — фарадеево темное пространство. Граница между ними размыта. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом; ее называют положительным столбом. При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При давлении порядка 1 мм рт. ст. положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых изогнутых слоев — страт.

Измерения, осуществленные с помощью зондов (тоненьких проволочек, впаянных в разных точках вдоль трубки), а также

другими методами, показали, что потенциал изменяется вдоль трубки неравномерно (см. график на рис. 85.1). Почти все падение потенциала приходится на первые три участка разряда по катодное темное пространство включительно. Эту часть напряжения, приложенного к трубке, называют катодным падением потенциала. В области тлеющего свечения потенциал не изменяется — здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растет. Такое распределение потенциала вызвано образованием в области катодного темного пространства положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Основные процессы, необходимые для поддержания тлеющего разряда, происходят в его катодной части. Остальные части разряда не существенны, они могут даже отсутствовать (при малом расстоянии между электродами или при низком давлении). Основных процессов два — вторичная электронная эмиссия из катода, вызванная бомбардировкой его положительными ионами, и ударная ионизация электронами молекул газа.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. В основном темном пространстве эти электроны ускоряются электрическим полем. Приобретая достаточную энергию, они начинают возбуждать молекулы газа, в результате чего возникает катодная светящаяся пленка. Электроны, пролетевшие без столкновений в области катодного темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают (см. графики на рис. 83.1). Таким образом, интенсивность свечения газа уменьшается, но зато образуется много электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость. Поэтому в катодном темном пространстве создается положительный пространственный заряд, что приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие в катодном темном пространстве, проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов и суммарным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала. Благодаря высокой концентрации электронов и ионов в области тлеющего свечения идет интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево темное пространство электроны и ионы проникают за счет диффузии (на границе между этими областями поле отсутствует, но зато имеется большой

градиент концентрации электронов и ионов). Вследствие меньшей концентрации заряженных частиц вероятность рекомбинации в фарадеевом темном пространстве сильно падает. Поэтому фарадеево пространство и кажется темным.

В фарадеевом темном пространстве уже имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны постепенно накапливают энергию, так что в конце концов возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано в основном переходами возбужденных молекул в основное состояние. Молекулы разных газов испускают при таких переходах излучение разной длины волны. Поэтому свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет. Это обстоятельство используется в газосветных трубках для изготовления светящихся надписей и реклам. Эти надписи представляют собой не что иное, как положительный столб тлеющего разряда. Неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргонные — синевато-зеленое и т. д.

Если постепенно уменьшать расстояние между электродами, катодная часть разряда остается без изменений, длина же положительного столба уменьшается, пока этот столб не исчезает совсем. В дальнейшем исчезает фарадеево темное пространство и начинает сокращаться протяженность тлеющего свечения, причем положение границы этого свечения с катодным темным пространством остается неизменным. Когда расстояние анода до этой границы становится очень малым, разряд прекращается.

Если постепенно понижать давление, катодная часть разряда распространяется на все большую часть межэлектродного пространства, и в конце концов катодное темное пространство распространяется почти на весь сосуд. Свечение газа в этом случае перестает быть заметным, зато стенки трубки начинают светиться зеленоватым свечением. Большинство электронов, выбитых из катода и ускоренных катодным падением потенциала, долетает без столкновений с молекулами газа до стенок трубки и, ударяясь о них, вызывает свечение. По историческим причинам поток электронов, испускаемый катодом газоразрядной трубки при очень низких давлениях, получил название **к а т о д н ы х л у ч е й**. Свечение, вызываемое бомбардировкой быстрыми электронами, называется **к а т о д о л ю м и н е с ц е н ц и е й**.

Если в катод газоразрядной трубки сделать узкий канал, часть положительных ионов проникает в пространство за катодом и образует резко ограниченный пучок ионов, называемый **к а н а л о в ы м и** (или **п о л о ж и т е л ь н ы м и**) **л у ч а м и**. Именно таким способом были впервые получены пучки положительных ионов.

## § 86. Дуговой разряд

В 1802 г. В. В. Петров обнаружил, что при разведении первоначально соприкасавшихся угольных электродов, подключенных к большой гальванической батарее, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем открытое В. В. Петровым явление было названо *электрической дугой*. Сила тока в дуге может достигать огромных значений ( $10^3 \div 10^4$  А) при напряжении в несколько десятков вольт.

Дуговой разряд может протекать как при низком (порядка нескольких миллиметров ртутного столба), так и при высоком (до 1000 атм) давлении. Основными процессами, поддерживающими разряд, являются термоэлектронная эмиссия с раскаленной поверхности катода и термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа в межэлектродном промежутке. Почти все межэлектродное пространство заполнено высокотемпературной плазмой. Она служит проводником, по которому электроны, испущенные катодом, достигают анода. Температура плазмы составляет около 6000 К. В дуге сверхвысокого давления температура плазмы может достигать 10 000 К (напомним, что температура поверхности Солнца равна 5800 К). Вследствие бомбардировки положительными ионами катод раскаляется примерно до 3500 К. Анод, бомбардируемый мощным потоком электронов, разогревается

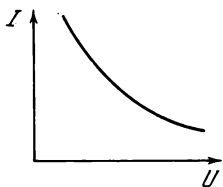


Рис. 86.1.

еще больше. Это приводит к тому, что анод интенсивно испаряется и на его поверхности образуется углубление — кратер. Кратер является самым ярким местом дуги.

Дуговой разряд обладает падающей вольтамперной характеристикой (рис. 86.1). Это объясняется тем, что при увеличении силы тока возрастают термоэлектронная эмиссия с катода и степень ионизации газоразрядного промежутка. В результате сопротивление этого промежутка уменьшается сильнее, чем возрастает ток.

Кроме описанной выше термоэлектронной дуги (т. е. разряда, обусловленного термоэлектронной эмиссией с раскаленной поверхности катода), бывает *дуга с холодным катодом*. Катодом такой дуги служит обычно жидкая ртуть, налитая в баллон, из которого удален воздух. Разряд происходит в парах ртути. Электроны вылетают из катода за счет автоэлектронной эмиссии. Необходимое для этого сильное поле у поверхности катода создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами. Электроны испускаются не всей поверхностью катода,

а небольшим ярко светящимся и непрерывно перемещающимся катодным пятном. Температура газа в этом случае невелика. Ионизация молекул в плазме происходит, как и при тлеющем разряде, за счет электронных ударов.

### § 87. Искровой и коронный разряды

Искровой разряд возникает в тех случаях, когда напряженность электрического поля достигает пробивного для данного газа значения  $E_{\text{пр}}$ . Значение  $E_{\text{пр}}$  зависит от давления газа; для воздуха при атмосферном давлении оно составляет около 3 МВ/м (30 кВ/см). С увеличением давления  $E_{\text{пр}}$  возрастает. Согласно экспериментальному закону Пашена отношение пробивной напряженности поля к давлению приблизительно постоянно:

$$\frac{E_{\text{пр}}}{p} \approx \text{const.}$$

Искровой разряд сопровождается образованием ярко светящегося извилистого, разветвленного канала, по которому проходит кратковременный импульс тока большой силы. Примером может служить молния; длина ее бывает до 10 км, диаметр канала — до 40 см, сила тока может достигать 100 000 и более ампер, продолжительность импульса составляет около  $10^{-4}$  с. Каждая молния состоит из нескольких (до 50) импульсов, следующих по одному



Рис. 87.1.

и тому же каналу; их общая длительность (вместе с промежутками между импульсами) может достигать нескольких секунд. Температура газа в искровом канале бывает до 10 000 К. Быстрый сильный нагрев газа приводит к резкому повышению давления и возникновению ударных и звуковых волн. Поэтому искровой разряд сопровождается звуковыми явлениями — от слабого треска при искре малой мощности до раскатов грома, сопровождающих молнию.

Возникновению искры предшествует образование в газе сильно ионизированного канала, получившего название *стримера*. Этот канал получается путем перекрытия отдельных электронных лавин, возникающих на пути искры. Родоначальником каждой лавины служит электрон, образующийся путем фотоионизации. Схема развития стримера показана на рис. 87.1. Пусть напряженность поля такова, что электрон, вылетевший за счет какого-либо процесса из катода, приобретает на длине свободного пробега энер-

гию, достаточную для ионизации. Поэтому происходит размножение электронов — возникает лавина (образующиеся при этом положительные ионы не играют существенной роли вследствие гораздо меньшей подвижности; они лишь обуславливают пространственный заряд, вызывающий перераспределение потенциала). Коротковолновое излучение, испускаемое атомом, у которого при ионизации был вырван один из внутренних электронов (это излучение показано на схеме волнистыми линиями), вызывает фотоионизацию молекул, причем образовавшиеся электроны порождают все новые лавины. После перекрывания лавин образуется хорошо проводящий канал — стример, по которому устремляется от катода к аноду мощный поток электронов — происходит пробой.

Если электроды имеют форму, при которой поле в межэлектродном пространстве приблизительно однородно (например, представляя собой шары достаточно большого диаметра), то пробой возникает при вполне определенном напряжении  $U_{пр}$ , значение которого зависит от расстояния между шарами  $l$  ( $U_{пр} = E_{пр}l$ ). На этом основан искровой вольтметр, с помощью которого измеряют высокое напряжение ( $10^3 \div 10^5$  В). При измерениях определяется наибольшее расстояние  $l_{мах}$ , при котором возникает искра. Умножив затем  $E_{пр}$  на  $l_{мах}$ , получают значение измеряемого напряжения.

Если один из электродов (или оба) имеет очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие), то при не слишком большом напряжении возникает так называемый **к о р о н н ы й р а з р я д**. При увеличении напряжения этот разряд переходит в искровой или дуговой.

При коронном разряде ионизация и возбуждение молекул происходят не во всем межэлектродном пространстве, а лишь вблизи электрода с малым радиусом кривизны, где напряженность поля достигает значений, равных или превышающих  $E_{пр}$ . В этой части разряда газ светится. Свечение имеет вид короны, окружающей электрод, чем и вызвано название этого вида разряда. Коронный разряд с острия имеет вид светящейся кисти, в связи с чем его иногда называют **к и с т е в ы м р а з р я д о м**. В зависимости от знака коронирующего электрода говорят о положительной или отрицательной короне. Между коронирующим слоем и некоронирующим электродом расположена **в н е ш н я я о б л а с т ь к о р о н ы**. Режим пробоя ( $E \geq E_{пр}$ ) существует только в пределах коронирующего слоя. Поэтому можно сказать, что коронный разряд представляет собой неполный пробой газового промежутка.

В случае отрицательной короны явления на катоде сходны с явлениями на катоде тлеющего разряда. Ускоренные полем положительные ионы выбивают из катода электроны, которые вызывают ионизацию и возбуждение молекул в коронирующем слое. Во внешней области короны поле недостаточно для того, чтобы сообщить электронам энергию, необходимую для ионизации или возбуждения

молекул. Поэтому проникшие в эту область электроны дрейфуют под действием поля к аноду. Часть электронов захватывается молекулами, вследствие чего образуются отрицательные ионы. Таким образом, ток во внешней области обуславливается только отрицательными носителями — электронами и отрицательными ионами. В этой области разряд имеет несамостоятельный характер.

В положительной короне электронные лавины зарождаются у внешней границы короны и устремляются к коронирующему электроду — аноду. Возникновение электронов, порождающих лавины, обусловлено фотоионизацией, вызванной излучением коронирующего слоя. Носителями тока во внешней области короны служат положительные ионы, которые дрейфуют под действием поля к катоду.

Если оба электрода имеют большую кривизну (два коронирующих электрода), вблизи каждого из них протекают процессы, приходящие коронирующему электроду данного знака. Оба коронирующих слоя разделяются внешней областью, в которой движутся встречные потоки положительных и отрицательных носителей тока. Такая корона называется дипольной.

Упомянутый в § 82 при рассмотрении счетчиков самостоятельный газовый разряд представляет собой коронный разряд.

Толщина коронирующего слоя и сила разрядного тока растут с увеличением напряжения. При небольшом напряжении размеры короны малы и ее свечение незаметно. Такая микроскопическая корона возникает вблизи острия, с которого стекает электрический ветер (см. § 24).

Корона, появляющаяся под действием атмосферного электричества на верхушках корабельных мачт, деревьев и т. п., получила в старину название огня святого Эльма.

В высоковольтных устройствах, в частности в линиях высоковольтных передач, коронный разряд приводит к вредным утечкам тока. Поэтому приходится принимать меры для его предотвращения. С этой целью, например, провода высоковольтных линий берут достаточно большого диаметра, тем большего, чем выше напряжение линии.

Полезное применение в технике коронный разряд нашел в электрофильтрах. Очищаемый газ движется в трубе, по оси которой расположен отрицательный коронирующий электрод. Отрицательные ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней области короны, оседают на загрязняющих газ частицах или капельках и увлекаются вместе с ними к внешнему некоронирующему электроду. Достигнув этого электрода, частицы нейтрализуются и оседают на нем. Впоследствии при ударах по трубе осадок, образованный уловленными частицами, осыпается в сборник.



## ГЛАВА XIII

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 88. Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с огромной скоростью, равной скорости света  $c$ . Пусть длина цепи равна  $l$ . Если за время  $\tau = l/c$ , необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются квазистационарными. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности имеет вид

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где  $T$  — период изменений.

Для цепи длиной 3 м запаздывание  $\tau = 10^{-8}$  с. Таким образом, вплоть до  $T$  порядка  $10^{-6}$  с (что соответствует частоте  $10^6$  Гц) токи в такой цепи можно считать квазистационарными. Ток промышленной частоты ( $\nu = 50$  Гц) квазистационарен для цепей длиной до  $\sim 100$  км.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома. Следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.

В дальнейшем при изучении электрических колебаний мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые нами токи квазистационарны.

### § 89. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность и емкость, могут возникать электрические колебания. Поэтому такая цепь называется **колебательным контуром**. На рис. 89.1, *a* изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, не обладающем активным сопротивлением.

Колебания в контуре можно вызвать, либо сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд, либо возбуждив в индуктивности ток (например, путем выключения внешнего магнитного поля, пронизывавшего витки катушки). Воспользуемся первым

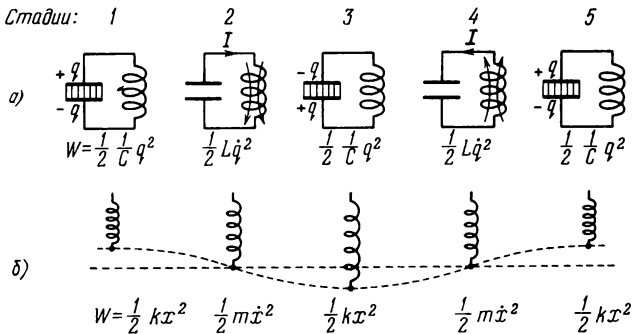


Рис. 89.1.

способом. Присоединим отключенный от индуктивности конденсатор к источнику напряжения. Это приведет к возникновению на обкладках разноименных зарядов  $+q$  и  $-q$  (стадия 1). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна  $\frac{1}{2} (q^2/C)$  (см. формулу (29.2)). Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна  $\frac{1}{2} L I^2$  (см. формулу (67.4)).

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, состоящая из энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов и будет оставаться постоянной<sup>1</sup>. Поэтому в момент, когда напряжение на конденса-

<sup>1</sup> Строго говоря, в таком идеализированном контуре происходила бы потеря энергии на излучение электромагнитных волн. Эта потеря тем значительнее, чем больше частота колебаний и чем более «открыт» контур.

торе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (стадия 2; начиная с этого момента ток течет за счет э. д. с. самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается, и, когда заряды на обкладках достигнут первоначального значения  $q$ , сила тока станет равной нулю (стадия 3). Затем те же процессы протекают в обратном направлении (стадии 4 и 5), после чего система приходит в исходное состояние (стадия 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе процесса периодически изменяются (т. е. колеблются) заряд на обкладках, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 89.1, б колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения  $x$ . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная  $\frac{1}{2}kx^2$ . Стадии 2 соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую и определяется выражением  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Сопоставление дальнейших стадий предоставляем читателю.

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля  $\frac{1}{2}(q^2/C)$  аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля  $\frac{1}{2}LI^2$  аналогична кинетической энергии. Индуктивность  $L$  играет роль массы  $m$ , величина, обратная емкости  $(1/C)$ , — роль жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , а силе тока  $I = \dot{q}$  — скорость  $\dot{x}$ . Ниже мы увидим, что аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Найдем уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Условимся считать положительным ток, заряжающий конденсатор<sup>1</sup> (рис. 89.2). Тогда

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \quad (89.1)$$

Напишем для цепи 1—3—2 выражение закона Ома

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \quad (89.2)$$

<sup>1</sup> При таком выборе направления тока аналогия между электрическими и механическими колебаниями оказывается более полной — скорости  $\dot{x}$  соответствует  $\dot{q}$  (при ином выборе скорости  $\dot{x}$  соответствует  $-\dot{q}$ ).

(см. (35.3)). В нашем случае  $R = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ ,  $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s = -L(dI/dt)$ . Подстановка этих значений в (89.2) дает

$$0 = -q/C - L(dI/dt). \quad (89.3)$$

Наконец, заменив  $dI/dt$  через  $\ddot{q}$  (см. (89.1)), получим уравнение

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (89.4)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (89.5)$$

уравнение (89.4) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (89.6)$$

хорошо знакомый нам из учения о механических колебаниях (см. формулу (53.1) 1-го тома). Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (89.7)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой выражением (89.5). Эта частота называется собственной частотой контура (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора). Для периода колебаний получается так называемая формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (89.8)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (89.9)$$

Продифференцировав функцию (89.7) по времени, получим выражение для силы тока

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (89.10)$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ .

Сопоставление формул (89.7) и (89.9) с формулой (89.10) показывает, что в момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

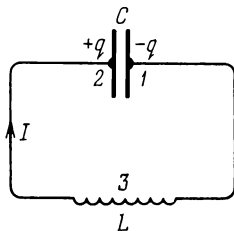


Рис. 89.2.

Из формул (89.9) и (89.10) следует, что

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

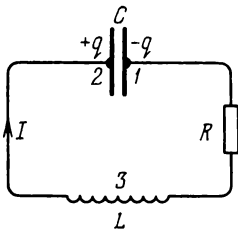
Взяв отношение этих амплитуд и заменив  $\omega_0$  по формуле (89.5), получим

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (89.11)$$

Эту формулу можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля  $^{1/2} C U_m^2$  должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля  $^{1/2} L I_m^2$ .

### § 90. Свободные затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. Уравнение (89.2), написанное для цепи 1—3—2, изображенной на рис. 90.1, имеет вид



$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} \quad (90.1)$$

(ср. с (89.3)). Разделив это уравнение на  $L$  и заменив  $I$  через  $\dot{q}$ , а  $dI/dt$  через  $\ddot{q}$ , получим

Рис. 90.1.

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (90.2)$$

Приняв во внимание, что величина, обратная  $LC$ , равна квадрату собственной частоты контура  $\omega_0$  (см. формулу (89.5)), и введя обозначение

$$\beta = R/2L, \quad (90.3)$$

уравнению (90.2) можно придать вид

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (90.4)$$

Последнее уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний (см. формулу (58.1) 1-го тома).

При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , т. е.  $R^2/4L^2 < 1/LC$ , решение уравнения (90.4) имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (90.5)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Подставив значение (89.5) для  $\omega_0$  и (90.3) для  $\beta$ , найдем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (90.6)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний  $\omega$  меньше собственной частоты  $\omega_0$ . При  $R = 0$  выражение (90.6) переходит в (89.5).

Разделив функцию (90.5) на емкость  $C$ , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (90.7)$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем (90.5) по времени:

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Умножив правую часть этой формулы на равное единице выражение  $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ , получим

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

Введя угол  $\psi$ , определяемый условиями

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

можно написать

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi). \quad (90.8)$$

Поскольку  $\cos \psi < 0$ , а  $\sin \psi > 0$ , значение  $\psi$  заключено в пределах от  $\pi/2$  до  $\pi$  ( $\pi/2 < \psi < \pi$ ). Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\pi/2$  (при  $R = 0$  опережение составляет  $\pi/2$ ).

График функции (90.5) изображен на рис. 90.2. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

Затухание колебаний принято характеризовать л о г а р и ф м и ч е с к и м д е к р е м е н т о м з а т у х а н и я

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \quad (90.9)$$

(см. формулу (58.9) 1-го тома). Здесь  $a(t)$  — амплитуда соответствующей величины ( $q$ ,  $U$  или  $I$ ). Напомним, что логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний  $N_e$ , совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$\lambda = 1/N_e.$$

Подставив в (90.9) значение (90.3) для  $\beta$  и заменив  $T$  через  $2\pi/\omega$ , получим для  $\lambda$  следующее выражение:

$$\lambda = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \quad (90.10)$$

Частота  $\omega$ , а следовательно, и  $\lambda$  определяются параметрами контура  $L$ ,  $C$  и  $R$ . Таким образом, логарифмический декремент затухания является характеристикой контура.

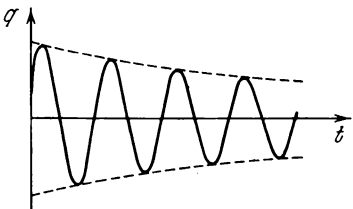


Рис. 90.2.

Если затухание невелико ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), можно положить в (90.10)  $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Тогда

$$\lambda \approx \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (90.11)$$

Колебательный контур часто характеризуют его добротностью  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (90.12)$$

Из (90.12) следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевает совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

В случае слабого затухания

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (90.13)$$

(см. (90.11)).

В § 58 1-го тома было показано, что при слабом затухании добротность механической колебательной системы с точностью до множителя  $2\pi$  равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний. Покажем, что это справедливо и для электрических колебаний. Амплитуда силы тока в контуре убывает по закону  $e^{-\beta t}$ . Энергия  $W$ , запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе); следовательно,  $W$  убывает по закону  $e^{-2\beta t}$ . Относительное уменьшение энергии за период равно

$$\frac{-\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\lambda}.$$

При незначительном затухании (т. е. при условии, что  $\lambda \ll 1$ ) можно  $e^{-2\lambda}$  приближенно положить равным  $1 - 2\lambda$ :

$$\frac{-\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Наконец, заменив в этом выражении  $\lambda$  через добротность контура  $Q$  в соответствии с формулой (90.12) и решив полученное уравнение относительно  $Q$ , получим

$$Q = 2\pi \frac{W}{-\Delta W}. \quad (90.14)$$

В заключение отметим, что при  $R^2/4L^2 \geq 1/LC$ , т. е. при  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим. Значение критического сопротивления  $R_k$  определяется условием  $R_k^2/4L^2 = 1/LC$ , откуда

$$R_k = 2\sqrt{L/C}. \quad (90.15)$$

### § 91. Вынужденные электрические колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура переменную э. д. с. или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t \quad (91.1)$$

Рис. 91.1.

(рис. 91.1). Это напряжение нужно прибавить к э. д. с. самоиндукции. В результате формула (90.1) примет вид

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (91.2)$$

Произведя преобразование, получим уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (91.3)$$

Здесь  $\omega_0^2$  и  $\beta$  определяются формулами (89.5) и (90.3).

Уравнение (91.3) совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний (см. формулу (60.1) 1-го тома). Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (91.4)$$

где

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



(см. формулу (60.9) 1-го тома). Подстановка значений  $\omega_0^2$  и  $\beta$  дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (91.5)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L}. \quad (91.6)$$

Общее решение получится, если к частному решению (91.4) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Это решение было получено в предыдущем параграфе (см. формулу (90.5)); оно содержит экспоненциальный множитель  $e^{-\beta t}$ , поэтому по прошествии достаточного времени становится очень малым и им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией (91.4).

Продифференцировав выражение (91.4) по  $t$ , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2)$$

( $I_m = \omega q_m$ ). Запишем это выражение в виде<sup>1</sup>

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (91.7)$$

где  $\varphi = \psi - \pi/2$  есть сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (91.1)). В соответствии с (91.6)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (91.8)$$

Из этой формулы следует, что ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ) в том случае, когда  $\omega L > 1/\omega C$ , и опережает напряжение ( $\varphi < 0$ ) при условии, что  $\omega L < 1/\omega C$ . Согласно (91.5)

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (91.9)$$

Представим соотношение (91.2) в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (91.10)$$

Произведение  $IR$  равно напряжению  $U_R$  на активном сопротивлении,  $q/C$  есть напряжение на конденсаторе  $U_C$ , выражение  $L(dI/dt)$  определяет напряжение на индуктивности  $U_L$ . С учетом этого можно написать

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (91.11)$$

Таким образом, сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени напряжению, приложенному извне (см. рис. 91.1).

<sup>1</sup> До конца этой главы мы не встретимся с понятием потенциала. Поэтому обозначение фазового угла буквой  $\varphi$  не сможет привести к недоразумениям.

В соответствии с (91.7)

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (91.12)$$

Разделив выражение (91.4) на емкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (91.13)$$

Здесь

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (91.14)$$

(см. (91.9)). Умножив производную функцию (91.7) на  $L$ , получим напряжение на индуктивности:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (91.15)$$

Здесь

$$U_{Lm} = \omega LI_m. \quad (91.16)$$

Сопоставление формул (91.7), (91.12), (91.13) и (91.15) показывает, что напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на  $\pi/2$ , а напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ . Напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током. Фазовые соотношения можно представить очень наглядно с помощью векторной диаграммы (см. § 55 1-го тома). Напомним, что гармоническое колебание (или гармоническую функцию) можно задать с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с некоторой осью угол, равный начальной фазе колебания. Возьмем в качестве прямой, от которой отсчитывается начальная фаза, ось токов. Тогда получается диаграмма, изображенная на рис. 91.2. Согласно (91.11) три функции  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$  в сумме должны быть равны приложенному напряжению  $U$ . В соответствии с этим напряжение  $U$  изображается на диаграмме вектором, равным сумме векторов  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$ . Заметим, что из прямоугольного треугольника, образованного на диаграмме векторами  $U$ ,  $U_R$  и разностью  $U_L - U_C$ , легко получить формулу (91.9).

Резонансная частота для заряда  $q$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$  равна

$$\omega_{q \text{ рез}} = \omega_{U \text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 \quad (91.17)$$

(см. формулу (60.17) 1-го тома).

Резонансные кривые для  $U_C$  изображены на рис. 91.3 (резонансные кривые для  $q$  имеют такой же вид). Они сходны с резонансными кривыми, получающимися для механических колебаний (см. рис. 60.3 1-го тома). При  $\omega \rightarrow 0$  резонансные кривые сходятся в одной

точке с ординатой  $U_{Cm} = U_m$  — напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения  $U_m$ . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше  $\beta = R/2L$ , т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 91.4. Они соответствуют резонансным кривым для скорости при механических колебаниях. Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при  $\omega L - 1/\omega C = 0$  (см. (91.9)). Следовательно, резонанс-

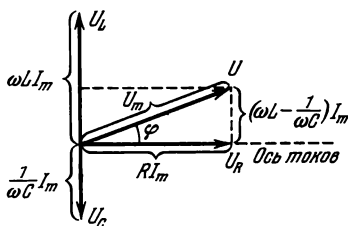


Рис. 91.2.

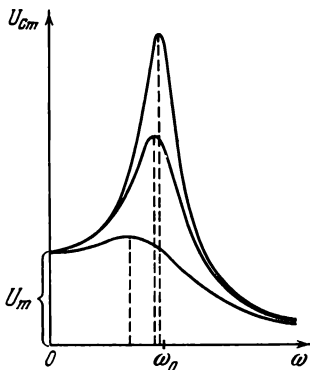


Рис. 91.3.

ная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура  $\omega_0$ :

$$\omega_{I \text{ рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (91.18)$$

Отрезок, отсекаемый резонансными кривыми на оси  $I_m$ , равен нулю — при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может.

При малом затухании (при  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансную частоту для напряжения можно положить равной  $\omega_0$  (см. (91.17)). Соответственно можно считать, что  $\omega_{\text{рез}}L - 1/\omega_{\text{рез}}C \approx 0$ . Согласно формуле (91.14) отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{Cm \text{ рез}}$  к амплитуде внешнего напряжения  $U_m$  будет в этом случае равно

$$\frac{U_{Cm \text{ рез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (91.19)$$

(мы положили в (91.14)  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \omega_0$ ). Здесь  $Q$  — добротность контура (см. (90.13)). Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение.

Добротность контура определяет также остроту резонансных кривых. На рис. 91.5 показана одна из резонансных кривых для

силы тока в контуре. По вертикальной оси отложены не значения  $I_m$ , соответствующие данной частоте, а отношение  $I_m$  к  $I_{m \text{ рез}}$  (т. е. к  $I_m$  при резонансе). Рассмотрим ширину кривой  $\Delta\omega$ , взятую на высоте 0,7 (отношению амплитуд токов, равному 0,7, соответствует отношение мощностей, равное  $0,7^2 \approx 0,5$ ). Можно показать, что отношение этой ширины к резонансной частоте равно величине, обратной добротности контура:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (91.20)$$

Напомним, что формулы (91.19) и (91.20) верны лишь при больших значениях  $Q$ , т. е. в случае когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

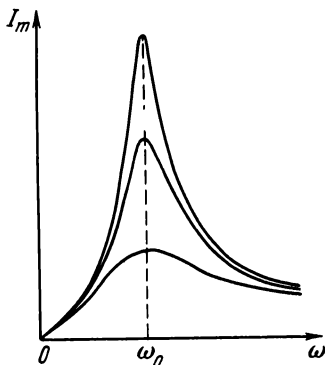


Рис. 91.4.

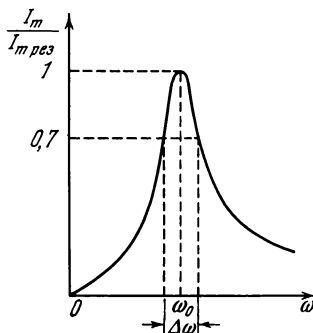


Рис. 91.5.

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно

$$U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Настроив контур на одну из частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и т. д. (т. е. подобрав соответствующим образом его параметры  $C$  и  $L$ ), можно получить на конденсаторе напряжение, в  $Q$  раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

## § 92. Переменный ток

Описанные в предыдущем параграфе установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением, переменного тока, обусловленного переменным напряжением

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (92.1)$$

Согласно формулам (91.7), (91.8) и (91.9) этот ток изменяется по закону

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (92.2)$$

Амплитуда тока определяется амплитудой напряжения  $U_m$ , параметрами цепи  $C$ ,  $L$ ,  $R$  и частотой  $\omega$ :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (92.3)$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , который зависит от параметров цепи и частоты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (92.4)$$

В случае, когда  $\varphi < 0$ , ток фактически опережает напряжение.

Стоящее в знаменателе формулы (92.3) выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (92.5)$$

называется полным электрическим сопротивлением или импедансом.

Если цепь состоит из одного лишь активного сопротивления  $R$ , уравнение закона Ома имеет вид

$$IR = U_m \cos \omega t.$$

Отсюда следует, что ток в этом случае изменяется в фазе с напряжением, а амплитуда силы тока равна

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Сравнение этого выражения с (92.3) показывает, что замена конденсатора закороченным участком цепи означает переход не к  $C = 0$ , а к  $C = \infty$ .

Всякая реальная цепь обладает конечными  $R$ ,  $L$  и  $C$ . В отдельных случаях некоторые из этих параметров бывают таковы, что их влиянием на ток можно пренебречь. Допустим, что  $R$  цепи можно положить равным нулю, а  $C$  — равным бесконечности. Тогда из формул (92.3) и (92.4) следует, что

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (92.6)$$

а  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$  (соответственно  $\varphi = \pi/2$ ). Величину

$$X_L = \omega L \quad (92.7)$$

называют реактивным индуктивным сопротивлением или просто индуктивным сопротивлением цепи. Если  $L$  выразить в генри, а  $\omega$  — в  $\text{с}^{-1}$ , то  $X_L$  будет выражено в омах. Из (92.7) следует, что индуктивное сопротивление растет с частотой  $\omega$ . Постоянному току ( $\omega = 0$ ) индуктивность не оказывает сопротивления.

Ток в индуктивности отстает от напряжения на  $\pi/2$ . Соответственно напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$  (см. рис. 91.2).

Теперь допустим, что можно положить равными нулю  $R$  и  $L$ . Тогда согласно формулам (92.3) и (92.4)

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}, \quad (92.8)$$

$\operatorname{tg} \varphi = -\infty$  (т. е.  $\varphi = -\pi/2$ ). Величину

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (92.9)$$

называют реактивным емкостным сопротивлением или просто емкостным сопротивлением. Если  $C$  выразить в фарадах, а  $\omega$  — в  $\text{с}^{-1}$ , то  $X_C$  будет выражено в омах. Из (92.9) следует, что емкостное сопротивление убывает с частотой. Для постоянного тока  $X_C = \infty$  — постоянный ток через конденсатор течь не может. Поскольку  $\varphi = -\pi/2$ , ток, текущий через конденсатор, опережает напряжение на  $\pi/2$ . Соответственно напряжение на конденсаторе отстает от тока на  $\pi/2$  (см. рис. 91.2).

Наконец, допустим, что можно положить  $R$  равным нулю. В этом случае формула (92.3) переходит в

$$I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|}. \quad (92.10)$$

Величина

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \quad (92.11)$$

называется реактивным сопротивлением или реактансом.

Формулы (92.4) и (92.5) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Таким образом, если значения сопротивлений  $R$  и  $X$  отложить вдоль катетов треугольника, то длина гипотенузы будет численно равна  $Z$  (см. рис. 91.2).

Найдем мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (92.12)$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

выражению (92.12) можно придать вид

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \quad (92.13)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение  $P(t)$ , которое мы обозначим просто  $P$ . Так как среднее значение  $\cos(2\omega t - \varphi)$  равно нулю,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (92.14)$$

Из (92.13) следует, что мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой, в два раза превышающей частоту тока (рис. 92.1)

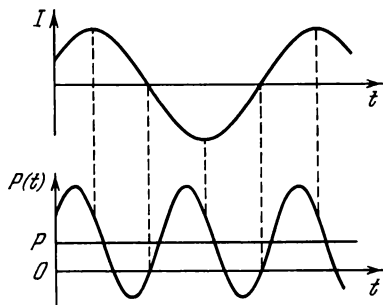


Рис. 92.1.

В соответствии с формулой (92.4)

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (92.15)$$

Подставив это значение  $\cos \varphi$  в формулу (92.14) и учтя, что  $U_m/Z = I_m$ , получим

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \quad (92.16)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (92.17)$$

Величина (92.17) называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (92.18)$$

называется действующим значением напряжения.

Выражение средней мощности через действующие значения силы тока и напряжения имеет вид

$$P = UI \cos \varphi. \quad (92.19)$$

Входящий в это выражение множитель  $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности. В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно большим. При малом  $\cos \varphi$  для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы, что приводит к возрастанию потерь в подводящих проводах.



## ЧАСТЬ 2

### ВОЛНЫ

---

#### ГЛАВА XIV

### УПРУГИЕ ВОЛНЫ

#### § 93. Распространение волн в упругой среде

Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ . Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

На рис. 93.1 показано движение частиц при распространении в среде поперечной волны. Номерами 1, 2 и т. д. обозначены частицы, отстоящие друг от друга на расстояние, равное  $\frac{1}{4}vT$ , т. е. на расстояние, проходимое волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент времени, принятый за нулевой, волна, распространяясь вдоль оси слева направо, достигла частицы 1, вследствие чего частица начала смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя четверть периода частица 1 достигает крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица 2. По прошествии еще четверти периода первая частица будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении

сверху вниз, вторая частица достигнет крайнего верхнего положения, а третья частица начнет смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, равный  $T$ , первая частица закончит полный цикл колебания и будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент. Волна к моменту времени  $T$ , пройдя путь  $vT$ , достигнет частицы 5.

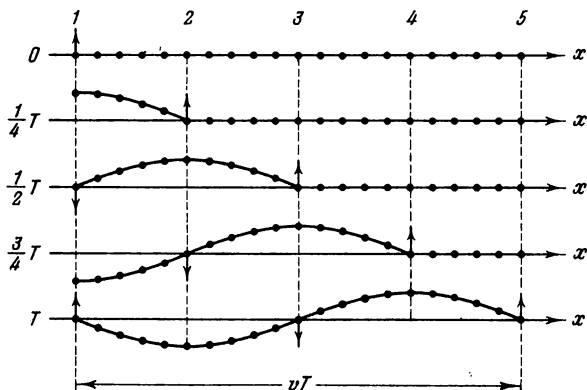


Рис. 93.1.

На рис. 93.2 показано движение частиц при распространении в среде продольной волны. Все рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, могут быть отнесены и к данному случаю с заменой смещений вверх и вниз смещениями вправо и

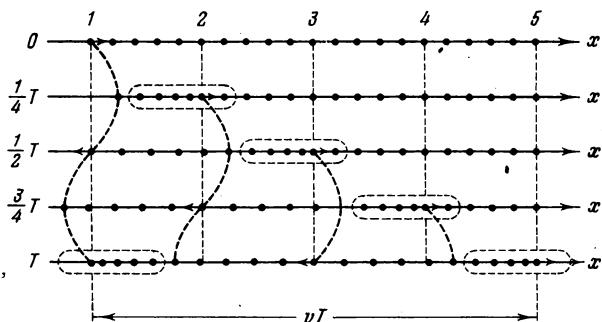


Рис. 93.2.

влево. Из рисунка видно, что при распространении продольной волны в среде создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц (места сгущения частиц обведены на рисунке пунктиром), перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью  $v$ .

На рис. 93.1 и 93.2 показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на оси  $x$ . В действительности колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется фронтом

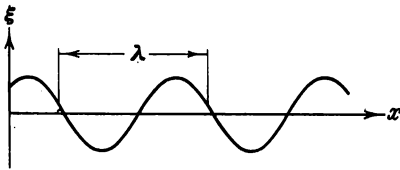


Рис. 93.3.

волны (или волновым фронтом). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными. Волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — множество концентрических сфер.

Рассмотрим случай, когда плоская волна распространяется вдоль оси  $x$ . Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату  $x$  (но различные значения координат  $y$  и  $z$ ), колеблются в одинаковой фазе.

На рис. 93.3 изображена кривая, которая дает смещение  $\xi$  из положения равновесия точек с различными  $x$  в некоторый момент времени. Не следует воспринимать этот рисунок как зримое изображение волны. На рисунке показан график функции  $\xi(x, t)$  для некоторого фиксированного момента времени  $t$ . С течением времени график перемещается вдоль оси  $x$ . Такой график можно строить как для продольной, так и для поперечной волны. В обоих случаях он выглядит одинаково.

Расстояние  $\lambda$ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. Очевидно, что

$$\lambda = vT, \quad (93.1)$$

где  $v$  — скорость волны,  $T$  — период колебаний. Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной  $2\pi$  (см. рис. 93.3).

Заменяя в соотношении (93.1)  $T$  через  $1/\nu$  ( $\nu$  — частота колебаний), получим

$$\lambda \nu = v. \quad (93.2)$$

К этой формуле можно прийти также из следующих соображений. За одну секунду источник волн совершает  $\nu$  колебаний, порождая в среде при каждом колебании один «гребень» и одну «впадину» волны. К тому моменту, когда источник будет завершать  $\nu$ -е колебание, первый «гребень» успеет пройти путь  $v$ . Следовательно,  $\nu$  «гребней» и «впадин» волны должны уложиться на длине  $v$ .

## § 94. Уравнения плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z; t) \quad (94.1)$$

(имеются в виду координаты равновесного положения частицы). Эта функция должна быть периодической как относительно времени  $t$ , так и относительно координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Периодичность по времени вытекает из того, что  $\xi$  описывает колебания частицы с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось  $x$  совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси  $x$  и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ . Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$  (рис. 94.1), имеют вид

$$\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Для того чтобы пройти путь от плоскости  $x = 0$  до этой плоскости, волне требуется время  $\tau = x/v$  ( $v$  — ско-

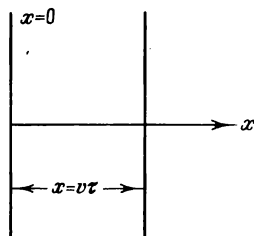


Рис. 94.1.

рость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , т. е. будут иметь вид

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right].$$

Итак, уравнение плоской волны (и продольной, и поперечной), распространяющейся в направлении оси  $x$ , выглядит следующим образом:

$$\xi = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (94.2)$$

Величина  $a$  представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны  $\alpha$  определяется выбором начал отсчета  $x$  и  $t$ . При рассмотрении одной волны начала отсчета времени и координаты обычно выбираются так, чтобы  $\alpha$  была равной нулю. При совместном рассмотрении нескольких волн сделать так, чтобы для всех них начальные фазы равнялись нулю, как правило, не удается.

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (94.2), положив

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const.} \quad (94.3)$$

Это выражение определяет связь между временем  $t$  и тем местом  $x$ , в котором фаза имеет зафиксированное значение. Вытекающее из него значение  $dx/dt$  дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (94.3), получим

$$dt - \frac{1}{v}dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (94.4)$$

Таким образом, скорость распространения волны  $v$  в уравнении (94.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью.

Согласно (94.4)  $dx/dt > 0$ . Следовательно, уравнение (94.2) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания  $x$ . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$\xi = a \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (94.5)$$

Действительно, приравняв константе фазу волны (94.5) и продифференцировав получившееся равенство, придем к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

из которого следует, что волна (94.5) распространяется в сторону убывания  $x$ .

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно  $x$  и  $t$  вид. Для этого введем величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (94.6)$$

которая называется волновым числом. Умножив числитель и знаменатель выражения (94.6) на частоту  $\nu$ , можно представить волновое число в виде

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (94.7)$$

(см. формулу (93.2)). Раскрыв в (94.2) круглые скобки и приняв во внимание (94.7), придем к следующему уравнению плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (94.8)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания  $x$ , отличается от (94.8) только знаком при члене  $kx$ .

При выводе формулы (94.8) мы предполагали, что амплитуда колебаний не зависит от  $x$ . Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в поглощающей среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается — наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону:  $a = a_0 e^{-\gamma x}$  (ср. с убыванием во времени амплитуды затухающих колебаний; см. формулу (58.7) 1-го тома). Соответственно уравнение плоской волны имеет следующий вид:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (94.9)$$

( $a_0$  — амплитуда в точках плоскости  $x = 0$ ).

Теперь найдем уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать точечным. В изотропной и однородной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника равна  $\omega t + \alpha$ . Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса  $r$ , будут колебаться с фазой

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(чтобы пройти путь  $r$ , волне требуется время  $\tau = r/v$ ). Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает с расстоянием от

источника по закону  $1/r$  (см. § 98). Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (94.10)$$

где  $a$  — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность  $a$  равна размерности колеблющейся величины, умноженной на размерность длины. Для поглощающей среды в формулу (94.10) нужно добавить множитель  $e^{-\gamma r}$ .

Напомним, что в силу сделанных предположений уравнение (94.10) справедливо только при  $r$ , значительно превышающих размеры источника. При стремлении  $r$  к нулю выражение для амплитуды обращается в бесконечность. Этот абсурдный результат объясняется неприменимостью уравнения для малых  $r$ .

### § 95. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении

Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 95.1), имеют вид

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (95.1)$$

Возьмем волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстояние  $l$ . Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний (95.1) на время  $\tau = l/v$ :

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{l}{v} \right) + \alpha \right] = \\ &= a \cos(\omega t - kl + \alpha) \end{aligned} \quad (95.2)$$

( $k = \omega/v$ ; см. формулу (94.7)).

Выразим  $l$  через радиус-вектор точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор  $\mathbf{n}$  нормали к волновой поверхности. Из рис. 95.1 видно, что скалярное произведение  $\mathbf{n}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  любой из точек поверхности равно  $l$ :

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = r \cos \varphi = l.$$

Заменим в (95.2)  $l$  через  $\mathbf{n}\mathbf{r}$ :

$$\xi = a \cos(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{r} + \alpha). \quad (95.3)$$

Вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad (95.4)$$

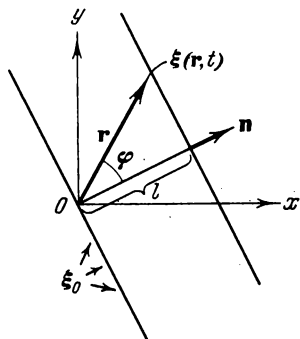


Рис. 95.1.

равный по модулю волновому числу  $k = 2\pi/\lambda$  и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется волновым вектором. Таким образом, уравнение (95.3) можно представить в виде

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha). \quad (95.5)$$

Мы получили уравнение плоской незатухающей волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Для затухающей волны нужно добавить в уравнение множитель  $e^{-\gamma t} = e^{-\gamma n r}$ .

Функция (95.5) дает отклонение от положения равновесия точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  (напомним, что  $\mathbf{r}$  определяет равновесное положение точки). Чтобы перейти от радиуса-вектора точки к ее координатам  $x, y, z$ , выразим скалярное произведение  $\mathbf{k}\mathbf{r}$  через компоненты векторов по координатным осям:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской волны примет вид

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (95.6)$$

Здесь

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma. \quad (95.7)$$

Функция (95.6) дает отклонение точки с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . В случае, когда  $\mathbf{n}$  совпадает с  $\mathbf{e}_x$ ,  $k_x = k$ ,  $k_y = k_z = 0$  и уравнение (95.6) переходит в (94.8). Очень удобна запись уравнения плоской волны в виде

$$\xi = \operatorname{Re} a e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)}. \quad (95.8)$$

Знак  $\operatorname{Re}$  обычно опускают, подразумевая, что берется только вещественная часть соответствующего выражения. Кроме того, вводят комплексное число

$$\hat{a} = a e^{i\alpha}, \quad (95.9)$$

которое называют комплексной амплитудой. Модуль этого числа дает амплитуду, а аргумент — начальную фазу волны.

Таким образом, уравнение плоской незатухающей волны можно представить в виде

$$\xi = \hat{a} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (95.10)$$

Преимущества такой записи выяснятся в дальнейшем.

## § 96. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по



координатам и времени от функции (95.6), описывающей плоскую волну. Продифференцировав эту функцию дважды по каждой из переменных, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -\omega^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_z^2 \xi.\end{aligned}$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi. \quad (96.1)$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив  $k^2/\omega^2$  через  $1/v^2$  (см. (94.7)), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (96.2)$$

Это и есть волновое уравнение. Его можно записать в виде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (96.3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа (см. формулу (11.37)).

Легко убедиться в том, что волновому уравнению удовлетворяет не только функция (95.6), но и любая функция вида

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (96.4)$$

Действительно, обозначив выражение, стоящее в скобках в правой части (96.4), через  $\varsigma$ , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\varsigma} \frac{\partial \varsigma}{\partial t} = f' \omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega \frac{df'}{d\varsigma} \frac{\partial \varsigma}{\partial t} = \omega^2 f''. \quad (96.5)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \quad (96.6)$$

Подстановка выражений (96.5) и (96.6) в уравнение (96.2) приводит к выводу, что функция (96.4) удовлетворяет волновому уравнению, если положить  $v = \omega/k$ .

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (96.2), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при  $\partial^2 \xi / \partial t^2$ , дает фазовую скорость этой волны.

Отметим, что для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (96.7)$$

### § 97. Скорость упругих волн в твердой среде

Пусть в направлении оси  $x$  распространяется продольная плоская волна. Выделим в среде цилиндрический объем с площадью основания  $S$  и высотой  $\Delta x$  (рис. 97.1). Смещения  $\xi$  частиц с разными  $x$  в каждый момент времени оказываются различными (см. рис. 93.3, на котором изображено  $\xi$  в функции от  $x$ ). Если основание цилиндра с координатой  $x$  имеет в некоторый момент времени смещение  $\xi$ , то смещение основания с координатой  $x + \Delta x$  будет  $\xi + \Delta\xi$ . Поэтому рассматриваемый объем деформируется — он получает удлинение  $\Delta\xi$  ( $\Delta\xi$  — алгебраическая величина,  $\Delta\xi < 0$  соответствует сжатию цилиндра) или относительное удлинение  $\Delta\xi/\Delta x$ . Величина  $\Delta\xi/\Delta x$

дает среднюю деформацию цилиндра. Вследствие того, что  $\xi$  меняется с изменением  $x$  не по линейному закону, истинная деформация в разных сечениях цилиндра будет неодинако-

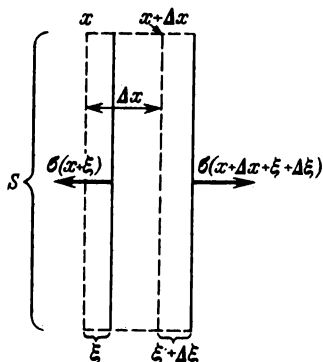


Рис. 97.1.

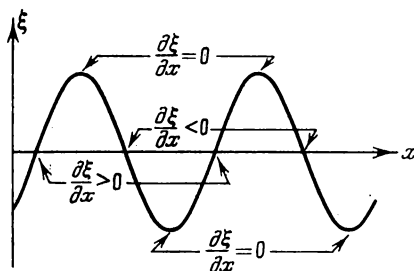


Рис. 97.2.

вой. Чтобы получить деформацию  $\epsilon$  в сечении  $x$ , нужно устремить  $\Delta x$  к нулю. Таким образом,

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (97.1)$$

(символ частной производной взят потому, что  $\xi$  зависит не только от  $x$ , но и от  $t$ ).

Наличие деформации растяжения свидетельствует о существовании нормального напряжения  $\sigma$ , при малых деформациях пропорционального величине деформации. Согласно формуле (14.6) 1-го тома

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (97.2)$$

( $E$  — модуль Юнга среды). Отметим, что относительная деформация  $\partial \xi / \partial x$ , а следовательно, и напряжение  $\sigma$  в фиксированный момент времени зависят от  $x$  (рис. 97.2). Там, где отклонения частиц от положения равновесия максимальны, деформация и напряже-

ние равны нулю. В местах, где частицы проходят через положение равновесия, деформация и напряжение достигают максимального значения, причем положительные и отрицательные деформации (т. е. растяжения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим, как уже отмечалось в § 93, продольная волна состоит из чередующихся разрежений и сгущений среды.

Обратимся снова к цилиндрическому объему, изображенному на рис. 97.1, и напишем для него уравнение движения. Полагая  $\Delta x$  очень малым, проекцию ускорения на ось  $x$  можно считать для всех точек цилиндра одинаковой и равной  $d^2\xi/dt^2$ . Масса цилиндра равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность недеформированной среды. Проекция на ось  $x$  силы, действующей на цилиндр, равна произведению площади основания цилиндра  $S$  на разность нормальных напряжений в сечениях  $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$  и  $(x + \xi)$ :

$$F_x = SE \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi} \right]. \quad (97.3)$$

Значение производной  $\partial \xi / \partial x$  в сечении  $x + \delta$  можно для малых  $\delta$  представить с большой точностью в виде

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\delta} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]_x \delta = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta, \quad (97.4)$$

где под  $\partial^2 \xi / \partial x^2$  подразумевается значение второй частной производной  $\xi$  по  $x$  в сечении  $x$ .

Ввиду малости величин  $\Delta x$ ,  $\xi$  и  $\Delta\xi$  произведем в выражении (97.3) преобразование (97.4):

$$\begin{aligned} F_x &= SE \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \xi + \Delta\xi) \right] - \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi \right] \right\} = \\ &= SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta\xi) \approx SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned} \quad (97.5)$$

(относительное удлинение  $\partial \xi / \partial x$  при упругих деформациях бывает много меньше единицы. Поэтому  $\Delta\xi \ll \Delta x$ , так что слагаемым  $\Delta\xi$  в сумме  $\Delta x + \Delta\xi$  можно пренебречь).

Подставив найденные значения массы, ускорения и силы в уравнение второго закона Ньютона, получим

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Наконец, сократив на  $S \Delta x$ , придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (97.6)$$

которое представляет собой волновое уравнение, написанное для случая, когда  $\xi$  не зависит от  $y$  и  $z$ . Сопоставление уравнений (96.7) и (97.6) дает, что

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (97.7)$$

Таким образом, фазовая скорость продольных упругих волн равна корню квадратному из модуля Юнга, деленного на плотность среды.

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к выражению

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (97.8)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

### § 98. Энергия упругой волны

Пусть в некоторой среде распространяется в направлении оси  $x$  плоская продольная волна

$$\xi = a \cos (\omega t - kx + \alpha). \quad (98.1)$$

Выделим в среде элементарный объем  $\Delta V$ , настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех точках этого объема можно было считать одинаковыми и равными, соответственно,  $\partial \xi / \partial t$  и  $\partial \xi / \partial x$ .

Выделенный нами объем обладает кинетической энергией

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (98.2)$$

( $\rho \Delta V$  — масса объема,  $\partial \xi / \partial t$  — его скорость).

Согласно формуле (25.4) 1-го тома рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta W_p = \frac{E \epsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

( $\epsilon = \partial \xi / \partial x$  — относительное удлинение цилиндра,  $E$  — модуль Юнга среды). Заменим в соответствии с (97.7) модуль Юнга через  $\rho v^2$  ( $\rho$  — плотность среды,  $v$  — фазовая скорость волны). Тогда выражение для потенциальной энергии объема  $\Delta V$  примет вид

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (98.3)$$

Выражения (98.2) и (98.3) в сумме дают полную энергию

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Разделив эту энергию на объем  $\Delta V$ , в котором она содержится, получим плотность энергии

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (98.4)$$

Дифференцирование уравнения (98.1) один раз по  $t$ , другой раз по  $x$  дает

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a \omega \sin (\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = ka \sin (\omega t - kx + \alpha).$$

Подставив эти выражения в формулу (98.4) и приняв во внимание, что  $k^2 v^2 = \omega^2$ , получим

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (98.5)$$

В случае поперечной волны для плотности энергии получается такое же выражение.

Из (98.5) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно  $1/2$ . Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (98.6)$$

Плотность энергии (98.5) и ее среднее значение (98.6) пропорциональны плотности среды  $\rho$ , квадрату частоты  $\omega$  и квадрату амплитуды волны  $a$ . Подобная зависимость имеет место не только для незатухающей плоскости волны, но и для других видов волн (плоской затухающей, сферической и т. д.).

Итак, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной; следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии через эту поверхность. Если через данную поверхность переносится за время  $dt$  энергия  $dW$ , то поток энергии  $\Phi$  равен

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (98.7)$$

Поток энергии — скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии, деленной на размерность времени, т. е. совпадает с размерностью мощности. В соответствии с этим  $\Phi$  измеряется в ваттах, эрг/с и т. п.

Поток энергии в разных точках среды может быть различной интенсивностью. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая плотностью потока энергии. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Пусть через площадку  $\Delta S_{\perp}$ , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время  $\Delta t$  энергия  $\Delta W$ . Тогда плотность потока энергии равна

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} \quad (98.8)$$

(см. (98.7)). Через площадку  $\Delta S_{\perp}$  (рис. 98.1) будет перенесена за время  $\Delta t$  энергия  $\Delta W$ , заключенная в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S_{\perp}$  и высотой  $v \Delta t$  ( $v$  — фазовая скорость волны). Если размеры цилиндра достаточно малы (за счет малости  $\Delta S_{\perp}$  и  $\Delta t$ ) для того, чтобы плотность энергии во всех точках цилиндра можно было считать одинаковой, то  $\Delta W$  можно найти как произведение плотности энергии  $w$  на объем цилиндра, равный  $\Delta S_{\perp} v \Delta t$ :

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Подставив это выражение в формулу (98.8), получим для плотности потока энергии:

$$j = wv. \quad (98.9)$$

Наконец, введя вектор  $\mathbf{v}$ , модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии), можно написать

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \quad (98.10)$$

Мы получили выражение для вектора плотности потока энергии. Этот вектор был впервые введен в рассмотрение выдающимся русским физиком Н. А. Умовым и называется **вектором Умова**. Вектор (98.10), как и плотность энергии  $w$ , различен в разных

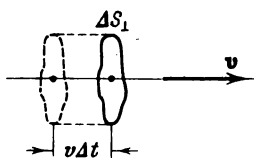


Рис. 98.1.

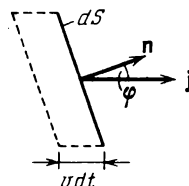


Рис. 98.2.

точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение равно

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle \mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v} \quad (98.11)$$

(см. (98.6)). Выражение (98.11), так же как и (98.6), справедливо для волны любого вида (сферической, затухающей и т. д.).

Отметим, что, когда говорят об **интенсивности волны** в данной точке, то имеют в виду среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Зная  $\mathbf{j}$  во всех точках произвольной поверхности  $S$ , можно вычислить поток энергии через эту поверхность. С этой целью разобьем поверхность на элементарные участки  $dS$ . За время  $dt$  через площадку  $dS$  пройдет энергия  $dW$ , заключенная в изображенном на рис. 98.2 косом цилиндре. Объем этого цилиндра равен  $dV =$

$= v dt dS \cos \varphi$ . В нем содержится энергия  $dW = w dV = w v dt dS \cos \varphi$  ( $w$  — мгновенное значение плотности энергии в том месте, где расположена площадка  $dS$ ). Приняв во внимание, что

$$w v dS \cos \varphi = j dS \cos \varphi = j dS$$

( $dS = n dS$ ; см. рис. 98.2), можно написать:  $dW = j dS dt$ . Отсюда для потока энергии  $d\Phi$  через площадку  $dS$  получается формула

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = j dS \quad (98.12)$$

(ср. с формулой (11.5)). Полный поток энергии через поверхность равен сумме элементарных потоков (98.12):

$$\Phi = \int_S j dS. \quad (98.13)$$

В соответствии с (11.7) можно сказать, что поток энергии равен потоку вектора  $j$  через поверхность  $S$ .

Заменив в формуле (98.13) вектор  $j$  его средним по времени значением, получим среднее значение  $\Phi$ :

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle dS. \quad (98.14)$$

Вычислим среднее значение потока энергии через произвольную волновую поверхность незатухающей сферической волны. В каждой точке этой поверхности векторы  $j$  и  $dS$  совпадают по направлению. Кроме того, модуль вектора  $j$  для всех точек поверхности одинаков. Следовательно,

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle dS = \langle j \rangle S = \langle j \rangle 4\pi r^2$$

( $r$  — радиус волновой поверхности). Согласно (98.11)  $\langle j \rangle = = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v$ . Таким образом,

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi \rho \omega^2 v a^2 r^2$$

( $a_r$  — амплитуда волны на расстоянии  $r$  от источника). Поскольку энергия волны не поглощается средой, средний поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковое значение, т. е. должно выполняться условие

$$a^2 r^2 = \text{const.}$$

Отсюда следует, что амплитуда  $a_r$  незатухающей сферической волны обратно пропорциональна расстоянию  $r$  от источника волны (см. формулу (97.10)). Соответственно средняя плотность потока энергии  $\langle j \rangle$  обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

В случае плоской затухающей волны амплитуда убывает с расстоянием по закону  $a = a_0 e^{-\gamma x}$  (см. (94.9)). Соответственно средняя

плотность потока энергии (т. е. интенсивность волны) убывает по закону

$$j = j_0 e^{-\kappa x}. \quad (98.15)$$

Здесь  $\kappa = 2\gamma$  — величина, называемая коэффициентом поглощения волны. Она имеет размерность, обратную размерности длины. Легко сообразить, что величина, обратная  $\kappa$ , равна расстоянию, на котором интенсивность волны уменьшается в  $e$  раз.

### § 99. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются когерентными. (Более строгое определение когерентности будет дано в § 120.) При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (99.1)$$

Уравнение (99.1) есть уравнение стоячей волны. Чтобы упростить его, выберем начало отсчета  $x$  так, чтобы разность  $\alpha_2 - \alpha_1$  стала равной нулю, а начало отсчета  $t$  — так, чтобы оказалась равной нулю сумма  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Кроме того, заменим волновое число  $k$  его



значением  $2\pi/\lambda$ . Тогда уравнение (99.1) примет вид

$$\xi = 2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (99.2)$$

Из (99.2) видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от  $x$ :

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (99.3)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются пучностями стоячей волны. Из (99.3) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (99.4)$$

Следует иметь в виду, что пучность представляет собой не одну единственную точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты  $x$ , определяемые формулой (99.4).

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (99.5)$$

Узел, как и пучность, представляет собой не одну точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты  $x$ , определяемые формулой (99.5).

Из формул (99.4) и (99.5) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно  $\lambda/2$ . Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

Обратимся снова к уравнению (99.2). Множитель  $2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$  при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на  $\pi$ . Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе). На рис. 99.1 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений то-

чек от положения равновесия. Первая «фотография» соответствует моменту, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Последующие «фотографии» сделаны с интервалами в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

Продифференцировав уравнение (99.2) один раз по  $t$ , а другой раз по  $x$ , найдем выражения для скорости частиц  $\dot{\xi}$  и для деформации среды  $\varepsilon$ :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t, \quad (99.6)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (99.7)$$

Уравнение (99.6) описывает стоячую волну скорости, а (99.7) — стоячую волну деформации.

На рис. 99.2 сопоставлены «моментальные фотографии» смещения, скорости и деформации для моментов времени 0 и  $T/4$ . Из графиков видно, что узлы и пучности скорости совпадают с узлами и пучностями смещения; узлы же и пучности деформации совпадают соответственно с пучностями и узлами смещения. В то время как  $\xi$  и  $\varepsilon$  достигают максимальных значений,  $\dot{\xi}$  обращается в нуль, и наоборот. Соответственно дважды за период происходит

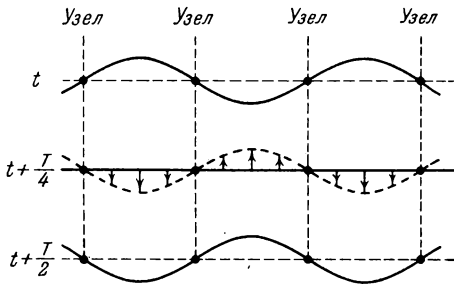


Рис. 99.1.

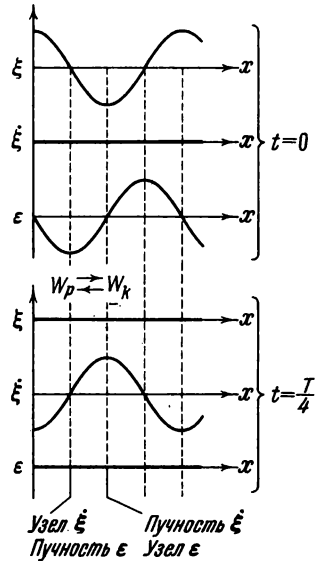


Рис. 99.2.

превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны (где находятся пучности деформации), то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

## § 100. Колебания струны

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на длину струны целое число раз (рис. 100.1). Отсюда вытекает условие

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (100.1)$$

( $l$  — длина струны). Длинам волн (100.1) соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (100.2)$$

( $v$  — фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины, т. е. линейной плотностью струны).

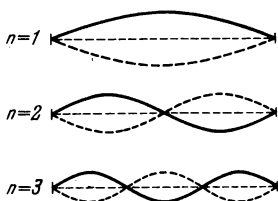


Рис. 100.1.

Частоты  $\nu_n$  называются собственными частотами струны. Собственные частоты являются кратными частоте

$$\nu_1 = v/2l,$$

которая называется основной частотой.

Гармонические колебания с частотами (100.2) называются собственными или нормальными колебаниями. Их называют также гармониками. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

Колебания струны примечательны в том отношении, что для них по классическим представлениям получаются дискретные значения одной из характеризующих колебания величин (частоты). Для классической физики такая дискретность является исключением. Для квантовых процессов дискретность является скорее правилом, чем исключением.

## § 101. Звук

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах от 16 до 20 000 Гц, то достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют звуковыми волнами или просто звуком. Упругие волны с частотами, меньшими 16 Гц, называют инфразвуком; волны с частотами, превышающими 20 000 Гц,

называют **у л ь т р а з в у к о м**. Инфра- и ультразвуки человеческого уха не слышит.

Воспринимаемые звуки люди различают по высоте, тембру и громкости. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определенным набором частот. Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке, называется его **а к у с т и ч е с к и м с п е к т р о м**. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от  $\nu'$  до  $\nu''$ , то спектр называется **с п л о ш н ы м**. Если звук состоит из колебаний дискретных частот  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  и т. д., то спектр называется **л и н е й ч а т ы м**. Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется **т о н а л ь н ы м**.

Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность обертонов (т. е. колебаний с частотами  $\nu_2, \nu_3$  и т. д.) определяет окраску, или тембр, звука. Различный спектральный состав звуков, возбуждаемых разными музыкальными инструментами, позволяет отличить на слух, например, флейту от скрипки или рояля.

Под интенсивностью звука понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется **п о р о г о м с л ы ш и м о с т и**. Порог слышимости несколько различен для разных лиц и сильно зависит от частоты звука. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>. При других частотах порог слышимости лежит выше (см. нижнюю кривую на рис. 101.1).

При интенсивностях порядка  $1-10$  Вт/м<sup>2</sup> волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется **п о р о г о м б о л е в о г о о щ у щ е н и я**. Порог болевого ощущения, так же как и порог слышимости, зависит от частоты

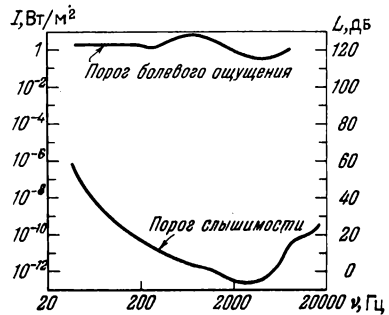


Рис. 101.1.

(см. верхнюю кривую на рис. 101.1; данные, приведенные на этом рисунке, относятся к среднему нормальному слуху).

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. На этом основании уровень громкости  $L$  определяется как логарифм отношения интенсивности данного звука  $I$  к интенсивности  $I_0$ , принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (101.1)$$

Исходная интенсивность  $I_0$  принимается равной  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>, так что порог слышимости при частоте порядка 1000 Гц лежит на нулевом уровне ( $L = 0$ ).

Единица уровня громкости  $L$ , определяемого формулой (101.1), называется б е л о м (Б). Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами — д е ц и б е л а м и (дБ). Значение  $L$  в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (101.2)$$

Отношение двух интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (101.3)$$

С помощью этой формулы может быть выражено в децибелах уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Так, например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз.

Весь диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от  $10^{-12}$  до  $10$  Вт/м<sup>2</sup>), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дБ. В табл. 101.1 приведены ориентировочные значения уровня громкости для некоторых звуков.

Т а б л и ц а 101.1

Звук	Уровень громко- сти, дБ
Тикание часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	30
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум самолетного мотора: на расстоянии 5 м	120
на расстоянии 3 м	130

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Если, например, предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем громкости в 70 дБ (в этом случае количество поглощаемой в секунду энергии будет составлять примерно  $2 \cdot 10^{-7}$  Вт), то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребуется время порядка десяти тысяч лет.

Ультразвуковые волны могут быть получены в виде направленных пучков, подобных пучкам света. Направленные ультразвуковые пучки нашли широкое применение для целей локации (обнаружения предметов и определения расстояния до них) в воде. Впервые идея ультразвуковой локации была высказана выдающимся французским физиком П. Ланжевенем и разработана им во время первой мировой войны для обнаружения подводных лодок. В настоящее время ультразвуковые локаторы используются для обнаружения айсбергов, косяков рыбы и т. п.

Известно, что, крикнув и определив время до прихода эха, т. е. звука, отраженного от препятствия — скалы, леса, поверхности воды в колодце и т. д., — можно, умножив половину этого времени на скорость звука, найти расстояние до препятствия. На этом принципе устроен упомянутый выше локатор, а также ультразвуковой эхолот, который применяется для измерения глубины и снятия рельефа морского дна.

Метод ультразвуковой локации позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться при полете в темноте. Летучая мышь периодически испускает импульсы ультразвуковой частоты и по воспринимаемым с помощью органа слуха отраженным сигналам с большой точностью судит о расстояниях до окружающих ее предметов.

## § 102. Скорость звука в газах

Звуковая волна в газе представляет собой распространяющуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разрежения газа. Следовательно, давление в каждой точке пространства испытывает периодически изменяющееся отклонение  $\Delta p$  от среднего значения  $p$ , совпадающего с давлением, которое существует в газе в отсутствие волн. Таким образом, мгновенное значение давления в некоторой точке пространства можно представить в виде

$$p' = p + \Delta p.$$

Пусть волна распространяется вдоль оси  $x$ . Подобно тому, как мы поступили в § 97 при нахождении скорости упругих волн в твердой среде, рассмотрим объем газа в виде цилиндра с площадью основания  $S$  и высотой  $\Delta x$  (рис. 102.1). Масса газа, заключенного в этом объеме, равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность невозмущенного волной

газа. Ввиду малости  $\Delta x$  проекцию ускорения на ось  $x$  для всех точек цилиндра можно считать одинаковой и равной  $\partial^2 \xi / \partial t^2$ .

Для нахождения проекции на ось  $x$  силы, действующей на рассматриваемый объем, нужно взять произведение площади основания цилиндра  $S$  на разность давлений в сечениях  $x + \xi$  и  $x + \Delta x + \xi + \Delta \xi$ . Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (97.5), получим

$$F_x = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x$$

(напомним, что при выводе формулы (97.5) было использовано предположение:  $\Delta \xi \ll \Delta x$ ).

Итак, мы нашли массу выделенного объема газа, его ускорение и действующую на него силу. Теперь напомним для этого объема газа уравнение второго закона Ньютона:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x.$$

После сокращения на  $S \Delta x$  получим

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (102.1)$$

В полученном нами дифференциальном уравнении содержатся две неизвестные функции:  $\xi$  и  $p'$ . Выразим одну из этих функций через другую. Для этого найдем связь между давлением газа  $p'$  и относительным изменением его объема  $\partial \xi / \partial x$ . Эта связь зависит от характера процесса сжатия

(или расширения) газа. В звуковой волне сжатия и расширения газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплом, и процесс можно считать адиабатическим: При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом данной массы газа дается уравнением

$$p V^\gamma = \text{const}, \quad (102.2)$$

где  $\gamma$  — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (см. уравнение (88.5) 1-го тома). В соответствии с (102.2)

$$\begin{aligned} p (S \Delta x)^\gamma &= p' [S (\Delta x + \Delta \xi)]^\gamma = \\ &= p' \left[ S \left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right]^\gamma = p' (S \Delta x)^\gamma \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma \end{aligned}$$

Сокращение на  $(S \Delta x)^\gamma$  дает

$$p = p' \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma.$$

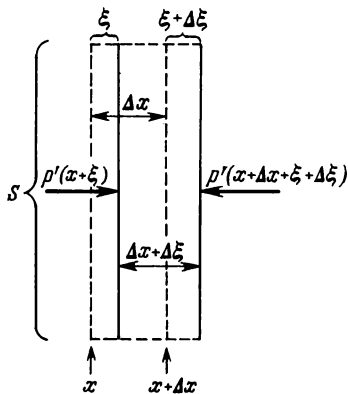


Рис. 102.1.

Воспользовавшись тем, что по предположению  $\partial\xi/\partial x \ll 1$ , разложим выражение  $(1 + \partial\xi/\partial x)^\gamma$  в ряд по степеням  $\partial\xi/\partial x$  и пренебрежем членами высших порядков малости. В результате получится формула

$$p = p' \left( 1 + \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x} \right).$$

Решим это уравнение относительно  $p'$ :

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x}} \approx p \left( 1 - \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \quad (102.3)$$

(мы воспользовались формулой  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ , справедливой для  $x \ll 1$ ). Из найденного нами соотношения легко получить выражение для  $\Delta p$ :

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p \frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (102.4)$$

Поскольку  $\gamma$  — величина порядка единицы, из (102.4) вытекает, что  $|\partial\xi/\partial x| \approx |\Delta p/p|$ . Таким образом, условие  $\partial\xi/\partial x \ll 1$  означает, что отклонение давления от среднего значения много меньше самого давления. Это действительно так: для самых громких звуков амплитуда колебаний давления воздуха не превышает 1 мм рт. ст., в то время как атмосферное давление  $p$  имеет величину порядка  $10^3$  мм рт. ст.

Продифференцировав выражение (102.3) по  $x$ , найдем, что

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Наконец, подставив это значение  $\partial p'/\partial x$  в формулу (102.1), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Сопоставление его с волновым уравнением (96.7) дает для скорости звуковых волн в газе выражение

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (102.5)$$

(напомним, что  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность невозмущенного волной газа).

При атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов близко по своим свойствам к идеальному газу. Поэтому отношение  $p/\rho$  для них можно положить равным  $RT/M$ , где  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура,  $M$  — масса моля газа (см. формулу (86.8) 1-го тома). Подставив это значение



в (102.5), получим для скорости звука в газе формулу

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (102.6)$$

Из этой формулы следует, что скорость звука пропорциональна корню квадратному из температуры и не зависит от давления.

Средняя скорость теплового движения молекул газа определяется по формуле

$$\langle v_{\text{мол}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

(см. формулу (98.31) 1-го тома). Сравнение этого выражения с (102.6) дает, что скорость звука в газе связана со средней скоростью теплового движения молекул соотношением

$$v = \langle v_{\text{мол}} \rangle \sqrt{\frac{\gamma \pi}{8}}. \quad (102.7)$$

Подстановка значения  $\gamma$  для воздуха, равного 1,4, приводит к соотношению  $v \approx {}^3/4 \langle v_{\text{мол}} \rangle$ . Максимальное возможное значение  $\gamma$  составляет  ${}^5/3$ . В этом случае  $v \approx {}^4/5 \langle v_{\text{мол}} \rangle$ . Таким образом, скорость звука в газе оказывается того же порядка, что средняя скорость теплового движения молекул, но всегда несколько меньше, чем  $\langle v_{\text{мол}} \rangle$ .

Вычислим значение скорости звука в воздухе при температуре 290 К (комнатная температура). Для воздуха  $\gamma = 1,40$ ,  $M = 29 \times 10^{-3}$  кг/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К). Подставив эти значения в формулу (102.6), получим

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с}.$$

Найденное нами значение скорости звука в воздухе хорошо согласуется со значением, полученным опытным путем.

Найдем связь между интенсивностью звуковой волны  $I$  и амплитудой колебаний давления  $(\Delta p)_m$ . В § 101 было указано, что под интенсивностью звука понимают среднее значение плотности потока энергии. Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v \quad (102.8)$$

(см. формулу (98.11)). Здесь  $\rho$  — плотность невозмущенного газа,  $a$  — амплитуда колебаний частиц среды, т. е. амплитуда колебаний смещения  $\xi$ ,  $\omega$  — частота,  $v$  — фазовая скорость волны. Заметим, что под частицами среды в данном случае подразумеваются не молекулы, а макроскопические (т. е. заключающие в себе большое количество молекул) объемы, линейные размеры которых много меньше длины волны.

Пусть  $\xi$  изменяется по закону  $\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$ . Тогда

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ak \sin(\omega t - kx + \alpha) = a \frac{\omega}{v} \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставив это значение в формулу (102.4), получим

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \sin(\omega t - kx + \alpha) = -(\Delta p)_m \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Отсюда

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega}. \quad (102.9)$$

Подстановка этого выражения в (102.8) дает

$$I = \frac{1}{2} \rho \frac{(\Delta p)_m^2 v^2}{\gamma^2 p^2 \omega^2} \omega^2 v = \frac{(\Delta p)_m^2}{2 \gamma^2 p v} \left( \frac{p}{\rho} \right)^2 v^4.$$

Приняв во внимание, что  $v^4 = (\gamma RT/M)^2$ , а  $(p/\rho)^2 = (RT/M)^2$  (см. формулу (102.6) и предшествующий ей текст), можно написать

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2 \rho v}. \quad (102.10)$$

С помощью этой формулы можно вычислить, что диапазону уровней громкости от 0 до 130 дБ соответствуют примерные значения амплитуды колебаний давления воздуха от  $3 \cdot 10^{-5}$  Па (т. е.  $2 \cdot 10^{-7}$  мм рт. ст.) до 100 Па ( $\sim 1$  мм рт. ст.).

Произведем оценку амплитуды колебаний частиц  $a$  и амплитуды скорости частиц  $(\dot{\xi})_m$ . Начнем с оценки величины  $a$ , определяемой формулой (102.9). Приняв во внимание, что  $v/\omega = \lambda/2\pi$ , получим соотношение

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx 0,1 \frac{(\Delta p)_m}{p} \quad (102.11)$$

( $\gamma \approx 1,5$ , следовательно,  $2\pi\gamma \approx 10$ ). При громкости 130 дБ отношение  $(\Delta p)_m/p$  имеет величину порядка  $10^{-3}$ , при громкости 60 дБ это отношение равно примерно  $2 \cdot 10^{-7}$ . Длины звуковых волн в воздухе лежат в пределах от 21 м (при  $v = 16$  Гц) до 17 мм (при  $v = 20\,000$  Гц). Подставив эти данные в формулу (102.11), найдем, что при громкости 60 дБ амплитуда колебаний частиц составляет  $\sim 4 \cdot 10^{-4}$  мм для самых длинных волн и  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$  мм для самых коротких волн. При громкости 130 дБ амплитуда колебаний для самых длинных волн достигает  $\sim 2$  мм.

При гармонических колебаниях амплитуда скорости  $(\dot{\xi})_m$  равна амплитуде смещения  $a$ , умноженной на круговую частоту  $\omega$ :  $(\dot{\xi})_m = a\omega$ . Умножив выражение (102.11) на  $\omega$ , получим

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx \frac{(\Delta p)_m}{p}. \quad (102.12)$$

Следовательно, при громкости 130 дБ амплитуда скорости составляет примерно  $340 \text{ м/с} \cdot 10^{-3} = 0,34 \text{ м/с}$ . При громкости 60 дБ амплитуда скорости будет порядка 0,1 мм/с. Заметим, что, в отличие от амплитуды смещения, амплитуда скорости не зависит от длины волны.

### § 103. Эффект Доплера для звуковых волн

Пусть в газе или жидкости на некотором расстоянии от источника волн располагается воспринимающее колебания среды устройство, которое мы будем называть приемником. Если источник и приемник волн неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте  $\nu_0$  колебаний источника. Если же источник или приемник либо оба они движутся относительно среды, то частота  $\nu$ , воспринимаемая приемником, может оказаться отличной от  $\nu_0$ . Это явление называется **эффектом Доплера**.

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника  $v_{\text{ист}}$  будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник движется в направлении от приемника. Аналогично скорость приемника  $v_{\text{пр}}$  будем считать положительной, если приемник движется по направлению к источнику, и отрицательной, если приемник движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и колеблется с частотой  $\nu_0$ , то к моменту, когда источник будет завершать  $\nu_0$ -е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь  $v$  ( $v$  — скорость распространения волны относительно среды). Следовательно, порождаемые источником за секунду  $\nu_0$  «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине  $v$ . Если же источник движется относительно среды со скоростью  $v_{\text{ист}}$ , то в момент, когда источник будет завершать  $\nu_0$ -е колебание, «гребень», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии  $v - v_{\text{ист}}$  (рис. 103.1). Следовательно,  $\nu_0$  «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине  $v - v_{\text{ист}}$ , так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{v - v_{\text{ист}}}{\nu_0}. \quad (103.1)$$

Мимо неподвижного приемника пройдут за секунду «гребни» и «впадины», укладываемые на длине  $v$ . Если приемник движется со скоростью  $v_{\text{пр}}$ , то в конце длящегося 1 с промежутка времени он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка стояла от его теперешнего положения на расстоянии, численно равное  $v$ . Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «гребням» и «впадинам», укладываемым на

длине, численно равной  $v + v_{\text{пр}}$  (рис. 103.2), и будет колебаться с частотой

$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda}.$$

Подставив в эту формулу выражение (103.1) для  $\lambda$ , получим

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}}.$$
 (103.2)

Из формулы (103.2) вытекает, что при таком движении источника и приемника, при котором расстояние между ними уменьшается,

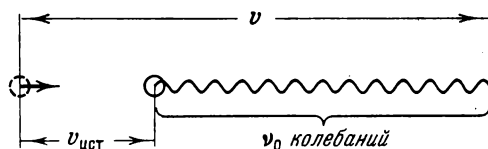


Рис. 103.1.

воспринимаемая приемником частота  $\nu$  оказывается больше частоты источника  $\nu_0$ . Если расстояние между источником и приемником увеличивается,  $\nu$  будет меньше, чем  $\nu_0$ .

Если направления скоростей  $v_{\text{ист}}$  и  $v_{\text{пр}}$  не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, вместо  $v_{\text{ист}}$  и  $v_{\text{пр}}$  в формуле (103.2) нужно брать проекции векторов  $v_{\text{ист}}$  и  $v_{\text{пр}}$  на направление указанной прямой.

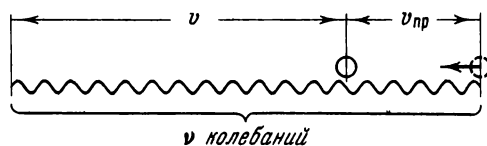


Рис. 103.2.

Из формулы (103.2) следует, что эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звук. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты имеет иной вид, чем (103.2). Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой «свет». Поэтому скорости источника и приемника света относительно «среды» не имеют смысла. В случае света можно говорить лишь об относительной скорости приемника и источника. Эффект Доплера для световых волн зависит от величины и направления этой скорости. Эффект Доплера для световых волн рассматривается в § 151.

## ГЛАВА XV

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 104. Волновое уравнение для электромагнитного поля

В главе IX мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, вообще говоря, тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. В случае однородной нейтральной ( $\rho=0$ ) непроводящей ( $j=0$ ) среды с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} &= \mu\mu_0 \nabla \mathbf{H}, & \nabla \mathbf{D} &= \epsilon\epsilon_0 \nabla \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Поэтому уравнения (71.1) — (71.4) можно написать следующим образом:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (104.1)$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \quad (104.2)$$

$$[\nabla \mathbf{H}] = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (104.3)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0. \quad (104.4)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (104.1):

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 \left[ \nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]. \quad (104.5)$$

Символ  $\nabla$  означает дифференцирование по координатам. Изменение последовательности дифференцирования по координатам и времени

приводит к равенству

$$\left[ \nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{H}].$$

Произведя в (104.5) такую замену и подставив в получившееся уравнение значение (104.3) для ротора  $\mathbf{H}$ , получим

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.6)$$

Согласно (11.40)  $[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ . В силу (104.4) первый член этого выражения равен нулю. Поэтому левая часть формулы (104.6) представляет собой  $-\Delta \mathbf{E}$ . Таким образом, опустив слева и справа знак минус, приходим к уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

В соответствии с (39.15)  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . Поэтому уравнению можно придать вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.7)$$

Раскрыв оператор Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.8)$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (104.3) и произведя аналогичные преобразования, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (104.9)$$

Уравнения (104.8) и (104.9) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (104.1) и (104.3), каждое из которых содержит и  $\mathbf{E}$ , и  $\mathbf{H}$ .

Уравнения (104.8) и (104.9) представляют собой типичные волновые уравнения (см. (96.2)). Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (104.8) и (104.9) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (104.10)$$

В вакууме (т. е. при  $\epsilon = \mu = 1$ ) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте  $c$ .

### § 105. Плоская электромагнитная волна

Исследуем плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$  ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ). Направим ось  $x$  перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ . Поэтому уравнения (71.5) — (71.8) упрощаются следующим образом:

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (105.1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (105.2)$$

$$0 = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (105.3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (105.4)$$

Уравнение (105.4) и первое из уравнение (105.3) показывают, что  $E_x$  не может зависеть ни от  $x$ , ни от  $t$ . Уравнение (105.2) и первое из уравнений (105.1) дают такой же результат для  $H_x$ . Следовательно, отличные от нуля  $E_x$  и  $H_x$  могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладывающимися на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси  $x$ . Отсюда вытекает, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны к направлению распространения волны, т. е. что электромагнитные волны поперечны. В дальнейшем мы будем предполагать постоянные поля отсутствующими и полагать  $E_x = H_x = 0$ .

Два последних уравнения (105.1) и два последних уравнения (105.3) можно объединить в две независимые группы:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (105.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (105.6)$$

Первая группа уравнений связывает компоненты  $E_y$  и  $H_z$ , вторая — компоненты  $E_z$  и  $H_y$ . Допустим, что первоначально было создано переменное электрическое поле  $E_y$ , направленное вдоль оси  $y$ . Согласно второму из уравнений (105.5) это поле создаст магнитное поле  $H_z$ , направленное вдоль оси  $z$ . В соответствии с первым уравнением (105.5) поле  $H_z$  создаст электрическое поле  $E_y$ , и т. д. Ни поле  $E_z$ , ни поле  $H_y$  при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле  $E_z$ , то согласно уравнениям (105.6) появится поле  $H_y$ , которое возбудит поле  $E_z$ , и т. д. В этом случае

не возникают поля  $E_y$  и  $H_z$ . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (105.5) или (105.6), положив компоненты, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (105.5), положив  $E_z = H_y = 0$ . Продифференцируем первое уравнение по  $x$  и произведем замену:  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$ . Подставив затем  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  из второго уравнения, получим волновое уравнение для  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (105.7)$$

(мы заменили  $\epsilon_0 \mu_0$  через  $1/c^2$ ). Продифференцировав по  $x$  второе из уравнений (105.5), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (105.8)$$

Полученные уравнения представляют собой частный случай уравнений (104.8) и (104.9).

Напомним, что  $E_x = E_z = 0$  и  $H_x = H_y = 0$ , так что  $E_y = E$  и  $H_z = H$ . Мы сохранили в уравнениях (105.7) и (105.8) индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$ , чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Простейшим решением уравнения (105.7) является функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (105.9)$$

Решение уравнения (105.8) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (105.10)$$

В этих формулах  $\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число, равное  $\omega/v$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — начальные фазы колебаний в точках с координатой  $x = 0$ .

Подставим функции (105.9) и (105.10) в уравнения (105.5):

$$k E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu \mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$k H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Кроме того, должны выполняться соотношения

$$k E_m = \mu \mu_0 \omega H_m, \quad \epsilon \epsilon_0 \omega E_m = k H_m.$$

Перемножив эти два равенства, найдем, что

$$\epsilon \epsilon_0 E_m^2 = \mu \mu_0 H_m^2. \quad (105.11)$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ),



а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (105.12)$$

Для волны, распространяющейся в вакууме,

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \sqrt{(4\pi)^2 \cdot 900} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (105.13)$$

В гауссовой системе формула (105.12) имеет вид

$$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}.$$

Следовательно, в вакууме  $E_m = H_m$  ( $E_m$  измеряется в СГСЭ-единицах,  $H_m$  — в СГСМ-единицах).

Умножив уравнение (105.9) на орт оси  $y$  ( $E_y \mathbf{e}_y = \mathbf{E}$ ), а уравнение (105.10) на орт оси  $z$  ( $H_z \mathbf{e}_z = \mathbf{H}$ ), получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = H_m \cos(\omega t - kx) \quad (105.14)$$

(мы положили  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ).

На рис. 105.1 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Из рисунка видно, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

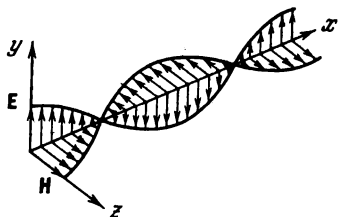


Рис. 105.1.

образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через  $1/4$  периода достигают наибольшего значения, причем, если  $\mathbf{E}$  направлен вверх, то  $\mathbf{H}$  направлен вправо (смотрим вдоль направления, по которому распространяется волна).

Еще через  $1/4$  периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз  $\mathbf{E}$  направлен вниз, а  $\mathbf{H}$  влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанными вдоль оси  $x$ .

## § 106. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком. При подаче на вибратор высокого

напряжения от индукционной катушки в промежутке проскакивала искра. Она закорачивала промежуток, и в вибраторе возникали затухающие электрические колебания (рис. 106.1; показанные на рисунке дроссели предназначались для того, чтобы высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора). За время горения искры успевало совершиться большое число колебаний, порождавших цуг электромагнитных волн, длина которых приблизительно в два раза превышала длину вибратора. Помещая вибраторы разной длины в фокусе вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны, длина которых составляла от 0,6 м до 10 м.

Исследование излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Поскольку длина вибратора выбиралась равной  $\lambda/2$ , колебания в нем вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (размером более 1 м и массой 1200 кг) Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и обнаружил, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике для световых волн. Отразив бегущую плоскую волну с помощью металлического зеркала в обратном направлении, Герц получил стоячую волну. Расстояние между узлами и пучностями волны позволяло определить длину волны  $\lambda$ . Умножив  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$ , можно было найти скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к  $c$ . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решетку, были перпендикулярны к вектору  $\mathbf{E}$ , волна проходила сквозь решетку без помех. При расположении проволок параллельно  $\mathbf{E}$  волна сквозь решетку не проходила. Таким образом была доказана поперечность электромагнитных волн.

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил электромагнитные волны длиной 6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн (см. § 136).

В 1896 г. А. С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике.

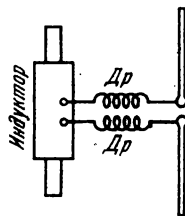


Рис. 106.1.

### § 107. Энергия электромагнитных волн

Электромагнитные волны переносят энергию. Согласно формуле (98.9) плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны.

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна распространяется в вакууме. В этом случае скорость волны равна  $c$ . Плотность энергии электромагнитного поля  $\omega$  складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (107.1)$$

(см. формулы (30.2) и (67.7); для вакуума  $\epsilon = \mu = 1$ ).

В данной точке пространства векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются в одинаковой фазе<sup>1</sup>. Поэтому соотношение (105.12) между амплитудными значениями  $E$  и  $H$  справедливо и для их мгновенных значений. Положив в (105.12)  $\epsilon = \mu = 1$ , придем к соотношению

$$E\sqrt{\epsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}. \quad (107.2)$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы:  $\omega_E = \omega_H$ .

С учетом (107.2) выражению (107.1) можно придать вид

$$\omega = \frac{1}{2}(E\sqrt{\epsilon_0})(E\sqrt{\epsilon_0}) + \frac{1}{2}(H\sqrt{\mu_0})(H\sqrt{\mu_0}) = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}EH = \frac{1}{c}EH$$

(см. формулу (39.15)). Умножив найденное выражение для  $\omega$  на скорость волны  $c$ , получим модуль плотности потока энергии:

$$S = \omega c = EH. \quad (107.3)$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[\mathbf{EH}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \quad (107.4)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга.

Можно показать, что формула (107.4) оказывается справедливой и в случае, когда электромагнитная волна распространяется в диэлектрической или проводящей среде.

По аналогии с формулой (98.13) поток  $\Phi$  электромагнитной энергии через некоторую поверхность  $F$  можно найти с помощью

<sup>1</sup> Это справедливо только для вакуума и непроводящей среды. В проводящей среде фазы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не совпадают.

интегрирования:

$$\Phi = \int_F \mathbf{S} d\mathbf{F} \quad (107.5)$$

(в формуле (98.13) буква  $S$  обозначала поверхность; поскольку буквой  $S$  принято обозначать вектор Пойнтинга, нам пришлось обозначить поверхность буквой  $F$ ).

В качестве примера на применение формул (107.4) и (107.5) рассмотрим участок однородного цилиндрического проводника, по которому течет постоянный ток (рис. 107.1). Вначале будем считать, что на этом участке сторонние силы отсутствуют. Тогда согласно формуле (34.3) в каждой точке проводника выполняется соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Постоянный ток распределяется по сечению провода с одинаковой плотностью  $\mathbf{j}$ . Следовательно, электрическое поле в пределах изображенного на рис. 107.1 участка проводника будет однородным. Выделим мысленно внутри проводника цилиндрический объем радиуса  $r$  и длины  $l$ . В каждой точке боковой поверхности этого цилиндра вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{E}$  и направлен по касательной к поверхности. Модуль  $\mathbf{H}$  равен  $1/2jr$  (согласно (52.7)  $2\pi rH = j\pi r^2$ ). Таким образом, вектор (107.4) в каждой точке поверхности направлен к оси провода и имеет модуль  $S = EH = 1/2Ejr$ . Умножив  $S$  на боковую поверхность цилиндра  $F$ , равную  $2\pi rl$ , найдем, что внутрь рассматриваемого нами объема втекает поток электромагнитной энергии

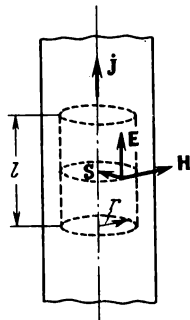


Рис. 107.1.

$$\Phi = SF = 1/2Ejr \cdot 2\pi rl = Ej \cdot \pi r^2 l = Ej \cdot V, \quad (107.6)$$

где  $V$  — объем цилиндра.

Согласно (38.4)  $Ej = \rho j^2$  есть количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника. Следовательно, равенство (107.6) указывает на то, что энергия, выделяющаяся в виде ленц-джоулева тепла, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля. По мере проникновения в глубь проводника поток энергии постепенно ослабляется (уменьшается и вектор Пойнтинга, и поверхность, через которую течет поток) за счет поглощения энергии и превращения ее в тепло.

Теперь допустим, что в пределах рассматриваемого нами участка проводника действуют сторонние силы, поле которых однородно ( $\mathbf{E}^* = \text{const}$ ). В этом случае согласно формуле (35.1) в каждой

точке проводника имеет место соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

из которого вытекает, что

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} - \mathbf{E}^*. \quad (107.7)$$

Будем считать, что сторонние силы на рассматриваемом участке цепи не противятся, а способствуют прохождению тока. Это означает, что направление  $\mathbf{E}^*$  совпадает с направлением  $\mathbf{j}$ . Допустим, что выполняется соотношение  $\rho \mathbf{j} = \mathbf{E}^*$ . Тогда согласно (107.7) напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}$  в каждой точке равна нулю, и поток электромагнитной энергии через боковую поверхность отсутствует. В этом случае тепло выделяется за счет работы сторонних сил.

Если же имеет место соотношение  $\mathbf{E}^* > \rho \mathbf{j}$ , то, как следует из (107.7), вектор  $\mathbf{E}$  будет направлена противоположно вектору  $\mathbf{j}$ . В этом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{S}$  имеют направления, противоположные изображенным на рис. 107.1. Следовательно, электромагнитная энергия не втекает, а, наоборот, вытекает через боковую поверхность проводника в окружающее его пространство.

Резюмируя, можно сказать, что в замкнутой цепи постоянного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается другим участкам цепи не вдоль проводников, а через окружающее проводники пространство в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором  $\mathbf{S}$ .

### § 108. Импульс электромагнитного поля

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Это можно показать на следующем примере. Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность слабо проводящего тела с  $\epsilon$  и  $\mu$ , равными единице (рис. 108.1). Электрическое поле волны возбудит в теле ток плотности  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле (44.4):

$$\mathbf{F}_{\text{ед.об}} = [\mathbf{j}\mathbf{B}] = \mu_0 [\mathbf{j}\mathbf{H}].$$

Направление этой силы, как видно из рис. 108.1, совпадает с направлением распространения волны.

Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной  $dl$  сообщается в единицу времени импульс

$$dK = F_{\text{ед.об}} dl = \mu_0 j H dl \quad (108.1)$$

(векторы  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны). В этом же слое в еди-

ницу времени поглощается энергия

$$dW = jE \, dl, \quad (108.2)$$

выделяющаяся в виде тепла.

Импульс (108.1) и энергия (108.2) сообщаются слою волной. Возьмем их отношение, опустив за ненадобностью символ  $d$ :

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Приняв во внимание, что  $\mu_0 H^2 = \epsilon_0 E^2$ , получим

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда вытекает, что электромагнитная волна, несущая энергию  $W$ , обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (108.3)$$

Такая же связь между энергией и импульсом имеет место для частиц с нулевой массой покоя (см. формулу (71.1) 1-го тома). Это не удивительно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов, т. е. частиц, масса которых (имеется в виду масса покоя) равна нулю.

Из (108.3) следует, что плотность импульса (т. е. импульс единицы объема) электромагнитного поля равна

$$K_{\text{ед.об.}} = \frac{1}{c} \omega. \quad (108.4)$$

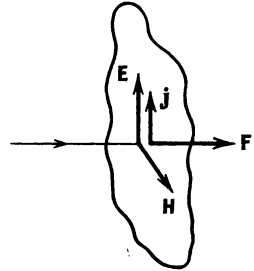


Рис. 108.1.

Плотность энергии связана с модулем вектора Пойнтинга соотношением  $S = \omega c$ . Заменяя в (108.4)  $\omega$  через  $S/c$  и учтя, что направления векторов  $K$  и  $S$  совпадают, можно написать

$$K_{\text{ед.об.}} = \frac{1}{c^2} S = \frac{1}{c^2} [EH]. \quad (108.5)$$

Отметим, что при переносе энергии любого вида плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на  $c^2$ . Рассмотрим, например, совокупность частиц, распределенных в пространстве с плотностью  $n$  и летящих с одинаковой по величине и направлению скоростью  $v$ . В этом случае плотность импульса равна

$$K_{\text{ед.об.}} = n \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (108.6)$$

Частицы переносят с собой энергию, плотность потока которой  $j_W$  равна плотности потока частиц, умноженной на энергию одной

частицы:

$$\mathbf{j}_w = n\mathbf{v} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (108.7)$$

Из (108.6) и (108.7) следует, что

$$\mathbf{K}_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{j}_w. \quad (108.8)$$

Пусть падающая нормально на некоторое тело электромагнитная волна полностью поглощается этим телом. Тогда единице поверхности тела сообщается в единицу времени импульс волны, заключенный в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой  $c$ . Согласно (108.4) этот импульс равен  $(w/c)c = w$ . Вместе с тем импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению  $p$  на поверхность. Следовательно, в случае поглощающей поверхности  $p = w$ . Эта величина пульсирует с очень большой частотой. Поэтому практически может быть измерено ее среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle w \rangle. \quad (108.9)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Величина давления, вычисленная по формуле (108.9), оказывается очень малой. Например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион кандел давление составляет всего лишь около  $10^{-7}$  Па ( $\sim 10^{-9}$  Гс/см<sup>2</sup>). Измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву. Осуществив опыты, потребовавшие большой изобретательности и мастерства, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела, а в 1910 г. — на газы. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

## § 109. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся электрический диполь. Примером такого диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом  $+q$  и колеблющимся около него точечным зарядом  $-q$  (рис. 109.1). Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} = -ql\mathbf{e} \cos \omega t = \mathbf{p}_m \cos \omega t, \quad (109.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор заряда  $-q$ ,  $l$  — амплитуда колебаний,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя,  $\mathbf{p}_m = -ql\mathbf{e}$ .

Ознакомление с подобной излучающей системой особенно важно в связи с тем, что многие вопросы взаимодействия излучения с веществом могут быть объяснены классически, исходя из представления об атомах как о системах зарядов, в которых содержатся

ся электроны, способные совершать гармонические колебания около положения равновесия.

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ( $l \ll \lambda$ ). Такой диполь называется элементарным. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину волны ( $r \gg \lambda$ ). Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим (рис. 109.2). Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя.

Назовем сечения волнового фронта плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор  $\mathbf{E}$  в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор  $\mathbf{H}$  — по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча  $\mathbf{r}$ , то мгновенная картина волны будет такой же, как на рис. 105.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает.

В каждой точке  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются по закону  $\cos(\omega t - kr)$ . Амплитуды  $E_m$  и  $H_m$  зависят от расстояния  $r$  до излучателя и от угла  $\vartheta$  между направлением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и осью диполя (см. рис. 109.2). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии  $\langle S \rangle$  пропорционально произведению  $E_m H_m$ , следовательно,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (109.2)$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при  $\vartheta = \text{const}$ ) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла  $\vartheta$ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ( $\vartheta = \pi/2$ ). В направлениях, совпадающих с осью ( $\vartheta = 0$  и  $\pi$ ), диполь не излучает. Зависимость интенсивности от угла  $\vartheta$  очень наглядно изображается с помощью диаграммы направленности диполя (рис. 109.3). Эта диаграмма

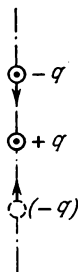


Рис. 109.1.

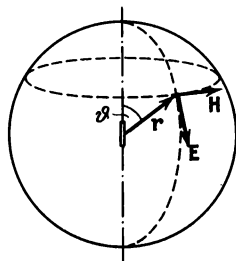


Рис. 109.2.



строится так, чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала интенсивность излучения под углом  $\vartheta$ .

Соответствующий расчет дает, что мощность излучения диполя  $P$  (т. е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени) пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P \sim \ddot{p}^2. \quad (109.3)$$

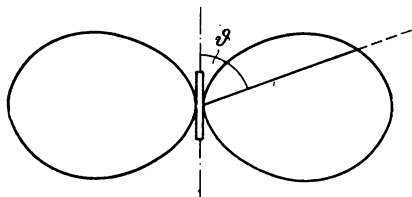


Рис. 109.3.

Согласно формуле (109.1)  $\ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ . Подстановка этого значения в (109.3) дает

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (109.4)$$

Усреднив это выражение по времени, получим

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (109.5)$$

Таким образом, средняя мощность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Согласно (109.1)  $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -q\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение колеблющегося заряда. Подстановка этого выражения для  $\ddot{p}$  в формулу (109.3) дает, что<sup>1</sup>

$$P \sim q^2 \mathbf{w}^2. \quad (109.6)$$

Эта формула определяет мощность излучения не только при колебаниях, но и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения. Например, электроны, ускоряемые в бетатроне (см. § 76), теряют энергию за счет излучения, обусловленного в основном центростремительным ускорением  $\omega_n = v^2/r$ . Согласно формуле (109.6) количество теряемой энергии сильно растет с увеличением скорости электронов в бетатроне (пропорционально  $v^4$ ). Поэтому возможное ускорение электронов в бетатроне ограничено пределом  $\sim 500$  МэВ (при скорости, соответствующей этому значению, потери на излучение становятся равными энергии, сообщаемой электронам вихревым электрическим полем).

<sup>1</sup> Коэффициент пропорциональности в формуле (109.6) равен  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}/6\pi c^2 = 20/c^2$  в СИ и  $2/(3c^3)$  в гауссовой системе.

Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну с частотой, равной частоте колебаний заряда. Если же ускорение заряда  $\mathbf{w}$  изменяется не по гармоническому закону, излучение состоит из набора волн различных частот.

Согласно формуле (109.6) интенсивность обращается в нуль при  $\mathbf{w} = 0$ . Следовательно, электрон, движущийся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо лишь в том случае, если скорость электрона  $v_{\text{эл}}$  не превышает скорости света  $v_{\text{св}} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  в той среде, в которой движется электрон. В случае, когда  $v_{\text{эл}} > v_{\text{св}}$ , наблюдается излучение, открытое в 1934 г. С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым.

ГЛАВА XVI

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 110. Световая волна

Свет представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как электромагнитная волна, в других — как поток особых частиц (фотонов). В данном томе излагается волновая оптика, т. е. круг явлений, в основе которых лежит волновая природа света. Совокупность явлений, обусловленных корпускулярной<sup>1</sup> природой света, будет рассмотрена в третьем томе.

В электромагнитной волне колеблются векторы **E** и **H**. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями электрического вектора. В соответствии с этим мы будем в дальнейшем говорить о световом векторе, подразумевая под ним вектор напряженности электрического поля. О магнитном векторе световой волны мы упоминать почти не будем.

Модуль амплитуды светового вектора мы будем обозначать, как правило, буквой *A* (иногда  $E_m$ ). Соответственно изменение во времени и пространстве проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, будет описываться уравнением

$$E = A \cos (\omega t - kr + \alpha). \quad (110.1)$$

Здесь *k* — волновое число, *r* — расстояние, отсчитываемое вдоль направления распространения световой волны. Для плоской волны, распространяющейся в непоглощающей среде,  $A = \text{const}$ , для сферической волны *A* убывает как  $1/r$ , и т. д.

Отношение скорости световой волны в вакууме к фазовой скорости *v* в некоторой среде называется абсолютным показателем преломления этой среды и обозначается буквой *n*. Таким образом,

$$n = \frac{c}{v}. \quad (110.2)$$

---

<sup>1</sup> Корпускула — частица.

Сравнение с формулой (104.10) дает, что  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Для подавляющего большинства прозрачных веществ  $\mu$  практически не отличается от единицы. Поэтому можно считать, что

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (110.3)$$

Формула (110.3) связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами. На первый взгляд может показаться, что эта формула неверна. Например, для воды  $\epsilon = 81$ , а  $n = 1,33$ . Однако надо иметь в виду, что значение  $\epsilon = 81$  получено из электростатических измерений. В быстропеременных электрических полях значение  $\epsilon$  получается иным, причем оно зависит от частоты колебаний поля. Этим объясняется д и с п е р с и я света, т. е. зависимость показателя преломления (или скорости света) от частоты (или длины волны). Подстановка в формулу (110.3) значения  $\epsilon$ , полученного для соответствующей частоты, приводит к правильному значению  $n$ .

Значения показателя преломления характеризуют оптическую плотность среды. Среда с большим  $n$  называется оптически более плотной, чем среда с меньшим  $n$ . Соответственно среда с меньшим  $n$  называется оптически менее плотной, чем среда с большим  $n$ .

Длины волн видимого света заключены в пределах

$$\lambda_0 = 0,40 \div 0,76 \text{ мкм } (4000 \div 7600 \text{ Å}). \quad (110.4)$$

Эти значения относятся к световым волнам в вакууме. В веществе длины световых волн будут иными. В случае колебаний частоты  $\nu$  длина волны в вакууме равна  $\lambda_0 = c/\nu$ . В среде, в которой фазовая скорость световой волны  $v = c/n$ , длина волны имеет значение  $\lambda = v/\nu = c/\nu n = \lambda_0/n$ . Таким образом, длина световой волны в среде с показателем преломления  $n$  связана с длиной волны в вакууме соотношением

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (110.5)$$

Частоты видимых световых волн лежат в пределах

$$\nu = (0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \quad (110.6)$$

Частота изменений вектора плотности потока энергии, переносимой волной, будет еще больше (она равна  $2\nu$ ). Ни глаз, ни какой-либо иной приемник световой энергии не могут уследить за столь частыми изменениями потока энергии, вследствие чего они регистрируют усредненный по времени поток. Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной, носит название интенсивности света  $I$  в данной точке пространства. Плотность потока электромагнитной энергии

определяется вектором Пойнтинга  $\mathbf{S}$ . Следовательно,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [\mathbf{E}\mathbf{H}] \rangle|. \quad (110.7)$$

Усреднение производится за время «срабатывания» прибора, которое, как отмечалось, много больше периода колебаний волны. Измеряется интенсивность либо в энергетических единицах (например, в Вт/м<sup>2</sup>), либо в световых единицах, носящих название «люмен на квадратный метр» (см. § 114).

Согласно формуле (105.12) модули амплитуд векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в электромагнитной волне связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0} = H_m \sqrt{\mu_0}$$

(мы положили  $\mu = 1$ ). Отсюда следует, что

$$H_m = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m = n E_m \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

где  $n$  — показатель преломления среды, в которой распространяется волна. Таким образом,  $H_m$  пропорционально  $E_m$  и  $n$ :

$$H_m \sim n E_m. \quad (110.8)$$

Модуль среднего значения вектора Пойнтинга пропорционален  $E_m H_m$ . Поэтому можно написать, что

$$I \sim n E_m^2 = n A^2 \quad (110.9)$$

(коэффициент пропорциональности равен  $1/2 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ ). Следовательно, интенсивность света пропорциональна показателю преломления среды и квадрату амплитуды световой волны.

Заметим, что при рассмотрении распространения света в однородной среде можно считать, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны:

$$I \sim A^2. \quad (110.10)$$

Однако в случае прохождения света через границу раздела сред выражение для интенсивности, не учитывающее множитель  $n$ , приводит к несохранению светового потока.

Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называются *лучами*. Усредненный вектор Пойнтинга  $\langle \mathbf{S} \rangle$  направлен в каждой точке по касательной к лучу. В изотропных средах направление  $\langle \mathbf{S} \rangle$  совпадает с нормалью к волновой поверхности, т. е. с направлением волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Следовательно, лучи перпендикулярны к волновым поверхностям. В анизотропных средах нормаль к волновой поверхности в общем случае не совпадает с направлением вектора Пойнтинга, так что лучи не ортогональны волновым поверхностям.

Несмотря на то, что световые волны поперечны, они обычно не обнаруживают асимметрии относительно луча. Это обусловлено тем, что в естественном свете (т. е. свете, испускаемом обычными источниками) имеются колебания, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 110.1). Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около  $10^{-8}$  с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, *ц у г в о л н*) протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно «вспыхивает» много атомов. Возбужденные ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайным образом. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений представлены с равной вероятностью.

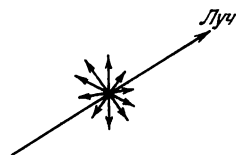


Рис. 110.1.

В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называется *поляризованным*. Если колебания светового вектора происходят только в одной проходящей через луч плоскости, свет называется *плоско-* (или *линейно*) *поляризованным*. Упорядоченность может заключаться в том, что вектор  $\mathbf{E}$  поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс. Такой свет называется *эллиптически-поляризованным*. Если конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает окружность, свет называется *поляризованным по кругу*.

В главах XVII и XVIII мы будем иметь дело с естественным светом. Поэтому направление колебаний светового вектора нас не будет особенно интересовать. Способы получения и свойства поляризованного света рассматриваются в гл. XIX.

### § 111. Представление гармонических функций с помощью экспонент

Образует сумму двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (111.1)$$

Из (111.1) следует, что вещественная часть суммы комплексных чисел равна сумме вещественных частей слагаемых:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2. \quad (111.2)$$

Допустим, что комплексное число является функцией некоторого параметра, например времени  $t$ :

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Продифференцировав эту функцию по  $t$ , получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}.$$

Отсюда вытекает, что вещественная часть производной  $z$  по  $t$  равна производной по  $t$  от вещественной части  $z$ :

$$\operatorname{Re} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} z. \quad (111.3)$$

При интегрировании комплексной функции имеет место аналогичное соотношение. Действительно,

$$\int z(t) dt = \int x(t) dt + i \int y(t) dt,$$

откуда следует, что вещественная часть интеграла от  $z(t)$  равна интегралу от вещественной части  $z(t)$ :

$$\operatorname{Re} \int z(t) dt = \int \operatorname{Re} z(t) dt. \quad (111.4)$$

Очевидно, что соотношения, аналогичные (111.2), (111.3) и (111.4), имеют место также и для мнимых частей комплексных функций.

Из сказанного вытекает, что при выполнении над комплексными функциями операций сложения, дифференцирования и интегрирования, а также линейных комбинаций этих операций, вещественная (мнимая) часть результата совпадает с результатом, который получился бы при выполнении аналогичных операций над вещественными (мнимыми) частями тех же функций<sup>1</sup>. Обозначив линейную комбинацию перечисленных выше операций символом  $\tilde{L}$ , можно написать:

$$\operatorname{Re} \tilde{L}(z_1, z_2, \dots) = \tilde{L}(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \dots). \quad (111.5)$$

Установленное нами свойство линейных операций позволяет применять следующий вычислительный прием: осуществляя линейные операции над гармоническими функциями вида

$$a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha),$$

заменять эти функции экспонентами

$$ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = \hat{a} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (111.6)$$

где  $\hat{a} = ae^{i\alpha}$  — комплексное число, называемое комплексной амплитудой. При таком представлении можно производить

<sup>1</sup> Отметим, что это правило неприменимо к нелинейным операциям, например к умножению функций, возведению в квадрат и т. п.

сложение функций, дифференцирование по переменным  $t, x, y, z$ , а также интегрирование по этим переменным. Произведя вычисления, следует взять вещественную часть полученного результата. Целесообразность этого приема объясняется тем, что вычисления с экспонентами значительно проще вычислений, осуществляемых над тригонометрическими функциями.

Переходя к представлению (111.6), мы по существу добавляем ко всем функциям вида  $a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$  слагаемые  $ia \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$ . Напомним, что подобный прием мы использовали при изучении вынужденных колебаний (см. § 60 1-го тома).

### § 112. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков

Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоскую границу раздела двух однородных и изотропных диэлектриков. Диэлектрик, в котором распространяется падающая волна, характеризуется проницаемостью  $\epsilon_1$ , второй диэлектрик — проницаемостью  $\epsilon_2$ . Магнитные проницаемости полагаем равными единице. Опыт показывает, что в этом случае, кроме распространяющейся во втором диэлектрике плоской преломленной волны, возникает плоская отраженная волна, распространяющаяся в первом диэлектрике.

Определим направление распространения падающей волны с помощью волнового вектора  $\mathbf{k}$ , отраженной волны — с помощью вектора  $\mathbf{k}'$  и, наконец, преломленной волны — с помощью вектора  $\mathbf{k}''$ . Найдем, как связаны направления  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  с направлением  $\mathbf{k}$ . Это можно сделать, воспользовавшись тем, что на границе двух диэлектриков должно выполняться условие

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (112.1)$$

Здесь  $E_{1\tau}$  и  $E_{2\tau}$  — тангенциальные составляющие напряженности электрического поля в первой и второй среде соответственно.

В § 21 мы доказали соотношение (112.1) для электростатических полей (см. формулу (21.4)). Однако его легко распространить и на поля, изменяющиеся со временем. Согласно уравнению (71.1) определяемая выражением (21.2) циркуляция  $\mathbf{E}$  в случае переменных полей должна быть равна не нулю, а интегралу  $\oint (-\dot{\mathbf{B}}) d\mathbf{S}$ , взятому по площади контура, изображенного на рис. 21.1:

$$\oint E_i dl = E_{1xa} - E_{2xa} + \langle E_b \rangle 2b = - \int_{S=a \cdot b} \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{S}.$$

Поскольку  $\dot{\mathbf{B}}$  конечно, при предельном переходе  $b \rightarrow 0$  интеграл в правой части обращается в нуль, и мы приходим к условию (21.3), из которого следует (21.4).



Пусть вектор  $\mathbf{k}$ , определяющий направление распространения падающей волны, лежит в плоскости чертежа (рис. 112.1). Направление нормали к поверхности раздела охарактеризуем вектором  $\mathbf{n}$ . Плоскость, в которой лежат векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$ , называется плоскостью падения волны. Возьмем линию пересечения плоскости падения с границей раздела диэлектриков в качестве оси  $x$ . Ось  $y$  направим перпендикулярно к плоскости раздела диэлектриков. Тогда ось  $z$  будет перпендикулярна к плоскости падения, а вектор  $\tau$  окажется направленным вдоль оси  $x$  (см. рис. 112.1).

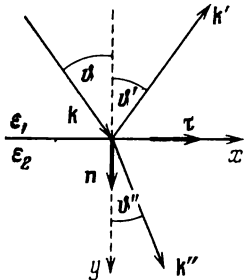


Рис. 112.1.

Из соображений симметрии ясно, что векторы  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  могут лежать лишь в плоскости падения (среды однородны и изотропны). Действительно, допустим, что, например, вектор  $\mathbf{k}'$  отклонился от этой плоскости «на нас». Однако нет никаких оснований предпочесть такое отклонение равному ему отклонению «от нас». Поэтому единственно возможным оказывается направление вектора  $\mathbf{k}'$ , лежащее в плоскости падения. Аналогичные рассуждения справедливы и для вектора  $\mathbf{k}''$ .

Выделим из естественного падающего луча плоскополяризованную составляющую, в которой направление колебаний вектора  $\mathbf{E}$  образует с плоскостью падения произвольный угол. Колебания вектора  $\mathbf{E}$  в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , описываются функцией<sup>1</sup>

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

(при сделанном нами выборе осей координат проекция вектора  $\mathbf{k}$  на ось  $z$  равна нулю, поэтому в показателе экспоненты отсутствует слагаемое  $-k_z z$ ). За счет выбора начала отсчета  $t$  мы сделали начальную фазу волны равной нулю.

Напряженности в отраженной и преломленной волнах определяются аналогичными выражениями:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}, \quad \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')},$$

( $\alpha'$  и  $\alpha''$  — начальные фазы соответствующих волн).

Результирующее поле в первой среде равно

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \mathbf{E}'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}. \quad (112.2)$$

Во второй среде

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}. \quad (112.3)$$

<sup>1</sup> Точнее, вещественной частью этой функции, но мы для краткости будем говорить просто функцией.

Согласно (112.1) тангенциальные составляющие выражений (112.2) и (112.3) на поверхности раздела, т. е. при  $y = 0$ , должны быть одинаковыми. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$E_{m\tau}e^{i(\omega t - k_x x)} + E'_{m\tau}e^{i(\omega' t - k'_x x + \alpha')} = E''_{m\tau}e^{i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')}. \quad (112.4)$$

Для того чтобы условие (112.4) выполнялось при любом  $t$ , необходимо равенство всех частот:

$$\omega = \omega' = \omega''. \quad (112.5)$$

Чтобы убедиться в этом, напомним равенство (112.4) в виде

$$ae^{i\omega t} + be^{i\omega' t} = ce^{i\omega'' t},$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  не зависят от  $t$ . Написанное нами равенство эквивалентно следующим двум:

$$a \cos \omega t + b \cos \omega' t = c \cos \omega'' t, \quad a \sin \omega t + b \sin \omega' t = c \sin \omega'' t.$$

Сумма двух гармонических функций будет также гармонической функцией только в том случае, если складываемые функции имеют одинаковые частоты. Получающаяся в результате сложения гармоническая функция имеет ту же частоту, что и складываемые функции. Отсюда следует соотношение (112.5). Таким образом, мы пришли к выводу, что частоты отраженной и преломленной волн совпадают с частотой падающей волны.

Для того чтобы условие (112.4) выполнялось при любом  $x$ , необходимо равенство проекций волновых векторов на ось  $x$ :

$$k_x = k'_x = k''_x. \quad (112.6)$$

Показанные на рис. 112.1 углы  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  и  $\vartheta''$  называются углом падения, углом отражения и углом преломления. Из рисунка видно, что  $k_x = k \sin \vartheta$ ,  $k'_x = k' \sin \vartheta'$ ,  $k''_x = k'' \sin \vartheta''$ . Поэтому соотношение (112.6) можно написать в виде

$$k \sin \vartheta = k' \sin \vartheta' = k'' \sin \vartheta''.$$

Векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  имеют одинаковый модуль, равный  $\omega/v_1$ ; модуль вектора  $\mathbf{k}''$  равен  $\omega/v_2$ . Следовательно,

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \vartheta = \frac{\omega}{v_1} \sin \vartheta' = \frac{\omega}{v_2} \sin \vartheta''.$$

Отсюда вытекает, что

$$\vartheta' = \vartheta, \quad (112.7)$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}. \quad (112.8)$$

Полученные нами соотношения выполняются для любой плоскополяризованной составляющей естественного луча. Следовательно, они справедливы и для естественного луча в целом.

Соотношение (112.7) выражает закон отражения света, согласно которому *отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; угол отражения равен углу падения.*

Соотношение (112.8) выражает закон преломления света, который формулируется следующим образом: *преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ.*

Фигурирующая в формуле (112.8) величина  $n_{12}$  называется относительным показателем преломления второго вещества по отношению к первому. Представим эту величину в виде

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \frac{v_1}{c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (112.9)$$

Таким образом, относительный показатель преломления двух веществ равен отношению их абсолютных показателей преломления.

Заменив в формуле (112.8)  $n_{12}$  отношением  $n_2/n_1$ , можно представить закон преломления в виде

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''. \quad (112.10)$$

Из этой формулы видно, что при переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную луч удаляется от нормали к поверхности раздела сред. Увеличение угла падения  $\theta$  сопровождается более быстрым ростом угла преломления  $\theta''$ , и по достижении углом  $\theta$  значения

$$\theta_{\text{пред}} = \arcsin n_{12} \quad (112.11)$$

угол  $\theta''$  становится равным  $\pi/2$ . Угол, определяемый формулой (112.11), называется предельным углом.

Энергия, которую несет с собой падающий луч, распределяется между отраженным и преломленным лучами. По мере увеличения угла падения интенсивность отраженного луча растет, интенсивность же преломленного луча убывает, обращаясь в нуль при предельном угле. При углах падения, заключенных в пределах от  $\theta_{\text{пред}}$  до  $\pi/2$ , световая волна проникает во вторую среду на расстояние порядка длины волны  $\lambda$  и затем возвращается в первую среду. Это явление называется полным внутренним отражением.

Найдем соотношения между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн. Для простоты ограничимся случаем нормального падения плоской волны на поверхность раздела однородных и изотропных диэлектриков с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Обозначим электрическую составляющую в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно

через  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$ , а магнитную составляющую через  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{H}''$ . Из соображений симметрии следует, что колебания векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$  происходят вдоль того же направления, что и колебания вектора  $\mathbf{E}$ . Аналогично колебания векторов  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{H}''$  происходят вдоль направления вектора  $\mathbf{H}$ .

В данном случае нормальные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равны нулю. Поэтому тангенциальные составляющие этих векторов совпадают с самими векторами. На рис. 112.2 изображены мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в падающей, отраженной и преломленной волнах. На рисунке показаны также орты  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  и  $\mathbf{e}''$  направлений, вдоль которых распространяются соответствующие волны. Рисунок выполнен в предположении, что направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}'$  одинаковы, а векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}''$  противоположны (в этом случае векторы  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{H}''$  направлены за чертеж). Действительные соотношения между направлениями векторов определяются расчетом.

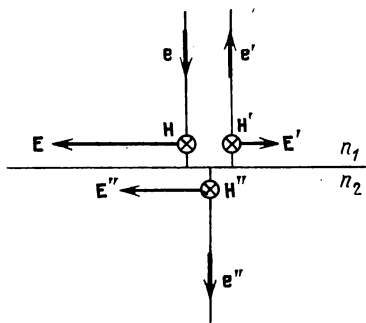


Рис. 112.2.

Модули векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны соотношением  $H = nE\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  (см. текст, предшествующий формуле (110.8); соотношения, полученные для амплитудных значений  $E$  и  $H$ , справедливы и для их мгновенных значений). Тройка вектора  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{e}$  образует правовинтовую систему. С учетом сказанного можно написать, что

$$\mathbf{H} = n_1\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}[\mathbf{eE}] \quad (112.12)$$

(см. рис. 112.2). Аналогичные соотношения имеют место и для векторов в отраженной и преломленной волнах.

Напишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (см. формулы (21.4) и (54.6)):

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}'', \quad (112.13)$$

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H}''. \quad (112.14)$$

Напомним, что значения векторов берутся в непосредственной близости к границе раздела.

Заменив в (112.14) векторы  $\mathbf{H}$  векторами  $\mathbf{E}$  в соответствии с формулой (112.12), получим (после сокращения на  $\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ )

$$n_1[\mathbf{eE}] + n_1[\mathbf{e'E'}] = n_2[\mathbf{e''E''}].$$

Учтя, что  $\mathbf{e} = \mathbf{e}'' = -\mathbf{e}'$ , преобразуем последнее соотношение следующим образом:

$$n_1[\mathbf{eE}] - n_1[\mathbf{e'E'}] = n_2[\mathbf{eE''}].$$

Отсюда

$$[\mathbf{e}, n_1 \mathbf{E}] = [\mathbf{e}, (n_1 \mathbf{E}' + n_2 \mathbf{E}'')].$$

Поскольку векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{E}$  взаимно перпендикулярны, из полученного равенства вытекает, что

$$n_1 \mathbf{E} = n_1 \mathbf{E}' + n_2 \mathbf{E}''. \quad (112.15)$$

Решив совместно уравнения (112.13) и (112.15), получим соотношения

$$\mathbf{E}' = \frac{n_1 - n_2}{-n_1 + n_2} \mathbf{E}, \quad (112.16)$$

$$\mathbf{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}. \quad (112.17)$$

Из формулы (112.17) вытекает, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}''$  имеют в каждый момент времени одинаковое направление. Отсюда заключаем, что колебания в падающей и в прошедшей во вторую среду волнах происходят на границе раздела в одинаковой фазе — при прохождении волны через эту границу фаза не претерпевает скачка.

Из формулы (112.16) вытекает, что при  $n_2 < n_1$  направление вектора  $\mathbf{E}'$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Это означает, что колебания в падающей и отраженной волнах происходят на границе раздела в одинаковой фазе — фаза волны при отражении не изменяется. Если же  $n_2 > n_1$ , то направление вектора  $\mathbf{E}'$  противоположно направлению  $\mathbf{E}$ . Это означает, что колебания в падающей и отраженной волнах происходят на границе раздела в противофазе — фаза волны при отражении изменяется скачком на  $\pi$ . Полученный результат справедлив и при наклонном падении волны на границу раздела двух прозрачных сред (см. § 135). Отметим, что показанное на рис. 112.2 направление векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$  согласуется с результатом вычислений для случая  $n_2 > n_1$ .

Итак, при отражении световой волны от границы раздела среды оптически менее плотной со средой оптически более плотной (при  $n_1 < n_2$ ) фаза колебаний светового вектора претерпевает изменение на  $\pi$ . При отражении от границы раздела среды оптически более плотной со средой оптически менее плотной (при  $n_1 > n_2$ ) такого изменения фазы не происходит.

Подставив в выражение  $n_1 \mathbf{E}'^2 + n_2 \mathbf{E}''^2$  значения (112.16) и (112.17) для  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$ , придем после несложных преобразований к соотношению

$$n_1 E^2 = n_1 E'^2 + n_2 E''^2.$$

Это соотношение получено для мгновенных значений  $E$ . Аналогичное соотношение имеет место и для амплитудных значений светового вектора:

$$n_1 E_m^2 = n_1 E_m'^2 + n_2 E_m''^2. \quad (112.18)$$

Согласно (110.9) выражение  $n_1 E_m^2$  можно трактовать как величину, пропорциональную интенсивности  $I$  падающей волны,  $n_1 E_m'^2$  — как величину, пропорциональную интенсивности  $I'$  отраженной волны,  $n_2 E_m''^2$  — как величину, пропорциональную интенсивности  $I''$  преломленной волны. Таким образом, соотношение (112.18) выражает закон сохранения энергии.

Полученные соотношения позволяют найти коэффициент отражения  $\rho$  и коэффициент пропускания  $\tau$  световой волны (для случая нормального падения на границу раздела двух прозрачных сред). Действительно, по определению

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E_m'^2}{n_1 E_m^2}.$$

Подставив в это выражение отношение  $E_m'/E_m$ , полученное из (112.16), придем к формуле

$$\rho = \left( \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad (112.19)$$

где  $n_{12} = n_2/n_1$  — показатель преломления второй среды по отношению к первой.

Для коэффициента пропускания получается выражение

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2 E_m''^2}{n_1 E_m^2} = n_{12} \left( \frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2. \quad (112.20)$$

Легко убедиться в том, что сумма  $\rho + \tau$ , как и должно быть, равна единице.

Отметим, что замена в формуле (112.19)  $n_{12}$  на обратную ему величину  $n_{21} = 1/n_{12}$  не изменяет значения  $\rho$ . Следовательно, коэффициент отражения поверхности раздела двух данных сред для обоих направлений распространения света имеет одинаковое значение.

Показатель преломления стекол близок к 1,5. Подстановка в формулу (112.19)  $n_{12} = 1,5$  дает  $\rho = 0,04$ . Таким образом, каждая поверхность стеклянной пластинки отражает (при падении, близком к нормальному) около 4% упавшей на нее световой энергии.

### § 113. Световой поток

Всякая реальная световая волна представляет собой наложение волн с длинами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\lambda$ . В белом свете  $\Delta\lambda$  охватывает весь диапазон воспринимаемых глазом электромагнитных волн, т. е. простирается от 0,40 до 0,76 мкм. Свет, для которого  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , называется квазимонохроматическим (латинская приставка «квази» означает «мнимо»).

Распределение потока энергии по длинам волн можно охарактеризовать с помощью функции распределения

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_3}{d\lambda}, \quad (113.1)$$

где  $d\Phi_3$  — поток энергии, приходящийся на длины волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ . Зная вид функции (113.1), можно вычислить поток энергии, переносимой волнами, заключенными в конечном интервале от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ :

$$\Phi_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (113.2)$$

Действие света на глаз (световое ощущение) в сильной степени зависит от длины волны. Это легко понять, если учесть, что электромагнитные волны с  $\lambda$ , меньшей 0,40 мкм и большей 0,76 мкм, совсем не вызывают зрительного ощущения. Чувствительность среднего нормального человеческого глаза к излучению разной длины волны дается кривой относительной спектральной чувствительности (рис. 113.1). По горизонтальной оси

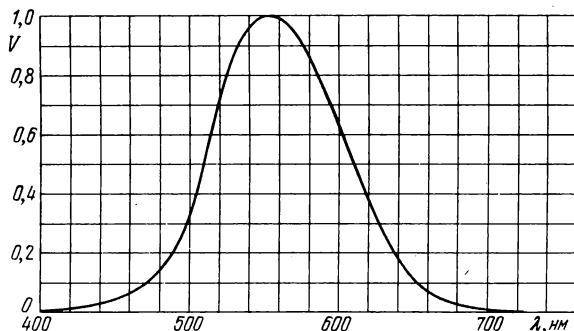


Рис. 113.1.

отложена длина волны  $\lambda$ , по вертикальной оси — относительная спектральная чувствительность  $V(\lambda)$ . Наиболее чувствителен глаз к излучению с длиной волны 0,555 мкм<sup>1</sup> (зеленая часть спектра). Функция  $V(\lambda)$  для этой длины волны принята равной единице. При том же потоке энергии оцениваемая зрительно интенсивность света для других длин волн оказывается меньшей. Соответственно и  $V(\lambda)$  для этих длин волн меньше единицы. Значения функции

<sup>1</sup> Интересно, что в излучении Солнца эта длина волны представлена с наибольшей интенсивностью.

$V(\lambda)$  обратно пропорциональны значениям потоков энергии, которые вызывают одинаковое по интенсивности зрительное ощущение:

$$\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{(d\Phi_s)_2}{(d\Phi_s)_1}.$$

Например,  $V(\lambda) = 0,5$  означает, что для получения зрительного ощущения такой же интенсивности свет данной длины волны должен иметь плотность потока энергии в два раза бóльшую, чем свет, для которого  $V(\lambda) = 1$ . Вне интервала видимых длин волн функция  $V(\lambda)$  равна нулю.

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина  $\Phi$ , называемая световым потоком. Для интервала  $d\lambda$  световой поток определяется как произведение потока энергии на соответствующее значение функции  $V(\lambda)$ :

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_s. \quad (113.3)$$

Выразив поток энергии через функцию распределения энергии по длинам волн (см. (113.1)), получим

$$d\Phi = V(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda. \quad (113.4)$$

Полный световой поток равен

$$\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda. \quad (113.5)$$

Функция  $V(\lambda)$  — безразмерная величина. Следовательно, размерность светового потока совпадает с размерностью потока энергии: Это позволяет определить световой поток как поток световой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

#### § 114. Фотометрические величины и единицы

Фотометрией называется раздел оптики, занимающийся измерением световых потоков и величин, связанных с такими потоками.

**Сила света.** Источник света, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от места наблюдения до источника, называется *точечным*. В однородной и изотропной среде волна, излучаемая точечным источником, будет сферической. Для характеристики точечных источников света применяется *сила света*  $I$ , которая определяется как поток излучения источника, проходящий на единицу телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (114.1)$$

( $d\Phi$  — световой поток, излучаемый источником в пределах телесного угла  $d\Omega$ ).



В общем случае сила света зависит от направления:  $I = I(\vartheta, \varphi)$  ( $\vartheta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы в сферической системе координат). Если  $I$  не зависит от направления, источник света называется **изотропным**. Для изотропного источника

$$I = \Phi/4\pi, \quad (114.2)$$

где  $\Phi$  — полный световой поток, излучаемый источником по всем направлениям.

В случае протяженного источника можно говорить о силе света элемента его поверхности  $dS$ . Тогда под  $d\Phi$  в формуле (114.1) следует понимать световой поток, излучаемый элементом поверхности  $dS$  в пределах телесного угла  $d\Omega$ .

Единица силы света — **кандела** (кд) является одной из основных единиц Международной системы (СИ). Ее значение принимается таким, чтобы яркость (см. ниже) полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 кд на  $1 \text{ см}^2$ . Под полным излучателем понимается устройство, обладающее свойствами абсолютно черного тела (см. т. 3).

**Световой поток.** Единицей светового потока является **люмен** (лм). Он равен световому потоку, излучаемому изотропным источником с силой света в 1 кд в пределах телесного угла в один стереadian:

$$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}. \quad (114.3)$$

Опытным путем установлено, что световому потоку в 1 лм, образованному излучением с длиной волны  $\lambda = 0,555 \text{ мкм}$ , соответствует поток энергии в 0,0016 Вт. Световому потоку в 1 лм, образованному излучением с другой  $\lambda$ , соответствует поток энергии

$$\Phi_s = 0,0016/V(\lambda) \text{ Вт}. \quad (114.4)$$

**Освещенность.** Степень освещенности некоторой поверхности падающим на нее светом характеризуется величиной

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}, \quad (114.5)$$

называемой **освещенностью** ( $d\Phi_{\text{пад}}$  — световой поток, падающий на элемент поверхности  $dS$ ).

Единицей освещенности является **люкс** (лк), равный освещенности, создаваемой потоком в 1 лм, равномерно распределенным по поверхности площади в  $1 \text{ м}^2$ :

$$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм} : 1 \text{ м}^2. \quad (114.6)$$

Освещенность  $E$ , создаваемую точечным источником, можно выразить через силу света  $I$ , расстояние  $r$  от поверхности до источника и угол  $\alpha$  между нормалью к поверхности  $\mathbf{n}$  и направлением на источник. На площадку  $dS$  (рис. 114.1) падает поток  $d\Phi_{\text{пад}} =$

$= I d\Omega$ , заключенный в пределах телесного угла  $d\Omega$ , опирающегося на  $dS$ . Угол  $d\Omega$  равен  $dS \cos \alpha / r^2$ . Следовательно,  $d\Phi_{\text{пад}} = I dS \cos \alpha / r^2$ . Разделив этот поток на  $dS$ , получим

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (114.7)$$

**Светимость.** Протяженный источник света можно охарактеризовать светимостью  $M$  различных его участков, под которой понимается световой поток, испускаемый единицей площади наружу по всем направлениям (в пределах значений  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ ;  $\theta$  — угол, образуемый данным направлением с внешней нормалью к поверхности):

$$M = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS} \quad (114.8)$$

( $d\Phi_{\text{исп}}$  — поток, испускаемый наружу по всем направлениям элементом поверхности  $dS$  источника).

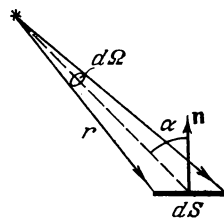


Рис. 114.1.

Светимость может возникнуть за счет отражения поверхностью падающего на нее света. Тогда под  $d\Phi_{\text{исп}}$  в формуле (114.8) следует понимать поток, отраженный элементом поверхности  $dS$  по всем направлениям.

Единицей светимости является люмен на квадратный метр ( $\text{лм}/\text{м}^2$ ).

**Яркость.** Светимость характеризует излучение (или отражение) света данным местом поверхности по всем направлениям. Для характеристики излучения (отражения) света в заданном направлении служит яркость  $L$ . Направление можно задать полярным углом  $\theta$  (отсчитываемым от внешней нормали  $\mathbf{n}$  к излучающей площадке  $\Delta S$ ) и азимутальным углом  $\varphi$ . Яркость определяется как отношение силы света элементарной поверхности  $\Delta S$  в данном направлении к проекции площадки  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную к взятому направлению.

Рассмотрим элементарный телесный угол  $d\Omega$ , опирающийся на светящуюся площадку  $\Delta S$  и ориентированный в направлении  $(\theta, \varphi)$  (рис. 114.2). Сила света площадки  $\Delta S$  в данном направлении согласно определению (114.1) равна  $I = d\Phi/d\Omega$ , где  $d\Phi$  — световой поток, распространяющийся в пределах угла  $d\Omega$ . Проекцией  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную к направлению  $(\theta, \varphi)$  (на рис. 114.2 след этой плоскости изображен пунктиром), будет  $\Delta S \cos \theta$ . Следовательно, яркость равна

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos \theta}. \quad (114.9)$$

В общем случае яркость различна для разных направлений:  $L = L(\theta, \varphi)$ . Как и светимость, яркость может быть использована

для характеристики поверхности, отражающей падающий на нее свет.

Согласно формуле (114.9) поток, излучаемый площадкой  $\Delta S$  в пределах телесного угла  $d\Omega$  по направлению, определяемому  $\theta$  и  $\varphi$ , равен

$$d\Phi = L(\theta, \varphi) d\Omega \Delta S \cos \theta. \quad (114.10)$$

Источники, яркость которых одинакова по всем направлениям ( $L = \text{const}$ ), называются **ламбертовскими** (подчиняющимися закону Ламберта) или **косинусными** (поток, посылаемый элементом поверхности такого источника, пропорционален  $\cos \theta$ ). Строго следует закону Ламберта только абсолютно черное тело.

Светимость  $M$  и яркость  $L$  ламбертовского источника связаны простым соотношением. Чтобы найти его, подставим в (114.10)  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  и проинтегрируем полученное выражение по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$  и по  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ , учтя, что  $L = \text{const}$ . В результате мы найдем полный световой поток, испускаемый элементом поверхности  $\Delta S$  ламбертовского источника наружу по всем направлениям:

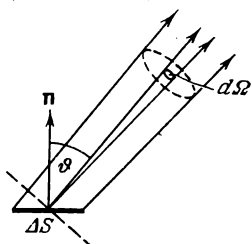


Рис. 114.2.

$$\Delta \Phi_{\text{исп}} = L \Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi L \Delta S.$$

Разделив этот поток на  $\Delta S$ , получим светимость. Таким образом, для ламбертовского источника

$$M = \pi L. \quad (114.11)$$

Единицей яркости служит **кандела на квадратный метр** ( $\text{кд}/\text{м}^2$ ). Яркостью в  $1 \text{ кд}/\text{м}^2$  обладает равномерно светящаяся плоская поверхность в направлении нормали к ней, если в этом направлении сила света одного квадратного метра поверхности равна одной канделе.

## § 115. Геометрическая оптика

Длины воспринимаемых глазом световых волн очень малы (порядка  $10^{-7} \text{ м}$ ). Поэтому распространение видимого света можно в первом приближении рассматривать, отвлекаясь от его волновой природы и полагая, что свет распространяется вдоль некоторых линий, называемых **лучами**. В предельном случае, соответствующем  $\lambda \rightarrow 0$ , законы оптики можно сформулировать на языке геометрии. В соответствии с этим раздел оптики, в котором пре-

небрегают конечностью длин волн, называется геометрической оптикой. Другое название этого раздела — лучевая оптика.

Основу геометрической оптики образуют четыре закона: 1) закон прямолинейного распространения света; 2) закон независимости световых лучей; 3) закон отражения света; 4) закон преломления света.

Закон прямолинейного распространения утверждает, что *в однородной среде свет распространяется прямолинейно*. Этот закон является приближенным: при прохождении света через очень малые отверстия наблюдаются отклонения от прямолинейности, тем большие, чем меньше отверстие.

Закон независимости световых лучей утверждает, что *лучи при пересечении не возмущают друг друга*. Пересечения лучей не мешают каждому из них распространяться независимо друг от друга. Этот закон справедлив лишь при не слишком больших интенсивностях света. При интенсивностях, достигаемых с помощью лазеров, независимость световых лучей перестает соблюдаться.

Законы отражения и преломления света сформулированы в § 112 (см. формулы (112.7) и (112.8) и следующий за ними текст).

В основу геометрической оптики может быть положен принцип, установленный французским математиком Ферма в середине XVII столетия. Из этого принципа вытекают законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света. В формулировке самого Ферма принцип гласит, что *свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время*.

Для прохождения участка пути  $ds$  (рис. 115.1) свету требуется время  $dt = ds/v$ , где  $v$  — скорость света в данной точке среды. Заменив  $v$  через  $c/n$  (см. (110.2)), получим, что  $dt = (1/c)n ds$ . Следовательно, время  $\tau$ , затрачиваемое светом на прохождение пути от точки 1 до точки 2, равно

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds. \quad (115.1)$$

Имеющая размерность длины величина

$$L = \int_1^2 n ds \quad (115.2)$$

называется оптической длиной пути. В однородной среде оптическая длина пути равна произведению геометрической

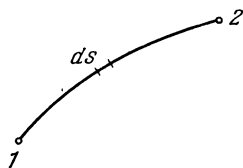


Рис. 115.1.

длины пути  $s$  на показатель преломления среды  $n$ :

$$L = ns. \quad (115.3)$$

Согласно (115.1) и (115.2)

$$\tau = L/c. \quad (115.4)$$

Пропорциональность времени прохождения  $\tau$  оптической длине пути  $L$  дает возможность сформулировать принцип Ферма следующим образом: *свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна*. Точнее, оптическая длина пути должна быть экстремальной, т. е. либо минимальной, либо максимальной, либо стационарной — одинаковой для всех возможных путей. В последнем случае все пути света между двумя точками оказываются та у т о х р о н н ы м и (требующими для своего прохождения одинакового времени).

Из принципа Ферма вытекает обратимость световых лучей. Действительно, оптический путь, который минимален в случае распространения света из точки 1 в точку 2, окажется минимальным и в случае распространения света в обратном направлении.

Следовательно, луч, пущенный навстречу лучу, проделавшему путь от точки 1 к точке 2, пойдет по тому же пути, но в обратном направлении.

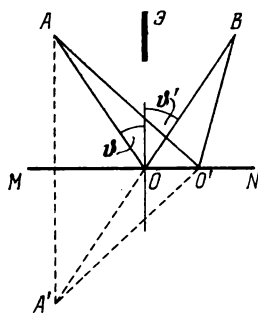


Рис. 115.2.

Получим с помощью принципа Ферма законы отражения и преломления света. Пусть свет попадает из точки  $A$  в точку  $B$ , отразившись от поверхности  $MN$  (рис. 115.2; прямой путь из  $A$  в  $B$  прегражден непрозрачным экраном  $\mathcal{E}$ ). Среда, в которой проходит луч, однородна. Поэтому минимальность оптической длины пути сводится к минимальности его геометрической длины. Геометрическая длина произ-

вольного взятого пути равна  $AO'B = A'O'B$  (вспомогательная точка  $A'$  является зеркальным изображением точки  $A$ ). Из рисунка видно, что наименьшей длиной обладает путь луча, отразившегося в точке  $O$ , для которой угол отражения равен углу падения. Заметим, что при удалении точки  $O'$  от точки  $O$  геометрическая длина пути неограниченно возрастает, так что в данном случае имеется только один экстремум — минимум.

Теперь найдем точку, в которой должен преломиться луч, распространяясь от  $A$  к  $B$ , чтобы оптическая длина пути была экстремальна (рис. 115.3). Для произвольного луча оптическая длина пути равна

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}.$$

Чтобы найти экстремальное значение, продифференцируем  $L$  по  $x$  и приравняем производную нулю:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b-x}{s_2} = 0.$$

Множители при  $n_1$  и  $n_2$  равны соответственно  $\sin\theta$  и  $\sin\theta''$ . Таким образом, получается соотношение

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'',$$

выражающее закон преломления (см. формулу (112.10)).

Рассмотрим отражение от внутренней поверхности эллипсоида вращения (рис. 115.4;  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипсоида). В соответствии с определением эллипса пути  $F_1O'F_2$ ,  $F_1O''F_2$ ,  $F_1O'''F_2$  и т. д. одинаковы по длине. Поэтому все лучи, вышедшие из фокуса  $F_1$

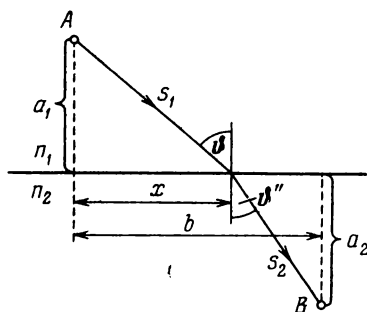


Рис. 115.3.

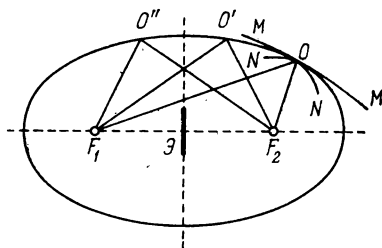


Рис. 115.4.

и пришедшие после отражения в фокус  $F_2$ , являются таутохронными. В этом случае оптическая длина пути стационарна. Если заменить поверхность эллипсоида поверхностью  $MM$ , имеющей меньшую кривизну и ориентированной так, что луч, вышедший из точки  $F_1$ , после отражения от  $MM$  попадает в точку  $F_2$ , то путь  $F_1OF_2$  будет минимальным. Для поверхности  $NN$ , имеющей кривизну большую, чем у эллипсоида, путь  $F_1OF_2$  будет максимальным.

Стационарность оптических путей имеет место также при прохождении лучей через линзу (рис. 115.5). Луч  $POP'$  имеет самый короткий путь в воздухе (где показатель преломления  $n$  практически равен единице) и самый длинный путь в стекле ( $n \approx 1,5$ ). Луч  $PQQ'P'$  имеет более длинный путь в воздухе, но зато более короткий путь в стекле. В итоге оптические длины путей для всех лучей оказываются одинаковыми. Поэтому лучи таутохронны, а оптическая длина пути стационарна.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в неоднородной изотропной среде вдоль лучей 1, 2, 3 и т. д. (рис. 115.6). Неоднородность будем считать достаточно малой для того, чтобы на отрезках

лучей длины  $\lambda$  показатель преломления можно было считать постоянным. Построим волновые поверхности  $S_1, S_2, S_3$  и т. д. таким образом, чтобы колебания в точках каждой следующей поверхности отставали по фазе на  $2\pi$  от колебаний в точках предыдущей поверхности. Колебания в точках, лежащих на одном и том же луче, описываются уравнением  $\xi = a \cos(\omega t - kr + \alpha)$  ( $r$  — расстояние, отсчитываемое вдоль луча). Отставание по фазе определяется выражением  $k \Delta r$ , где  $\Delta r$  — расстояние между соседними поверхностями. Из условия  $k \Delta r = 2\pi$  получаем, что  $\Delta r = 2\pi/k = \lambda$ . Оптическая длина каждого из путей геометрической длины  $\lambda$  равна  $n\lambda = \lambda_0$  (см. (110.5)). Согласно (115.4) время  $\tau$ , за которое свет проходит некоторый путь, пропорционально оптической длине этого пути. Следовательно, равенство оптических длин означает равенство времен прохождения светом соответствующих путей. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрезки лучей, заключенные между двумя волновыми поверхностями, имеют одина-

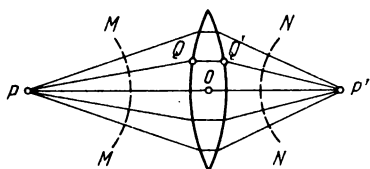


Рис. 115.5.

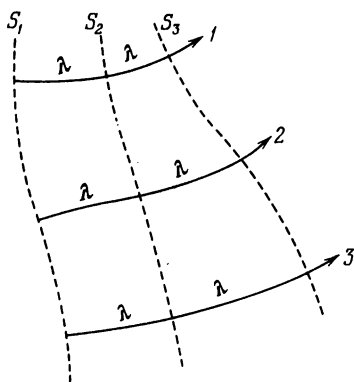


Рис. 115.6.

ковую оптическую длину и являются таутохронными. В частности, таутохронны отрезки лучей между изображенными пунктиром на рис. 115.5 волновыми поверхностями  $MM$  и  $NN$ .

Из проведенного нами рассмотрения вытекает, что отставание по фазе  $\delta$ , возникающее на пути с оптической длиной  $L$ , определяется выражением

$$\delta = \frac{L}{\lambda_0} 2\pi \quad (115.5)$$

( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме).

## § 116. Центрированная оптическая система

Совокупность лучей образует пучок. Если лучи при своем продолжении пересекаются в одной точке, пучок называется гомоцентрическим. Гомоцентрическому пучку лучей соответствует сферическая волновая поверхность. На рис. 116.1, а показан сходящийся, а на рис. 116.1, б — расходящийся гомоцентрический пучок.

чок. Частным случаем гомоцентрического пучка является пучок параллельных лучей; ему соответствует плоская световая волна.

Всякая оптическая система осуществляет преобразование световых пучков. Если система не нарушает гомоцентричности пучков, то лучи, вышедшие из точки  $P$ , пересекутся в одной точке  $P'$ . Эта точка представляет собой оптическое изображение точки  $P$ . Если любая точка предмета изображается в виде точки, изображение называется точечным или стигматическим.

Изображение называется действительным, если световые лучи в точке  $P'$  действительно пересекаются (см. рис. 116.1, а), и мнимым, если в  $P'$  пересекаются продолжения лучей, проведенные в направлении, обратном направлению распространения света (см. рис. 116.1, б).

Вследствие обратимости световых лучей источник света  $P$  и изображение  $P'$  могут поменяться ролями — точечный источник, помещенный в  $P'$ , будет иметь свое изображение в  $P$ . По этой причине  $P$  и  $P'$  называются сопряженными точками.

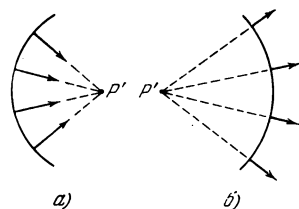


Рис. 116.1.

Оптическая система, которая дает стигматическое изображение, геометрически подобное отображаемому предмету, называется идеальной. С помощью такой системы пространственная непрерывность точек  $P$  отображается в виде пространственной непрерывности точек  $P'$ . Первая непрерывность точек называется пространством предметов, вторая — пространством изображений. В обоих пространствах точки, прямые и плоскости однозначно соответствуют друг другу. Такое соотношение двух пространств называется в геометрии коллинеарным соответствием.

Оптическая система представляет собой совокупность отражающих и преломляющих поверхностей, отделяющих друг от друга оптически однородные среды. Обычно эти поверхности бывают сферическими или плоскими (плоскость можно рассматривать как сферу бесконечного радиуса). Реже применяются более сложные поверхности (эллипсоид, гиперболоид, параболоид вращения и др.).

Оптическая система, образованная сферическими (в частности, плоскими) поверхностями, называется центрированной, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой. Эту прямую называют оптической осью системы.

Каждой точке  $P$  или плоскости  $S$  в пространстве предметов соответствует сопряженная с ней точка  $P'$  или плоскость  $S'$  в пространстве изображений. Среди бесконечного множества сопряженных точек и сопряженных плоскостей имеются точки и плоскости,



обладающие особыми свойствами. Такие точки и плоскости называются кардинальными. К их числу относятся фокальные, главные и узловые точки и плоскости. Задание кардинальных точек или плоскостей полностью определяет свойства идеальной центрированной оптической системы.

**Фокальные плоскости и фокусы оптической системы.** На рис. 116.2 показаны внешние преломляющие поверхности и оптическая ось некоторой идеальной центрированной оптической системы. Возьмем в пространстве предметов этой системы плоскость  $S$ , перпендикулярную к оптической оси. Из соображений симметрии следует, что сопряженная с  $S$  плоскость  $S'$  также перпендикулярна

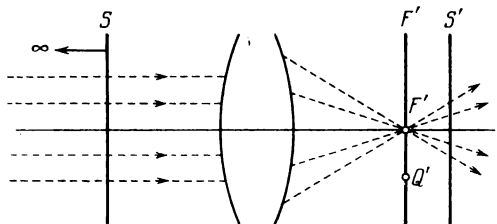


Рис. 116.2.

к оптической оси. Перемещение плоскости  $S$  относительно системы вызовет соответствующее перемещение плоскости  $S'$ . Когда плоскость  $S$  окажется очень далеко, дальнейшее увеличение ее расстояния от системы практически не вызывает изменения положения

плоскости  $S'$ . Это означает, что в результате удаления плоскости  $S$  на бесконечность плоскость  $S'$  оказывается в определенном предельном положении  $F'$ . Плоскость  $F'$ , совпадающая с предельным положением плоскости  $S'$ , называется **задней фокальной плоскостью** оптической системы. Кратко можно сказать, что **задней фокальной плоскостью  $F'$**  называется плоскость, сопряженная с находящейся на бесконечности в пространстве предметов плоскостью  $S_\infty$ , перпендикулярной к оси системы.

Точка пересечения задней фокальной плоскости с оптической осью называется **задним фокусом** системы. Обозначают ее также буквой  $F'$ . Эта точка сопряжена с удаленной на бесконечность точкой  $P_\infty$ , лежащей на оси системы. Лучи, выходящие из  $P_\infty$ , образуют параллельный оси пучок (см. рис. 116.2). По выходе из системы эти лучи образуют пучок, сходящийся в фокусе  $F'$ . Упавший на систему параллельный пучок может выйти из системы не в виде сходящегося (как на рис. 116.2), а в виде расходящегося пучка. Тогда в точке  $F'$  будут пересекаться не сами вышедшие лучи, а их продолжения в обратном направлении. Соответственно задняя фокальная плоскость окажется перед (по ходу лучей) системой или внутри системы.

Лучи, вышедшие из бесконечно удаленной точки  $Q_\infty$ , не лежащей на оси системы, образуют параллельный пучок, направленный под углом к оси системы. По выходе из системы эти лучи образуют пучок, сходящийся в точке  $Q'$ , принадлежащей задней фокальной плоскости, но не совпадающей с фокусом  $F'$  (см. точку  $Q'$  на рис.

116.2). Из сказанного следует, что изображение бесконечно удаленного предмета будет лежать в фокальной плоскости.

Если удалить на бесконечность перпендикулярную к оси плоскость  $S'$  (рис. 116.3), сопряженная с ней плоскость  $S$  придет в предельное положение  $F$ , которое называется **передней фокальной плоскостью** системы. Кратко можно сказать, что передней фокальной плоскостью  $F$  является плоскость, сопряженная с находящейся на бесконечности в пространстве изображений плоскостью  $S'_\infty$ , перпендикулярной к оси системы.

Точка пересечения передней фокальной плоскости  $F$  с оптической осью называется **передним фокусом** системы. Обозначают этот фокус также буквой  $F$ . Лучи, вышедшие из фокуса  $F$ , образуют после выхода из системы пучок параллельных осевых лучей. Лучи, вышедшие из точки  $Q$ , принадлежащей фокальной плоскости  $F$  (см. рис. 116.3), образуют после прохождения через систему параллельный пучок, направленный под углом к оси системы. Может случиться, что параллельный по выходе из системы пучок получается при падении на систему не расходящегося (как на рис. 116.3), а сходящегося пучка лучей. В этом случае передний фокус оказывается за системой или внутри системы.

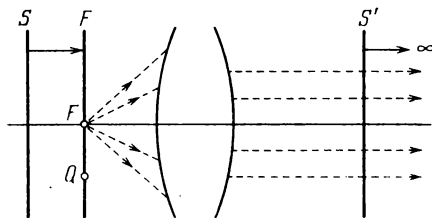


Рис. 116.3.

**Главные плоскости и точки.** Рассмотрим две сопряженные плоскости, перпендикулярные к оптической оси системы. Отрезок прямой  $y$  (рис. 116.4) лежащий в одной из этих плоскостей, будет

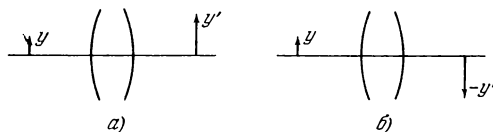


Рис. 116.4.

иметь своим изображением отрезок прямой  $y'$ , лежащий в другой плоскости. Из осевой симметрии системы вытекает, что отрезки  $y$  и  $y'$  должны лежать в одной, проходящей через оптическую ось, плоскости (в плоскости рисунка). При этом изображение  $y'$  может быть обращено либо в ту же сторону, что и предмет  $y$  (см. рис. 116.4, а), либо в противоположную сторону (см. рис. 116.4, б). В первом случае изображение называется **прямым**, во втором — **обратным**. Отрезки, откладываемые от оптической оси вверх,

принято считать положительными, откладываемые вниз — отрицательными. На рисунках указываются действительные длины отрезков, т. е. для отрицательных отрезков — положительные величины  $(-y)$  и  $(-y')$ .

Отношение линейных размеров изображения и предмета называется **линейным** или **поперечным** увеличением. Обозначив его буквой  $\beta$ , можно написать

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (116.1)$$

Линейное увеличение — алгебраическая величина. Оно положительно, если изображение прямое (знаки  $y$  и  $y'$  одинаковы), и отрицательно, если изображение обратное (знак  $y'$  противоположен знаку  $y$ ).

Можно доказать, что существуют две такие сопряженные плоскости, которые отображают друг друга с линейным увеличением  $\beta = +1$ . Эти плоскости называются **главными**. Плоскость, принадлежащая пространству предметов, именуется **передней главной плоскостью** системы. Ее обозначают буквой  $H$ . Плоскость, принадлежащую пространству изображений, именуют **задней главной плоскостью**. Ее обозначают символом  $H'$ . Точки пересечения главных плоскостей с оптической осью называются **главными точками** системы (соответственно передней и задней). Их обозначают теми же символами  $H$  и  $H'$ . В зависимости от устройства системы главные плоскости и точки могут находиться как вне, так и внутри системы. Может случиться, что одна из плоскостей проходит вне, а другая — внутри системы. Возможно, наконец, что обе плоскости будут лежать вне системы по одну и ту же сторону от нее.

Из определения главных плоскостей вытекает, что луч  $I$ , пересекающий (в действительности — рис. 116.5, а или при воображае-

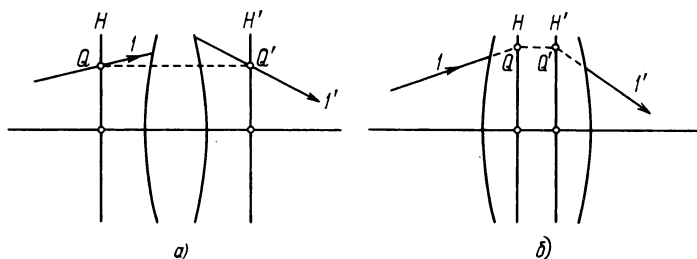


Рис. 116.5.

жаемом продолжении внутри системы — рис. 116.5, б) переднюю главную плоскость  $H$  в точке  $Q$ , имеет в качестве сопряженного луч  $I'$ , который пересекает (непосредственно или при воображае-

мом продолжении) главную плоскость  $H'$  в точке  $Q'$ , отстоящей в ту же сторону и на такое же расстояние от оси, как и точка  $Q$ . Это легко понять, если вспомнить, что  $Q$  и  $Q'$  являются сопряженными точками, и учесть, что любой луч, проходящий через точку  $Q$ , должен иметь в качестве сопряженного луч, проходящий через точку  $Q'$ .

**Узловые плоскости и точки.** Узловыми точками или узлами называются лежащие на оптической оси сопряженные точки  $N$  и  $N'$ , обладающие тем свойством, что проходящие через них (в действительности или при воображаемом продолжении внутрь системы) сопряженные лучи параллельны между собой (см. лучи  $1-1'$  и  $2-2'$  на рис. 116.6). Перпендикулярные к оси плоскости, проходящие через узлы, называются узловыми плоскостями (передней и задней).

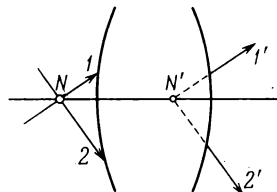


Рис. 116.6.

Расстояние между узлами всегда равно расстоянию между главными точками. В случае, когда оптические свойства сред, находящихся по обе стороны системы, одинаковы (т. е.  $n = n'$ ), узлы совпадают с главными точками.

**Фокусные расстояния и оптическая сила системы.** Расстояние от передней главной точки  $H$  до переднего фокуса  $F$  называется передним фокусным расстоянием  $f$  системы. Расстояние от  $H'$  до  $F'$  именуется задним фокусным расстоянием  $f'$ . Фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  — алгебраические величины. Они положительны, если данный фокус лежит справа от соответствующей главной точки, и отрицательны в противном случае. Например, для системы, изображенной на рис. 116.7 (см. ниже), заднее фокусное расстояние  $f'$  положительно, а переднее фокусное расстояние  $f$  отрицательно. На рисунке указана истинная длина отрезка  $HF$ , т. е. положительная величина ( $-f$ ), равная модулю  $f$ .

Можно доказать, что между фокусными расстояниями  $f$  и  $f'$  центрированной оптической системы, образованной сферическими преломляющими поверхностями, имеется соотношение

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \quad (116.2)$$

где  $n$  — показатель преломления среды, находящейся перед оптической системой,  $n'$  — показатель преломления среды, находящейся за системой. Из (116.2) вытекает, что в случае, когда показатели преломления сред, находящихся по обе стороны оптической системы, одинаковы, фокусные расстояния отличаются только знаком:

$$f' = -f. \quad (116.3)$$

Величина

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (116.4)$$

называется оптической силой системы. Чем больше  $\Phi$ , тем меньше фокусное расстояние  $f'$  и, следовательно, тем сильнее преломляются лучи оптической системой. Оптическая сила измеряется в диоптриях (дптр). Чтобы получить  $\Phi$  в диоптриях, фокусное расстояние в формуле (116.4) нужно взять в метрах. При положительной  $\Phi$  заднее фокусное расстояние  $f'$  также положительно; следовательно, система дает действительное изображение бесконечно удаленной точки — параллельный пучок лучей превращается в сходящийся. В этом случае система называется с о б и р а ю щ е й. При отрицательной  $\Phi$  изображение бесконечно удаленной точки будет мнимым — параллельный пучок лучей превращается системой в расходящийся. Такая система именуется р а с с е и в а ю щ е й.

**Формула системы.** Задание кардинальных плоскостей или точек полностью определяет свойства оптической системы. В частности, зная положение кардинальных плоскостей, можно построить оптическое изображение, даваемое системой. Возьмем в пространстве предметов отрезок  $OP$ , перпендикулярный к оптической оси (рис. 116.7; узлы на рисунке не показаны). Положение этого от-

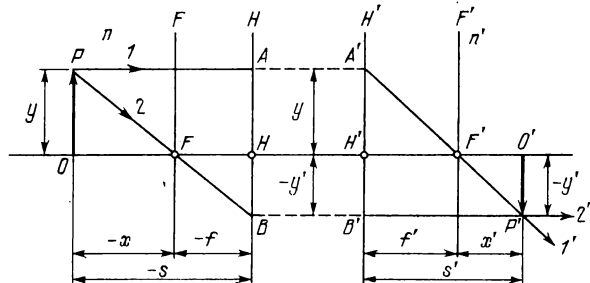


Рис. 116.7.

резка можно задать либо расстоянием  $x$ , отсчитанным от точки  $F$  до точки  $O$ , либо расстоянием  $s$  от  $H$  до  $O$ . Величины  $x$  и  $s$ , как и фокусные расстояния  $f$  и  $f'$ , являются алгебраическими (на рисунках указываются их модули).

Проведем из точки  $P$  луч 1, параллельный оптической оси. Он пересечет плоскость  $H$  в точке  $A$ . В соответствии со свойствами главных плоскостей сопряженный лучу 1 луч 1' должен проходить через сопряженную с точкой  $A$  точку  $A'$  плоскости  $H'$ . Так как луч 1 параллелен оптической оси, сопряженный с ним луч 1' пройдет через задний фокус  $F'$ . Теперь проведем из точки  $P$  луч 2, проходящий через передний фокус  $F$ . Он пересечет плоскость  $H$  в точке  $B$ .

Сопряженный с ним луч  $2'$  пройдет через сопряженную с  $B$  точку  $B'$  плоскости  $H'$  и будет параллельным оптической оси. Точка  $P'$  пересечения лучей  $1'$  и  $2'$  представляет собой изображение точки  $P$ . Изображение  $O'P'$ , как и отрезок  $OP$ , перпендикулярно к оптической оси.

Положение изображения  $O'P'$  можно охарактеризовать либо расстоянием  $x'$  от точки  $F'$  до точки  $O'$ , либо расстоянием  $s'$  от  $H'$  до  $O'$ . Величины  $x'$  и  $s'$  являются алгебраическими. В случае, изображенном на рис. 116.7, они положительны.

Величина  $x'$ , определяющая положение изображения, закономерно связана с величиной  $x$ , определяющей положение предмета, и с фокусными расстояниями  $f$  и  $f'$ . Для прямоугольных треугольников с общей вершиной в точке  $F$  (см. рис. 116.7) можно написать соотношение

$$\frac{OP}{HB} = \frac{y}{-y'} = \frac{-x}{-f}. \quad (116.5)$$

Аналогично, для треугольников с общей вершиной в точке  $F'$  имеем

$$\frac{H'A'}{O'P'} = \frac{y}{-y'} = \frac{f'}{x'}. \quad (116.6)$$

Объединив оба соотношения, получим, что  $(-x)/(-f) = f'/x'$ , откуда

$$xx' = ff'. \quad (116.7)$$

Это равенство называется **формулой Ньютона**. При условии, что  $n = n'$ , формула Ньютона имеет вид

$$xx' = -f^2 \quad (116.8)$$

(см. (116.2)).

От формулы, связывающей расстояния  $x$  и  $x'$  предмета и изображения от фокусов системы, легко перейти к формуле, устанавливающей связь между расстояниями  $s$  и  $s'$  от главных точек. Из рис. 116.7 видно, что  $(-x) = (-s) - (-f)$  (т. е.  $x = s - f$ ),  $x' = s' - f'$ . Подставив эти выражения для  $x$  и  $x'$  в формулу (116.7) и произведя преобразования, получим

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \quad (116.9)$$

При выполнении условия  $f' = -f$  (см. (116.3)) формула (116.9) упрощается следующим образом:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (116.10)$$

Соотношения (116.7) — (116.10) представляют собой формулы центрированной оптической системы.

### § 117. Тонкая линза

Простейшей центрированной оптической системой является **линза**. Она представляет собой прозрачное (обычно стеклянное) тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями<sup>1</sup> (в частном случае одна из поверхностей может быть плоской). Точки пересечения поверхностей с оптической осью линзы называются **вершинами преломляющих поверхностей**. Расстояние между вершинами именуется **толщиной линзы**. Если толщиной линзы можно пренебречь по сравнению с меньшим из радиусов кривизны ограничивающих линзу поверхностей, линза называется **тонкой**.

Расчеты, которых мы не приводим, дают, что в случае тонкой линзы главные плоскости  $H$  и  $H'$  можно считать совпадающими и проходящими через центр линзы  $O$  (рис. 117.1). Для фокусных расстояний тонкой линзы получается выражение

$$f' = -f = \frac{n_0}{n - n_0} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}; \quad (117.1)$$

здесь  $n$  — показатель преломления линзы,  $n_0$  — показатель преломления среды, окружающей линзу,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы. С радиусами кривизны нужно обращаться, как с алгебраическими величинами: для выпуклой поверхности (т. е. в слу-

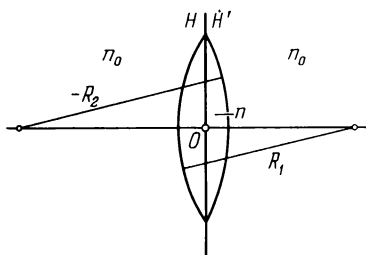


Рис. 117.1.

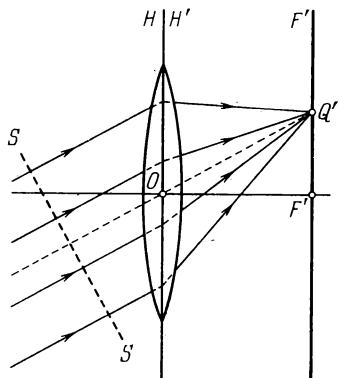


Рис. 117.2.

чае, когда центр кривизны лежит справа от вершины) радиус кривизны нужно считать положительным, для вогнутой поверхности (т. е. в случае, когда центр кривизны лежит слева от вершины) радиус нужно считать отрицательным. На чертежах указывается модуль радиуса кривизны, т. е.  $-R$ , если  $R < 0$ .

Если показатели преломления сред, находящихся по обе стороны тонкой линзы, одинаковы, то узлы  $N$  и  $N'$  совпадают с главными точками, т. е. помещаются в центре линзы  $O$ . Следовательно,

<sup>1</sup> Бывают линзы с поверхностями более сложной формы.

в этом случае любой луч, идущий через центр линзы, не изменяет своего направления. Если показатели преломления сред перед и за линзой неодинаковы, узлы не совпадают с главными точками, так что луч, идущий через центр линзы, претерпевает излом.

Параллельный пучок лучей после прохождения через линзу собирается в одной из точек фокальной плоскости (см. точку  $Q'$  на рис. 117.2). Чтобы определить положение этой точки, нужно продолжить идущий через центр линзы луч до пересечения его с фокальной плоскостью (см. изображенный пунктиром луч  $OQ'$ ). В точке пересечения соберутся и остальные лучи. Такой способ пригоден в том случае, если оптические свойства среды по обе стороны линзы одинаковы ( $n = n'$ ). В противном случае луч, идущий через центр, терпит излом. Для нахождения точки  $Q'$  в этом случае нужно знать положение узловых точек линзы.

Отметим, что отложенные вдоль лучей пути, начинающиеся на волновой поверхности  $SS$  (см. рис. 117.2) и заканчивающиеся в точке  $Q'$ , имеют одинаковую оптическую длину и являются таутохронными (см. конец § 115).

В заключение надо сказать, что линза является далеко не идеальной оптической системой. Даваемые ею изображения предметов обладают рядом погрешностей. Однако рассмотрение этих погрешностей выходит за рамки данной книги.

## § 118. Принцип Гюйгенса

В двух следующих главах нам придется рассматривать процессы, происходящие за непрозрачной преградой с отверстиями в случае, когда на эту преграду падает световая волна. В приближении геометрической оптики свет за преградой не должен проникать в область геометрической тени. В действительности же световая волна в принципе распространяется во всем пространстве за преградой, проникая в область геометрической тени, причем это проникновение оказывается тем более существенным, чем меньше размеры отверстий. При диаметре отверстий или ширине щелей, сравниваемых с длиной световой волны, приближение геометрической оптики оказывается совершенно неправомерным.

Качественно поведение света за преградой с отверстием может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса, который устанавливает способ построения фронта волны в момент времени  $t + \Delta t$  по известному положению фронта в момент времени  $t$ . Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис. 118.1; среда предполагается неоднородной — скорость волны в нижней части рисунка больше, чем в верхней).



Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 118.2). По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рисунке границы этой области показаны пунктиром), огибая края преграды.

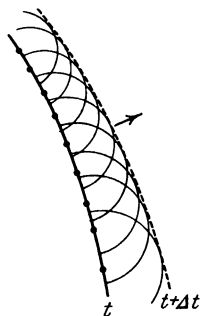


Рис. 118.1.

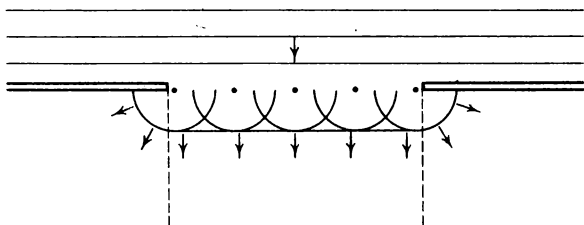


Рис. 118.2.

Принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем. Усовершенствованный им принцип Гюйгенса — Френеля излагается в § 126. Там же дается физическое обоснование этого принципа.

## ГЛАВА XVII

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

#### § 119. Интерференция световых волн

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Амплитуда результирующего колебания в данной точке определяется выражением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta,$$

где  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$  (см. формулу (55.2) 1-го тома).

Если разность фаз  $\delta$  возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются когерентными<sup>1</sup>.

В случае некогерентных волн  $\delta$  непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее по времени значение  $\cos \delta$  равно нулю. Поэтому

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle.$$

Отсюда, приняв во внимание соотношение (110.10), заключаем, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$I = I_1 + I_2. \quad (119.1)$$

В случае когерентных волн  $\cos \delta$  имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, так что

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (119.2)$$

В тех точках пространства, для которых  $\cos \delta > 0$ ,  $I$  будет превышать  $I_1 + I_2$ ; в точках, для которых  $\cos \delta < 0$ ,  $I$  будет меньше

---

<sup>1</sup> В следующем параграфе мы обсудим понятие когерентности более подробно.

$I_1 + I_2$ . Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется *интерференцией волн*. Особенно отчетливо проявляется интерференция в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн одинакова:  $I_1 = I_2$ . Тогда согласно (119.2) в максимумах  $I = 4I_1$ , в минимумах же  $I = 0$ . Для некогерентных волн при том же условии получается всюду одинаковая интенсивность  $I = 2I_1$  (см. (119.1)).

Из сказанного вытекает, что при освещении какой-либо поверхности несколькими источниками света (например, двумя лампочками) должна, казалось бы, наблюдаться интерференционная картина с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности. Однако из повседневного опыта известно, что в указанном случае освещенность поверхности монотонно убывает по мере удаления от источников света и никакой интерференционной картины не наблюдается. Это объясняется тем, что естественные источники света не когерентны.

Некогерентность естественных источников света обусловлена тем, что излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых многими атомами. Отдельные атомы излучают цуги волн длительностью порядка  $10^{-8}$  с и протяженностью около 3 м (см. § 110). Фаза нового цуга никак не связана с фазой предыдущего цуга. В испускаемой телом световой волне излучение одной группы атомов через время порядка  $10^{-8}$  с сменяется излучением другой группы, причем фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить их друг на друга, наблюдается интерференция. Разность оптических длин путей, проходящих интерферирующими волнами, не должна быть очень большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн. Если эта разность будет порядка 1 м, наложатся колебания, соответствующие разным цугам, и разность фаз между ними будет непрерывно меняться хаотическим образом.

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке  $O$  (рис. 119.1). До точки  $P$  первая волна проходит в среде с показателем преломления  $n_1$  путь  $s_1$ , вторая волна проходит в среде с показателем преломления  $n_2$  путь  $s_2$ . Если в точке  $O$  фаза колебания равна  $\omega t$ , то первая волна возбуждает в точке  $P$  колебание  $A_1 \cos \omega(t - s_1/v_1)$ , а вторая волна — колебание  $A_2 \cos \omega(t - s_2/v_2)$  ( $v_1 = c/n_1$  и  $v_2 = c/n_2$  — фазовые скорости волн). Следовательно, разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке  $P$ , будет

равна

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Заменяя  $\omega/c$  через  $2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (119.3)$$

где

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \quad (119.4)$$

есть величина, равная разности оптических длин проходимых волнами путей и называемая оптической разностью хода (ср. с формулой (115.5)).

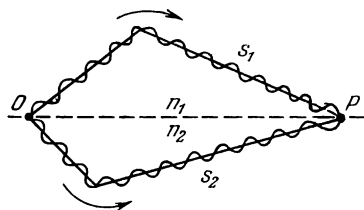


Рис. 119.1.

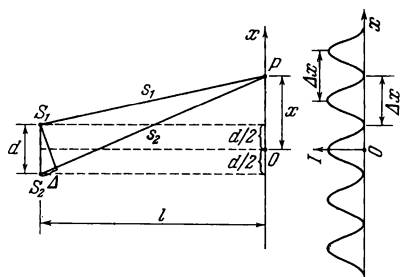


Рис. 119.2.

Из формулы (119.3) видно, что если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (119.5)$$

то разность фаз  $\delta$  оказывается кратной  $2\pi$  и колебания, возбуждаемые в точке  $P$  обеими волнами, будут происходить с одинаковой фазой. Таким образом, (119.5) есть условие интерференционного максимума.

Если  $\Delta$  равна полуцелому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (119.6)$$

то  $\delta = \pm (2m+1)\pi$ , так что колебания в точке  $P$  находятся в противофазе. Следовательно, (119.6) есть условие интерференционного минимума.

Рассмотрим две цилиндрические когерентные световые волны, исходящие из источников  $S_1$  и  $S_2$ , имеющих вид параллельных тонких светящихся нитей либо узких щелей (рис. 119.2). Область, в которой эти волны перекрываются, называется полем интерференции. Во всей этой области наблюдается чередование

мест с максимальной и минимальной интенсивностью света. Если в поле интерференции внести экран, то на нем будет видна интерференционная картина, которая имеет вид чередующихся светлых и темных полос. Вычислим ширину этих полос в предположении, что экран параллелен плоскости, проходящей через источники  $S_1$  и  $S_2$ . Положение точки на экране будем характеризовать координатой  $x$ , отсчитываемой в направлении, перпендикулярном к линиям  $S_1$  и  $S_2$ . Начало отсчета выберем в точке  $O$ , относительно которой  $S_1$  и  $S_2$  расположены симметрично. Источники будем считать колеблющимися в одинаковой фазе. Из рис. 119.2 видно, что

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Ниже будет выяснено, что для получения различимой интерференционной картины расстояние между источниками  $d$  должно быть значительно меньше расстояния до экрана  $l$ . Расстояние  $x$ , в пределах которого образуются интерференционные полосы, также бывает значительно меньше  $l$ . При этих условиях можно положить  $s_2 + s_1 \approx 2l$ . Тогда  $s_2 - s_1 = xd/l$ . Умножив  $s_2 - s_1$  на показатель преломления среды  $n$ , получим оптическую разность хода

$$\Delta = n \frac{xd}{l}. \quad (119.7)$$

Подстановка этого значения  $\Delta$  в условие (119.5) дает, что максимумы интенсивности будут наблюдаться при значениях  $x$ , равных

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (119.8)$$

Здесь  $\lambda = \lambda_0/n$  — длина волны в среде, заполняющей пространство между источниками и экраном.

Подставив значение (119.7) в условие (119.6), получим координаты минимумов интенсивности:

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (119.9)$$

Назовем расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы. Из формул (119.8) и (119.9) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (119.10)$$

Согласно формуле (119.10) расстояние между полосами растет с уменьшением расстояний между источниками  $d$ . При  $d$ , сравнимом с  $\lambda$ , расстояние между полосами было бы того же порядка, что и  $\lambda$ , т. е. составляло бы несколько десятых мкм. В этом случае отдельные полосы были бы совершенно неразличимы. Для того чтобы интерференционная картина стала отчетливой, необходимо соблюдение упоминавшегося выше условия:  $d \ll l$ .

Если интенсивность интерферирующих волн одинакова ( $I_1 = I_2 = I_0$ ), то согласно (119.2) результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна  $\delta$ , определяется выражением

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Поскольку  $\delta \sim \Delta$ , то в соответствии с (119.7)  $\delta$  растет пропорционально  $x$ . Следовательно, интенсивность изменяется вдоль экрана по закону квадрата косинуса. Справа на рис. 119.2 показана зависимость  $I$  от  $x$ , получающаяся в монохроматическом свете.

Ширина интерференционных полос и расстояние между ними зависят от длины волны  $\lambda$ . Только в центре картины, при  $x=0$ , совпадут максимумы всех длин волн. По мере удаления от центра картины максимумы разных цветов смещаются друг относительно друга все больше и больше. Это приводит к смазыванию интерференционной картины при наблюдении ее в белом свете. В монохроматическом свете число различных полос интерференции заметно возрастает.

Измерив расстояние между полосами  $\Delta x$  и зная  $l$  и  $d$ , можно по формуле (119.10) вычислить  $\lambda$ . Именно из опытов по интерференции света были впервые определены длины волн для световых лучей разного цвета.

Мы рассмотрели интерференцию двух цилиндрических волн. Выясним, что происходит при наложении двух плоских волн. Пусть амплитуды этих волн одинаковы, а направления их распространения образуют угол  $2\varphi$  (рис. 119.3). Направления колебаний светового вектора будем считать перпендикулярными к плоскости рисунка. Волновые векторы  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  лежат в плоскости рисунка и имеют одинаковый модуль, равный  $k = 2\pi/\lambda$ . Напишем уравнения этих волн:

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) &= A \cos(\omega t - k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y), \\ A \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}) &= A \cos(\omega t + k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y). \end{aligned}$$

Результирующее колебание в точках с координатами  $x$  и  $y$  имеет вид

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t - k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y) + A \cos(\omega t + k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y) = \\ = 2A \cos(k \sin \varphi \cdot x) \cos(\omega t - k \cos \varphi \cdot y). \end{aligned} \quad (119.11)$$

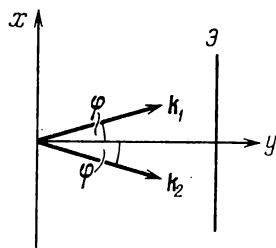


Рис. 119.3.

Из этого выражения следует, что в точках, где  $k \sin \varphi \cdot x = \pm m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), амплитуда колебаний равна  $2A$ ; в точках же, где  $k \sin \varphi \cdot x = \pm (m + 1/2)\pi$ , амплитуда колебаний равна нулю. Где бы мы ни расположили экран Э, перпендикулярный к оси  $y$ , на нем будет наблюдаться система чередующихся светлых и темных полос, параллельных оси  $z$  (эта ось перпендикулярна к плоскости рисунка). Координаты максимумов интенсивности будут равны

$$x_{\max} = \pm \frac{m\pi}{k \sin \varphi} = \pm \frac{m\lambda}{2 \sin \varphi}. \quad (119.12)$$

От положения экрана (от координаты  $y$ ) зависит лишь фаза колебаний (см. (119.11)).

Мы положили для простоты начальные фазы интерферирующих волн равными нулю. Если разность этих фаз отлична от нуля, в формуле (119.12) появится постоянное слагаемое — картина полос сдвинется вдоль экрана.

## § 120. Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Степень согласованности может быть различной. Соответственно можно ввести понятие степени когерентности двух волн.

Различают временную и пространственную когерентность. Мы начнем с рассмотрения временной когерентности.

**Временная когерентность.** Описанный в предыдущем параграфе процесс интерференции является идеализированным. В действительности этот процесс гораздо более сложен. Это обусловлено тем, что монохроматическая волна, описываемая выражением

$$A \cos(\omega t - kr + \alpha),$$

где  $A$ ,  $\omega$  и  $\alpha$  — константы, представляет собой абстракцию. Всякая реальная световая волна образуется наложением колебаний всевозможных частот (или длин волн), заключенных в более или менее узком, но конечном интервале частот  $\Delta\omega$  (соответственно длин волн  $\Delta\lambda$ ). Даже для квазимонохроматического света (см. стр. 327) интервал частот  $\Delta\omega$  является конечным<sup>1</sup>. Кроме того, амплитуда волны  $A$  и фаза  $\alpha$  претерпевают со временем непрерывные случайные (хаотические) изменения. Поэтому колебания, возбуждаемые в некоторой точке пространства двумя накладывающимися друг на друга световыми волнами, имеют вид

$$A_1(t) \cos[\omega_1(t) \cdot t + \alpha_1(t)], \quad A_2(t) \cos[\omega_2(t) \cdot t + \alpha_2(t)], \quad (120.1)$$

<sup>1</sup> Испускаемые атомами спектральные линии имеют «естественную» ширину  $\Delta\omega$  порядка  $10^8 \text{ с}^{-1}$  ( $\Delta\lambda \sim 10^{-4} \text{ \AA}$ ).

причем хаотические изменения функций  $A_1(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $\omega_2(t)$  и  $\alpha_2(t)$  являются совершенно независимыми.

Для простоты будем считать амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  постоянными. Изменения частоты и фазы можно свести либо к изменению одной лишь фазы, либо к изменению одной лишь частоты. Представим функцию

$$f(t) = A \cos[\omega(t) \cdot t + \alpha(t)] \quad (120.2)$$

в виде

$$f(t) = A \cos\{\omega_0 t + [\omega(t) - \omega_0] t + \alpha(t)\},$$

где  $\omega_0$  — некоторое среднее значение частоты, и введем обозначение:  $[\omega(t) - \omega_0] t + \alpha(t) = \alpha'(t)$ . Тогда формула (120.2) примет вид

$$f(t) = A \cos[\omega_0 t + \alpha'(t)]. \quad (120.3)$$

Мы получили функцию, у которой хаотические изменения претерпевает лишь фаза колебания.

С другой стороны, в математике доказывается, что негармоническую функцию, например функцию (120.2), можно представить в виде суммы гармонических функций с частотами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\omega$  (см. формулу (120.4)).

Таким образом, при рассмотрении вопроса о когерентности возможны два подхода: «фазовый» и «частотный». Начнем с «фазового» подхода. Допустим, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в формулах (120.1) удовлетворяют условию:  $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$ , и выясним, какое влияние оказывает изменение фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В соответствии с формулой (119.2) интенсивность света в данной точке определяется выражением

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta(t),$$

где  $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$ . Последнее слагаемое в этой формуле носит название интерференционного члена.

Всякий прибор, с помощью которого можно наблюдать интерференционную картину (глаз<sup>1</sup>, фотопластинка и т. п.), обладает некоторой инерционностью. В связи с этим он регистрирует картину, усредненную по некоторому промежутку времени  $\Delta t$ . Если за время  $\Delta t$  множитель  $\cos\delta(t)$  принимает все значения от  $-1$  до  $+1$ , среднее значение интерференционного члена будет равно нулю. Поэтому регистрируемая прибором интенсивность окажется равной сумме интенсивностей, создаваемых в данной точке каждой из волн в отдельности, — интерференция отсутствует. Если же за время  $\Delta t$  значение  $\cos\delta(t)$  изменяется мало, прибор обнаружит интерференцию.

<sup>1</sup> Напомним, что демонстрирование кинофильмов основано на инерционности зрительного восприятия, которая составляет примерно 0,1 с.



Пусть некоторая величина  $x$  изменяется скачками, равными  $b$ , причем приращения  $+b$  и  $-b$  являются равновероятными. Такое поведение величины называется случайными блужданиями. Положим начальное значение  $x$  равным нулю. Если после  $N$  шагов величина равна  $x_N$ , то после  $(N+1)$ -го шага она будет равна  $x_{N+1} = x_N \pm b$ , причем оба знака равновероятны. Допустим, что случайные блуждания совершаются многократно, начинаясь каждый раз с  $x = 0$ , и найдем среднее значение  $x_{N+1}^2$ . Оно равно  $\langle x_{N+1}^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle + \langle (\pm 2x_N b) \rangle + \langle b^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle + b^2$  (удвоенное произведение при усреднении исчезает). Следовательно, независимо от значения  $N$  среднее значение  $x^2$  увеличивается на  $b^2$ . Поэтому  $\langle x_{N+1}^2 \rangle = Nb^2$ . Таким образом, величина, совершающая случайные блуждания, в среднем все больше удаляется от первоначального значения.

Фаза волны, образованной наложением огромного числа цугов, порождаемых отдельными атомами, не может совершать больших скачков. Она изменяется случайным образом небольшими шагами, т. е. совершает случайные блуждания. Время  $t_{\text{ког}}$ , за которое случайное изменение фазы волны  $\alpha(t)$  достигает значения порядка  $\pi$ , называется временем когерентности. За это время колебание как бы забывает свою первоначальную фазу и становится некогерентным по отношению к самому себе.

Для примера укажем, что квазимонохроматический свет, содержащий длины волн в интервале  $\Delta\lambda = 1$  нм, характеризуется  $t_{\text{ког}}$  порядка  $10^{-12}$  с. Излучение гелий-неонового лазера обладает  $t_{\text{ког}}$  порядка  $10^{-3}$  с.

Расстояние  $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$ , на которое перемещается волна за время  $t_{\text{ког}}$ , называется длиной когерентности (или длиной цуга). Длина когерентности есть то расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения  $\sim \pi$ . Для получения интерференционной картины путем деления естественной волны на две части необходимо, чтобы оптическая разность хода  $\Delta$  была меньше, чем длина когерентности. Это требование ограничивает число видимых интерференционных полос, наблюдаемых по схеме, изображенной на рис. 119.2. С увеличением номера полосы  $m$  разность хода растет, вследствие чего четкость полос делается все хуже и хуже.

Перейдем к выяснению роли немонохроматичности световых волн. Допустим, что свет состоит из последовательности идентичных цугов частоты  $\omega_0$  и длительности  $\tau$ . При смене одного цуга другим фаза претерпевает беспорядочные изменения, вследствие чего цуги оказываются взаимно некогерентными. При этих предположениях длительность цуга  $\tau$  практически совпадает со временем когерентности  $t_{\text{ког}}$ .

В математике доказывается теорема Фурье, согласно которой любую конечную и интегрируемую функцию  $F(t)$  можно представить в виде суммы бесконечного числа гармонических составляю-

щих с непрерывно изменяющейся частотой:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (120.4)$$

Выражение (120.4) называется интегралом Фурье. Стоящая под знаком интеграла функция  $A(\omega)$  представляет собой амплитуду соответствующей монохроматической составляющей. Согласно теории интегралов Фурье аналитический вид функции  $A(\omega)$  определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi, \quad (120.5)$$

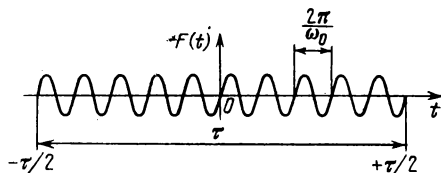


Рис. 120.1

где  $\xi$  — вспомогательная переменная интегрирования.

Пусть функция  $F(t)$  описывает световое возмущение в некоторой точке в момент времени  $t$ , вызванное одиночным волновым цугом. Тогда она определяется условиями:

$$\begin{aligned} F(t) &= A_0 e^{i\omega_0 t} & \text{при } |t| \leq \tau/2, \\ F(t) &= 0 & \text{при } |t| > \tau/2. \end{aligned}$$

График вещественной части этой функции дан на рис. 120.1.

Вне интервала от  $-\tau/2$  до  $+\tau/2$  функция  $F(t)$  равна нулю. Поэтому выражение (120.5), определяющее амплитуды гармонических составляющих, имеет вид

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} [A_0 e^{i\omega_0 \xi}] e^{-i\omega \xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} A_0 \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} A_0 \left. \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\xi}}{i(\omega_0 - \omega)} \right|_{-\tau/2}^{+\tau/2}. \end{aligned}$$

После подстановки пределов интегрирования и несложных преобразований приходим к формуле

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} A_0 \tau \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2}.$$

Интенсивность  $I(\omega)$  гармонической составляющей волны пропорциональна квадрату амплитуды, т. е. выражению

$$I(\omega) = \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{[(\omega - \omega_0)\tau/2]^2}. \quad (120.6)$$

График функции (120.6) показан на рис. 120.2. Из рисунка видно, что интенсивность составляющих, частоты которых заключены

в интервале  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ , значительно превосходит интенсивность остальных составляющих. Это обстоятельство позволяет связать длительность цуга  $\tau$  с эффективным частотным диапазоном  $\Delta\omega$  фурье-спектра:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Отождествив  $\tau$  со временем когерентности, придем к соотношению

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{1}{\Delta\nu} \quad (120.7)$$

(знак  $\sim$  означает: «по порядку величины равно»).

Из соотношения (120.7) следует, что чем шире интервал частот, представленных в данной световой волне, тем меньше время когерентности этой волны.

Частота связана с длиной волны в вакууме соотношением  $\nu = c/\lambda_0$ . Продифференцировав это соотношение, найдем, что  $\Delta\nu = c \Delta\lambda_0/\lambda_0^2 \approx c \Delta\lambda/\lambda^2$  (знак минус, получающийся при дифференцировании, мы опустили, кроме того, положили  $\lambda_0 \approx \lambda$ ). Заменяв в формуле (120.7)  $\Delta\nu$  его выражением через  $\lambda$  и  $\Delta\lambda$ , получим для времени когерентности выражение

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \quad (120.8)$$

Отсюда для длины когерентности получается следующее значение:

$$l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda. \quad (120.9)$$

Из формулы (119.5) вытекает, что разность хода, при которой получается максимум  $m$ -го порядка, определяется соотношением

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Когда эта разность хода достигает значения порядка длины когерентности, полосы становятся неразличимыми. Следовательно, предельный наблюдаемый порядок интерференции определяется условием

$$m_{\text{пред}}\lambda \sim l_{\text{ког}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda,$$

откуда

$$m_{\text{пред}} \sim \lambda/\Delta\lambda. \quad (120.10)$$

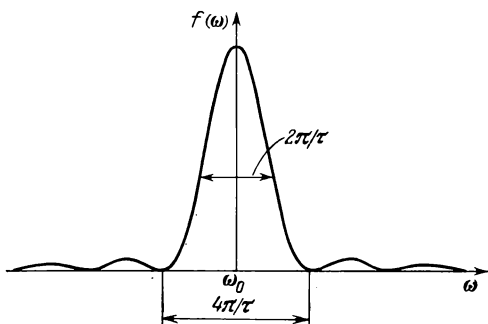


Рис. 120.2.

Из (120.10) следует, что число интерференционных полос, наблюдаемых по схеме, изображенной на рис. 119.2, возрастает при уменьшении интервала длин волн, представленных в используемом свете.

**Пространственная когерентность.** Согласно формуле  $k = \omega/v = n\omega/c$  разброс частот  $\Delta\omega$  соответствует разброс значений  $k$ . Мы установили, что временная когерентность определяется значением  $\Delta\omega$ . Следовательно, временная когерентность связана с разбросом значений модуля волнового вектора  $k$ . Пространственная когерентность связана с разбросом направлений вектора  $k$ , который характеризуется величиной  $\Delta\mathbf{e}_k$ .

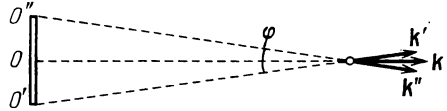


Рис. 120.3.

Возникновение в некоторой точке пространства колебаний, возбуждаемых волнами с разными  $\mathbf{e}_k$ , возможно в том случае, если эти волны испускаются разными участками протяженного (неточечного) источника света. Допустим для простоты, что источник имеет форму диска, видимого из данной точки под углом  $\varphi$ . Из рис. 120.3 видно, что угол  $\varphi$  характеризует интервал, в котором заключены орты  $\mathbf{e}_k$ . Будем считать этот угол малым.

Пусть свет от источника падает на две узкие щели, за которыми находится экран (рис. 120.4). Интервал частот, испускаемых ис-

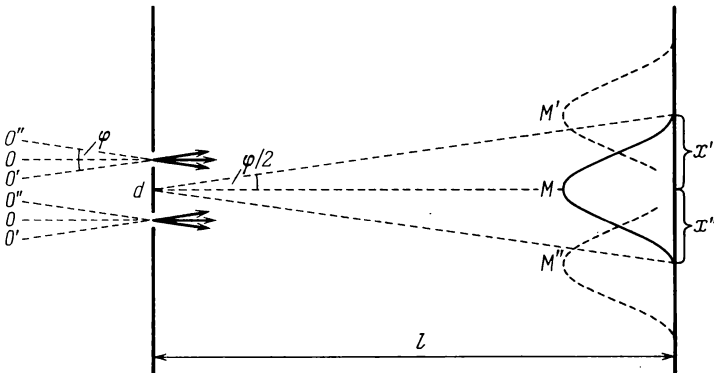


Рис. 120.4.

точником, будем считать очень малым, для того чтобы степень временной когерентности была достаточной для получения четкой интерференционной картины. Волна, пришедшая от участка поверхности, обозначенного на рис. 120.4 через  $O$ , создает нулевой максимум  $M$  в середине экрана. Нулевой максимум  $M'$ , созданный волной, пришедшей от участка  $O'$ , будет смещен от середины экрана на расстояние  $x'$ . Вследствие малости угла  $\varphi$  и отношения  $d/l$  мож-

но считать, что  $x = l\varphi/2$ . Нулевой максимум  $M''$ , созданный волной, пришедшей от участка  $O''$ , смещен от середины экрана в противоположную сторону на расстояние  $x''$ , равное  $x'$ . Нулевые максимумы от остальных участков источника располагаются между максимумами  $M'$  и  $M''$ .

Отдельные участки источника света возбуждают волны, фазы которых никак не связаны между собой. Поэтому интерференционная картина, возникающая на экране, будет наложением картин, создаваемых каждым из участков в отдельности. Если смещение  $x'$  много меньше ширины интерференционной полосы  $\Delta x = l\lambda/d$  (см. формулу (119.10)), максимумы от разных участков источника практически наложатся друг на друга и картина будет такой, как от точечного источника. При  $x' \approx \Delta x$  максимумы от одних участков придутся на минимумы от других, и интерференционная картина наблюдаться не будет. Таким образом, интерференционная картина будет различимой при условии, что  $x' < \Delta x$ , т. е.

$$\frac{l\varphi}{2} < \frac{l\lambda}{d}, \quad (120.11)$$

или

$$\varphi < \lambda/d. \quad (120.12)$$

При переходе от (120.11) к (120.12) мы опустили множитель 2.

Формула (120.12) определяет угловые размеры источника, при которых наблюдается интерференция. Из этой формулы можно также определить наибольшее расстояние между щелями, при котором можно еще наблюдать интерференцию от источника с угловым размером  $\varphi$ . Умножив неравенство (120.12) на  $d/\varphi$ , придем к условию

$$d < \lambda/\varphi. \quad (120.13)$$

Совокупность волн с разными  $\epsilon_k$  можно заменить результирующей волной, падающей на экран со щелями. Отсутствие интерференционной картины означает, что колебания, возбуждаемые этой волной в местах нахождения первой и второй щелей, некогерентны. Следовательно, и колебания в самой волне в точках, находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, являются некогерентными. Если бы источник был идеально монохроматическим (это значит, что  $\Delta\nu = 0$  и  $t_{\text{кор}} = \infty$ ), поверхность, проходящая через щели, была бы волновой и колебания во всех точках этой поверхности происходили бы в одинаковой фазе. Мы установили, что в случае  $\Delta\nu \neq 0$  и конечных размеров источника ( $\varphi \neq 0$ ) колебания в точках поверхности, отстоящих на расстоянии  $d > \lambda/\varphi$ , некогерентны.

Поверхность, которая была бы волновой при условии монохроматичности источника, будем для краткости называть псевдовол-

новой<sup>1</sup>. Мы могли бы удовлетворить условию (120.12), уменьшив расстояние между щелями  $d$ , т. е. взяв более близкие точки псевдодолновой поверхности. Следовательно, колебания, возбуждаемые волной в достаточно близких точках псевдодолновой поверхности, оказываются когерентными. Такая когерентность называется пространственной.

Итак, фаза колебания при переходе от одной точки псевдодолновой поверхности к другой изменяется беспорядочным образом. Введем расстояние  $\rho_{\text{ког}}$ , при смещении на которое вдоль псевдодолновой поверхности случайное изменение фазы достигает значения  $\sim \pi$ . Колебания в двух точках псевдодолновой поверхности, отстоящих друг от друга на расстояние, меньшее  $\rho_{\text{ког}}$ , будут приблизительно когерентными. Расстояние  $\rho_{\text{ког}}$  называется длиной пространственной когерентности или радиусом когерентности. Из (120.13) следует, что

$$\rho_{\text{ког}} \sim \lambda / \varphi. \quad (120.14)$$

Угловой размер Солнца составляет около 0,01 рад, длина световых волн равна примерно 0,5 мкм. Следовательно, радиус когерентности приходящих от Солнца световых волн имеет значение порядка

$$\rho_{\text{ког}} = 0,5 / 0,01 = 50 \text{ мкм} = 0,05 \text{ мм}. \quad (120.15)$$

Все пространство, занимаемое волной, можно разбить на части, в каждой из которых волна приблизительно сохраняет когерентность. Объем такой части пространства, называемый объемом когерентности, по порядку величины равен произведению длины временной когерентности на площадь круга радиуса  $\rho_{\text{ког}}$ .

Пространственная когерентность световой волны вблизи поверхности излучающего ее нагретого тела ограничивается размером  $\rho_{\text{ког}}$  всего в несколько длин волн. По мере удаления от источника степень пространственной когерентности возрастает. Излучение лазера<sup>2</sup> обладает огромной временной и пространственной когерентностью. У выходного отверстия лазера пространственная когерентность наблюдается во всем поперечном сечении светового пучка.

Можно было бы, казалось, наблюдать интерференцию, пропустив свет, распространяющийся от произвольного источника, через две щели в непрозрачном экране. Однако при малой пространственной когерентности падающей на щели волны пучки света, прошедшие через щели, окажутся некогерентными, и интерференционная картина будет отсутствовать. Юнг получил в 1802 г. интерференцию от двух щелей, увеличив пространственную когерентность падающего на щели света. Такое увеличение Юнг осуществил, пропустив

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что этот термин не используется в научной литературе. Мы пользуемся им условно, чтобы сделать изложение более наглядным.

<sup>2</sup> О лазерах будет идти речь в 3-м томе Курса.

предварительно свет через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Прошедшим через это отверстие светом освещались щели во втором непрозрачном экране. Таким способом Юнг впервые наблюдал интерференцию световых волн и определил длины этих волн.

## § 121. Способы наблюдения интерференции света

Рассмотрим две конкретные интерференционные схемы, одна из которых использует для разделения световой волны на две части отражение, а другая — преломление света.

**Зеркала Френеля.** Два плоских соприкасающихся зеркала  $OM$  и  $ON$  располагаются так, что их отражающие поверхности образуют угол, близкий к  $\pi$  (рис. 121.1). Соответственно угол  $\varphi$  на рисунке

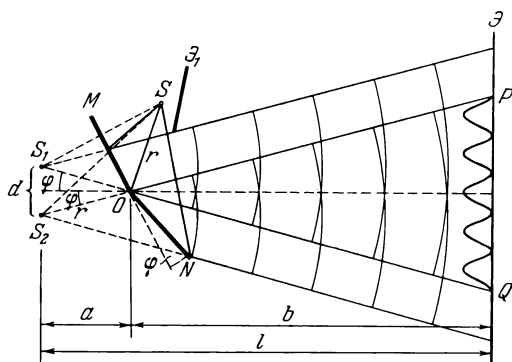


Рис. 121.1.

очень мал. Параллельно линии пересечения зеркал  $O$  на расстоянии  $r$  от нее помещается прямолинейный источник света  $S$  (например, узкая светящаяся щель). Зеркала отбрасывают на экран  $\mathcal{E}$  две цилиндрические когерентные волны, распространяющиеся так, как если бы они исходили из мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ . Непрозрачный экран  $\mathcal{E}$  преграждает свету путь от источника  $S$  к экрану  $\mathcal{E}$ .

Луч  $OQ$  представляет собой отражение луча  $SO$  от зеркала  $OM$ , луч  $OP$  — отражение луча  $SO$  от зеркала  $ON$ . Легко сообразить, что угол между лучами  $OP$  и  $OQ$  равен  $2\varphi$ . Поскольку  $S$  и  $S_1$  расположены относительно  $OM$  симметрично, длина отрезка  $OS_1$  равна  $OS$ , т. е.  $r$ . Аналогичные рассуждения приводят к тому же результату для отрезка  $OS_2$ . Таким образом, расстояние между источниками  $S_1$  и  $S_2$  равно

$$d = 2r \sin \varphi \approx 2r\varphi.$$

Из рис. 121.1 видно, что  $a = r \cos \varphi \approx r$ . Следовательно,

$$l = r + b,$$

где  $b$  — расстояние от линии пересечения зеркал  $O$  до экрана  $\mathcal{E}$ .

Подставив найденные нами значения  $d$  и  $l$  в формулу (119.10), получим ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\varphi} \lambda. \quad (121.1)$$

Область перекрытия волн  $PQ$  имеет протяженность  $2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b\varphi$ . Разделив эту длину на ширину полосы  $\Delta x$ , найдем максимальное число интерференционных полос, которое можно наблюдать с помощью зеркал Френеля при данных параметрах схемы:

$$N = \frac{4br\varphi^2}{\lambda(r+b)}. \quad (121.2)$$

Для того чтобы все эти полосы были действительно видны, необходимо, чтобы  $N/2$  не превзошло  $m_{\text{пред}}$ , определяемого формулой (120.10).

**Бипризма Френеля.** Изготовленные из одного куска стекла две призмы с малым преломляющим углом  $\vartheta$  имеют одну общую грань (рис. 121.2). Параллельно этой грани на расстоянии  $a$  от нее располагается прямолинейный источник света  $S$ .

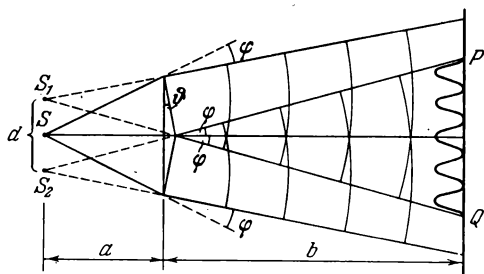


Рис. 121.2.

Можно показать, что в случае, когда преломляющий луч  $\vartheta$  призмы очень мал и углы падения лучей на грань призмы не очень велики, все лучи отклоняются призмой на практически одинаковый угол, равный

$$\varphi = (n-1)\vartheta$$

( $n$  — показатель преломления призмы). Угол падения лучей на бипризму невелик. Поэтому все лучи отклоняются каждой из половин бипризмы на одинаковый угол. В результате образуются две когерентные цилиндрические волны, исходящие из мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ , лежащих в одной плоскости с  $S$ . Расстояние



между источниками равно

$$d = 2a \sin \varphi \approx 2a \varphi = 2a(n-1)\vartheta.$$

Расстояние от источников до экрана

$$l = a + b.$$

Ширину интерференционной полосы находим по формуле (119.10):

$$\Delta x = \frac{a+b}{2a(n-1)\vartheta} \lambda. \quad (121.3)$$

Область перекрытия волн  $PQ$  имеет протяженность

$$2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b \varphi = 2b(n-1)\vartheta.$$

Максимальное число наблюдаемых полос

$$N = \frac{4ab(n-1)^2 \vartheta^2}{\lambda(a+b)}. \quad (121.4)$$

## § 122. Интерференция света при отражении от тонких пластинок

При падении световой волны на тонкую прозрачную пластинку (или пленку) происходит отражение от обеих поверхностей пластинки. В результате возникают две световые волны, которые при известных условиях могут интерферировать.

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская световая волна, которую можно рассматривать как параллельный пучок лучей (рис. 122.1). Пластинка отбрасывает вверх два параллельных пучка света, из которых один образовался за счет отражения от верхней поверхности пластинки, второй — вследствие отражения от нижней поверхности (на рис. 122.1 каждый из этих пучков представлен только одним лучом). При входе в пластинку и при выходе из нее второй пучок претерпевает преломление. Кроме этих двух пучков, пластинка отбросит вверх пучки, возникающие в результате трех-, пяти- и т. д. кратного отражения от поверхностей пластинки. Однако ввиду их малой интенсивности эти пучки принимать во внимание не будем<sup>1</sup>. Не будем также интересоваться пучками, прошедшими через пластинку.

Разность хода, приобретаемая лучами 1 и 2 до того, как они сойдутся в точке  $C$ , равна

$$\Delta = ns_2 - s_1, \quad (122.1)$$

<sup>1</sup> При  $n = 1,5$  от поверхности пластинки отражается примерно 5% падающего светового потока (см. последний абзац § 112). После двух отражений интенсивность будет равна  $0,05 \cdot 0,05$ , или 0,25% интенсивности первоначального пучка. После трех отражений —  $0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,05$ , или 0,0125%, что составляет 1/400 интенсивности однократно отраженного пучка.

где  $s_1$  — длина отрезка  $BC$ , а  $s_2$  — суммарная длина отрезков  $AO$  и  $OC$ ,  $n$  — показатель преломления пластинки. Показатель преломления среды, окружающей пластинку, полагаем равным единице. Из рис. 122.1 видно, что  $s_1 = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1$ ,  $s_2 = 2b / \cos \vartheta_2$  ( $b$  — толщина пластинки). Подстановка этих значений в выражение (122.1) дает, что

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

Произведя замену  $n \sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1$  и учтя, что

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1},$$

легко привести формулу для  $\Delta$  к виду

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}. \quad (122.2)$$

При вычислении разности фаз  $\delta$  между колебаниями в лучах 1 и 2 нужно, кроме оптической разности хода  $\Delta$ , учесть возможность изменения фазы волны при отражении (см. § 112). В точке  $C$  (см. рис. 122.1) отражение происходит от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной. Поэтому фаза волны претерпевает изменение на  $\pi$ . В точке  $O$  отражение происходит от границы раздела среды оптически более плотной со средой оптически менее плотной, так что скачка фазы не происходит. В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$ . Ее можно учесть, добавив к  $\Delta$  (или вычтя из нее) половину длины волны в вакууме. В результате получим

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (122.3)$$

Итак, при падении на пластинку плоской волны образуются две отраженные волны, разность хода которых определяется формулой (122.3). Выясним условия, при которых эти волны окажутся когерентными и смогут интерферировать. Рассмотрим два случая.

**1. Плоскопараллельная пластинка.** Обе плоские отраженные волны распространяются в одном направлении, образующем с нормалью к пластинке угол, равный углу падения  $\vartheta_1$ . Эти волны смогут

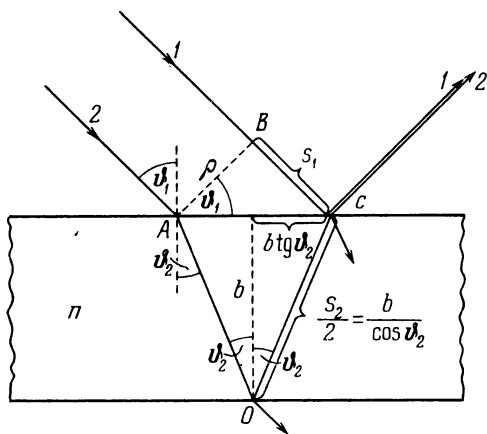


Рис. 122.1.

интерферировать, если будут соблюдены условия как временной, так и пространственной когерентности.

Для того чтобы имела место временная когерентность, разность хода (122.3) не должна превышать длину когерентности, равную  $\lambda^2/\Delta\lambda \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda_0$  (см. формулу (120.9)). Следовательно, должно соблюдаться условие

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$$

или

$$b < \frac{\lambda_0(\lambda_0/\Delta\lambda_0 + 1/2)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}}.$$

В полученном соотношении половиной можно пренебречь по сравнению с  $\lambda_0/\Delta\lambda_0$ . Выражение  $\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}$  имеет величину порядка единицы<sup>1</sup>. Поэтому можно написать

$$b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0} \quad (122.4)$$

(удвоенная толщина пластинки должна быть меньше длины когерентности).

Таким образом, отраженные волны будут когерентными только в том случае, если толщина пластинки  $b$  не превышает величины, определяемой соотношением (122.4). Положив  $\lambda_0 = 500 \text{ \AA}$  и  $\Delta\lambda_0 = 20 \text{ \AA}$ , получим предельное значение толщины, равное

$$\frac{5000^2}{2 \cdot 20} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ \AA} = 0,06 \text{ мм}. \quad (122.5)$$

Теперь рассмотрим условия соблюдения пространственной когерентности. Поставим на пути отраженных пучков экран Э (рис. 122.2). Приходящие в точку  $P'$  лучи  $1'$  и  $2'$  отстоят в падающем пучке на расстояние  $\rho'$ . Если это расстояние не превышает радиуса когерентности  $\rho_{\text{ког}}$  падающей волны, лучи  $1'$  и  $2'$  будут когерентными и создадут в точке  $P'$  освещенность, определяемую значением разности хода  $\Delta$ , отвечающим углу падения  $\theta'_1$ . Другие пары лучей, идущие под тем же углом  $\theta'_1$ , создадут в остальных точках экрана такую же освещенность. Таким образом, экран окажется равномерно освещенным (в частном случае, когда  $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$ , экран будет темным). При изменении наклона пучка (т. е. при изменении угла  $\theta_1$ ) освещенность экрана будет меняться.

Из рис. 122.1 видно, что расстояние между падающими лучами  $1$  и  $2$  равно

$$\rho = 2b \operatorname{tg}\theta_2 \cos\theta_1 = \frac{b \sin 2\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}}. \quad (122.6)$$

Если принять  $n = 1,5$ , то для  $\theta_1 = 45^\circ$  получается  $\rho = 0,8b$ , а для

<sup>1</sup> Для  $n = 1,5$  величина этого выражения изменяется в пределах от 1,12 (при  $\theta_1 = \pi/2$ ) до 1,5 (при  $\theta_1 = 0$ ).

$\vartheta_1 = 10^\circ - \rho = 0,1b$ . Для нормального падения ( $\vartheta_1 = 0$ )  $\rho = 0$  при любом  $n$ .

Радиус когерентности солнечного света имеет значение порядка 0,05 мм (см. (120.15)). При угле падения в  $45^\circ$  можно положить  $\rho \approx b$ . Следовательно, для возникновения интерференции в этих условиях должно выполняться соотношение

$$b < 0,05 \text{ мм} \quad (122.7)$$

(ср. с (122.5)). Для угла падения порядка  $10^\circ$  пространственная когерентность будет сохраняться при толщине пластинки, не превышающей 0,5 мм. Таким образом, мы приходим к выводу, что вследствие ограничений, накладываемых временной и пространственной когерентностями, интерференция при освещении пластинки солнечным светом наблюдается только в том случае, если толщина пластинки не превышает нескольких сотых миллиметра. При освещении светом с большей степенью когерентности интерференция наблюдается и при отражении от более толстых пластинок или пленок.

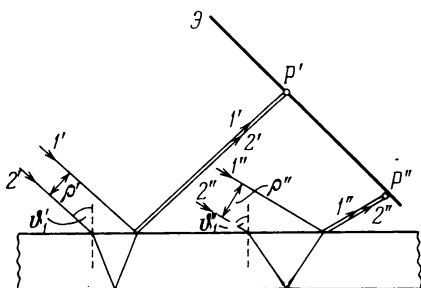


Рис. 122.2.

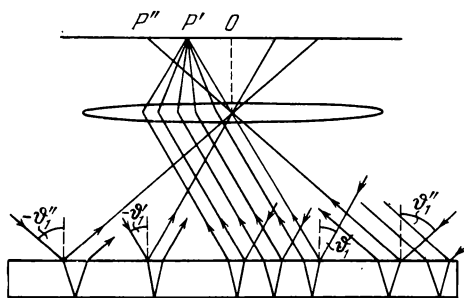


Рис. 122.3.

122.3). Освещенность в этой точке зависит от значения величины (122.3). При  $\Delta = m\lambda_0$  получаются максимумы, при  $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$  — минимумы интенсивности ( $m$  — целое число). Условие максимума интенсивности имеет вид

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} = (m + 1/2)\lambda_0. \quad (122.8)$$

Пусть тонкая плоскопараллельная пластинка освещается рассеянным монохроматическим светом (см. рис. 122.3). Расположим параллельно пластинке линзу, в фокальной плоскости которой поместим экран. В рассеянном свете имеются лучи самых разнообраз-

Практически интерференцию от плоскопараллельной пластинки наблюдают, поставив на пути отраженных пучков линзу, которая собирает лучи в одной из точек экрана, расположенного в фокальной плоскости линзы (рис.

разных направлений. Лучи, параллельные плоскости рисунка и падающие на пластинку под углом  $\theta'_1$ , после отражения от обеих поверхностей пластинки соберутся линзой в точке  $P'$  и создадут в этой точке освещенность, определяемую значением оптической разности хода. Лучи, идущие в других плоскостях, но падающие на пластинку под тем же углом  $\theta'_1$ , соберутся линзой в других точках, отстоящих от центра экрана  $O$  на такое же расстояние, как и точка  $P'$ . Освещенность во всех этих точках будет одинакова. Таким образом, лучи, падающие на пластинку под одинаковым углом  $\theta'_1$ , создадут на экране совокупность одинаково освещенных точек, расположенных по окружности с центром в  $O$ . Аналогично, лучи, падающие под другим углом  $\theta'_2$ , создадут на экране совокупность одинаково (но иначе, поскольку  $\Delta$  иная) освещенных точек, расположенных по окружности другого радиуса. В результате на экране возникнет система чередующихся светлых и темных круговых полос с общим центром в точке  $O$ . Каждая полоса образована лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом  $\theta_1$ . Поэтому получающиеся в описанных условиях интерференционные полосы носят название **полос равного наклона**. При ином расположении линзы относительно пластинки (экран во всех случаях должен совпадать с фокальной плоскостью линзы) форма полос равного наклона будет другой.

Каждая точка интерференционной картины обусловлена лучами, образующими до прохождения через линзу параллельный пучок. Поэтому при наблюдении полос равного наклона экран должен располагаться в фокальной плоскости линзы, т. е. так, как его располагают для получения на нем изображения бесконечно удаленных предметов. В соответствии с этим говорят, что полосы равного наклона локализованы в бесконечности. Роль линзы может играть хрусталик, а экрана — сетчатка глаза. В этом случае для наблюдения полос равного наклона глаз должен быть аккомодирован так, как при рассматривании очень удаленных предметов.

Согласно формуле (122.8) положение максимумов зависит от длины волны  $\lambda_0$ . Поэтому в белом свете получается совокупность смещенных друг относительно друга полос, образованных лучами разных цветов, и интерференционная картина приобретает радужную окраску. Возможность наблюдения интерференционной картины в белом свете определяется способностью глаза различать оттенки света близких длин волн. Лучи, отличающиеся по длине волны менее чем на  $20 \text{ \AA}$ , средний глаз воспринимает как имеющие одинаковый цвет. Поэтому для оценки условий, при которых может наблюдаться интерференция от пластинок в белом свете,  $\Delta\lambda_0$  следует положить равным  $20 \text{ \AA}$ . Именно такое значение было нами взято при оценке толщины пластинки (см. (122.5)).

**2. Пластинка переменной толщины.** Возьмем пластинку в виде клина с углом при вершине  $\varphi$  (рис. 122.4). Пусть на нее падает па-

параллельный пучок лучей. Теперь лучи, отразившиеся от разных поверхностей пластинки, не будут параллельными. Два до падения на пластинку практически сливающихся луча (на рис. 122.4 они изображены в виде одной прямой линии, обозначенной цифрой  $1'$ ) пересекаются после отражения в точке  $Q'$ . Два практически сливающихся луча  $1''$  пересекаются в точке  $Q''$ . Можно показать, что точки  $Q'$ ,  $Q''$  и другие аналогичные им точки лежат в одной плоскости, проходящей через вершину клина  $O$ . Отразившийся от нижней поверхности клина луч  $1'$  и отразившийся от верхней поверхности луч  $2'$  пересекутся в точке  $R'$ , расположенной ближе к клину, чем  $Q'$ . Аналогичные лучи  $1''$  и  $3''$  пересекутся в точке  $R''$ , отстоящей от поверхности клина дальше, чем  $Q'$ .

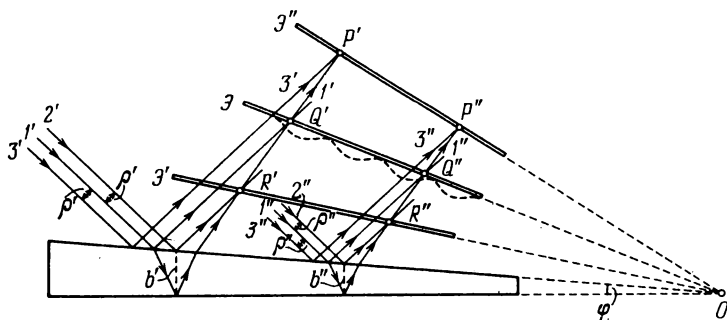


Рис. 122.4.

Направления распространения волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей клина, не совпадают. Временная когерентность будет соблюдаться только для частей волн, отразившихся от мест клина, для которых толщина удовлетворяет условию (122.4). Допустим, что это условие выполняется для всего клина. Кроме того, предположим, что радиус когерентности намного превышает длину клина. Тогда отраженные волны будут когерентными во всем пространстве над клином, и при любом расстоянии экрана от клина на нем будет наблюдаться интерференционная картина в виде полос, параллельных вершине клина  $O$  (см. три последних абзаца § 119). Так, в частности, обстоит дело при освещении клина светом, испускаемым лазером.

При ограниченной пространственной когерентности область локализации интерференционной картины (т. е. область пространства, располагая в которой экран можно наблюдать на нем интерференционную картину) также оказывается ограниченной. Если расположить экран так, чтобы он проходил через точки  $Q'$ ,  $Q''$ , ... (см. экран  $\mathcal{E}$  на рис. 122.4), на экране возникнет интерференционная картина даже в том случае, если пространственная когерентность

падающей волны крайне мала (в точках экрана пересекаются лучи, которые до падения на клин совпадали). При малом угле клина  $\varphi$  разность хода лучей можно с достаточной степенью точности вычислять по формуле (122.3), беря в качестве  $b$  толщину пластинки в месте падения на нее лучей. Поскольку разность хода для лучей, отразившихся от различных участков клина, теперь неодинакова, освещенность экрана будет неравномерной — на экране появятся светлые и темные полосы (см. на рис. 122.4 пунктирную кривую, показывающую освещенность экрана  $\mathcal{E}$ ). Каждая из таких полос возникает в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной, вследствие чего их называют *полосами равной толщины*.

При смещении экрана из положения  $\mathcal{E}$  в направлении от клина или к клину начинает сказываться степень пространственной когерентности падающей волны. Если в положении экрана, обозначенном на рис. 122.4 через  $\mathcal{E}'$ , расстояние  $\rho'$  между падающими лучами  $1'$  и  $2'$  станет порядка радиуса когерентности, интерференционная картина на экране  $\mathcal{E}'$  наблюдаться не будет. Аналогично картина исчезает в положении экрана, обозначенном через  $\mathcal{E}''$ .

Таким образом, интерференционная картина, получающаяся при отражении от клина плоской волны, оказывается локализованной в некоторой области вблизи поверхности клина, причем эта область тем уже, чем меньше степень пространственной когерентности падающей волны. Из рис. 122.4 видно, что по мере приближения к вершине клина становятся более благоприятными условия как временной, так и пространственной когерентности. Поэтому отчетливость интерференционной картины уменьшается при перемещении от вершины клина к его основанию. Может случиться, что картина наблюдается только для более тонкой части клина. Для остальной части на экране возникает равномерная освещенность.

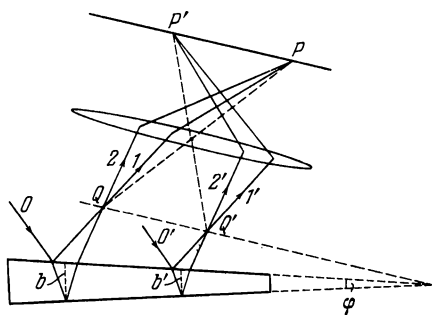


Рис. 122.5.

Практически полосы равной толщины наблюдают, поместив вблизи клина линзу и за ней экран (рис. 122.5). Роль линзы может играть хрусталик, а роль экрана — сетчатка глаза. Если экран за линзой расположен в плоскости, сопряженной с плоскостью, обозначенной на рис. 122.4 через  $\mathcal{E}$  (соответственно глаз accommodationирован на эту плоскость), картина будет наиболее четкой. При перемещении экрана, на который проектируется изображение (либо при перемещении линзы), картина будет ухудшаться и исчезнет совсем, когда

плоскость, сопряженная с экраном, выйдет за пределы области локализации интерференционной картины, наблюдаемой без линзы.

При наблюдении в белом свете полосы будут окрашенными, так что поверхность пластинки или пленки представляется имеющей радужную окраску. Такую окраску имеют, например, расплывшиеся на поверхности воды тонкие пленки нефти или масла, а также мыльные пленки. Цвета побежалости, возникающие на поверхности стальных изделий при их закалке, тоже обусловлены интерференцией от пленки прозрачных окислов.

Сопоставим два рассмотренных нами случая интерференции при отражении от тонких пленок. Полосы равного наклона получаются при освещении пластинки постоянной толщины ( $b = \text{const}$ ) рассеянным светом, в котором содержатся лучи различных направлений ( $\theta_1$  варьирует в более или менее широких пределах). Локализованы полосы равного наклона в бесконечности. Полосы равной толщины наблюдаются при освещении пластинки непостоянной толщины ( $b$  изменяется) параллельным пучком света ( $\theta_1 = \text{const}$ ). Локализованы полосы равной толщины вблизи пластинки. В реальных условиях, например при наблюдении радужных цветов на мыльной или масляной пленке, изменяется как угол падения лучей, так и толщина пленки. В этом случае наблюдаются полосы смешанного типа.

Заметим, что интерференция от тонких пленок может наблюдаться не только в отраженном, но и в проходящем свете.

**Кольца Ньютона.** Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 122.6). Роль тонкой пленки, от поверхностей которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой (вследствие большой толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают). При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении — эллипсов. Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае  $\sin \theta_1 = 0$  и оптическая разность хода равна удвоенной толщине зазора (см. формулу (122.2); предполагается, что в зазоре  $n = 1$ ). Из рис. 122.6 следует, что

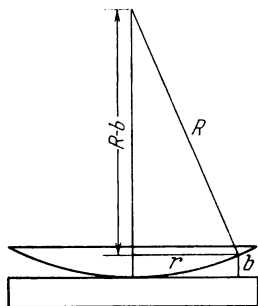


Рис. 122.6.

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2, \quad (122.9)$$



где  $R$  — радиус кривизны линзы,  $r$  — радиус окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор  $b$ . Ввиду малости  $b$  мы пренебрегли величиной  $b^2$  по сравнению с  $2Rb$ . В соответствии с (122.9)  $b = r^2/2R$ . Чтобы учесть возникающее при отражении от пластинки изменение фазы на  $\pi$ , нужно к  $2b = r^2/R$  прибавить  $\lambda_0/2$ . В результате получится

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (122.10)$$

В точках, для которых  $\Delta = m'\lambda_0 = 2m'(\lambda_0/2)$ , возникнут максимумы, в точках, для которых  $\Delta = (m' + 1/2)\lambda_0 = (2m' + 1)(\lambda_0/2)$ , — минимумы интенсивности. Оба условия можно объединить в одно:

$$\Delta = m \frac{\lambda_0}{2},$$

причем четным значениям  $m$  будут соответствовать максимумы, а нечетным — минимумы интенсивности. Подставив сюда выражение (122.10) для  $\Delta$  и разрешив получившееся уравнение относительно  $r$ , найдем радиусы светлых и темных колец Ньютона:

$$r = \sqrt{R\lambda_0(m-1)/2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (122.11)$$

Четным  $m$  соответствуют радиусы светлых колец, нечетным  $m$  — радиусы темных колец. Значению  $m = 1$  соответствует  $r = 0$ , т. е. точка в месте касания пластинки и линзы. В этой точке наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы на  $\pi$  при отражении световой волны от пластинки.

**Просветление оптики.** Интерференция при отражении от тонких пленок лежит в основе просветления оптики. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением примерно 4% падающего света. В сложных объективах такие отражения совершаются многократно и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов. В просветленной оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления иным, чем у линзы. Толщина пленки подбирается так, чтобы волны, отраженные от обеих ее поверхностей, погасили друг друга. Особенно хороший результат достигается в том случае, если показатель преломления пленки равен корню квадратному из показателя преломления линзы. При этом условии интенсивность обеих отраженных от поверхностей пленки волн одинакова.

### § 123. Интерферометр Майкельсона

Имеется много разновидностей интерференционных приборов, называемых интерферометрами. На рис. 123.1 изображена схема интерферометра Майкельсона. Пучок света от источника  $S$  падает на полупрозрачную пластинку  $P_1$ , покрытую тонким слоем серебра (этот слой показан на рисунке точками). Половина упавшего светового потока отражается пластинкой  $P_1$  в направлении луча 1, половина проходит сквозь пластинку и распространяется в направлении луча 2. Пучок 1 отражается от зеркала  $M_1$  и возвращается к  $P_1$ , где он делится на два равных по интенсивности пучка. Один из них проходит сквозь пластинку и образует пучок  $1'$ , второй отражается в направлении к  $S$ ; этот пучок нас интересовать больше не будет. Пучок 2, отразившись от зеркала  $M_2$ , тоже возвращается к пластинке  $P_1$ , где он делится на две части: отразившийся от полупрозрачного слоя пучок  $2'$  и прошедший сквозь слой пучок, которым мы также интересоваться больше не будем. Пучки света  $1'$  и  $2'$  имеют одинаковую интенсивность.

При соблюдении условий временной и пространственной когерентности пучки  $1'$  и  $2'$  будут интерферировать. Результат интерференции зависит от оптической разности хода от пластинки  $P_1$  до зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и обратно. Луч 2 проходит толщу пластинки трижды, луч 1 — только один раз. Чтобы скомпенсировать возникающую за счет этого разную (вследствие дисперсии) для различных длин волн оптическую разность хода, на пути луча 1 ставится точно такая, как  $P_1$ , но не посеребренная пластинка  $P_2$ . Тем самым уравниваются пути лучей 1 и 2 в стекле. Интерференционная картина наблюдается с помощью зрительной трубы  $T$ .

Заменим мысленно зеркало  $M_2$  его мнимым изображением  $M'_2$  в полупрозрачной пластинке  $P_1$ . Тогда лучи  $1'$  и  $2'$  можно рассматривать как возникшие за счет отражения от прозрачной пластинки, ограниченной плоскостями  $M_1$  и  $M'_2$ . С помощью юстировочных винтов  $W_1$  можно изменять угол между этими плоскостями, в частности их можно устанавливать строго параллельно друг другу. Вращая микрометрический винт  $W_2$ , можно плавно перемещать зеркало  $M_2$ , не изменяя его наклона. Тем самым можно изменять

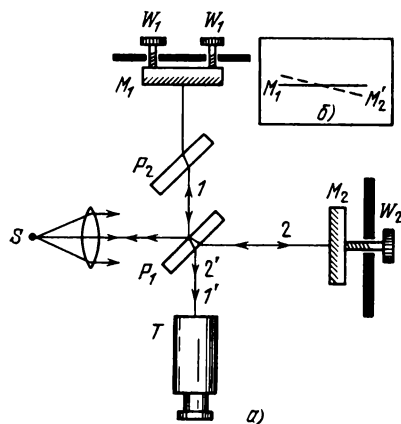


Рис. 123.1.

толщину «пластинки», в частности можно заставить плоскости  $M_1$  и  $M_2$  пересечься друг с другом (рис. 123.1, б).

Характер интерференционной картины зависит от юстировки зеркал и от расходимости пучка света, падающего на прибор. Если пучок параллелен, а плоскости  $M_1$  и  $M_2$  образуют угол, не равный нулю, то в поле зрения трубы наблюдаются прямолинейные полосы равной толщины, расположенные параллельно линии пересечения плоскостей  $M_1$  и  $M_2$ . В белом свете все полосы, кроме совпадающей с линией пересечения полосы нулевого порядка, будут окрашенными. Нулевая полоса оказывается черной, так как луч 1 отражается от пластинки  $P_1$  снаружи, а луч 2 — изнутри, вследствие чего между ними возникает разность фаз, равная  $\pi$ . В белом свете полосы наблюдаются лишь при малой толщине «пластинки»  $M_1M_2$  (см. (122.5)). В монохроматическом свете, соответствующем красной линии кадмия, Майкельсон наблюдал отчетливую интерференционную картину при разности хода порядка 500 000 длин волн (расстояние между  $M_1$  и  $M_2$  составляет в этом случае приблизительно 150 мм).

При слегка расходящемся пучке света и строго параллельном расположении плоскостей  $M_1$  и  $M_2$  получаются полосы равного наклона, имеющие вид концентрических колец. При вращении микрометрического винта  $W_2$

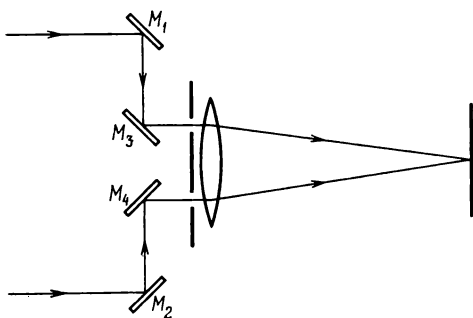


Рис. 123.2.

кольца увеличиваются или уменьшаются в диаметре. При этом в центре картины либо возникают новые кольца, либо уменьшающиеся кольца стягиваются в точку и затем исчезают. Смещение картины на одну полосу соответствует перемещению зеркала  $M_2$  на половину длины волны.

С помощью описанного выше прибора Майкельсон осуществил несколько вошедших в историю физики экспериментов. Самый знаменитый из них, выполненный совместно с Морли в 1887 г., преследовал цель обнаружить движение Земли относительно гипотетического эфира (об этом опыте мы расскажем в § 150). В 1890—1895 гг. с помощью изобретенного им интерферометра Майкельсон произвел первое сравнение длины волны красной линии кадмия с длиной нормального метра.

В 1920 г. Майкельсон построил звездный интерферометр, с помощью которого он измерил угловые размеры некоторых звезд. Этот прибор монтировался на телескопе. Перед объективом телескопа устанавливался экран с двумя щелями (рис. 123.2). Свет

от звезды отражался от симметричной системы зеркал  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$ , установленных на жесткой раме, укрепленной на тележке. Внутренние зеркала  $M_3$  и  $M_4$  были неподвижны, а внешние  $M_1$  и  $M_2$  могли симметрично смещаться, удаляясь от зеркал  $M_3$  и  $M_4$  либо приближаясь к ним. Ход лучей ясен из рисунка. В фокальной плоскости объектива телескопа возникали интерференционные полосы, видность<sup>1</sup> которых зависела от расстояния между внешними зеркалами. Перемещая эти зеркала, Майкельсон определял расстояние между ними  $l$ , при котором видность полос обращалась в нуль. Это расстояние должно быть порядка радиуса когерентности световой волны, пришедшей от звезды. Согласно (120.14) радиус когерентности равен  $\lambda/\varphi$ . Из условия  $l = \lambda/\varphi$  получается угловой диаметр звезды

$$\varphi = \frac{\lambda}{l}.$$

Точный расчет приводит к формуле

$$\varphi = A \frac{\lambda}{l},$$

где  $A = 1,22$  для источника в виде равномерно освещенного круглого диска. Если у краев диск темнее, чем в центре, коэффициент превышает 1,22, причем его значение зависит от скорости убывания освещенности в направлении от центра к краю. Кроме того, точный расчет дает, что, обратившись в нуль при некотором значении  $l$ , видность при дальнейшем увеличении  $l$  снова становится отличной от нуля; однако достигаемые ею при этом значения невелики.

Максимальное расстояние между внешними зеркалами в построенном Майкельсоном звездном интерферометре составляло 6,1 м (диаметр телескопа был равен 2,5 м). Этому расстоянию соответствовал наименьший измеримый угловой диаметр около 0,02". Первой звездой, у которой был измерен угловой диаметр, была Бетельгейзе ( $\alpha$  Ориона). Полученное значение  $\varphi$  равнялось 0,047".

## § 124. Многолучевая интерференция

До сих пор мы рассматривали двухлучевую интерференцию. Теперь исследуем случай, когда интерферирует много световых лучей.

Допустим, что в данную точку экрана приходит  $N$  лучей одинаковой интенсивности, причем фаза каждого следующего луча сдви-

<sup>1</sup> Видностью полосы называется величина

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — соответственно максимальная и минимальная интенсивности света в районе данной полосы.

нута относительно фазы предыдущего на одну и ту же величину  $\delta$ . Представим возбуждаемые лучами колебания в виде экспонент:

$$E_1 = ae^{i\omega t}, \quad E_2 = ae^{i(\omega t + \delta)}, \dots, E_m = ae^{i[\omega t + (m-1)\delta]}, \dots, \\ E_N = ae^{i[\omega t + (N-1)\delta]}.$$

Результирующее колебание определяется формулой

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = ae^{i\omega t} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta}.$$

Полученное выражение представляет собой сумму  $N$  членов геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем, равным  $e^{i\delta}$ . Следовательно,

$$E = ae^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = \hat{A}e^{i\omega t},$$

где

$$\hat{A} = a \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \quad (124.1)$$

есть комплексная амплитуда, которую можно представить в виде

$$\hat{A} = Ae^{i\alpha} \quad (124.2)$$

( $A$  — обычная амплитуда результирующего колебания,  $\alpha$  — его начальная фаза).

Произведение величины (124.2) на ее комплексно сопряженную дает квадрат амплитуды результирующего колебания:

$$\hat{A}\hat{A}^* = Ae^{i\alpha}Ae^{-i\alpha} = A^2. \quad (124.3)$$

Подставив в (124.3) значение (124.1) для  $\hat{A}$ , получим следующее выражение для квадрата амплитуды:

$$A^2 = \hat{A}\hat{A}^* = a^2 \frac{(1 - e^{iN\delta})(1 - e^{-iN\delta})}{(1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta})} = \\ = a^2 \frac{2 - e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}}{2 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} = a^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \quad (124.4)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, интенсивность, возникающая при интерференции  $N$  рассматриваемых лучей, определяется выражением

$$I(\delta) = Ka^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (124.5)$$

( $K$  — коэффициент пропорциональности,  $I_0 = Ka^2$  — интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности).

При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (124.6)$$

выражение (124.5) становится неопределенным. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{2\sin(N\delta/2) \cos(N\delta/2) \cdot N/2}{2\sin(\delta/2) \cos(\delta/2) \cdot 1/2} = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta}.$$

Полученное выражение также оказывается неопределенным. Поэтому применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{N \cos(N\delta)}{\cos \delta} = N^2.$$

Таким образом, при  $\delta = 2\pi m$  (или разностях хода  $\Delta = m\lambda_0$ ) результирующая интенсивность оказывается равной

$$I = I_0 N^2. \quad (124.7)$$

Такой результат можно было предвидеть заранее. Действительно, в точки, для которых  $\delta = 2\pi m$ , все колебания приходят в одинаковой фазе. Следовательно, результирующая амплитуда оказывается в  $N$  раз больше амплитуды отдельного колебания, а интенсивность в  $N^2$  раз больше интенсивности отдельного колебания.

Назовем места, в которых наблюдается интенсивность, определяемая формулой (124.7), главными максимумами. Их положение определяется условием (124.6). Число  $m$  называется порядком главного максимума. Из выражения (124.5) следует, что в промежутке между двумя соседними главными максимумами располагается  $N - 1$  минимум интенсивности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, промежуток между максимумами нулевого ( $m = 0$ ) и первого ( $m = 1$ ) порядка. В этом промежутке  $\delta$  изменяется от нуля до  $2\pi$ , а  $\delta/2$  от нуля до  $\pi$ . Знаменатель выражения (124.5) всюду, кроме концов промежутка, отличен от нуля, причем в середине промежутка достигает наибольшего значения, равного единице. Величина  $N\delta/2$  принимает в рассматриваемом промежутке все значения от нуля до  $N\pi$ . При значениях  $\pi, 2\pi, \dots, (N - 1)\pi$  числитель выражения (124.5) становится равным нулю. Это и будут минимумы интенсивности. Их положения отвечают значениям  $\delta$ , равным

$$\delta = \frac{k'}{N} 2\pi \quad (k' = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (124.8)$$

В промежутках между  $N - 1$  минимумами располагаются  $N - 2$  вторичных максимумов. Наибольшей интенсивностью обладают вторичные максимумы, ближайшие к главным максимумам. Вторичный максимум, ближайший к главному максимуму нулевого порядка, лежит между первым ( $k' = 1$ ) и вторым ( $k' = 2$ ) минимумами. Этим минимумам отвечают значения  $\delta$ , равные  $2\pi/N$  и  $4\pi/N$ . Сле-

довательно, рассматриваемому вторичному максимуму соответствует  $\delta = 3\pi/N$ . Подстановка этого значения в формулу (124.5) дает

$$I(3\pi/N) = Ka^2 \frac{\sin^2(3\pi/2)}{\sin^2(3\pi/2N)}.$$

Числитель равен единице. При большом  $N$  можно положить синус в знаменателе равным его аргументу ( $\sin(3\pi/2N) \approx 3\pi/2N$ ). Тогда

$$I(3\pi/N) = Ka^2 \frac{1}{(3\pi/2N)^2} = \frac{Ka^2 N^2}{(3\pi/2)^2}.$$

В числителе получилась интенсивность главного максимума (см. (124.7)). Таким образом, при большом  $N$  ближайший к главному максимуму вторичный максимум имеет интенсивность в  $(3\pi/2)^2 \approx \approx 22$  раза меньшую, чем интенсивность главного максимума. Остальные вторичные максимумы оказываются еще слабее.

На рис. 124.1 изображен график функции  $I(\delta)$  для  $N=10$ . Для сравнения пунктиром показан график интенсивности для  $N=2$

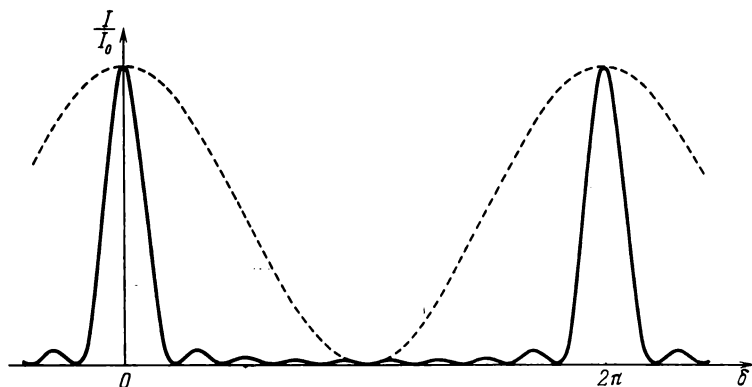


Рис. 124.1.

(двухлучевая интерференция; см. кривую  $I(x)$  на рис. 119.2). Из рисунка видно, что с увеличением числа интерферирующих лучей главные максимумы делаются все более узкими. Вторичные максимумы настолько слабы, что практически интерференционная картина имеет вид узких ярких линий на темном фоне.

Теперь рассмотрим интерференцию очень большого числа лучей, интенсивность которых убывает в геометрической прогрессии. Складываемые колебания имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 &= ae^{i\omega t}, & E_2 &= a\rho e^{i(\omega t + \delta)}, \dots, \\ E_m &= a\rho^{m-1} e^{i[\omega t + (m-1)\delta]}, \dots \end{aligned} \quad (124.9)$$

( $\rho$  — постоянная величина, меньшая единицы). Результирующее

колебание описывается формулой

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = a e^{i\omega t} \sum_{m=1}^N \rho^{m-1} e^{i(m-1)\delta}.$$

Воспользовавшись выражением для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$E = a e^{i\omega t} \frac{1 - \rho^N e^{iN\delta}}{1 - \rho e^{i\delta}} = \hat{A} e^{i\omega t}.$$

Таким образом, комплексная амплитуда равна

$$\hat{A} = a \frac{1 - \rho^N e^{iN\delta}}{1 - \rho e^{i\delta}}. \quad (124.10)$$

Если  $N$  очень велико, комплексным числом  $\rho^N e^{iN\delta}$  можно пренебречь по сравнению с единицей (для примера укажем, что  $0,9^{100} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ ). Тогда выражение (124.10) упрощается следующим образом:

$$\hat{A} = a \frac{1}{1 - \rho e^{i\delta}}.$$

Умножив это выражение на комплексно с ним сопряженное, получим квадрат обычной амплитуды результирующего колебания:

$$\begin{aligned} A^2 = \hat{A} \hat{A}^* &= \frac{a^2}{(1 - \rho e^{i\delta})(1 - \rho e^{-i\delta})} = \frac{a^2}{1 + \rho^2 - \rho(e^{i\delta} + e^{-i\delta})} = \\ &= \frac{a^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta} = \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos \delta)} = \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I(\delta) = \frac{K a^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)}, \quad (124.11)$$

где  $I_1 = K a^2$  — интенсивность первого (наиболее интенсивного) луча.

При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (124.12)$$

выражение (124.11) имеет максимумы, равные

$$I_{\max} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2}. \quad (124.13)$$

В промежутках между максимумами функция изменяется монотонно, достигая в середине промежутка значения, равного

$$I_{\min} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho} = \frac{I_1}{(1 + \rho)^2}. \quad (124.14)$$

Таким образом, отношение интенсивности в максимуме к интенсивности в минимуме

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left( \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^2 \quad (124.15)$$

оказывается тем больше, чем ближе  $\rho$  к единице, т. е. чем медленнее происходит убывание интенсивности интерферирующих лучей.



На рис. 124.2 показан график функции (124.11) для  $\rho=0,8$ . Из рисунка следует, что интерференционная картина имеет вид узких резких линий на практически темном фоне. В отличие от рис. 124.1 вторичные максимумы отсутствуют.

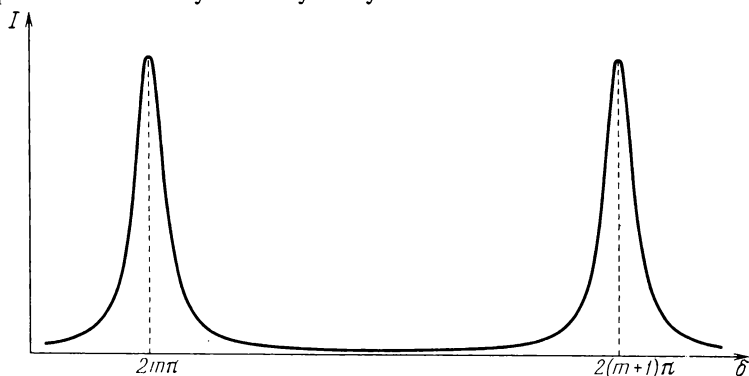


Рис. 124.2.

Практически случай большого числа лучей с убывающей интенсивностью осуществляется в интерферометре Фабри — Перо. Этот прибор состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок, разделенных воздушным промежутком (рис. 124.3). Тщательной обработкой добиваются того, чтобы неровности внут-

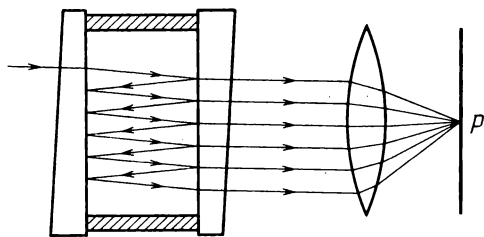


Рис. 124.3.

ренних поверхностей пластинок не превышали нескольких сотых долей длины световой волны. Затем на эти поверхности наносятся частично прозрачные металлические слои или диэлектрические пленки<sup>1</sup>. Внешние поверхности пластинок делают слегка скошенными относительно внутренних, чтобы устранить блики, обусловленные от-

ражением света от этих поверхностей. В первоначальной конструкции интерферометра одна из пластинок могла перемещаться относительно другой неподвижной пластинки с помощью микрометрического винта. Однако ненадежность такой конструкции при-

<sup>1</sup> Металлические слои обладают тем недостатком, что сильно поглощают световые лучи. Поэтому в последние годы их стали заменять многослойными диэлектрическими покрытиями, обладающими большой отражательной способностью.

вела к тому, что она вышла из употребления. В современных конструкциях пластинки закреплены неподвижно. Параллельность внутренних рабочих плоскостей достигается тем, что между пластинками устанавливается кольцо из инвара или кварца<sup>1</sup>. Это кольцо имеет с каждой стороны по три выступа с тщательно отшлифованными торцами. Пластинки прижимаются к кольцу пружинами. Такое устройство надежно обеспечивает строгую параллельность внутренних плоскостей пластинок и постоянство расстояния между ними. Подобный интерферометр с фиксированным расстоянием между пластинками называется *эталоном Фабри — Перо*.

Рассмотрим, что происходит с лучом, вошедшим в зазор между пластинками (рис. 124.4). Пусть интенсивность вошедшего луча

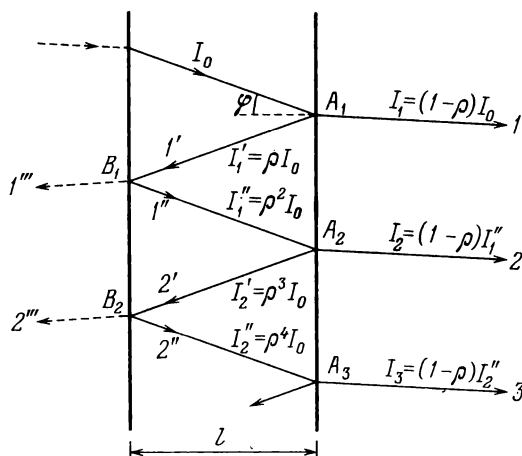


Рис. 124.4.

равна  $I_0$ . В точке  $A_1$  этот луч разделяется на вышедший наружу луч  $1$  и отраженный луч  $1'$ . Если коэффициент отражения от поверхности пластинки равен  $\rho$ , то интенсивность луча  $1$  будет равна  $I_1 = (1 - \rho)I_0$ , а интенсивность отраженного луча  $I_1' = \rho I_0$ <sup>2</sup>. В точке  $B_1$  луч  $1'$  разделяется на два. Показанный пунктиром луч  $1'''$  выйдет из игры, а отраженный луч  $1''$  будет иметь интенсивность  $I_1'' = \rho I_1' = \rho^2 I_0$ . В точке  $A_2$  луч  $1''$  разделится на два луча — вышедший наружу луч  $2$  с интенсивностью  $I_2 = (1 - \rho)I_1'' = (1 - \rho)\rho^2 I_0$  и отраженный луч  $2'$ , и т. д. Таким образом, для интенсивностей вышедших из прибора лучей  $1, 2, 3$  и т. д. имеет место соотношение

$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \rho^2 : \rho^4 : \dots$$

<sup>1</sup> Оба эти материала отличается крайне малый температурный коэффициент расширения.

<sup>2</sup> Мы пренебрегаем поглощением света в отражающих слоях и в толще пластинок.

Соответственно для амплитуд колебаний получается соотношение

$$A_1 : A_2 : A_3 : \dots = 1 : \rho : \rho^2 : \dots$$

(ср. с (124.9)).

Колебание в каждом из лучей  $2, 3, 4, \dots$  отстает по фазе от колебания в предыдущем луче на одну и ту же величину  $\delta$ , определяемую

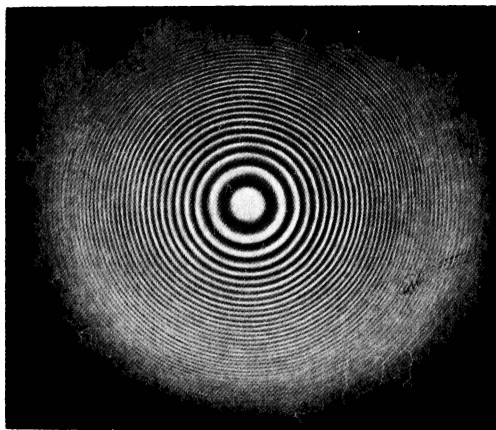


Рис. 124.5.

оптической разностью хода  $\Delta$ , возникающей на пути  $A_1-B_1-A_2$  либо  $A_2-B_2-A_3$  и т. д. (см. рис. 124.4). Из рисунка видно, что  $\Delta = 2l/\cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол падения лучей на отражающие слои.

Если собрать лучи  $1, 2, 3, \dots$  с помощью линзы в точке  $P$  фокальной плоскости (см. рис. 124.3), то колебания, создаваемые этими лучами, будут иметь вид (124.9). Следовательно, интенсивность в точке  $P$  определяется формулой (124.11), в которой  $\rho$  имеет смысл коэффициента отражения, а

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2l}{\cos \varphi}.$$

При пропускании сквозь прибор расходящегося пучка света в фокальной плоскости линзы возникают полосы равного наклона, имеющие вид резких колец (рис. 124.5).

Интерферометр Фабри — Перо используется в спектроскопии для изучения тонкой структуры спектральных линий. Он нашел также широкое применение в метрологии для сравнения длины стандартного метра с длинами волн отдельных спектральных линий.

## ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### § 125. Введение

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями<sup>1</sup> и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Огибание препятствий звуковыми волнами (т. е. дифракция звуковых волн) наблюдается постоянно в обыденной жизни. Для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это обусловлено малостью длин световых волн. Мы знаем, что в пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Следовательно, отклонения от законов геометрической оптики при прочих равных условиях оказываются тем меньше, чем меньше длина волны.

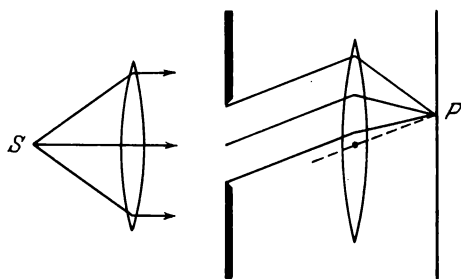


Рис. 125.1.

Между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн. По историческим причинам перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение интенсивности, возникающее вслед-

<sup>1</sup> Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия и т. п.

ствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн. Поэтому говорят, например, об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной щели.

Наблюдение дифракции осуществляется обычно по следующей схеме. На пути световой волны, распространяющейся от некоторого источника, помещается непрозрачная преграда, закрывающая часть волновой поверхности световой волны. За преградой располагается экран, на котором возникает дифракционная картина.

Различают два вида дифракции. Если источник света  $S$  и точка наблюдения  $P$  расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку  $P$ , образуют практически параллельные пучки, говорят о дифракции в параллельных лучах или о дифракции Фраунгофера. В противном случае говорят о дифракции Френеля. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать, поместив за источником света  $S$  и перед точкой наблюдения  $P$  по линзе так, чтобы точки  $S$  и  $P$  оказались в фокальной плоскости соответствующей линзы (рис. 125.1).

Критерий, позволяющий определить, с каким видом дифракции — Френеля или Фраунгофера — мы будем иметь дело в каждом конкретном случае, будет дан в § 129.

## § 126. Принцип Гюйгенса — Френеля

Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса (см. § 118). Однако этот принцип не дает сведений об амплитуде, а следовательно

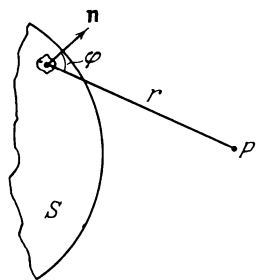


Рис. 126.1.

и об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Разработанный таким способом принцип Гюйгенса получил название принципа Гюйгенса — Френеля.

Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждый элемент волновой поверхности  $S$  (рис. 126.1) служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента  $dS$ . Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием  $r$  от источника по закону  $1/r$  (см. формулу (94.10)). Следовательно, от каждого участка  $dS$  волновой поверхности в точку  $P$ , лежащую

перед этой поверхностью, приходит колебание

$$dE = K \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0). \quad (126.1)$$

В этом выражении  $(\omega t + \alpha_0)$  — фаза колебания в месте расположения волновой поверхности  $S$ ,  $k$  — волновое число,  $r$  — расстояние от элемента поверхности  $dS$  до точки  $P$ . Множитель  $a_0$  определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится  $dS$ . Коэффициент  $K$  зависит от угла  $\varphi$  между нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке  $dS$  и направлением от  $dS$  к точке  $P$ . При  $\varphi = 0$  этот коэффициент максимален, при  $\varphi = \pi/2$  он обращается в нуль.

Результирующее колебание в точке  $P$  представляет собой суперпозицию колебаний (126.1), взятых для всей волновой поверхности  $S$ :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (126.2)$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса — Френеля.

В обоснование принципа Гюйгенса — Френеля можно привести следующие соображения. Пусть на пути световой волны (для простоты мы будем считать ее плоской) поставлен непрозрачный тонкий экран  $\mathcal{E}$  (рис. 126.2). Всюду за экраном интенсивность света равна нулю. Это вызвано тем, что упавшая на экран световая волна возбуждает колебания электронов, имеющих в материале экрана. Колеблющиеся электроны излучают электромагнитные волны. Поле за экраном представляет собой суперпозицию первичной (падающей на экран) волны и всех вторичных волн. Амплитуды и фазы вторичных волн оказываются такими, что при суперпозиции этих волн с первичной волной в любой точке  $P$  за экраном получается нулевая амплитуда. Следовательно, если первичная волна создает в точке  $P$  колебание

$$A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha),$$

то результирующее колебание, возбуждаемое в той же точке вторичными волнами, имеет вид

$$A_{\text{втор}} \cos(\omega t + \alpha - \pi),$$

причем  $A_{\text{втор}} = A_{\text{перв}}$ .

Сказанное означает, что при вычислении амплитуды колебания, порождаемого в точке  $P$  световой волной, распространяющейся от реального источника, можно заменять этот источник совокупностью

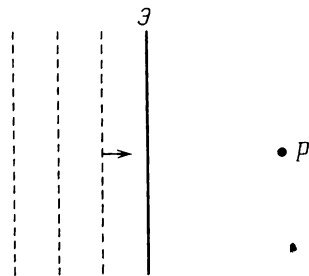


Рис. 126.2.

вторичных источников, расположенных вдоль волновой поверхности. А в этом и состоит суть принципа Гюйгенса — Френеля.

Разобьем непрозрачную преграду на две части. Одна из них, которую мы назовем пробкой, имеет конечные размеры и произвольную форму (круг, прямоугольник и т. п.). Другая часть включает всю остальную поверхность бесконечной преграды. Пока пробка на месте, результирующее колебание в точке  $P$  за преградой равно нулю. Его можно представить как сумму колебаний, создаваемых первичной волной, волной, порождаемой пробкой, и волной, порождаемой остальной частью преграды:

$$A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{пробк}} \cos(\omega t + \alpha') + A_{\text{переп}} \cos(\omega t + \alpha'') = 0. \quad (126.3)$$

Если убрать пробку, т. е. пропустить волну через отверстие в непрозрачной преграде, то колебание в точке  $P$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} E_P &= A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{переп}} \cos(\omega t + \alpha'') = \\ &= -A_{\text{пробк}} \cos(\omega t + \alpha') = A_{\text{пробк}} \cos(\omega t + \alpha' - \pi). \end{aligned}$$

Мы воспользовались условием (126.3) и предположили, что удаление пробки не изменяет характер колебаний электронов в оставшейся части преграды.

Таким образом, можно считать, что колебания в точке  $P$  создаются совокупностью источников вторичных волн, расположенных на поверхности отверстия, образовавшегося после удаления пробки.

## § 127. Зоны Френеля

Вычисления по формуле (126.2) представляют собой в общем случае очень трудную задачу. Однако, как показал Френель, в случаях, отличающихся симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть осуществлено простым алгебраическим или геометрическим суммированием.

Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке  $P$  сферической волной, распространяющейся в изотропной однородной среде из точечного источника  $S$  (рис. 127.1). Волновые поверхности такой волны симметричны относительно прямой  $SP$ . Воспользовавшись этим, разобьем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки  $P$  отличаются на  $\lambda/2$  ( $\lambda$  — длина волны в той среде, в которой распространяется волна). Обладающие таким свойством зоны носят название **зоны Френеля**.

Из рис. 127.1 видно, что расстояние  $b_m$  от внешнего края  $m$ -й зоны до точки  $P$  равно

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (127.1)$$

( $b$  — расстояние от вершины волновой поверхности  $O$  до точки  $P$ ).

Колебания, приходящие в точку  $P$  от аналогичных точек двух соседних зон (т. е. от точек, лежащих в середине зон или у внешних краев зон и т. д.), находятся в противофазе. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон отличаться по фазе на  $\pi$ .

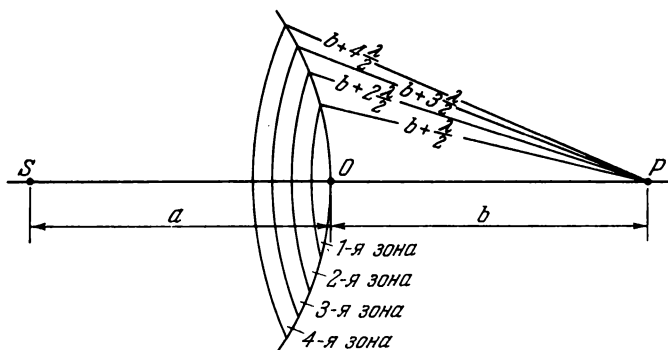


Рис. 127.1.

Вычислим площади зон. Внешняя граница  $m$ -й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты  $h_m$  (рис. 127.2). Обозначим площадь этого сегмента через  $S_m$ . Тогда площадь  $m$ -й зоны можно представить в виде

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

где  $S_{m-1}$  — площадь сферического сегмента, выделяемого внешней границей  $(m-1)$ -й зоны.

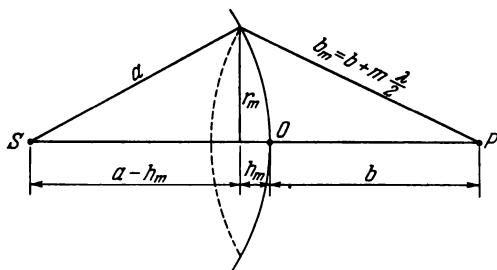


Рис. 127.2.

Из рис. 127.2 видно, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2$$

( $a$  — радиус волновой поверхности,  $r_m$  — радиус внешней границы  $m$ -й зоны). Возведя скобки в квадрат, получим

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (127.2)$$



Отсюда

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (127.3)$$

Ограничившись рассмотрением не слишком больших  $m$ , можно ввиду малости  $\lambda$  пренебречь слагаемым, содержащим  $\lambda^2$ . В этом приближении

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (127.4)$$

Площадь сферического сегмента равна  $S = 2\pi Rh$  ( $R$  — радиус сферы,  $h$  — высота сегмента). Следовательно,

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

а площадь  $m$ -й зоны

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Полученное нами выражение не зависит от  $m$ . Это означает, что при не слишком больших  $m$  площади зон Френеля примерно одинаковы.

Из равенства (127.2) можно найти радиусы зон. При не слишком больших  $m$  высота сегмента  $h_m \ll a$ , поэтому можно считать, что  $r_m^2 = 2ah_m$ . Подставив значение (127.4) для  $h_m$ , получим для радиуса внешней границы  $m$ -й зоны выражение

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \quad (127.5)$$

Если положить  $a = b = 1$  м и  $\lambda = 0,5$  мкм, то для радиуса первой (центральной) зоны получается значение  $r_1 = 0,5$  мм. Радиусы последующих зон возрастают как  $\sqrt{m}$ .

Итак, площади зон Френеля примерно одинаковы. Расстояние  $b_m$  от зоны до точки  $P$  медленно растет с номером зоны  $m$ . Угол  $\varphi$  между нормалью к элементам зоны и направлением на точку  $P$  также растет с  $m$ . Все это приводит к тому, что амплитуда  $A_m$  колебания, возбуждаемого  $m$ -й зоной в точке  $P$ , монотонно убывает с ростом  $m$ . Даже при очень больших  $m$ , когда площадь зоны начинает заметно расти с  $m$  (см. (127.3)), убывание множителя  $K(\varphi)$  перевешивает рост  $\Delta S_m$ , так что  $A_m$  продолжает убывать. Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке  $P$  зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на  $\pi$ . Поэтому амплитуда  $A$  результирующего колебания в точке  $P$  может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (127.6)$$

В это выражение все амплитуды от нечетных зон входят с одним знаком, а от четных зон — с другим.

Запишем выражение (127.6) в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (127.7)$$

Вследствие монотонного убывания  $A_m$  можно приближенно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобках будут равны нулю, и формула (127.7) упрощается следующим образом:

$$A = A_1/2. \quad (127.8)$$

Согласно формуле (127.8) амплитуда, создаваемая в некоторой точке  $P$  всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке  $P$  будет равна  $A_1$ , т. е. в два раза превзойдет амплитуду (127.8). Соответственно интенсивность света в точке  $P$  будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками  $S$  и  $P$ .

Теперь решим задачу о распространении света от источника  $S$  к точке  $P$  методом графического сложения амплитуд. Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшие по ширине (разность хода от краев зоны до точки  $P$  составляет одинаковую для всех зон малую долю  $\lambda$ ). Колебание, создаваемое в точке  $P$  каждой из зон, изобразим в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а угол, образуемый вектором с направлением, принятым за начало отсчета, дает начальную фазу колебания (см. § 55 1-го тома). Амплитуда колебаний, создаваемых такими зонами в точке  $P$ , медленно убывает при переходе от зоны к зоне. Каждое следующее колебание отстает от предыдущего по фазе на одну и ту же величину. Следовательно, векторная диаграмма, получающаяся при сложении колебаний, возбуждаемых отдельными зонами, имеет вид, показанный на рис. 127.3.

Если бы амплитуды, создаваемые отдельными зонами, были одинаковыми, конец последнего из изображенных на рис. 127.3 векторов совпал бы с началом первого вектора. В действительности значение амплитуды, хотя и очень слабо, но убывает, вследствие чего векторы образуют не замкнутую фигуру, а ломаную спиралевидную линию.

В пределе при стремлении ширины кольцевых зон к нулю (количество их будет при этом неограниченно возрастать) векторная диа-

грамма примет вид спирали, закручивающейся к точке  $C$  (рис. 127.4). Фазы колебаний в точках  $O$  и  $I$  отличаются на  $\pi$  (бесконечно малые векторы, образующие спираль, направлены в этих точках в противоположные стороны). Следовательно, участок спирали  $O—I$  соответствует первой зоне Френеля. Вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $I$  (рис. 127.5, *a*), изображает колебание, возбуждаемое в точке  $P$  этой зоны. Аналогично, вектор, проведенный из точки  $I$  в точку  $2$  (рис. 127.5, *б*), изображает колебание, возбуждаемое второй зоной Френеля. Колебания от первой и второй зон находятся в противофазе; в соответствии с этим векторы  $OI$  и  $I2$  направлены в противоположные стороны.



Рис. 127.3.



Рис. 127.4.

Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  всей волновой поверхностью, изображается вектором  $OC$  (рис. 127.5, *в*). Из рисунка видно, что амплитуда в этом случае равна половине амплитуды, создаваемой первой зоной. Этот результат мы получили ранее алгебраически (см. формулу (127.8)).

Заметим, что колебание, возбуждаемое внутренней половиной первой зоны Френеля, изображается вектором  $OB$  (рис. 127.5, *г*). Таким образом, действие внутренней половины первой зоны Френеля не эквивалентно половине действия первой зоны. Вектор  $OB$  в  $\sqrt{2}$  раз больше вектора  $OC$ . Следовательно, интенсивность света, создаваемая внутренней половиной первой зоны Френеля, в два раза превышает интенсивность, создаваемую всей волновой поверхностью.

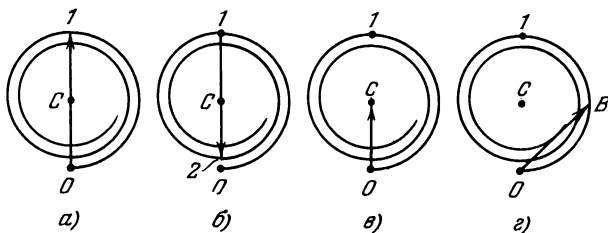


Рис. 127.5.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути световой волны пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке  $P$  резко возрастает. Такая пластинка, называемая *зоной*, действует подобно собирающей линзе. На рис. 127.6 изображена пластинка, перекрывающая четные зоны. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а из-

меняя фазу их колебаний на  $\pi$ . Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным или нечетным зонам, отличается на надлежащим образом подобранную величину. Такая пластинка называется фазовой зонной пластинкой. По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

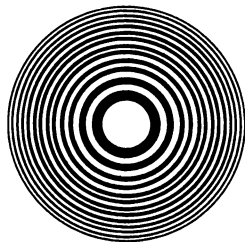


Рис. 127.6.

### § 128. Дифракция Френеля от простейших преград

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы алгебраического и графического сложения амплитуд позволяют решить ряд задач на дифракцию света.

**Дифракция от круглого отверстия.** Поставим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Расположим экран так, чтобы перпендикуляр, опущенный из источника света  $S$ , попал в центр отверстия (рис. 128.1). На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку  $P$ . При радиусе отверстия  $r_0$ , значительно меньшем, чем указанные

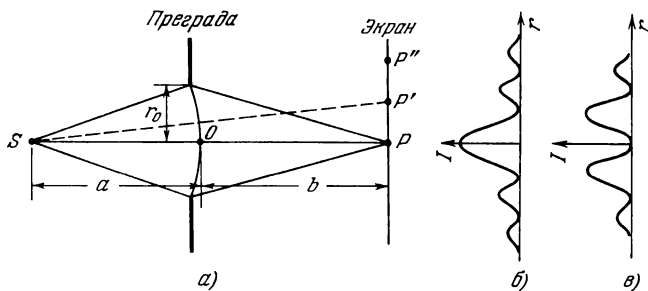


Рис. 128.1.

на рисунке длины  $a$  и  $b$ , длину  $a$  можно считать равной расстоянию от источника  $S$  до преграды, а длину  $b$  — расстоянию от преграды до точки  $P$ . Если расстояния  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda, \quad (128.1)$$

где  $m$  — целое число, то отверстие оставит открытыми ровно  $m$  первых зон Френеля, построенных для точки  $P$  (см. формулу (127.5)).

Следовательно, число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (128.2)$$

В соответствии с (127.6) амплитуда в точке  $P$  будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (128.3)$$

Перед  $A_m$  берется знак плюс, если  $m$  нечетное, и минус, если  $m$  четное. Представив (128.3) в виде, аналогичном (127.7), и положив выражения в скобках равными нулю, придем к формулам

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m — \text{нечетное}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m — \text{четное}).$$

Амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы. Поэтому  $(A_{m-1}/2) - A_m$  можно заменить через  $-A_m/2$ . В результате получится

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (128.4)$$

где знак плюс берется для нечетных  $m$  и минус — для четных.

Для малых  $m$  амплитуда  $A_m$  мало отличается от  $A_1$ . Следовательно, при нечетных  $m$  амплитуда в точке  $P$  будет приближенно равна  $A_1$ , при четных  $m$  — нулю. Этот результат легко получить с помощью векторной диаграммы, изображенной на рис. 127.4.

Если убрать преграду, амплитуда в точке  $P$  станет равной  $A_1/2$  (см. (127.8)). Таким образом, преграда с отверстием, открывающим небольшое нечетное число зон, не только не ослабляет освещенность в точке  $P$ , но, напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в два раза, а интенсивности — почти в четыре раза.

Выясним характер дифракционной картины, которая будет наблюдаться на экране, помещенном за преградой (см. рис. 128.1). Вследствие симметричного расположения отверстия относительно прямой  $SP$  освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния  $r$  от точки  $P$ . В самой этой точке интенсивность будет достигать максимума или минимума в зависимости от того, каким — четным или нечетным — будет число открытых зон Френеля. Пусть, например, это число равно трем. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности. Картина зон Френеля для точки  $P$  дана на рис. 128.2, *а*. Теперь сместимся по экрану в точку  $P'$ . Ограниченная краями отверстия картина зон Френеля для точки  $P'$  имеет вид, показанный на рис. 128.2, *б*. Края отверстия закроют часть третьей зоны, одновременно частично откроется четвертая зона. В итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении точки  $P'$  достигнет минимума. Если

сместиться по экрану в точку  $P''$ , края отверстия частично закроют не только третью, но и вторую зону Френеля, одновременно откроется частично пятая зона (рис. 128.2, *в*). В итоге действие открытых участков нечетных зон перевесит действие открытых участков четных зон, и интенсивность достигнет максимума, правда, более слабого, чем максимум, наблюдающийся в точке  $P$ .

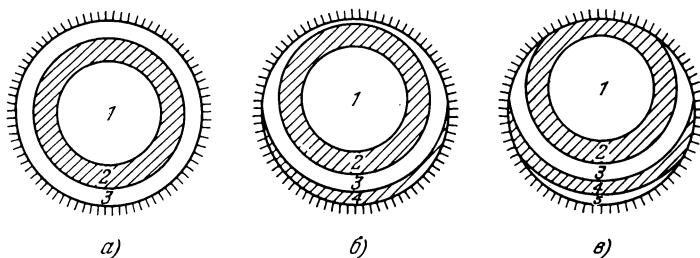


Рис. 128.2.

Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое ( $m$  нечетное), либо темное

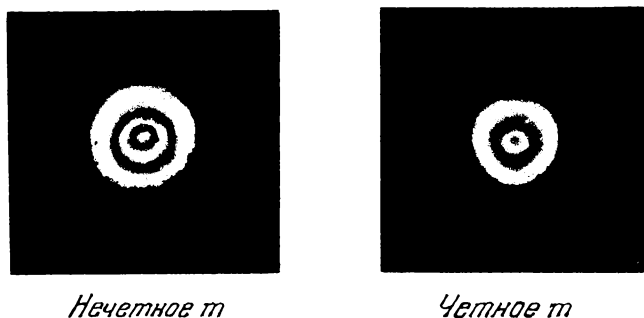


Рис. 128.3.

( $m$  четное) пятно (рис. 128.3). Ход интенсивности  $I$  с расстоянием  $r$  от центра картины изображен на рис. 128.1, *б* (для нечетного  $m$ ) и на рис. 128.1, *в* (для четного  $m$ ). При перемещении экрана параллельно самому себе вдоль прямой  $SP$  картины, изображенные на рис. 128.3, будут сменять друг друга (согласно (128.2) при изменении  $b$  значение  $m$  становится то нечетным, то четным).

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно; чередования

светлых и темных колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной.

**Дифракция от круглого диска.** Поместим между источником света  $S$  и точкой наблюдения  $P$  непрозрачный круглый диск ра-

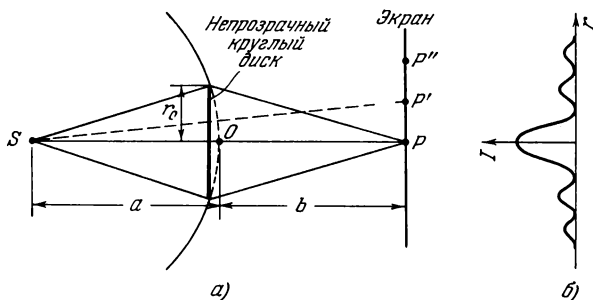


Рис. 128.4.

диуса  $r_0$  (рис. 128.4). Если диск закроет  $m$  первых зон Френеля, амплитуда в точке  $P$  будет равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Выражения, стоящие в скобках, можно положить равными нулю, следовательно,

$$A = A_{m+1}/2. \quad (128.5)$$

Выясним характер картины, получающейся на экране (см. рис. 128.4). Очевидно, что освещенность может зависеть только от расстояния  $r$  до точки  $P$ . При небольшом числе закрытых зон амплитуда  $A_{m+1}$  мало отличается от  $A_1$ . Поэтому интенсивность в точке  $P$  будет почти такая же, как при отсутствии преграды между источником  $S$  и точкой  $P$  (см. (127.8)). Для точки  $P'$ , смещенной относительно точки  $P$  в любом радиальном направлении, диск будет перекрывать часть  $(m+1)$ -й зоны Френеля, одновременно откроется часть  $m$ -й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки  $P'$  интенсивность достигнет минимума. Если сместиться из центра картины еще дальше, диск перекроет дополнительно часть  $(m+2)$ -й зоны, одновременно откроется часть  $(m-1)$ -й зоны. В результате интенсивность возрастет и в точке  $P''$  достигнет максимума.

Таким образом, в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных

концентрических колец. В центре картины помещается светлое пятно (рис. 128.5). Изменение интенсивности света  $I$  с расстоянием  $r$  от точки  $P$  изображено на рис. 128.4, б.

Если диск закрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает тени — освещенность экрана всюду остается такой же, как при отсутствии преград. Если диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае  $A_{m+1} \ll A_1$ , так что светлое пятно в центре отсутствует и освещенность в области геометрической тени практически всюду равна нулю.

Светлое пятнышко в центре тени, отбрасываемой диском, послужило причиной инцидента, происшедшего между Пуассоном и Френелем. Парижская академия наук предложила дифракцию света в качестве темы на премию за 1818 г. Устроители конкурса были сторонниками корпускулярной теории света и рассчитывали, что конкурсные работы принесут окончательную победу их теории. Однако Френелем была представлена работа, в которой все известные к тому времени оптические явления объяснялись с волновой точки зрения. Рассматривая эту работу, Пуассон, бывший членом конкурсной комиссии, обратил внимание на то, что из теории Френеля вытекает «нелепый» вывод: в центре тени, отбрасываемой небольшим круглым диском, должно находиться светлое пятно. Араго тут же произвел опыт и обнаружил, что такое пятно действительно имеется. Это принесло победу и всеобщее признание волновой теории света.

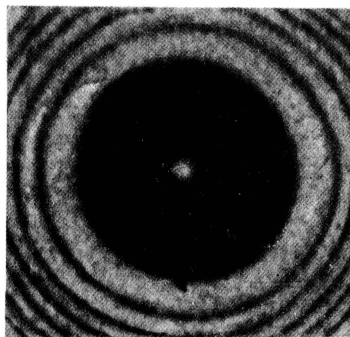


Рис. 128.5.

**Дифракция от прямолинейного края полуплоскости.** Поместим на пути световой волны (которую для простоты будем считать плоской) непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем. Расположим эту полуплоскость так, чтобы она совпала с одной из волновых поверхностей. На расстоянии  $b$  за полуплоскостью поставим параллельный ей экран, на котором возьмем точку  $P$  (рис. 128.6). Разобьем открытую часть волновой поверхности на зоны, имеющие вид очень узких прямолинейных полосок, параллельных краю полуплоскости. Ширину зон выберем так, чтобы отсчитанные в плоскости рисунка расстояния от точки  $P$  до краев любой зоны отличались на одинаковую величину  $\Delta$ . При этом условии колебания, создаваемые в точке  $P$  соседними зонами, будут отличаться по фазе на постоянную величину.



Зонам, расположенным справа от точки  $P$ , припишем номера  $1, 2, 3$  и т. д., расположенным слева — номера  $1', 2', 3'$  и т. д. Зоны с номерами  $m$  и  $m'$  имеют одинаковую ширину и расположены относительно точки  $P$  симметрично. Поэтому создаваемые ими в  $P$  колебания совпадают по амплитуде и по фазе.

Чтобы установить зависимость амплитуды от номера зоны  $m$ , оценим площади зон. Из рис. 128.7 видно, что суммарная ширина первых  $m$  зон равна

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \sqrt{(b + m\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{2bm\Delta + m^2\Delta^2}.$$

Вследствие узости зон  $\Delta \ll b$ . Поэтому при не очень больших  $m$  квадратичным членом под корнем можно пренебречь. Тогда

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \sqrt{2bm\Delta}.$$

Положив в этой формуле  $m = 1$ , получим, что  $d_1 = \sqrt{2b\Delta}$ . Следова-

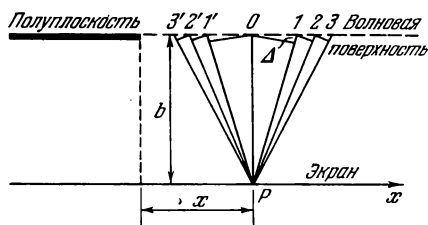


Рис. 128.6.

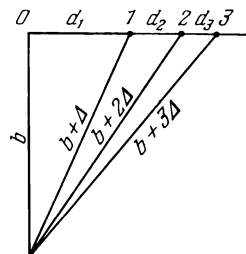


Рис. 128.7.

тельно, выражению для суммарной ширины первых  $m$  зон можно придать вид

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = d_1 \sqrt{m}.$$

Отсюда

$$d_m = d_1(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}). \quad (128.6)$$

Расчет по формуле (128.6) дает, что

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 : \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : \dots \quad (128.7)$$

В таких же соотношениях находятся и площади зон.

Из (128.7) вытекает, что амплитуда колебаний, создаваемых в точке  $P$  отдельными зонами, вначале (для первых зон) убывает очень быстро, затем это убывание становится медленным. По этой причине ломаная линия, получающаяся при графическом сложении колебаний, возбуждаемых прямолинейными зонами, идет сначала более полого, чем в случае кольцевых зон (площади которых при аналогичном построении примерно равны). На рис. 128.8 сопоставлены обе векторные диаграммы. В обоих случаях отставание

по фазе каждого следующего колебания взято одним и тем же. Значение амплитуды для кольцевых зон (рис. 128.8, *а*) принято постоянным, а для прямолинейных зон (рис. 128.8, *б*) — убывающим в соответствии с пропорцией (128.7). Графики на рис. 128.8 являются приближенными. При точном построении графиков нужно учитывать зависимость амплитуды от  $r$  и  $\varphi$  (см. (126.1)). Однако на общем характере диаграмм это не отразится.

На рис. 128.8, *б* показаны только колебания, обусловленные зонами, лежащими справа от точки  $P$ . Зоны с номерами  $m$  и  $m'$  расположены симметрично относительно  $P$ . Поэтому естественно

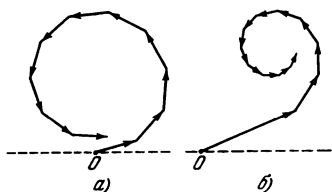


Рис. 128.8.

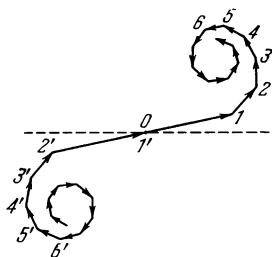


Рис. 128.9.

при построении диаграммы векторы, изображающие соответствующие этим зонам колебания, располагать симметрично относительно начала координат  $O$  (рис. 128.9). Если ширину зон устремить к нулю, ломаная линия, изображенная на рис. 128.9, превратится в плавную кривую (рис. 128.10), которая называется спиралью Корню.

Уравнение спирали Корню в параметрической форме имеет вид

$$\xi = \int_0^v \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \quad \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi u^2}{2} du. \quad (128.8)$$

Эти интегралы называются интегралами Френеля. Они не берутся в элементарных функциях, однако имеются таблицы, по которым можно находить значения интегралов для разных  $v$ . Смысл параметра  $v$  заключается в том, что  $|v|$  дает длину дуги кривой Корню, измеряемую от начала координат.

Числа, отмеченные вдоль кривой на рис. 128.10, дают значения параметра  $v$ . Точки  $F_1$  и  $F_2$ , к которым асимптотически приближается кривая при стремлении  $v$  к  $+\infty$  и  $-\infty$ , называются фокусами или полюсами спирали Корню. Их координаты равны

$$\begin{aligned} \xi &= +\frac{1}{2}, \quad \eta = +\frac{1}{2} \text{ для точки } F_1, \\ \xi &= -\frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2} \text{ для точки } F_2. \end{aligned}$$

Правый завиток спирали (участок  $OF_1$ ) соответствует зонам, расположенным справа от точки  $P$ , левый завиток (участок  $OF_2$ ) — зонам, расположенным слева от точки  $P$ .

Найдем производную  $d\eta/d\xi$  в точке кривой, отвечающей данному значению параметра  $v$ . Согласно (128.8) приращению  $v$  на  $dv$  соответствует

$$d\xi = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad d\eta = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Следовательно,  $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}(\pi v^2/2)$ . Вместе с тем  $d\eta/d\xi = \operatorname{tg} \theta$ , где

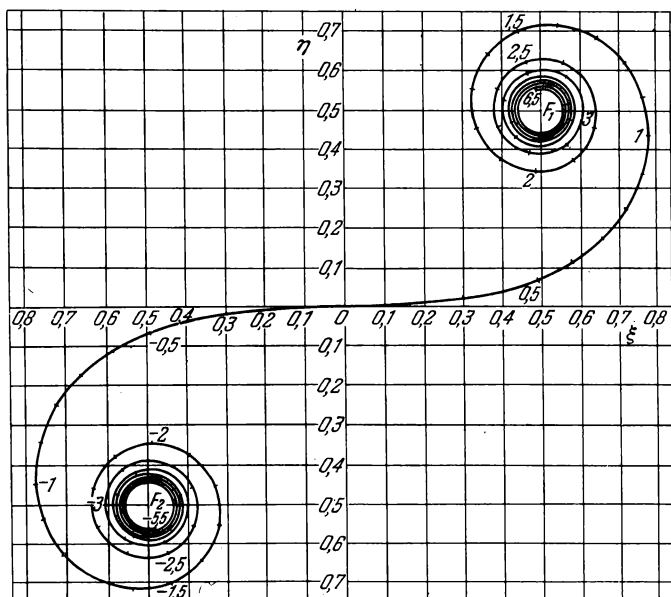


Рис. 128.10.

$\theta$  — угол наклона касательной к кривой в данной точке. Таким образом,

$$\theta = \frac{\pi}{2} v^2. \quad (128.9)$$

Отсюда следует, что в точке, отвечающей  $v = 1$ , касательная к кривой Корню перпендикулярна к оси  $\xi$ . При  $v = 2$  угол  $\theta$  равен  $2\pi$ , так что касательная параллельна оси  $\xi$ . При  $v = 3$  угол  $\theta$  равен  $9\pi/2$ , так что касательная снова перпендикулярна к оси  $\xi$ , и т. д.

Спираль Корню дает возможность найти амплитуду светового колебания в любой точке экрана. Положение точки будем характеризовать координатой  $x$ , отсчитываемой от границы геометрической

тени (см. рис. 128.6). Для точки  $P$ , лежащей на границе геометрической тени ( $x = 0$ ), все штрихованные зоны будут закрыты. Колебаниям от нештрихованных зон соответствует правый завиток спирали. Следовательно, результирующее колебание изобразится вектором, начало которого находится в точке  $O$ , а конец — в точке  $F_1$  (рис. 128.11,  $a$ ). При смещении точки  $P$  в область геометрической тени полуплоскость закрывает все большее число нештрихованных зон. Поэтому начало результирующего вектора перемещается по правому завитку в направлении полюса  $F_1$  (рис. 128.11,  $b$ ). В результате амплитуда колебания монотонно стремится к нулю.

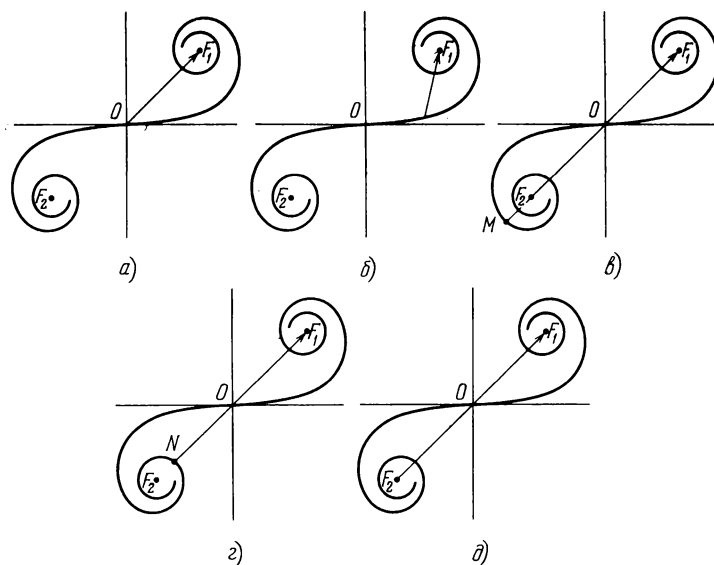


Рис. 128.11.

Если точка  $P$  смещается от границы геометрической тени вправо, в дополнение к нештрихованным зонам открывается все возрастающее число штрихованных зон. Поэтому начало результирующего вектора скользит по левому завитку спирали в направлении к полюсу  $F_2$ . При этом амплитуда проходит через ряд максимумов (первый из них равен длине отрезка  $MF_1$  на рис. 128.11,  $в$ ) и минимумов (первый из них равен длине отрезка  $NF_1$  на рис. 128.11,  $г$ ). При полностью открытой волновой поверхности амплитуда равна длине отрезка  $F_2F_1$  (рис. 128.11,  $д$ ), т. е. ровно в два раза превышает амплитуду на границе геометрической тени (см. рис. 128.11,  $a$ ). Соответственно интенсивность на границе геометрической тени составляет  $1/4$  интенсивности  $I_0$ , получающейся на экране в отсутствие преград.

Зависимость интенсивности света  $I$  от координаты  $x$  дана на рис. 128.12. Из рисунка видно, что при переходе в область геометрической тени интенсивность изменяется не скачком, а постепенно стремится к нулю. Справа от границы геометрической тени расположен ряд чередующихся максимумов и минимумов интенсивности.

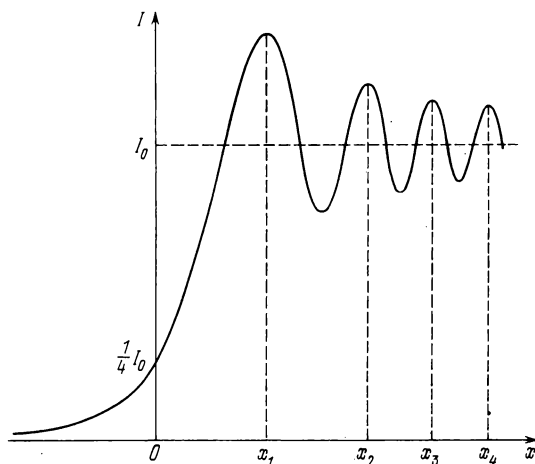


Рис. 128.12.

Вычисления дают, что при  $b = 1$  м и  $\lambda = 0,5$  мкм координаты максимумов (см. рис. 128.12) имеют следующие значения:  $x_1 = 0,61$  мм,  $x_2 = 1,17$  мм,  $x_3 = 1,54$  мм,  $x_4 = 1,85$  мм и т. д. С изменением расстояния  $b$  от полуплоскости до экрана значения координат максимумов и минимумов изменяются как  $\sqrt{b}$ .

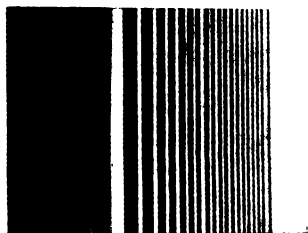


Рис. 128.13.

Из приведенных данных следует, что максимумы располагаются довольно густо. С помощью кривой Корню можно также найти относительную величину интенсивности в максимумах и минимумах. Для первого максимума получается значение  $1,37 I_0$ , для первого минимума  $0,78 I_0$ .

На рис. 128.13 приведена фотография дифракционной картины от края полуплоскости.

**Дифракция от щели.** Бесконечно длинную щель можно образовать, расположив рядом две обращенные в разные стороны полуплоскости. Следовательно, задача о дифракции Френеля от щели может быть решена с помощью спирали Корню. Волновую поверхность падающего света, плоскость щели и экран, на котором наблю-

дается дифракционная картина, будем считать параллельными друг другу (рис. 128.14).

Для точки  $P$ , лежащей против середины щели, начало и конец результирующего вектора находятся в симметричных относительно начала координат точках спирали (рис. 128.15). Если сместиться в точку  $P'$ , лежащую против края щели, начало результирующего

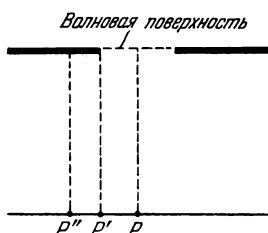


Рис. 128.14.

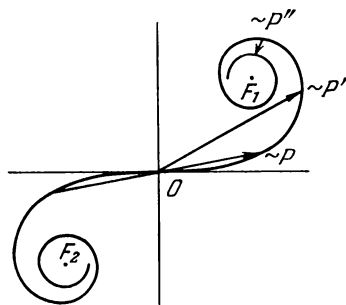


Рис. 128.15.

вектора переместится в середину спирали  $O$ . Конец вектора переместится по спирали в направлении полюса  $F_1$ . При углублении в область геометрической тени начало и конец результирующего вектора будут скользить по спирали и в конце концов окажутся на наименьшем расстоянии друг от друга (см. на рис. 128.15 вектор, соответствующий точке  $P''$ ). Интенсивность света достигнет при этом минимума. При дальнейшем скольжении по спирали начало и конец вектора снова отойдут друг от друга и интенсивность будет расти. То же самое будет происходить при смещении из точки  $P$  в противоположную сторону, так как дифракционная картина симметрична относительно середины щели.

Если изменять ширину щели, сдвигая полуплоскости в противоположные стороны, интенсивность в средней точке  $P$  будет пульсировать, проходя попеременно через максимумы (рис. 128.16, *а*) и отличные от нуля минимумы (рис. 128.16, *б*).

Итак, френелевская дифракционная картина от щели представляет собой либо светлую (в случае, изображенном на рис. 128.16, *а*), либо относительно темную (в случае, изображенном на рис. 128.16, *б*) центральную полосу, по обе стороны которой располагаются симметричные относительно нее чередующиеся темные и светлые полосы.

При большой ширине щели начало и конец результирующего вектора для точки  $P$  лежат на внутренних витках спирали вблизи полюсов  $F_1$  и  $F_2$ . Поэтому интенсивность света в точках, распо-

женных против щели, будет практически постоянной. Только на границах геометрической тени образуется система густо расположенных узких светлых и темных полос.

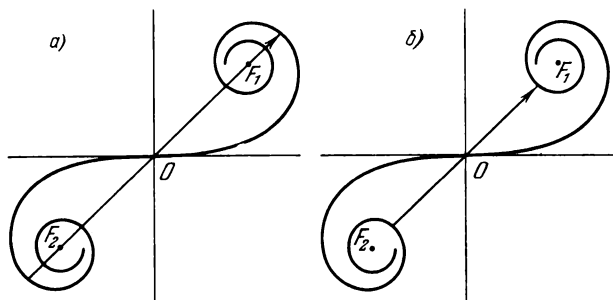


Рис. 128.16.

Заметим, что все полученные в данном параграфе результаты справедливы при условии, что радиус когерентности падающей на преграду световой волны намного превосходит характерный размер преграды (диаметр отверстия или диска, ширину щели и т. п.).

### § 129. Дифракция Фраунгофера от щели

Пусть на бесконечно длинную<sup>1</sup> щель падает плоская световая волна (рис. 129.1). Поместим за щелью собирающую линзу, а в фокальной плоскости линзы — экран. Волновая поверхность падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу. Поскольку щель бесконечна, картина, наблюдаемая в любой плоскости, перпендикулярной к щели, будет одинакова. Поэтому достаточно исследовать характер картины в одной такой плоскости, например в плоскости рис. 129.1. Все вводимые в дальнейшем величины, в частности угол  $\varphi$ , образуемый лучом с оптической осью линзы, относятся к этой плоскости.

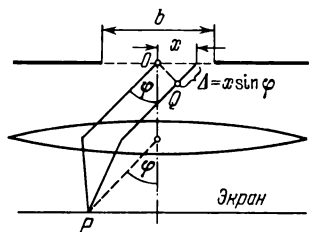


Рис. 129.1.

Разобьем открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели элементарные зоны ширины  $dx$ . Вторичные волны, посылаемые зонами в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , соберутся в точке экрана  $P$ . Каждая элементарная зона создаст в точке  $P$  колебание  $dE$ . Линза собирает в фокальной плоскости плоские (а не

<sup>1</sup> Практически достаточно, чтобы длина щели была во много раз больше, чем ее ширина.

сферические) волны. Поэтому множитель  $1/r$  в выражении (126.1) для  $dE$  в случае дифракции Фраунгофера будет отсутствовать. Ограничившись рассмотрением не слишком больших углов  $\varphi$ , можно коэффициент  $K$  в формуле (126.1) считать постоянным. Тогда амплитуда колебания, возбуждаемого зоной в любой точке экрана, будет зависеть только от площади зоны. Площадь пропорциональна ширине зоны  $dx$ . Следовательно, амплитуда  $dA$  колебания  $dE$ , возбуждаемого зоной ширины  $dx$  в любой точке экрана, имеет вид

$$dA = C dx,$$

где  $C$  — константа.

Обозначим алгебраическую сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых в некоторой точке экрана всеми зонами, через  $A_0$ . Ее можно найти, проинтегрировав  $dA$  по всей ширине щели  $b$ :

$$A_0 = \int dA = \int_0^b C dx = Cb.$$

Отсюда  $C = A_0/b$ , и, следовательно,

$$dA = \frac{A_0}{b} dx.$$

Теперь определим фазовые соотношения между колебаниями  $dE$ . Сопоставим фазы колебаний, возбуждаемых в точке  $P$  элементарными зонами с координатами  $O$  и  $x$  (рис. 129.1). Оптические пути  $OP$  и  $QP$  таутохронны (см. рис. 117.2). Поэтому разность фаз между рассматриваемыми колебаниями образуется на пути  $\Delta$ , равном  $x \sin \varphi$ . Если начальную фазу колебания, возбуждаемого в точке  $P$  элементарной зоной, находящейся в середине щели ( $x = 0$ ), положить равной нулю, то начальная фаза колебания, возбуждаемого зоной с координатой  $x$ , будет равна

$$-2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi$$

( $\lambda$  — длина волны в данной среде).

Таким образом, колебание, возбуждаемое элементарной зоной с координатой  $x$  в точке  $P$  (положение которой определяется углом  $\varphi$ ), может быть представлено в виде

$$dE_\varphi = \left( \frac{A_0}{b} dx \right) \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right] \quad (129.1)$$

(имеется в виду вещественная часть этого выражения).

Проинтегрировав выражение (129.1) по всей ширине щели, найдем результирующее колебание, возбуждаемое в точке  $P$  открываемым щелью участком волновой поверхности:

$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right] dx.$$



Вынесем множители, не зависящие от  $x$ , за знак интеграла. Кроме того, введем обозначение

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda} \sin \varphi. \quad (129.2)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &= \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2i\gamma x} dx = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{(-2i\gamma)} e^{-2i\gamma x} \Big|_{-b/2}^{+b/2} = \\ &= e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{(-2i)} [e^{-i\gamma b} - e^{i\gamma b}] \right\} = e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{2i} [e^{i\gamma b} - e^{-i\gamma b}] \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках определяет комплексную амплитуду  $\hat{A}_{\varphi}$  результирующего колебания. Приняв во внимание, что разность экспонент, деленная на  $2i$ , представляет собой  $\sin \gamma b$ <sup>1</sup>, можно написать

$$\hat{A}_{\varphi} = A_0 \frac{\sin \gamma b}{\gamma b} = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \quad (129.3)$$

(мы подставили значение (129.2) для  $\gamma$ ).

Выражение (129.3) является вещественным. Его модуль представляет собой обычную амплитуду результирующего колебания:

$$A_{\varphi} = \left| A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \right|. \quad (129.4)$$

Для точки, лежащей против центра линзы,  $\varphi = 0$ . Подстановка этого значения в формулу (129.4) дает для амплитуды значение  $A_0$ <sup>2</sup>. Этот результат можно получить более простым путем. При  $\varphi = 0$  колебания от всех элементарных зон приходят в точку  $P$  в одинаковой фазе. Поэтому амплитуда результирующего колебания равна алгебраической сумме амплитуд складываемых колебаний.

При значениях  $\varphi$ , удовлетворяющих условию:  $\pi b \sin \varphi / \lambda = \pm k\pi$ , т. е. в случае, если

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (129.5)$$

амплитуда  $A_{\varphi}$  обращается в нуль. Таким образом, условие (129.5) определяет положения минимумов интенсивности. Отметим, что  $b \sin \varphi$  представляет собой разность хода  $\Delta$  лучей, идущих в точку  $P$  от краев щели (см. рис. 129.1).

Условие (129.5) легко получить из следующих соображений. Если разность хода  $\Delta$  от краев щели равна  $\pm k\lambda$ , открытую часть волновой поверхности можно разбить на  $2k$  равных по ширине зон, причем разность хода от краев каждой зоны будет равна  $\lambda/2$

<sup>1</sup> См. § 51 1-го тома.

<sup>2</sup> Напомним, что  $\lim_{u \rightarrow 0} (\sin u / u) = 1$  (при малых  $u$  можно полагать  $\sin u \approx u$ ).

(см. рис. 129.2, выполненный для  $k = 2$ ). Колебания от каждой пары соседних зон взаимно гасят друг друга, так что результирующая амплитуда равна нулю. Если для точки  $P$  разность хода  $\Delta$  равна  $\pm(k + 1/2)\lambda$ , число зон будет нечетным, действие одной из них окажется некомпенсированным и наблюдается максимум интенсивности.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, в соответствии с (129.4)

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2}, \quad (129.6)$$

где  $I_0$  — интенсивность в середине дифракционной картины (против центра линзы),  $I_{\varphi}$  — интенсивность в точке, положение которой определяется данным значением  $\varphi$ .

Из формулы (129.6) получается, что  $I_{-\varphi} = I_{\varphi}$ . Это означает, что дифракционная картина симметрична относительно центра линзы. Заметим, что при смещении щели параллельно экрану (вдоль оси  $x$  на рис. 129.1) дифракционная картина, наблюдаемая на экране, остается неподвижной (ее середина лежит против центра линзы). Напротив, смещение линзы при неподвижной щели сопровождается таким же смещением картины на экране.

График функции (129.6) изображен на рис. 129.3. По оси абсцисс отложены значения  $\sin \varphi$ , по оси ординат — интенсивность  $I_{\varphi}$ .

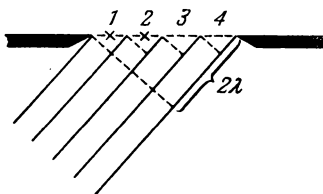


Рис. 129.2.

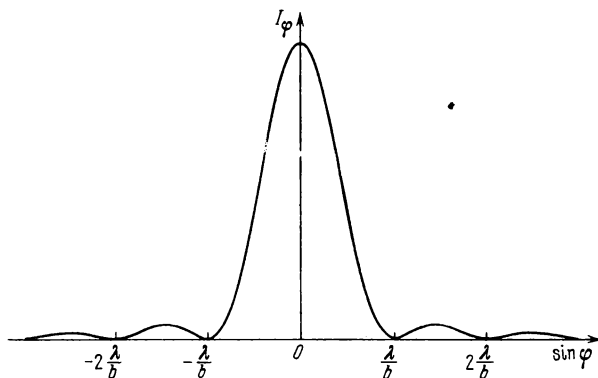


Рис. 129.3.

Количество минимумов интенсивности определяется отношением ширины щели  $b$  к длине волны  $\lambda$ . Из условия (129.5) следует, что  $\sin \varphi = \pm k\lambda/b$ . Модуль  $\sin \varphi$  не может превысить единицу.

Поэтому  $k\lambda/b \leq 1$ , откуда

$$k \leq \frac{b}{\lambda}. \quad (129.7)$$

При ширине щели, меньшей длины волны, минимумы вообще не возникают. В этом случае интенсивность света монотонно убывает от середины картины к ее краям.

Краям центрального максимума соответствуют значения угла  $\varphi$ , получающиеся из условия  $b \sin \varphi = \pm \lambda$ . Эти значения равны  $\pm \arcsin(\lambda/b)$ . Следовательно, угловая ширина центрального максимума равна

$$\delta\varphi = 2 \arcsin \frac{\lambda}{b}. \quad (129.8)$$

В случае, когда  $b \gg \lambda$ , значение  $\sin(\lambda/b)$  можно положить равным  $\lambda/b$ . Тогда формула для угловой ширины центрального максимума упрощается следующим образом:

$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}. \quad (129.9)$$

Решим задачу о дифракции Фраунгофера от щели методом графического сложения амплитуд. Разобьем открытую часть волновой поверхности на очень узкие зоны одинаковой ширины. Колебание, возбуждаемое каждой такой зоной, имеет одинаковую амплитуду  $\Delta A$  и отстает по фазе от предыдущего колебания на одну и ту же величину  $\delta$ , зависящую от угла  $\varphi$ , определяющего направление на точку наблюдения  $P$ . При  $\varphi = 0$  разность фаз  $\delta$  равна нулю и векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 129.4, а. Амплитуда результирующего колебания  $A_0$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если  $\Delta = b \sin \varphi = \lambda/2$ , колебания от краев щели находятся в противофазе. Соответственно векторы  $\Delta A$  располагаются вдоль полуокружности длиной  $A_0$  (рис. 129.4, б). Следовательно, результирующая амплитуда равна  $2A_0/\pi$ . В случае, когда  $\Delta = b \sin \varphi = \lambda$ , колебания от краев щели отличаются по фазе на  $2\pi$ . Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 129.4, в. Векторы  $\Delta A$  располагаются вдоль окружности длиной  $A_0$ . Результирующая амплитуда равна нулю — получается первый минимум. Первый максимум получается при  $\Delta = b \sin \varphi = 3\lambda/2$ . В этом случае колебания от краев щели отличаются по фазе на  $3\pi$ . Строя последовательно векторы  $\Delta A$ , мы обойдем полтора раза окружность диаметра  $A_1 = (2/3\pi) A_0$  (рис. 129.4, г). Диаметр этой окружности и есть амплитуда первого максимума. Таким образом, интенсивность первого максимума равна  $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx 0,045 I_0$ . Аналогично можно найти и относительную интенсивность остальных максимумов. В итоге получится следующее соотношение:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots \quad (129.10)$$

Таким образом, центральный максимум значительно превосходит по интенсивности остальные максимумы; в нем сосредоточивается основная доля светового потока, проходящего через щель.

В случае, когда ширина щели очень мала по сравнению с расстоянием от щели до экрана, лучи, идущие в точку  $P$  от краев щели, будут практически параллельными и в отсутствие линзы между щелью и экраном. Следовательно, при падении на щель плоской волны будет

наблюдаться дифракция Фраунгофера. Все полученные выше формулы будут справедливыми, причем под  $\varphi$  в этих формулах следует понимать угол между направлением от любого края щели к точке  $P$  и нормалью к плоскости щели.

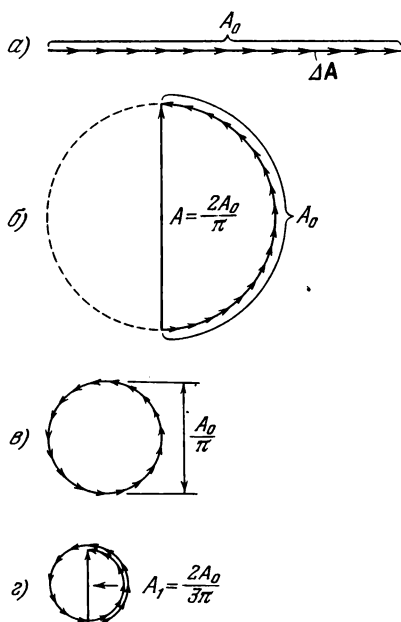


Рис. 129.4.

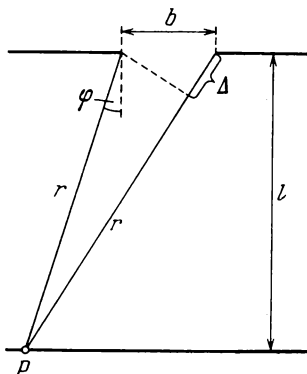


Рис. 129.5.

Установим количественный критерий, позволяющий определить, какой вид дифракции будет иметь место в каждом конкретном случае. Найдем разность хода лучей от краев щели до точки  $P$  (рис. 129.5). Применим теорему косинусов к треугольнику со сторонами  $r$ ,  $r + \Delta$  и  $b$ :

$$(r + \Delta)^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

После несложных преобразований получим

$$2r\Delta + \Delta^2 = b^2 + 2rb \sin \varphi. \quad (129.11)$$

Нас интересует случай, когда лучи, идущие от краев щели в точку  $P$ , почти параллельны. При этом условии  $\Delta^2 \ll r\Delta$ , поэтому в уравнении (129.11) можно пренебречь слагаемым  $\Delta^2$ . В этом приближении

$$\Delta = \frac{b^2}{2r} + b \sin \varphi. \quad (129.12)$$

В пределе при  $r \rightarrow \infty$  получается значение разности хода  $\Delta_\infty = b \sin \varphi$ , совпадающее с выражением, фигурирующим в формуле (129.5).

При конечных  $r$  характер дифракционной картины будет определяться соотношением между разностью  $\Delta - \Delta_\infty$  и длиной волны  $\lambda$ . Если

$$\Delta - \Delta_\infty \ll \lambda, \quad (129.13)$$

дифракционная картина будет практически такой, как в случае дифракции Фраунгофера. При  $\Delta - \Delta_\infty$ , сравнимой с  $\lambda$  ( $\Delta - \Delta_\infty \sim \lambda$ ), будет иметь место дифракция Френеля.

Из (129.12) следует, что

$$\Delta - \Delta_\infty = \frac{b^2}{2r} \sim \frac{b^2}{l}$$

( $l$  — расстояние от щели до экрана). Подстановка этого выражения в (129.13) приводит к условию:  $(b^2/l) \ll \lambda$  или

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \quad (129.14)$$

Таким образом, характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра

$$b^2/l\lambda. \quad (129.15)$$

Если этот параметр много меньше единицы, наблюдается дифракция Фраунгофера, если он порядка единицы — дифракция Френеля; наконец, если этот параметр много больше единицы, оказывается применимым приближение геометрической оптики. Для удобства сопоставления представим сказанное в следующем виде:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \begin{cases} \ll 1 & \text{— дифракция Фраунгофера,} \\ \sim 1 & \text{— дифракция Френеля,} \\ \gg 1 & \text{— геометрическая оптика.} \end{cases} \quad (129.16)$$

Параметру (129.15) можно дать наглядное истолкование. Возьмем точку  $P$ , лежащую против середины щели (рис. 129.6). Для этой точки число  $m$  открываемых щелью зон Френеля определяется соотношением

$$\left(l + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки и отбросив слагаемое, пропорциональное  $\lambda^2$ , получим<sup>1</sup>

$$m = \frac{b^2}{4l\lambda} \sim \frac{b^2}{l\lambda}. \quad (129.17)$$

<sup>1</sup> Отметим, что для точек, сильно смещенных в область геометрической тени, число открытых зон будет больше.

Таким образом, параметр (129.15) непосредственно связан с числом открытых зон Френеля (для точки, лежащей против середины щели).

Если щель открывает малую долю центральной зоны Френеля ( $m \ll 1$ ), наблюдается дифракция Фраунгофера. Распределение интенсивности в этом случае изображается кривой, приведенной на рис. 129.3. Если щель открывает небольшое число зон Френеля ( $m \sim 1$ ), на экране получается изображение щели, обрамленное по краям отчетливо видимыми светлыми и темными полосами. Наконец, в случае, когда щель открывает большое число зон Френеля ( $m \gg 1$ ), на экране получается равномерно освещенное изображение щели. Лишь у границ геометрической тени имеются практически неразличимые глазом очень узкие чередующиеся более светлые и более темные полосы.

Проследим за видоизменениями картины при удалении экрана от щели. При небольших расстояниях экрана от щели (когда  $m \gg 1$ ) изображение соответствует законам геометрической оптики. Увеличивая расстояние, мы придем сначала к френелевской дифракционной картине, которая затем перейдет во фраунгоферову картину. Та же последовательность превращений наблюдается в том случае, если, не изменяя расстояния  $l$ , уменьшать ширину щели  $b$ .

Из сказанного ясно, что критерием применимости геометрической оптики является не малость длины волны по сравнению с характерным размером преграды (например, шириной щели), а значение параметра (129.15) (он должен быть много больше единицы). Пусть, например, оба отношения  $b/\lambda$  и  $l/b$  равны 100. В этом случае  $\lambda \ll b$ , однако  $b^2/l\lambda = 1$  и, следовательно, будет наблюдаться отчетливо выраженная френелевская дифракция.

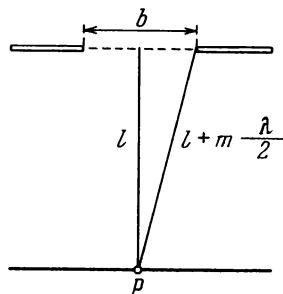


Рис. 129.6.

### § 130. Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей (рис. 130.1). Расстояние  $d$  между серединами соседних щелей называется периодом решетки.

Расположим параллельно решетке собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поставим экран. Выясним характер дифракционной картины, получающейся на экране при падении на решетку плоской световой волны (для простоты будем считать, что волна падает на решетку нормально). Каждая из щелей даст на экране картину, описываемую кривой, изображенной на рис. 129.3. Картины от всех щелей придутся на одно и то же место экрана (неза-

висимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку  $P$  от различных щелей, были некогерентными, результирующая картина от  $N$  щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, лишь тем, что все интенсивности возросли бы в  $N$  раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными; поэтому результирующая интенсивность будет отличаться от  $NI_\varphi$  ( $I_\varphi$  — интенсивность, создаваемая одной щелью; см. (129.6)).

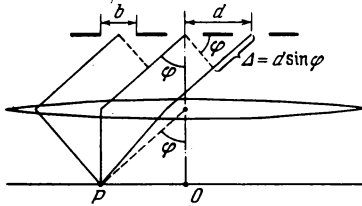


Рис. 130.1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными друг относительно друга. В этом случае результирующее колебание в точ-

ке  $P$ , положение которой определяется углом  $\varphi$ , представляет собой сумму  $N$  колебаний с одинаковой амплитудой  $A_\varphi$ , сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину  $\delta$ . Согласно формуле (124.5) интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (130.1)$$

(в данном случае роль  $I_0$  играет  $I_\varphi$ ).

Из рис. 130.1 видно, что разность хода от соседних щелей равна  $\Delta = d \sin \varphi$ . Следовательно, разность фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (130.2)$$

где  $\lambda$  — длина волны в данной среде.

Подставив в формулу (130.1) выражение (129.6) для  $I_\varphi$  и (130.2) для  $\delta$ , получим

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2} \frac{\sin^2(N \pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)} \quad (130.3)$$

( $I_0$  — интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы).

Первый множитель в (130.3) обращается в нуль в точках, для которых

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (130.4)$$

В этих точках интенсивность, создаваемая каждой из щелей в отдельности, равна нулю (см. условие (129.5)).

Второй множитель в (130.3) принимает значение  $N^2$  в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (130.5)$$

(см. (124.7)). Для направлений, определяемых этим условием, колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга, вследствие чего амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = N A_{\varphi} \quad (130.6)$$

( $A_{\varphi}$  — амплитуда колебания, посылаемого одной щелью под углом  $\varphi$ ).

Условие (130.5) определяет положения максимумов интенсивности, называемых главными. Число  $m$  дает порядок главного максимума. Максимум нулевого порядка только один, максимумов 1-го, 2-го и т. д. порядков имеется по два.

Возведя равенство (130.6) в квадрат, получим, что интенсивность главных максимумов  $I_{\max}$  в  $N^2$  раз больше интенсивности  $I_{\varphi}$ , создаваемой в направлении  $\varphi$  одной щелью:

$$I_{\max} = N^2 I_{\varphi}. \quad (130.7)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (130.4), в промежутках между соседними главными максимумами имеется  $(N-1)$  добавочных минимумов. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно гасят друг друга. В соответствии с формулой (124.8) направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (130.8)$$

$$(k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots).$$

В формуле (130.8)  $k'$  принимает все целочисленные значения, кроме 0,  $N$ ,  $2N$ , ..., т. е. кроме тех, при которых условие (130.8) переходит в (130.5).

Условие (130.8) легко получить методом графического сложения колебаний. Колебания от отдельных щелей изображаются векторами одинаковой длины. Согласно (130.8) каждый из последующих векторов повернут относительно предыдущего на один и тот же угол

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi = \frac{2\pi}{N} k'.$$

Поэтому в тех случаях, когда  $k'$  не является целым кратным  $N$ , мы, пристраивая начало следующего вектора к концу предыдущего, получим замкнутую ломаную линию, которая делает  $k'$  (при  $k' < N/2$ ) или  $N-k'$  (при  $k' > N/2$ ) оборотов, прежде чем конец  $N$ -го вектора упрется в начало 1-го. Соответственно результирую-



шая амплитуда оказывается равной нулю. Сказанное пояснено на рис. 130.2, на котором показана сумма векторов для случая  $N = 9$  и значений  $k'$ , равных 1, 2 и  $N - 1 = 8$ .

Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежутков между соседними главными максимумами, равно  $N - 2$ . В § 124 было показано, что интенсивность вторичных максимумов не превышает  $1/22$  интенсивности ближайшего главного максимума.

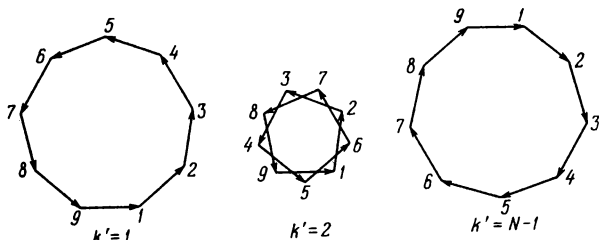


Рис. 130.2.

На рис. 130.3 приведен график функции (130.3) для  $N = 4$  и  $d/b = 3$ . Пунктирная кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает интенсивность от одной щели, умноженную на  $N^2$  (см. (130.7)). При взятом на рисунке отношении периода решетки к ширине щели ( $d/b = 3$ ) главные максимумы 3-го,

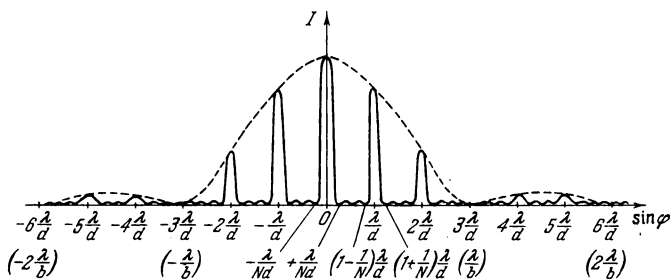


Рис. 130.3.

6-го и т. д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, вследствие чего эти максимумы пропадают. Вообще из формул (130.4) и (130.5) вытекает, что главный максимум  $m$ -го порядка придется на  $k$ -й минимум от одной щели, если будет выполнено равенство:  $m/d = k/b$ , или  $m/k = d/b$ . Это возможно, если  $d/b$  равно отношению двух целых чисел  $r$  и  $s$  (практический интерес представляет случай, когда эти числа невелики). Тогда главный

максимум  $r$ -го порядка наложится на  $s$ -й минимум от одной щели, максимум  $2r$ -го порядка — на  $2s$ -й минимум и т. д., в результате чего максимумы порядков  $r$ ,  $2r$ ,  $3r$  и т. д. будут отсутствовать.

Количество наблюдающихся главных максимумов определяется отношением периода решетки  $d$  к длине волны  $\lambda$ . Модуль  $\sin \varphi$  не может превысить единицу. Поэтому из формулы (130.5) вытекает, что

$$m \leq d/\lambda. \quad (130.9)$$

Определим угловую ширину центрального (нулевого) максимума. Положение ближайших к нему дополнительных минимумов определяется условием  $d \sin \varphi = \pm \lambda/N$  (см. формулу (130.8)). Следовательно, этим минимумам соответствуют значения  $\varphi$ , равные  $\pm \arcsin(\lambda/Nd)$ . Отсюда для угловой ширины центрального максимума получается выражение

$$\delta\varphi_0 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{2\lambda}{Nd} \quad (130.10)$$

(мы воспользовались тем, что  $\lambda/Nd \ll 1$ ).

Положение дополнительных минимумов, ближайших к главному максимуму  $m$ -го порядка, определяется условием:  $d \sin \varphi = (m \pm 1/N)\lambda$ . Отсюда получается для угловой ширины  $m$ -го максимума следующее выражение:

$$\delta\varphi_m = \arcsin \left( m + \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d} - \arcsin \left( m - \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d}.$$

Введя обозначения  $m\lambda/d = x$  и  $\lambda/Nd = \Delta x$ , можно представить эту формулу в виде

$$\delta\varphi_m = \arcsin(x + \Delta x) - \arcsin(x - \Delta x). \quad (130.11)$$

При большом числе щелей значение  $\Delta x = \lambda/Nd$  будет очень мало. Поэтому можно положить  $\arcsin(x \pm \Delta x) \approx \arcsin x \pm (\arcsin x)' \Delta x$ . Подстановка этих значений в формулу (130.11) приводит к приближенному выражению

$$\delta\varphi_m \approx 2(\arcsin x)' \Delta x = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2(\lambda/d)^2}} \frac{2\lambda}{Nd}. \quad (130.12)$$

При  $m = 0$  это выражение переходит в (130.10).

Произведение  $Nd$  дает длину дифракционной решетки. Следовательно, угловая ширина главных максимумов обратно пропорциональна длине решетки. С увеличением порядка максимума  $m$  ширина  $\delta\varphi_m$  возрастает.

Положение главных максимумов зависит от длины волны  $\lambda$ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, красный — наружу. Таким образом, дифракционная решетка представляет со-

бой спектральный прибор. Заметим, что в то время как стеклянная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка, напротив, сильнее отклоняет красные лучи.

На рис. 130.4 изображены схематически спектры разных порядков, даваемые решеткой при пропускании через нее белого света. В центре лежит узкий максимум нулевого порядка; у него окрашены только края (согласно (130.10)  $\delta\varphi_0$  зависит от  $\lambda$ ). По обе стороны от центрального максимума расположены два спектра 1-го порядка, затем два спектра 2-го порядка и т. д. Положения красного конца спектра  $m$ -го порядка и фиолетового конца спектра  $(m+1)$ -го порядка определяются соотношениями

$$\sin \varphi_{\text{кр}} = m \frac{0,76}{d}, \quad \sin \varphi_{\text{фиол}} = (m+1) \frac{0,40}{d},$$

где  $d$  взято в микрометрах. При условии, что

$$0,76m > 0,40(m+1),$$

спектры  $m$ -го и  $(m+1)$ -го порядков частично перекрываются. Из неравенства получается, что  $m >^{10}/_9$ . Следовательно, частичное перекрывание начинается со спектров 2-го и 3-го порядков (см.

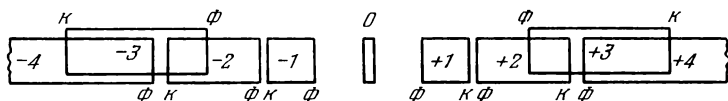


Рис. 130.4.

рис. 130.4, на котором для наглядности спектры разных порядков смещены друг относительно друга по вертикали).

Основными характеристиками всякого спектрального прибора являются его дисперсия и разрешающая сила. Дисперсия определяет угловое или линейное расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на  $1 \text{ \AA}$ ). Разрешающая сила определяет минимальную разность длин волн  $\delta\lambda$ , при которой две линии воспринимаются в спектре отдельно.

Угловой дисперсией называется величина

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad (130.13)$$

где  $\delta\varphi$  — угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $\delta\lambda$ .

Чтобы найти угловую дисперсию дифракционной решетки, продифференцируем условие (130.5) главного максимума слева по  $\varphi$ , а справа по  $\lambda$ . Опуская знак минус, получим

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda.$$

Отсюда

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (130.14)$$

В пределах небольших углов  $\cos \varphi \approx 1$ , поэтому можно положить

$$D \approx \frac{m}{d}. \quad (130.15)$$

Из полученного выражения следует, что угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки  $d$ . Чем выше порядок спектра  $m$ , тем больше дисперсия.

Линейной дисперсией называют величину

$$D_{\text{лин}} = \frac{\delta l}{\delta \lambda}, \quad (130.16)$$

где  $\delta l$  — линейное расстояние на экране или на фотопластинке между спектральными линиями, отличающимися по длине волн на  $\delta \lambda$ . Из рис. 130.5 видно, что при небольших значениях угла  $\varphi$  можно положить  $\delta l \approx f' \delta \varphi$ , где  $f'$  — фокусное расстояние линзы, собирающей

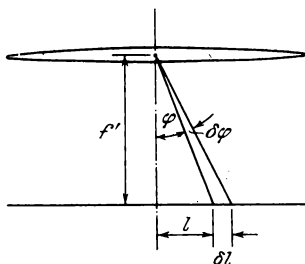


Рис. 130.5.

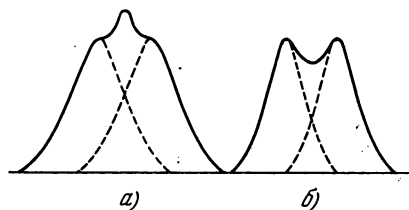


Рис. 130.6.

дифрагирующие лучи на экране. Следовательно, линейная дисперсия связана с угловой дисперсией  $D$  соотношением

$$D_{\text{лин}} = f' D.$$

Приняв во внимание выражение (130.15), получим для линейной дисперсии дифракционной решетки (при небольших  $\varphi$ ) следующую формулу:

$$D_{\text{лин}} = f' \frac{m}{d}. \quad (130.17)$$

Разрешающей силой спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda}, \quad (130.18)$$

где  $\delta \lambda$  — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Возможность разрешения (т. е. раздельного восприятия) двух близких спектральных линий зависит не только от расстояния между ними (которое определяется дисперсией прибора), но также и от ширины спектрального максимума. На рис. 130.6 показана результирующая интенсивность (сплошные кривые), наблюдающаяся при наложении двух близких максимумов (пунктирные кривые). В случае *a* оба максимума воспринимаются как один. В случае *б* между максимумами лежит минимум. Два близких максимума воспринимаются глазом раздельно в том случае, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80% от интенсивности максимума. Согласно критерию, предложенному Рэлеем, такое соотношение интенсивностей имеет место в том случае, если середина одного максимума совпадает с краем другого (рис. 130.6, *б*). Такое взаимное расположение максимумов получается при определенном (для данного прибора) значении  $\delta\lambda$ .

Найдем разрешающую силу дифракционной решетки. Положение середины  $m$ -го максимума для длины волны  $\lambda + \delta\lambda$  определяется условием

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Края  $m$ -го максимума для длины волны  $\lambda$  расположены под углами, удовлетворяющими соотношению

$$d \cdot \sin \varphi_{\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right) \lambda.$$

Середина максимума для длины волны  $\lambda + \delta\lambda$  совпадает с краем максимума для длины волны  $\lambda$  в том случае, если

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda.$$

Отсюда

$$m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}.$$

Решив это соотношение относительно  $\lambda/\delta\lambda$ , получим выражение для разрешающей силы

$$R = mN. \quad (130.19)$$

Таким образом, разрешающая сила дифракционной решетки пропорциональна порядку спектра  $m$  и числу щелей  $N$ .

На рис. 130.7 сопоставлены дифракционные картины, получающиеся для двух спектральных линий с помощью решеток, отличающихся значениями дисперсии  $D$  и разрешающей силы  $R$ . Решетки *I* и *II* обладают одинаковой разрешающей силой (у них одинаковое число щелей  $N$ ), но различной дисперсией (у решетки *I* период  $d$  в два раза больше, соответственно дисперсия  $D$  в два раза меньше, чем у решетки *II*). Решетки *II* и *III* имеют одинаковую дисперсию (у них одинаковые  $d$ ), но разную разрешающую силу (у ре-

шетки II число щелей  $N$  и разрешающая сила  $R$  в два раза больше, чем у решетки III).

Дифракционные решетки бывают прозрачные и отражательные. Прозрачные решетки изготавливаются из стеклянных или кварцевых пластинок, на поверхность которых с помощью специальной машины наносится алмазным резцом ряд параллельных штрихов. Промежутки между штрихами служат щелями.

Отражательные решетки наносятся алмазным резцом на поверхность металлического зеркала. Свет падает на отражательную решетку наклонно. При этом решетка с периодом  $d$  действует так, как при нормальном падении света действовала бы прозрачная решетка с периодом  $d \cdot \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол падения. Это позволяет наблюдать спектр при отражении света, например, от грампластины, имеющей всего несколько штрихов (канавок) на 1 мм, если расположить ее так, чтобы угол падения был близок к  $\pi/2$ . Роуланд изобрел вогнутую отражательную решетку, которая сама (без линзы) фокусирует дифракционные спектры.

Лучшие решетки имеют до 1200 штрихов на 1 мм ( $d \approx 0,8$  мкм). Из формулы (130.9) следует, что спектры второго порядка в видимом свете при таком периоде не наблюдаются. Общее число штрихов у подобных решеток достигает 200 тысяч (длина около 200 мм). При фокусном расстоянии прибора  $f' = 2$  м длина видимого спектра 1-го порядка составляет в этом случае более 700 мм.

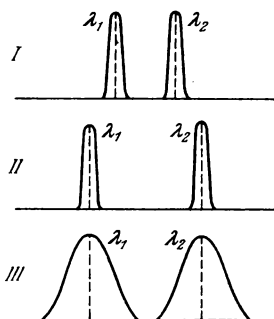


Рис. 130.7.

### § 131. Дифракция рентгеновских лучей

Поставим две дифракционные решетки одну за другой так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными. Первая решетка (штрихи которой, скажем, вертикальны) даст в горизонтальном направлении ряд максимумов, положения которых определяются условием

$$d_1 \cdot \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.1)$$

Вторая решетка (с горизонтальными штрихами) разобьет каждый из образовавшихся таким образом пучков на расположенные по вертикали максимумы, положения которых определяются условием

$$d_2 \cdot \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.2)$$

В итоге дифракционная картина будет иметь вид правильно расположенных пятен, каждому из которых соответствуют два целочисленных индекса  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 131.1).

Такая же дифракционная картина получается, если вместо двух отдельных решеток взять одну прозрачную пластинку с нанесенными на нее двумя системами взаимно перпендикулярных штрихов. Подобная пластинка представляет собой двумерную периодическую структуру (обычная решетка — одномерную структуру). Измерив углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , определяющие положения максимумов, и зная длину волны  $\lambda$ , можно найти по формулам (131.1) и (131.2) периоды структуры  $d_1$  и  $d_2$ . Если направления, в которых структура периодична (например, направления, перпендикулярные к штрихам решеток), образуют угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$ , дифракционные максимумы расположатся не в вершинах прямоугольников (как на рис. 131.1), а в вершинах параллелограммов. В этом случае по дифракционной картине можно определить не только периоды  $d_1$  и  $d_2$ , но и угол  $\alpha$ .

Дифракционную картину, аналогичную изображенной на рис. 131.1, дают любые двумерные периодические структуры, например система небольших отверстий или система непрозрачных маленьких шариков.

Для возникновения дифракционных максимумов необходимо, чтобы период структуры  $d$  был больше  $\lambda$ . В противном случае условия (131.1) и (131.2) могут быть удовлетворены только при значениях  $m_1$  и  $m_2$ , равных нулю (модуль  $\sin \varphi$  не может превышать единицу).

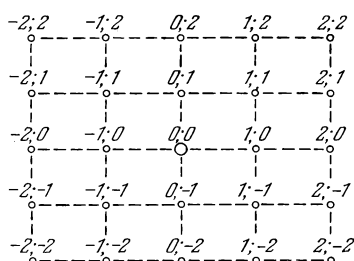


Рис. 131.1.

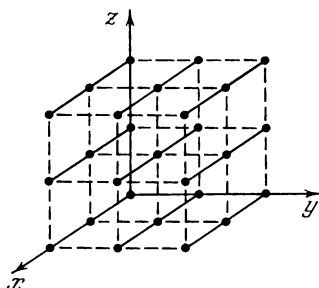


Рис. 131.2.

Дифракция наблюдается также на трехмерных структурах, т. е. пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. Подобными структурами являются все кристаллические тела. Однако их период ( $\sim 10^{-10}$  м) слишком мал для того, чтобы можно было наблюдать дифракцию в видимом свете. В случае кристаллов условие  $d > \lambda$  выполняется только для рентгеновских лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте Лауэ, Фридриха и Книппинга (Лауэ принадлежит идея, остальным авторам — практическое осуществление опыта).

Найдем условия образования дифракционных максимумов от трехмерной структуры. Проведем в направлениях, по которым свойства структуры обнаруживают периодичность, координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 131.2). Структуру можно представить как совокупность равноотстоящих параллельных линейных цепочек из структурных элементов, расположенных вдоль одной из координатных осей. Рассмотрим действие отдельной линейной цепочки, параллельной, например, оси  $x$  (рис. 131.3). Пусть на нее падает пучок параллельных лучей, образующих с осью  $x$  угол  $\alpha_0$ . Каждый структурный элемент является источником вторичных волн. К соседним источникам падающая волна приходит с разностью фаз  $\delta_0 = 2\pi\Delta_0/\lambda$ , где  $\Delta_0 = d_1 \cos \alpha_0$  ( $d_1$  — период структуры вдоль оси  $x$ ). Кроме того, между вторичными волнами, распространяющимися в направлениях, образующих с осью  $x$  угол  $\alpha$

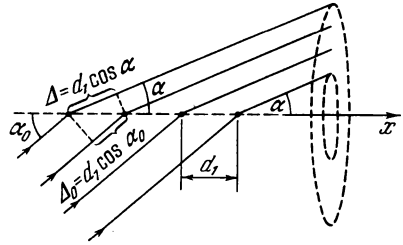


Рис. 131.3.

(все такие направления лежат вдоль образующих конуса, осью которого служит ось  $x$ ), возникает дополнительная разность хода  $\Delta = d_1 \cos \alpha$ . Колебания от различных структурных элементов будут взаимно усиливаться для тех направлений, для которых

$$d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.3)$$

Каждому значению  $m_1$  соответствует свой конус направлений, вдоль которых получают максимумы интенсивности от одной отдельно взятой цепочки, параллельной оси  $x$ . Ось этого конуса совпадает с осью  $x$ .

Условие максимума для цепочки, параллельной оси  $y$ , имеет вид

$$d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots), \quad (131.4)$$

где  $d_2$  — период структуры в направлении оси  $y$ ,  $\beta_0$  — угол между падающим пучком и осью  $y$ ,  $\beta$  — угол, образуемый с осью  $y$  направлениями, вдоль которых получают дифракционные максимумы. Каждому значению  $m_2$  соответствует конус направлений, ось которого совпадает с осью  $y$ .

В направлениях, удовлетворяющих одновременно условиям (131.3) и (131.4), происходит взаимное усиление колебаний от источников, лежащих в одной и той же плоскости, перпендикулярной к оси  $z$  (эти источники образуют двумерную структуру). Направления возникающих максимумов интенсивности лежат вдоль линий пересечения конусов направлений, один из которых определяется условием (131.3), второй — условием (131.4).



Наконец, для цепочки, параллельной оси  $z$ , направления максимумов определяются условием

$$d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = \pm m_3 \lambda \quad (m_3 = 0, 1, 2, \dots), \quad (131.5)$$

где  $d_3$  — период структуры в направлении оси  $z$ ,  $\gamma_0$  — угол между падающим пучком и осью  $z$ ,  $\gamma$  — угол образуемый с осью  $z$  направлениями, вдоль которых получают дифракционные максимумы. Как и в предыдущих случаях, каждому значению  $m_3$  соответствует конус направлений, осью которого является ось  $z$ .

В направлениях, удовлетворяющих одновременно условиям (131.3), (131.4) и (131.5), происходит взаимное усиление колебаний от всех элементов, образующих пространственную структуру. В результате возникают дифракционные максимумы от пространственной структуры. Направления этих максимумов лежат на линиях пересечения трех конусов, оси которых параллельны координатным осям.

Найденные нами условия

$$\begin{aligned} d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= \pm m_1 \lambda, \\ d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) &= \pm m_2 \lambda, \quad (m_i = 0, 1, 2, \dots) \\ d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= \pm m_3 \lambda \end{aligned} \quad (131.6)$$

носят название *формул Лауэ*. Каждому определяемому этими формулами направлению  $(\alpha, \beta, \gamma)$  соответствуют три целочисленных индекса  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . Наибольшее значение модуля разности косинусов равно 2. Поэтому условия (131.6) могут быть выполнены при отличных от нуля значениях индексов  $m$  лишь в том случае, если  $\lambda$  не превышает  $2d$ .

Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  не являются независимыми. Например, в случае прямоугольной системы координат они связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (131.7)$$

Таким образом, при заданных  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  и  $\lambda$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , определяющие направления максимумов, могут быть найдены путем решения системы из четырех уравнений. Если число уравнений превышает число неизвестных, система уравнений оказывается разрешимой только при выполнении определенных условий (только при соблюдении этих условий три конуса могут пересечься друг с другом по одной линии).

Система уравнений (131.6) и (131.7) оказывается разрешимой лишь для некоторых, вполне определенных длин волн ( $\lambda$  можно рассматривать как четвертое неизвестное, значения которого, получающиеся из решения системы, и дают те длины волн, для которых наблюдаются максимумы). Каждому такому значению  $\lambda$  соответствует, вообще говоря, только один максимум. Однако может получиться и несколько симметрично расположенных максимумов.

Если длина волны является фиксированной (мономатическое излучение), систему уравнений можно сделать совместной, варьируя значения  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  и  $\gamma_0$ , т. е. поворачивая пространственную структуру относительно направления падающего пучка.

Мы не касались вопроса о том, каким образом лучи, идущие от различных структурных элементов, сводятся в одну точку экрана. В случае видимого света это достигается с помощью линзы. Для рентгеновских лучей осуществить линзу нельзя, так как показатель преломления этих лучей во всех веществах практически равен единице. Поэтому интерференция вторичных волн достигается путем использования весьма узких пучков лучей, которые и без линзы дают на экране (или фотопластинке) пятна очень малых размеров.

Русский ученый Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно осуществить следующим простым способом. Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости (рис. 131.4), которые мы будем называть атомными слоями. Если падающая на кристалл волна плоская, огибающая вторичных волн, порождаемых атомами, лежащими в таком слое, также будет представлять собой плоскость. Таким образом, суммарное действие атомов, лежащих в одном слое, можно представить в виде плоской волны, отразившейся от усеянной атомами поверхности по обычному закону отражения.

Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных слоев, когерентны и будут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решетки. При этом, как и в случае решетки, вторичные волны будут практически погашать друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной  $\lambda$ . Из рис. 131.4 видно, что разность хода двух волн, отразившихся от соседних атомных слоев, равна  $2d \sin \vartheta$ , где  $d$  — период идентичности кристалла в направлении, перпендикулярном к рассматриваемым слоям,  $\vartheta$  — угол, дополнительный к углу падения и называемый углом скольжения падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием

$$2d \sin \vartheta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (131.8)$$

Это соотношение называется **формулой Брэгга — Вульфа**.

Атомные слои в кристалле можно провести множеством способов (рис. 131.5). Каждая система слоев может дать дифракционный максимум, если для нее окажется выполненным условие (131.8). Однако заметную интенсивность имеют лишь те максимумы, кото-

рые получаются за счет отражений от слоев, достаточно густо усеянных атомами (например, от слоев *I* и *II* на рис. 131.5).

Заметим, что расчет по формуле Брэгга — Вульфа и расчет по формулам Лауэ (см. (131.6)) приводят к совпадающим результатам.

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов находит два основных применения. Она используется для исследования спек-

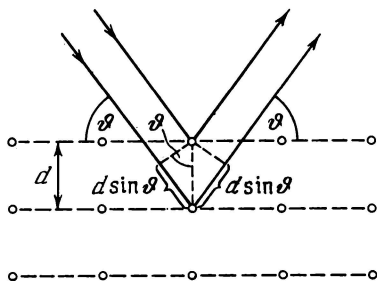


Рис. 131.4.

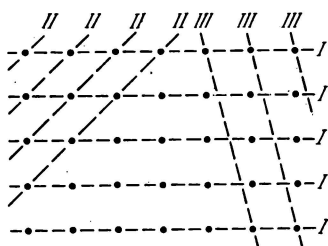


Рис. 131.5.

трального состава рентгеновского излучения (рентгеновская спектроскопия) и для изучения структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

Определяя направления максимумов, получающихся при дифракции исследуемого рентгеновского излучения от кристаллов с известной структурой, можно вычислить длины волн. Первоначально для определения длин волн были использованы кристаллы кубической системы, причем межплоскостные расстояния определялись из плотности и относительной молекулярной массы кристалла.

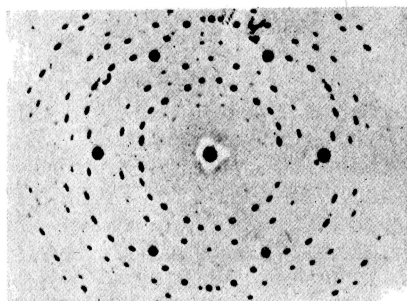


Рис. 131.6.

В методе структурного анализа, предложенном Лауэ, пучок рентгеновского излучения направляется на неподвижный монокристалл. Для каждой системы слоев, достаточно густо усеянных атомами, находится в излучении длина волны, при ко-

торой выполняется условие (131.8). Поэтому на помещенной за кристаллом фотопластинке получается (после проявления) совокупность черных пятнышек. Взаимное расположение пятнышек отражает симметрию кристалла. По расстояниям между пятнышками и по их интенсивности удастся найти размещение атомов в кристал-

ле и расстояния между ними. На рис. 131.6 приведена лауэграмма берилла (минерала из группы силикатов).

В методе структурного анализа, разработанном Дебаем и Шерером, используются монохроматическое рентгеновское излучение и поликристаллические образцы. Исследуемое вещество измельчается в порошок, из которого прессуется образец в виде проволоочки. Образец устанавливается по оси цилиндрической камеры, на боковую поверхность которой укладывается фотопленка (рис. 131.7). В огромном количестве беспорядочно ориентированных кристалли-

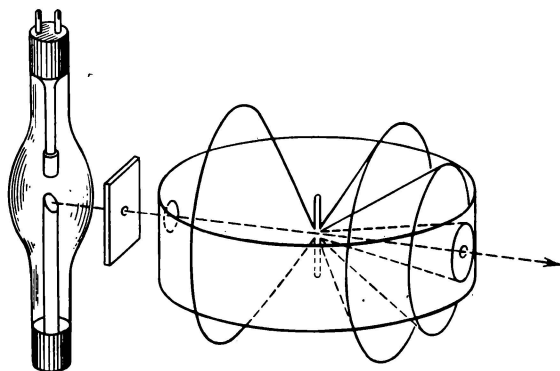


Рис. 131.7.

ков найдется множество таких, для которых окажется выполненным условие (131.8), причем дифрагированный луч будет для разных кристалликов лежать во всевозможных плоскостях. В результате для каждой системы атомных слоев и каждого  $m$  получится не одно направление максимума, а конус направлений, ось которого



Рис. 131.8.

совпадает с направлением падающего пучка (см. рис. 131.7). Получающаяся на пленке картина (дебаеграмма) имеет вид, показанный на рис. 131.8. Каждая пара симметрично расположенных линий соответствует одному из дифракционных максимумов, удовлетворяющих условию (131.8) при некотором значении  $m$ . Расшифровка рентгенограммы позволяет определить структуру кристалла.

### § 132. Разрешающая сила объектива

Пусть на непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса  $b$  падает плоская световая волна. Открываемое отверстием число зон Френеля для точки  $P$ , лежащей против центра отверстия на расстоянии  $l$  от него, можно найти по формуле (128.2), положив в ней  $a = \infty$ ,  $r_0 = b$  и  $b = l$ . В итоге получим

$$m = \frac{b^2}{l\lambda} \quad (132.1)$$

(ср. с (129.17)).

Так же, как и в случае щели, в зависимости от значения параметра (132.1) имеет место либо приближение геометрической оптики, либо дифракция Френеля, либо, наконец, дифракция Фраунгофера (см. (129.16)).

Дифракционную картину Фраунгофера от круглого отверстия можно наблюдать на экране, помещенном в фокальной плоскости линзы, поставленной за отверстием, направив на отверстие плоскую световую волну. Эта картина имеет вид центрального светлого

пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами (рис. 132.1). Соответствующий расчет дает, что первый минимум отстоит от центра дифракционной картины на угловое расстояние

$$\varphi_{\min} = \arcsin 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (132.2)$$

где  $D$  — диаметр отверстия (ср. с (129.8)). Если  $D \gg \lambda$ , можно считать, что

$$\varphi_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (132.3)$$

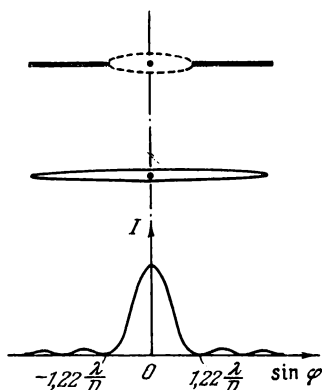


Рис. 132.1.

Подавляющая часть (около 84%) светового потока, проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого пятна. Интенсивность первого светлого кольца составляет всего 1,74%, а второго — 0,41% от интенсивности центрального пятна. Интенсивность остальных светлых колец еще меньше. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного лишь светлого пятна с угловым радиусом, определяемым формулой (132.2). Это пятно является по существу изображением бесконечно удаленного точечного источника света (на отверстие падает плоская световая волна).

Дифракционная картина не зависит от расстояния между отверстием и линзой. В частности, она будет такой же и в случае, ког-

да края отверстия совмещены с краями линзы. Отсюда вытекает, что самая совершенная линза не может дать идеального оптического изображения. Вследствие волновой природы света изображение точки, даваемое линзой, имеет вид пятнышка, представляющего собой центральный максимум дифракционной картины. Угловой размер этого пятнышка уменьшается с ростом диаметра оправы линзы  $D$ .

При очень малом угловом расстоянии между двумя точками их изображения, получающиеся с помощью какого-либо оптического прибора, наложатся друг на друга и дадут одно светящееся пятно. Следовательно, две очень близкие точки не будут восприниматься прибором раздельно, или, как говорят, не будут разрешаться прибором. Поэтому, как бы ни было велико по размерам изображение, на нем не будут видны соответствующие детали.

Обозначим через  $\delta\psi$  наименьшее угловое расстояние между двумя точками, при котором они еще разрешаются оптическим прибором. Величина, обратная  $\delta\psi$ , называется разрешающей силой прибора:

$$R = \frac{1}{\delta\psi}. \quad (132.4)$$

Найдем разрешающую силу объектива зрительной трубы или фотоаппарата для случая, когда рассматриваются или фотографируются очень удаленные предметы.

При этом условии лучи, идущие в объектив от каждой точки предмета, можно считать параллельными и пользоваться формулой (132.2). Согласно критерию Рэля две близкие точки будут еще разрешены, если середина центрального дифракционного максимума для одной точки совпадает с краем центрального максимума (т. е. с первым минимумом) для второй точки. Из рис. 132.2 видно, что это произойдет, если угловое расстояние между точками  $\delta\psi$  окажется равным угловому радиусу (132.2). Диаметр оправы объектива  $D$  много больше длины волны  $\lambda$ . Поэтому можно считать, что

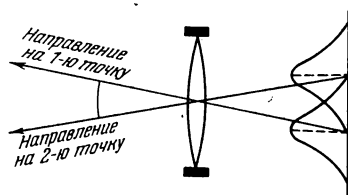


Рис. 132.2.

$$\delta\psi = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда

$$R = \frac{D}{1,22\lambda}. \quad (132.5)$$

Из этой формулы следует, что разрешающая сила объектива тем больше, чем больше его диаметр.

Диаметр зрачка глаза при нормальном освещении равен приблизительно 2 мм. Подставив это значение в формулу (132.5) и взяв  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$  мм, получим

$$\delta\psi = 1,22 \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,305 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 1'.$$

Таким образом, минимальное угловое расстояние между точками, при котором глаз воспринимает их еще отдельно, равно одной угловой минуте. Любопытно, что расстояние между соседними светочувствительными элементами сетчатки глаза соответствует этому угловому расстоянию.

### § 133. Голография

Голография (т. е. «полная запись», от греческого: голос — весь, графо — пишу) есть особый способ фиксирования на фотопластинке структуры световой волны, отраженной предметом. При освещении этой пластинки (голограммы) пучком света зафиксированная на ней волна восстанавливается в почти первоначальном виде, так что при восприятии восстановленной волны глазом зрительное ощущение бывает практически таким, каким оно было бы при наблюдении самого предмета.

Голография была изобретена в 1947 г. английским физиком Д. Габором. Однако полное осуществление идеи Габора стало возможным только после появления в 1960 г. источников света высокой степени когерентности — лазеров. Исходная схема Габора была усовершенствована американскими физиками Э. Лейтом и Ю. Упатниексом, которые получили в 1963 г. первые лазерные голограммы. Советский ученый Ю. Н. Денисюк предложил в 1962 г. оригинальный метод фиксирования голограмм на толсто-слойной эмульсии. Этот метод, в отличие от голограмм на тонко-слойной эмульсии, дает цветное изображение предмета.

Мы ограничимся элементарным рассмотрением метода получения голограмм на тонкослойной эмульсии. На рис. 133.1,а дана схема установки для получения голограмм, а на рис. 133.1,б — схема восстановления изображения. Испускаемый лазером световой пучок, расширенный с помощью системы линз, делится на две части. Одна часть отражается зеркалом к фотопластинке, образуя так называемый опорный пучок 1. Вторая часть попадает на пластинку, отразившись от фотографируемого предмета; она образует предметный пучок 2. Оба пучка должны быть когерентными. Это требование выполняется, поскольку лазерное излучение обладает высокой степенью пространственной когерентности (световые колебания когерентны по всему поперечному сечению лазерного пучка). Опорный и предметный пучки, налагаясь друг на друга, образуют интерференционную картину, которая фиксируется фотопластин-

кой. Экспонированная таким способом и проявленная фотопластинка и есть **г о л о г р а м м а**. В образовании голограммы участвуют два пучка света, в связи с чем описанная схема получения голограмм называется двухлучевой.

Для восстановления изображения проявленную фотопластинку располагают относительно источника света так, как она находилась при фотографировании, и освещают опорным пучком света (часть лазерного пучка, которая освещала при фотографировании предмет, теперь перекрывается). Опорный пучок дифрагирует на голограмме, в результате чего возникает волна, имеющая точно такую структуру, как волна, отражавшаяся предметом. Эта волна дает мнимое изображение предмета, которое воспринимается глазом наблюдателя. Наряду с волной, образующей мнимое изображение, возникает еще одна волна, которая дает действительное изображение предмета. Действительное изображение псевдоскопично; это означает, что оно имеет рельеф, обратный рельефу предмета,—выпуклые места заменены вогнутыми и наоборот.

Рассмотрим характер голограммы и процесс восстановления изображения. Пусть на фотопластинку падают два когерентных параллельных пучка световых лучей, идущих под углом  $\psi$  друг к другу (рис. 133.2). Пучок 1 является опорным, пучок 2 — предметным (предмет в данном случае представляет собой бесконечно удаленную точку). Для простоты предположим, что пучок 1 падает на пластинку нормально. Все полученные ниже результаты остаются справедливыми и при наклонном падении опорного пучка, однако формулы в этом случае более громоздки.

Вследствие интерференции опорного и предметного пучков на пластинке образуется система чередующихся прямолинейных максимумов и минимумов интенсивности. Пусть точки *A* и *B* соответствуют серединам соседних интерференционных максимумов. Тогда

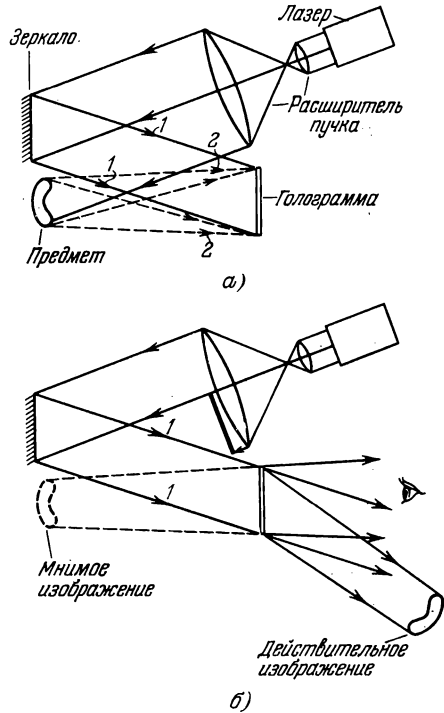


Рис. 133.1.



разность хода  $\Delta'$  равна  $\lambda$ . Из рис. 133.2 видно, что  $\Delta' = d \sin \psi$ ; следовательно,

$$d \sin \psi = \lambda. \quad (133.1)$$

Зафиксировав на пластинке (путем экспонирования и проявления) интерференционную картину, направим на нее опорный пучок  $1$ . Пластика для этого пучка играет роль дифракционной решетки, период  $d$  которой определяется формулой (133.1). Отличительной особенностью этой решетки является то обстоятельство, что ее пропускательная способность изменяется в направлении, перпендикулярном к «штрихам», по косинусоидальному закону (у рассматривавшихся в § 130 решеток она изменялась скачком: про-

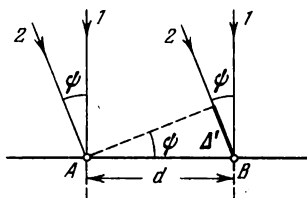


Рис. 133.2.

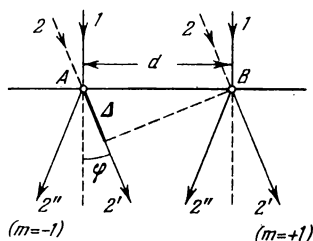


Рис. 133.3.

свет — темно — просвет — темно и т. д.). Эта особенность приводит к тому, что интенсивность всех дифракционных максимумов порядка выше 1-го практически равна нулю.

При освещении пластинки опорным пучком (рис. 133.3) возникает дифракционная картина, максимумы которой образуют с нормалью к пластинке углы  $\varphi$ , определяемые условием

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1) \quad (133.2)$$

(ср. с формулой (130.5)). Максимум, отвечающий  $m = 0$ , лежит на продолжении опорного пучка. Максимум, отвечающий  $m = +1$ , имеет такое же направление, какое имел при экспонировании предметный пучок 2 (ср. формулы (133.1) и (133.2)). Кроме того, возникает максимум, отвечающий  $m = -1$ .

Можно показать, что полученный нами результат справедлив и в том случае, когда предметный пучок 2 является не параллельным, а расходящимся. При этом максимум, отвечающий  $m = +1$ , имеет характер расходящегося пучка лучей  $2''$  (он дает мнимое изображение точки, из которой выходили лучи 2 при экспонировании); максимум же, отвечающий  $m = -1$ , имеет характер сходящегося пучка лучей  $2''$  (он образует действительное изображение точки, из которой выходили лучи 2 при экспонировании).

При получении голограммы пластинка освещается опорным пучком 1 и множеством расходящихся пучков 2, отраженных разными точками предмета. На пластинке возникает сложная интерференционная картина, образуемая в результате наложения картин, даваемых каждым из пучков 2 в отдельности. При освещении голограммы опорным пучком 1 оказываются восстановленными все пучки 2, т. е. полная световая волна, отражавшаяся предметом (ей отвечает  $m = +1$ ). Кроме нее, возникают еще две волны (отвечающие  $m = 0$  и  $m = -1$ ). Но эти волны распространяются в других направлениях и не мешают восприятию волны, дающей мнимое изображение предмета (см. рис. 133.1).

Изображение предмета, даваемое голограммой, является объемным. На него можно смотреть из разных положений. Если при съемке близкие предметы закрывали более удаленные, то сместившись в сторону, можно заглянуть за ближайший предмет (вернее, за его изображение) и увидеть скрытые до того предметы. Это объясняется тем, что, сместившись в сторону, мы воспринимаем изображение, восстановленное от периферической части голограммы, на которую при экспонировании падали также и лучи, отраженные от скрытых предметов. Рассматривая изображения ближних и дальних предметов, приходится, как и при рассматривании самих предметов, по-разному аккомодировать глаз.

Если голограмму расколоть на несколько кусков, то каждый из них при просвечивании дает такую же картину, что и исходная голограмма. Однако чем меньшая часть голограммы используется для восстановления изображения, тем меньше его четкость. Это легко понять, приняв во внимание, что при уменьшении числа штрихов дифракционной решетки ее разрешающая сила уменьшается (см. формулу (130.19)).

Возможные применения голографии весьма разнообразны. Далеко не полный их перечень образуют голографические кино и телевидение, голографический микроскоп, контроль качества обработки изделий. В литературе можно встретить утверждение, что изобретение голографии можно сравнить по его последствиям с созданием радиосвязи.

## ГЛАВА XIX

### ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

#### § 134. Естественный и поляризованный свет

Напомним, что поляризованным называется свет, в котором направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо образом (см. § 110). В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль осей  $x$  и  $y$  и отличающихся по фазе на  $\delta$ :

$$E_x = A_1 \cos \omega t, \quad E_y = A_2 \cos (\omega t + \delta). \quad (134.1)$$

Результирующая напряженность  $\mathbf{E}$  является векторной суммой напряженностей  $\mathbf{E}_x$  и  $\mathbf{E}_y$  (рис. 134.1). Угол  $\varphi$  между направлениями векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_x$  определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos (\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}. \quad (134.2)$$

Если разность фаз  $\delta$  претерпевает случайные хаотические изменения, то и угол  $\varphi$ , т. е. направление светового вектора  $\mathbf{E}$ , будет испытывать скачкообразные неупорядоченные изменения. В соответствии с этим естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность. Такое представление намного упрощает рассмотрение прохождения естественного света через поляризационные устройства.

Допустим, что световые волны  $E_x$  и  $E_y$  когерентны, причем  $\delta$  равно нулю или  $\pi$ . Тогда согласно (134.2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = \text{const.}$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении — волна оказывается плоскополяризованной.

В случае, когда  $A_1 = A_2$  и  $\delta = \pm \pi/2$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \operatorname{tg} \omega t$$

( $\cos(\omega t \pm \pi/2) = \mp \sin \omega t$ ). Отсюда вытекает, что плоскость колебаний поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания  $\omega$ . Свет в этом случае будет поляризованным по кругу.

Чтобы выяснить характер результирующего колебания в случае произвольного постоянного значения  $\delta$ , примем во внимание, что величины (134.1) представляют собой координаты конца результирующего вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 134.2). Из учения о колебаниях (см. § 57

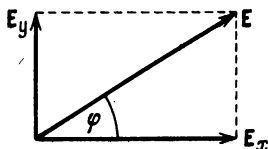


Рис. 134.1.

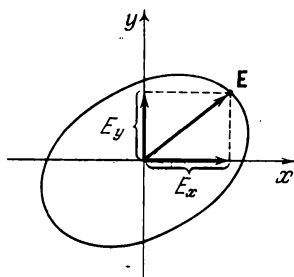


Рис. 134.2.

1-го тома) известно, что два взаимно перпендикулярных гармонических колебания одинаковой частоты при сложении дают в общем случае движение по эллипсу (в частности, может получиться движение по прямой или по окружности). Аналогично, точка с координатами, определяемыми выражениями (134.1), т. е. конец вектора  $\mathbf{E}$ , движется по эллипсу. Следовательно, две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны, при наложении друг на друга дают эллиптически поляризованную световую волну. При разности фаз  $\delta$ , равной нулю или  $\pi$ , эллипс вырождается в прямую и получается плоскополяризованный свет. При  $\delta = \pm \pi/2$  и равенстве амплитуд складываемых волн эллипс превращается в окружность — получается свет, поляризованный по кругу.

В зависимости от направления вращения вектора  $\mathbf{E}$  различают правую и левую эллиптическую и круговую поляризацию. Если по отношению к направлению, противоположному направлению луча, вектор  $\mathbf{E}$  вращается по часовой стрелке, поляризация называется правой, в противном случае — левой.

Плоскость, в которой колеблется световой вектор в плоскополяризованной волне, мы будем называть плоскостью колебаний. По историческим причинам плоскостью поля-

ризации была названа не плоскость, в которой колеблется вектор  $E$ , а перпендикулярная к ней плоскость.

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых поляризаторами. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, которую мы будем называть плоскостью поляризатора, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные к его плоскости. Поляризатор, задерживающий перпендикулярные к его плоскости колебания только частично, мы будем называть несовершенным. Просто поляризатором мы будем для краткости называть идеальный поляризатор, полностью задерживающий колебания, перпендикулярные к его плоскости, и не ослабляющий колебаний, параллельных плоскости.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется частично поляризованным. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного. Частично поляризованный свет, как и естественный, можно представить в виде наложения двух некогерентных плоскополяризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний. Отличие заключается в том, что в случае естественного света интенсивность этих волн одинакова, а в случае частично поляризованного — разная.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от  $I_{\max}$  до  $I_{\min}$ , причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный  $\pi/2$  (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности). Выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (134.3)$$

называется степенью поляризации. Для плоскополяризованного света  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ ; для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ . К эллиптически поляризованному свету понятие степени поляризации не применимо (у такого света колебания полностью упорядочены).

Колебание амплитуды  $A$ , совершающееся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол  $\varphi$ , можно разложить на два колебания с амплитудами  $A_{\parallel} = A \cos \varphi$  и  $A_{\perp} = A \sin \varphi$  (рис. 134.3; луч перпендикулярен к плоскости рисунка). Первое колебание пройдет через прибор, второе будет задержано. Интенсивность прошедшей волны пропорциональна  $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$ , т. е. равна  $I \cos^2 \varphi$ , где  $I$  — интенсивность колебания с амплитудой  $A$ . Следовательно, колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет

с собой долю интенсивности, равную  $\cos^2 \varphi$ . В естественном свете все значения  $\varphi$  равновероятны. Поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, будет равна среднему значению  $\cos^2 \varphi$ , т. е.  $1/2$ . При вращении поляризатора вокруг направления естественного луча интенсивность прошедшего света остается одной и той же, изменяется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из прибора.

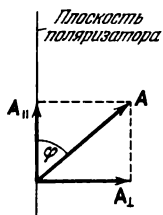


Рис. 134.3.

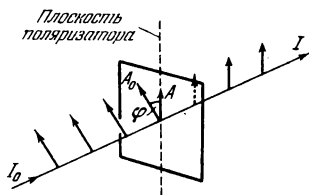


Рис. 134.4.

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитуды  $A_0$  и интенсивности  $I_0$  (рис. 134.4). Сквозь прибор пройдет составляющая колебания с амплитудой  $A = A_0 \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора. Следовательно, интенсивность прошедшего света  $I$  определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (134.4)$$

Соотношение (134.4) носит название **з а к о н а М а л ю с а**.

Поставим на пути естественного луча два поляризатора, плоскости которых образуют угол  $\varphi$ . Из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого  $I_0$  составит половину интенсивности естественного света  $I_{\text{ест}}$ . Согласно закону Малюса из второго поляризатора выйдет свет интенсивности  $I_0 \cos^2 \varphi$ . Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \varphi. \quad (134.5)$$

Максимальная интенсивность, равная  $1/2 I_{\text{ест}}$ , получается при  $\varphi = 0$  (поляризаторы параллельны). При  $\varphi = \pi/2$  интенсивность равна нулю — скрещенные поляризаторы света не пропускают.

Пусть эллиптически поляризованный свет падает на поляризатор. Прибор пропускает составляющую  $E_{||}$  вектора  $E$  по направлению плоскости поляризатора (рис. 134.5). Максимальное значение этой составляющей достигается в точках 1 и 2. Следовательно, амплитуда вышедшего из прибора плоскополяризованного света

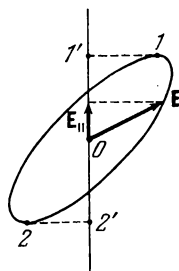


Рис. 134.5.

равна длине отрезка  $OI'$ . Вращая поляризатор вокруг направления луча, мы будем наблюдать изменения интенсивности в пределах от  $I_{\max}$  (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с большой полуосью эллипса) до  $I_{\min}$  (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с малой полуосью эллипса). Такой же характер изменения интенсивности света при вращении поляризатора получается в случае частично поляризованного света. В случае света, поляризованного по кругу, вращение поляризатора не сопровождается (как и в случае естественного света) изменением интенсивности света, прошедшего через прибор.

### § 135. Поляризация при отражении и преломлении

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) отличен от нуля, отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными<sup>1</sup>. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 135.1 эти колебания обозначены точками), в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (на рисунке они изображены двусторонними стрелками). Степень поляризации зависит от угла падения.

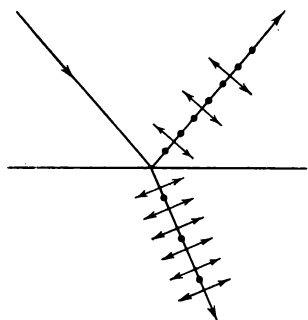


Рис. 135.1.

Обозначим через  $\theta_{\text{Бр}}$  угол, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_{12} \quad (135.1)$$

( $n_{12}$  — показатель преломления второй среды относительно первой). При угле падения  $\theta_1$ , равном  $\theta_{\text{Бр}}$ , отраженный луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные к

плоскости падения). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном  $\theta_{\text{Бр}}$ , достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично.

Соотношение (135.1) носит название закона Брюстера, а угол  $\theta_{\text{Бр}}$  называют углом Брюстера. Легко убедиться в том, что при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

Степень поляризации отраженного и преломленного лучей при различных углах падения можно получить с помощью формул Френеля. Эти формулы вытекают из условий, налагаемых на

<sup>1</sup> При отражении от проводящей поверхности (например, от поверхности металла) получается эллиптически поляризованный свет.

электромагнитное поле на границе двух диэлектриков<sup>1</sup>. К числу таких условий принадлежит равенство тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также равенство нормальных составляющих векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  по обе стороны границы раздела (с одной стороны нужно брать сумму соответствующих векторов для падающей и отраженной волн, с другой — вектор для преломленной волны).

Формулы Френеля устанавливают соотношения между комплексными амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн. Напомним, что комплексной амплитудой  $\hat{A}$  называется выражение  $Ae^{i\alpha}$ , где  $A$  — обычная амплитуда, а  $\alpha$  — начальная фаза колебания. Следовательно, равенство двух комплексных амплитуд означает равенство как обычных амплитуд, так и начальных фаз обоих колебаний:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2. \quad (135.2)$$

В случае, когда комплексные амплитуды отличаются знаком, обычные амплитуды одинаковы, а начальные фазы отличаются на  $\pi$  ( $e^{i\pi} = -1$ ):

$$\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \pi. \quad (135.3)$$

Представим падающую волну в виде наложения двух некогерентных волн, в одной из которых колебания совершаются в плоскости падения, а в другой перпендикулярно к этой плоскости. Комплексную амплитуду первой волны обозначим через  $\hat{A}_{\parallel}$ , второй — через  $\hat{A}_{\perp}$ . Аналогично поступим с отраженной и преломленной волнами, причем амплитуды отраженных волн будем обозначать теми же символами с добавлением одного штриха, амплитуды преломленных волн — теми же символами с добавлением двух штрихов. Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\parallel} \text{ и } \hat{A}_{\perp} & \text{ — амплитуды падающих волн,} \\ \hat{A}'_{\parallel} \text{ и } \hat{A}'_{\perp} & \text{ — амплитуды отраженных волн,} \\ \hat{A}''_{\parallel} \text{ и } \hat{A}''_{\perp} & \text{ — амплитуды преломленных волн.} \end{aligned}$$

Формулы Френеля имеют следующий вид<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp} \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \hat{A}''_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \\ \hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp} \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (135.4)$$

<sup>1</sup> Френель получил эти формулы на основе представлений о свете как об упругих волнах, распространяющихся в эфире.

<sup>2</sup> Обычно формулы Френеля пишут без «шляпок» над амплитудами. Однако, чтобы подчеркнуть, что речь идет о комплексных амплитудах, мы сочли полезным написать амплитуды со «шляпками».



( $\vartheta_1$  — угол падения,  $\vartheta_2$  — угол преломления световой волны). Подчеркнем, что формулы (135.4) устанавливают соотношения между комплексными амплитудами на границе раздела диэлектриков, т. е. в точке падения луча на эту границу.

Из третьей и четвертой формул (135.4) следует, что знаки комплексных амплитуд падающей и преломленной волн при любых значениях углов  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  одинаковы ( $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  в сумме не могут превзойти  $\pi$ ). Это означает, что при проникновении во вторую среду фаза волны не претерпевает скачка.

При рассмотрении фазовых соотношений между падающей и отраженной волнами следует учесть, что для волны, поляризованной перпендикулярно к плоскости падения, отсутствию скачка фазы при отражении соответствует совпадение знаков  $\hat{A}_\perp$  и  $\hat{A}'_\perp$  (рис. 135.2, а). Для волны же, поляризованной в плоскости падения, скачок фазы отсутствует в том случае, когда знаки  $\hat{A}_\parallel$  и  $\hat{A}'_\parallel$  противоположны (рис. 135.2, б).

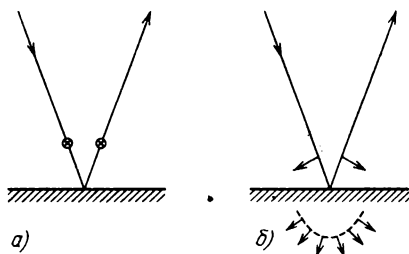


Рис. 135.2.

Фазовые соотношения между отраженной и падающей волнами зависят от соотношения между показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  первой и второй сред, а также от соотношения между углом падения  $\vartheta_1$  и углом Брюстера  $\vartheta_{\text{Бр}}$  (напомним, что при  $\vartheta_1 = \vartheta_{\text{Бр}}$  сумма углов  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  равна  $\pi/2$ ). В табл. 135.1 приведены результаты, вытекающие из первой и второй формул (135.4) в четырех возможных случаях. Из таблицы следует, что в случае падения под углом, меньшим угла Брюстера, отражение от оптически более плотной среды сопровождается скачком фазы на  $\pi$ ; отражение от оптически менее плотной среды происходит без изменения фазы. Этот результат для  $\vartheta_1 = 0$  был получен в § 112. В случае, когда  $\vartheta_1 > \vartheta_{\text{Бр}}$ , фазовые соотношения для обеих компонент волны оказываются различными.

Из первой формулы (135.4) получается, что при  $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$ , т. е. при  $\vartheta_1 = \vartheta_{\text{Бр}}$ , амплитуда  $\hat{A}'_\parallel$  обращается в нуль. Следовательно, в отраженной волне присутствуют лишь колебания, перпендикулярные к плоскости падения, — отраженная волна полностью поляризована. Таким образом, закон Брюстера непосредственно вытекает из формул Френеля.

При малых углах падения синусы и тангенсы в формулах (135.4) можно заменить самими углами, а косинусы положить равными единице. Кроме того, в этом случае можно считать, что  $\vartheta_1 = n_{12}\vartheta_2$  (это вытекает из закона преломления после замены синусов углами). В результате формулы Френеля для малых углов падения принимают

Т а б л и ц а 135.1

	$\vartheta_1 < \vartheta_{\text{Бр}}$ ( $\vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi/2$ )	$\vartheta_1 > \vartheta_{\text{Бр}}$ ( $\vartheta_1 + \vartheta_2 > \pi/2$ )
$n_2 > n_1$ $\vartheta_1 > \vartheta_2$	Знаки $\hat{A}'_{\parallel}$ и $\hat{A}_{\parallel}$ одинаковы (скачок фазы на $\pi$ ) Знак $\hat{A}'_{\perp}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\perp}$ (скачок фазы на $\pi$ )	Знак $\hat{A}'_{\parallel}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\parallel}$ (скачка фазы нет) Знак $\hat{A}'_{\perp}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\perp}$ (скачок фазы на $\pi$ )
$n_2 < n_1$ $\vartheta_1 < \vartheta_2$	Знак $\hat{A}'_{\parallel}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\parallel}$ (скачка фазы нет) Знаки $\hat{A}'_{\perp}$ и $\hat{A}_{\perp}$ одинаковы (скачка фазы нет)	Знаки $\hat{A}'_{\parallel}$ и $\hat{A}_{\parallel}$ одинаковы (скачок фазы на $\pi$ ) Знаки $\hat{A}'_{\perp}$ и $\hat{A}_{\perp}$ одинаковы (скачка фазы нет)

ВИД

$$\begin{aligned}
 \hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\
 \hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = -\hat{A}_{\perp} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\
 \hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel} \frac{2}{n_{12} + 1}, \\
 \hat{A}'_{\perp} &= \hat{A}_{\perp} \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\perp} \frac{2}{n_{12} + 1}.
 \end{aligned} \quad (135.5)$$

Возведя уравнения (135.5) в квадрат и умножив получившиеся выражения на показатель преломления соответствующей среды, получим соотношения между интенсивностями падающего, отраженного и преломленного лучей для случая малых углов падения (см. формулу (110.9)). При этом, например, интенсивность отраженного света  $I'$  можно вычислить как сумму интенсивностей обеих составляющих  $I'_{\parallel}$  и  $I'_{\perp}$ . В итоге получается

$$I' = I \left( \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad I'' = n_{12} I \left( \frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2.$$

Из этих формул вытекают выражения (112.19) и (112.20) для  $\rho$  и  $\tau$ .

### § 136. Поляризация при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы, за исключением принадлежащих к кубической системе, наблюдается явление, получившее название двойного лучепрелом-

ления<sup>1</sup>. Это явление заключается в том, что упавший на кристалл луч разделяется внутри кристалла на два луча, распространяющиеся, вообще говоря, с разными скоростями и в различных направлениях.

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на *одноосные* и *двуосные*. У одноосных кристаллов один из преломленных лучей подчиняется обычному закону преломления, в частности он лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Этот луч называется *обыкновенным* и обозначается буквой *o*. Для другого луча, называемого *необыкновенным* (его обозначают буквой *e*), отношение синусов угла падения и угла преломления не

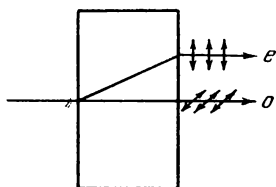


Рис. 136.1.

остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от нормали (рис. 136.1). Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Примерами одноосных кристаллов могут служить исландский шпат, кварц и турмалин. У дву-

осных кристаллов (слюда, гипс) оба луча необыкновенные — показатели преломления для них зависят от направления в кристалле. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только одноосных кристаллов.

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь и с одинаковой скоростью<sup>2</sup>. Это направление называется *оптической осью* кристалла. Следует иметь в виду, что оптическая ось — это не прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным сечением* или *главной плоскостью* кристалла. Обычно пользуются главным сечением, проходящим через световой луч.

Исследование обыкновенного и необыкновенного лучей показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 136.1). Плоскость колебаний

<sup>1</sup> Двойное лучепреломление было впервые наблюдено в 1669 г. Эразмом Бартолином для исландского шпата (разновидность углекислого кальция  $\text{CaCO}_3$  — кристаллы гексагональной системы).

<sup>2</sup> У двуосных кристаллов имеются два таких направления.

обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением. По выходе из кристалла оба луча отличаются друг от друга только направлением поляризации, так что названия «обыкновенный» и «необыкновенный» луч имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется *дихроизмом*. Очень сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина (минерала сложного состава). В нем обыкновенный луч практически полностью поглощается на длине 1 мм. В кристаллах сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на пути примерно в 0,1 мм. Это обстоятельство использовано для изготовления поляризационного устройства, называемого *поляридом*. Оно представляет собой целлулоидную пленку, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристалликов сульфата йодистого хинина.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  оказывается зависящей от направления. В одноосных кристаллах  $\epsilon$  в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет различные значения  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$ . В других направлениях  $\epsilon$  имеет промежуточные значения. Согласно формуле (110.3)  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Следовательно, из анизотропии  $\epsilon$  вытекает, что электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора  $\mathbf{E}$  соответствуют разные значения показателя преломления  $n$ . Поэтому скорость световых волн зависит от направления колебаний светового вектора  $\mathbf{E}$ .

В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению кристалла (на рис. 136.2 эти колебания изображены точками на соответствующем луче). Поэтому при любом направлении обыкновенного луча (на рисунке указаны три направления: 1, 2 и 3) вектор  $\mathbf{E}$  образует с оптической осью кристалла прямой угол, и скорость световой волны будет одна и та же, равная  $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$ . Изображая скорость обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, мы получим сферическую поверхность. На рис. 136.2 показано пересечение этой поверхности с плоскостью чертежа. Такая картина, как на рисунке, наблюдается в любом главном сечении, т. е. в любой плоскости, проходящей через оптическую ось. Представим себе, что в точке  $O$  внутри кристалла помещается

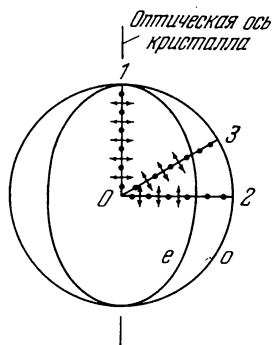


Рис. 136.2.

точечный источник света. Тогда построенная нами сфера будет волновой поверхностью обыкновенных лучей.

Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении. Поэтому для разных лучей направления колебаний вектора  $\mathbf{E}$  (на рис. 136.2 эти направления изображены двусторонними стрелками) образуют с оптической осью разные углы  $\alpha$ . Для луча 1 угол  $\alpha$  равен  $\pi/2$ , вследствие чего скорость имеет значение  $v_o = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$ , для луча 2 угол  $\alpha = 0$  и скорость равна  $v_e = c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$ . Для луча 3 скорость имеет промежуточное значение. Можно доказать, что волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения. В местах пересечения с оптической

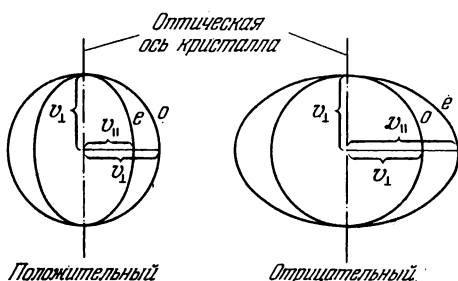


Рис. 136.3.

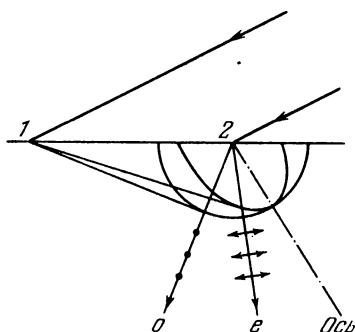


Рис. 136.4.

ось кристалла этот эллипсоид и сфера, построенная для обыкновенных лучей, соприкасаются.

Одноосные кристаллы характеризуют показателем преломления обыкновенного луча, равным  $n_o = c/v_o$ , и показателем преломления необыкновенного луча, перпендикулярного к оптической оси, равным  $n_e = c/v_e$ . Последнюю величину называют просто показателем преломления обыкновенного луча.

В зависимости от того, какая из скоростей,  $v_o$  или  $v_e$ , больше, различают положительные и отрицательные одноосные кристаллы (рис. 136.3). У положительных кристаллов  $v_e < v_o$  (это означает, что  $n_e > n_o$ ). У отрицательных кристаллов  $v_e > v_o$  ( $n_e < n_o$ ). Легко запомнить, какие кристаллы называются положительными, а какие отрицательными. У положительных кристаллов эллипсоид скоростей вытянут вдоль оптической оси, ассоциируясь с вертикальным штрихом в знаке «+»; у отрицательных кристаллов эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном к оптической ось, ассоциируясь со знаком «—».

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно определить с помощью принципа Гюйгенса. На рис. 136.4 построены волновые поверхности обыкновенного и необыкновенного лучей с центром в точке 2, лежащей на поверхности кристалла. Построение выполнено для момента времени, когда волновой фронт падающей волны достигает точки 1. Огибающие всех вторичных волн (волны, центры которых лежат в промежутке между точками 1 и 2, на рисунке не показаны) для обыкновенного и необыкновенного лучей, очевидно, представляют собой плоскости. Преломленный луч,  $o$  или  $e$ , выходящий из точки 2, проходит через точку касания огибающей с соответствующей волновой поверхностью.

Напомним, что лучами называются линии, вдоль которых распространяется энергия световой волны (см. § 110). Из рис. 136.4 следует, что обыкновенный луч  $o$  совпадает с нормалью к соответствующей волновой поверхности. Необыкновенный же луч  $e$  заметно отклоняется от нормали к волновой поверхности.

На рис. 136.5 изображены три случая нормального падения света на поверхность кристалла, отличающиеся направлением оптической оси. В случае  $a$  лучи  $o$  и  $e$  распространяются вдоль оптической оси и поэтому идут не разделяясь. Из рис. 136.5,  $b$  видно, что даже при нормальном падении света на преломляющую поверхность необыкновенный луч может отклониться от нормали к этой поверхности. На рис. 136.5,  $в$  оптическая ось кристалла параллельна преломляющей поверхности. В этом случае при нормальном падении света обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному и тому же направлению, но распространяются с разной скоростью, вследствие чего между ними возникает все возрастающая разность фаз. Характер поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей таков же, как для лучей, изображенных на рис. 136.4.

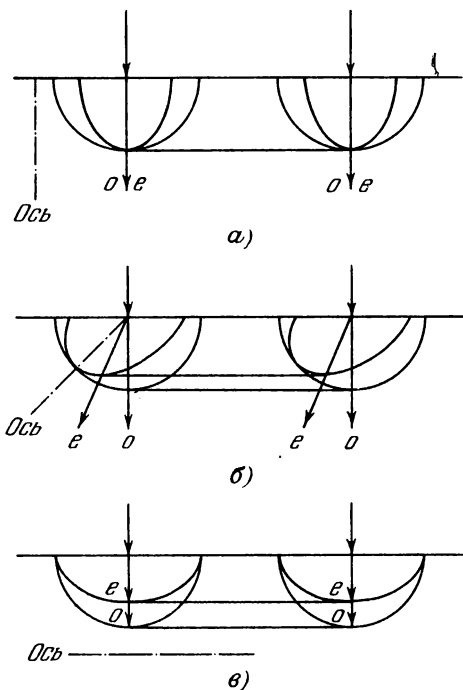


Рис. 136.5.

### § 137. Интерференция поляризованных лучей

При наложении двух когерентных лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, никакой интерференционной картины, с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности, получиться не может. Интерференция возникает только в том случае, если колебания во взаимодействующих лучах совершаются вдоль одного и того же направления. Колебания в двух лучах, первоначально поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, можно свести в одну плоскость, пропустив эти лучи через поляризатор, установленный так,

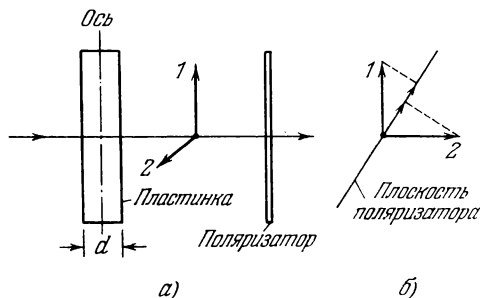


Рис. 137.1.

чтобы его плоскость не совпадала с плоскостью колебаний ни одного из лучей.

Рассмотрим, что получается при наложении вышедших из кристаллической пластинки обыкновенного и необыкновенного лучей. Пусть пластинка вырезана параллельно оптической оси (рис. 137.1). При нормальном падении света на пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи будут распространяться не разделяясь, но с различной скоростью (см. рис. 136.5, в). За время прохождения через пластинку между лучами возникнет разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e) d \quad (137.1)$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{(n_o - n_e) d}{\lambda_0} 2\pi \quad (137.2)$$

( $d$  — толщина пластинки,  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме).

Таким образом, если пропустить естественный свет через вырезанную параллельно оптической оси кристаллическую пластинку (рис. 137.1, а), из пластинки выйдут два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча 1 и 2<sup>1</sup>, между которыми будет существовать разность фаз, определяемая формулой (137.2). Поставим на пути этих лучей поляризатор. Колебания обоих лучей после прохождения через поляризатор будут лежать в одной пло-

<sup>1</sup> В кристалле луч 1 был необыкновенным и мог быть обозначен буквой  $e$ , луч 2 был обыкновенный ( $o$ ). По выходе из кристалла эти лучи утратили право называться обыкновенным и необыкновенным.

скости. Амплитуды их будут равны составляющим амплитуд лучей 1 и 2 в направлении плоскости поляризатора (рис. 137.1, б).

Вышедшие из поляризатора лучи возникают в результате разделения света, полученного от одного источника. Поэтому они, казалось бы, должны интерферировать. Однако если лучи 1 и 2 возникают за счет прохождения через пластинку естественного света, они не дают интерференции. Это объясняется весьма просто. Хотя обыкновенный и необыкновенный лучи порождены одним и тем же источником света, они содержат в основном колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами. В обыкновенном луче колебания обусловлены преимущественно цугами, плоскости колебаний которых близки к одному направлению в пространстве, в необыкновенном луче — цугами, плоскости колебаний которых близки к другому, перпендикулярному к первому направлению. Поскольку отдельные цуги некогерентны, возникающие из естественного света обыкновенный и необыкновенный лучи, а следовательно и лучи 1 и 2, также оказываются некогерентными.

Иначе обстоит дело, если на кристаллическую пластинку падает плоскополяризованный свет. В этом случае колебания каждого цуга разделяются между обыкновенным и необыкновенным лучами в одинаковой пропорции (зависящей от ориентации оптической оси пластинки относительно плоскости колебаний в падающем луче). Поэтому лучи  $o$  и  $e$ , а следовательно и лучи 1 и 2, оказываются когерентными и будут интерферировать.

### § 138. Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку

Рассмотрим кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. В предыдущем параграфе мы выяснили, что при падении на такую пластинку плоскополяризованного света обыкновенный и необыкновенный лучи оказываются когерентными. На входе в пластинку разность фаз  $\delta$  этих лучей равна нулю, на выходе из пластинки

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = \frac{(n_o - n_e) d}{\lambda_0} 2\pi \quad (138.1)$$

(см. (137.1) и (137.2); мы предполагаем, что свет падает на пластинку нормально).

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой

$$(n_o - n_e) d = m\lambda_0 + \lambda_0/4$$

( $m$  — любое целое число либо нуль), называется **пластинкой в четверть волны**. При прохождении через такую пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи приобретают разность фаз,



равную  $\pi/2$  (напомним, что разность фаз определяется с точностью до  $2\pi m$ ). Пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = m\lambda_0 + \lambda_0/2,$$

называется пластинкой в полволны, и т. д.

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через пластинку в полволны. Колебание  $E$  в падающем луче, совершающееся в плоскости  $P$ , возбudit при входе в кристалл колебание  $E_o$  обыкновенного луча и колебание  $E_e$  необыкновенного луча (рис. 138.1). За время прохождения через пластинку разность фаз между колебаниями  $E_o$  и  $E_e$  изменяется на  $\pi$ . Поэтому на выходе

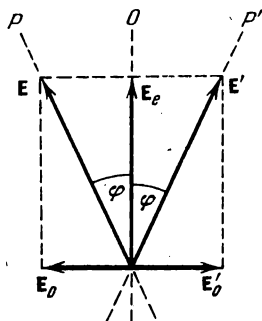


Рис. 138.1.

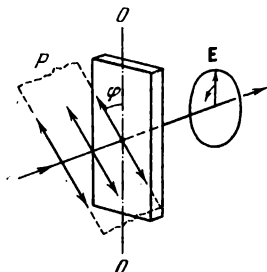


Рис. 138.2.

из пластинки фазовое соотношение между обыкновенным и необыкновенным лучами будет соответствовать взаимному расположению векторов  $E_e$  и  $E'_o$  (на входе в пластинку оно соответствовало взаимному расположению векторов  $E_e$  и  $E_o$ ). Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован в плоскости  $P'$ . Плоскости  $P$  и  $P'$  расположены симметрично относительно оптической оси пластинки  $O$ . Таким образом, пластинка в полволны поворачивает плоскость колебаний прошедшего через нее света на угол  $2\varphi$  ( $\varphi$  — угол между плоскостью колебаний в падающем луче и осью пластинки).

Теперь пропустим плоскополяризованный свет через пластинку в четверть волны (рис. 138.2). Если расположить пластинку так, чтобы угол  $\varphi$  между плоскостью колебаний  $P$  в падающем луче и осью пластинки  $O$  равнялся  $45^\circ$ , амплитуды обоих лучей, вышедших из пластинки, будут одинаковы (предполагается, что дихроизма нет). Сдвиг по фазе между колебаниями в этих лучах составит  $\pi/2$ . Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован по кругу. При ином значении угла  $\varphi$  амплитуды вышедших из пластинки лучей будут неодинаковыми. Поэтому при наложении эти лучи образуют свет, поляризованный по эллипсу, одна из осей которого совпадает с осью пластинки  $O$ .

При пропускании плоскополяризованного света через пластинку в не совпадающее с  $m + 1/4$  или  $m + 1/2$  дробное число волн из пластинки выйдут две когерентные, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях световые волны, разность фаз которых отличается от  $\pi/2$  и от  $\pi$ . Следовательно, при любом отношении амплитуд этих волн, зависящем от угла  $\varphi$  (см. рис. 138.2), на выходе из пластинки получится эллиптически поляризованный свет, причем ни одна из осей эллипса не будет совпадать с осью пластинки  $O$ . Ориентация осей эллипса относительно оси  $O$  определяется разностью фаз  $\delta$ , а также отношением амплитуд, т. е. углом  $\varphi$  между плоскостью колебаний в падающей волне и осью пластинки  $O$ .

Отметим, что, независимо от толщины пластинки, при  $\varphi$ , равном нулю или  $\pi/2$ , в пластинке будет распространяться только один луч (в первом случае необыкновенный, во втором — обыкновенный), так что на входе из пластинки свет останется плоскополяризованным с плоскостью колебаний, совпадающей с  $P$ .

Если на пути эллиптически поляризованного света поставить пластинку в четверть волны, расположив ее оптической осью вдоль одной из осей эллипса, то пластинка внесет дополнительную разность фаз, равную  $\pi/2$ . В результате разность фаз двух плоскополяризованных волн, дающих в сумме эллиптически поляризованную волну, станет равной нулю или  $\pi$ , так что наложение этих волн даст плоскополяризованную волну. Следовательно, надлежащим образом повернутая пластинка в четверть волны превращает эллиптически поляризованный свет в плоскополяризованный. На этом основывается метод, с помощью которого можно отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного или свет, поляризованный по кругу, от естественного. Исследуемый свет пропускается через пластинку в четверть волны и помещенный за ней поляризатор. Если исследуемый луч является эллиптически поляризованным (или поляризованным по кругу), то, вращая пластинку и поляризатор вокруг направления луча, удастся добиться полного затемнения поля зрения. Если же свет является частично поляризованным (или естественным), то ни при каком положении пластинки и поляризатора невозможно получить погашения исследуемого луча.

### § 139. Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами

Поместим между поляризаторами  $^1P$  и  $P'$  пластинку из одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси  $O$  (рис. 139.1). Из поляризатора  $P$  выйдет плоскополяризованный свет

<sup>1</sup> Второй по ходу луча поляризатор  $P'$  называют также анализатором.

интенсивности  $I$ . Пройдя через пластинку, свет станет в общем случае эллиптически поляризованным. По выходе из поляризатора  $P'$  свет снова будет плоскополяризованным. Его интенсивность  $I'$  зависит от взаимной ориентации плоскостей поляризаторов  $P$  и  $P'$  и оптической оси пластинки, а также от разности фаз  $\delta$ , приобретаемой обыкновенным и необыкновенным лучами при прохождении через пластинку.

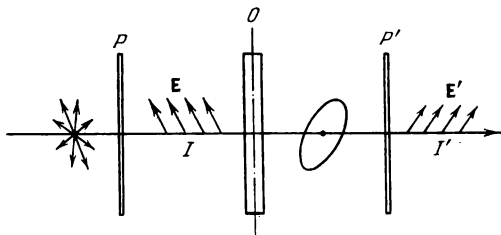


Рис. 139.1.

Предположим, что угол  $\varphi$  между плоскостью поляризатора  $P$  и осью пластинки  $O$  равен  $\pi/4$ . Рассмотрим два частных случая: поляризаторы параллельны (рис. 139.2, а) и поляризаторы скрещены (рис. 139.2, б). Световое колебание, вышедшее из поляризатора  $P$ , изобразится вектором  $E$ , лежащим в плоскости  $P$ . При входе в пластинку колебание  $E$  возбудит два колебания — перпенди-

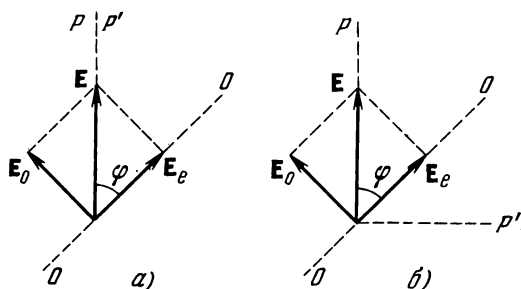


Рис. 139.2.

кулярное к оптической оси колебание  $E_o$  (обыкновенный луч) и параллельное оси колебание  $E_e$  (необыкновенный луч). Эти колебания будут когерентными; проходя через пластинку, они приобретут разность фаз  $\delta$ , которая определяется толщиной пластинки и разностью показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Амплитуды этих колебаний одинаковы и равны

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = E/\sqrt{2}, \quad (139.1)$$

где  $E$  — амплитуда волны, вышедшей из первого поляризатора.

Через второй поляризатор пройдут составляющие колебаний  $E_o$  и  $E_e$  по направлению плоскости  $P'$ . Амплитуды этих составляющих в обоих случаях равны амплитудам (139.1), умноженным на  $\cos(\pi/4)$ , т. е.

$$E'_o = E'_e = E/2. \quad (139.2)$$

В случае параллельных поляризаторов (рис. 139.2, а) разность фаз волн, вышедших из поляризатора  $P'$ , равна  $\delta$ , т. е. разности фаз, приобретенной при прохождении через пластинку. В случае скрещенных поляризаторов (рис. 139.2, б) проекции векторов  $E_o$  и  $E_e$  на направление  $P'$  имеют разные знаки. Это означает, что в дополнение к разности фаз  $\delta$  возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$ .

Волны, вышедшие из второго поляризатора, будут интерферировать. Амплитуда  $E_{||}$  результирующей волны в случае параллельных поляризаторов определяется соотношением

$$E_{||}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e'\cos\delta,$$

а в случае скрещенных поляризаторов — соотношением

$$E_{\perp}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e'\cos(\delta + \pi).$$

Приняв во внимание (139.2) можно написать, что

$$E_{||}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos\delta = \frac{1}{2}E^2(1 + \cos\delta) = E^2\cos^2\frac{\delta}{2},$$

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos\delta) = E^2\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно,

$$I_{||} = I\cos^2\frac{\delta}{2}, \quad I_{\perp} = I\sin^2\frac{\delta}{2}. \quad (139.3)$$

Здесь  $I_{||}$  — интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора в случае, когда поляризаторы параллельны,  $I_{\perp}$  — та же интенсивность в случае, когда поляризаторы скрещены,  $I$  — интенсивность света, прошедшего через первый поляризатор.

Из формул (139.3) следует, что интенсивности  $I_{||}$  и  $I_{\perp}$  оказываются «дополнительными» — в сумме они дают интенсивность  $I$ . В частности, при

$$\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (139.4)$$

интенсивность  $I_{||}$  будет равна  $I$ , а интенсивность  $I_{\perp}$  обращается в нуль. При значениях же

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (139.5)$$

интенсивность  $I_{||}$  становится равной нулю, а интенсивность  $I_{\perp}$  достигает значения  $I$ .

Разность показателей преломления  $n_o - n_e$  зависит от длины волны света  $\lambda_0$ . Кроме того,  $\lambda_0$  входит непосредственно в выражение (138.1) для  $\delta$ . Пусть свет, падающий на поляризатор  $P$ , состоит из излучения двух длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , таких, что  $\delta$  для  $\lambda_1$  удовлетворяет условию (139.4), а для  $\lambda_2$  — условию (139.5). В этом случае при параллельных поляризаторах через систему, изображенную на рис. 139.1, пройдет беспрепятственно свет с длиной волны  $\lambda_1$  и полностью будет задержан свет с длиной волны  $\lambda_2$ . При скрещенных поляризаторах пройдет беспрепятственно свет с длиной волны  $\lambda_2$  и полностью будет задержан свет с длиной волны  $\lambda_1$ . Следова-

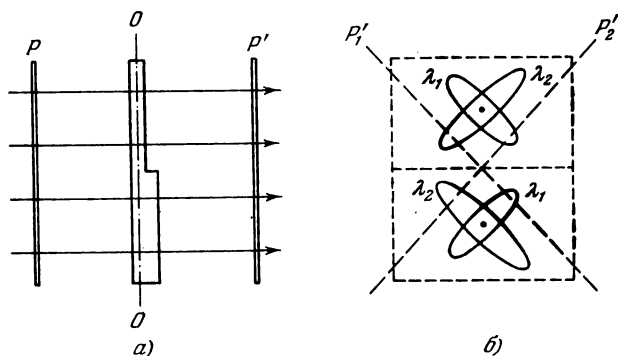


Рис. 139.3.

тельно, при одном расположении поляризаторов окраска прошедшего через систему света будет соответствовать длине волны  $\lambda_1$ , при другом расположении — длине волны  $\lambda_2$ . Такие две окраски называются **дополнительными**. При вращении одного из поляризаторов окраска непрерывно меняется, переходя за каждую четверть оборота от одного дополнительного цвета к другому. Смена окраски наблюдается и при  $\varphi$ , отличном от  $\pi/4$  (но не равном нулю или  $\pi/2$ ), только цвета оказываются менее насыщенными.

Разность фаз  $\delta$  зависит от толщины пластинки. Поэтому, если двоякопреломляющая прозрачная пластинка, помещенная между поляризаторами, имеет в разных местах неодинаковую толщину, эти места при наблюдении со стороны поляризатора  $P'$  будут представляться окрашенными в различные цвета. При вращении поляризатора  $P'$  эти цвета изменяются, причем каждый из них переходит в дополнительный цвет. Поясним это следующим примером. На рис. 139.3, а изображена помещенная между поляризаторами пластинка, у которой нижняя половина толще верхней. Пусть свет, проходящий через пластину, содержит излучение только двух длин волн:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На рис. 139.3, б дан «вид» со стороны поляризатора  $P'$ . По выходе из кристаллической пластинки каждая из сос-

тавляющих излучения будет, вообще говоря, поляризована по эллипсу. Ориентация и эксцентриситет эллипсов для длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также для разных половин пластинки будут различны. При установке плоскости поляризатора  $P'$  в положение  $P'_1$  в излучении, прошедшем через  $P'$ , будет преобладать в верхней половине пластинки длина волны  $\lambda_1$ , в нижней половине —  $\lambda_2$ . Поэтому обе половины будут иметь разную окраску. При установке поляризатора  $P'$  в положение  $P'_2$  окраска верхней половины будет определяться излучением с длиной волны  $\lambda_2$ , нижней половины — излучением с длиной волны  $\lambda_1$ . Таким образом, при повороте поляризатора  $P'$  на  $90^\circ$  обе половины пластинки как бы обмениваются окраской. Разумеется, так будет обстоять дело лишь при определенном соотношении толщин обеих частей пластинки.

### § 140. Искусственное двойное лучепреломление

В прозрачных аморфных телах, а также в кристаллах кубической системы может возникать двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий. В частности, это происходит при механических деформациях тел. Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Опыт дает, что эта разность пропорциональна напряжению  $\sigma$  в данной точке тела (т. е. силе, приходящейся на единицу площади; см. § 14 1-го тома):

$$n_o - n_e = k\sigma \quad (140.1)$$

( $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества).

Поместим стеклянную пластинку  $Q$  между скрещенными поляризаторами  $P$  и  $P'$  (рис. 140.1). Пока стекло не деформировано, такая система света не пропускает. Если же пластинку подвергнуть сжатию, свет через систему начинает проходить, причем наблюдаемая в прошедших лучах картина оказывается испещренной цветными полосами. Каждая такая полоса соответствует одинаково деформированным местам пластинки. Следовательно, по расположению полос можно судить о распределении напряжений внутри пластинки. На этом основывается оптический метод исследования напряжений. Изготовленная из прозрачного изотропного материала (например, из плексигласа) модель какой-либо детали или конструкции помещается между скрещенными поляризаторами. Модель подвергается действию нагрузок, подобных тем, какие будет испытывать само изделие. Наблюдаемая при этом в проходящем белом свете картина позволяет определить распределение напряжений, а также судить об их величине.

Возникновение двойного лучепреломления в жидкостях и в аморфных твердых телах под воздействием электрического поля

было обнаружено Керром в 1875 г. Это явление получило название эффекта Керра. В 1930 г. этот эффект был наблюден также и в газах.

Схема установки для исследования эффекта Керра в жидкостях показана на рис. 140.2. Установка состоит из ячейки Керра, помещенной между скрещенными поляризаторами  $P$  и  $P'$ . Ячейка Керра представляет собой герметичный сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора. При подаче на пластины напряжения между ними возникает практически однородное электрическое поле. Под его действием жидкость приобретает свойства

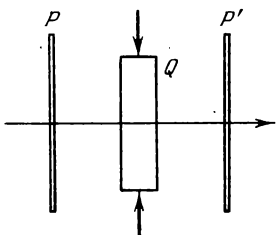


Рис. 140.1.

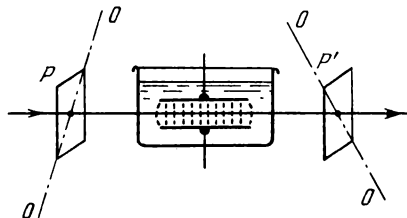


Рис. 140.2.

одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля.

Возникающая разность показателей преломления  $n_o$  и  $n_e$  пропорциональна квадрату напряженности поля  $E$ :

$$n_o - n_e = kE^2. \quad (140.2)$$

На пути  $l$  между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)l = klE^2$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} lE^2.$$

Это выражение принято записывать в виде

$$\delta = 2\pi B l E^2, \quad (140.3)$$

где  $B$  — характерная для вещества величина, называемая постоянной Керра.

Из известных жидкостей наибольшей постоянной Керра обладает нитробензол ( $C_6H_5NO_2$ ). Постоянная Керра зависит от температуры вещества и от длины волны света.

Эффект Керра объясняется различной поляризуемостью молекул по разным направлениям. В отсутствие поля молекулы ориентированы хаотическим образом, поэтому жидкость в целом не обна-

руживает анизотропии. Под действием поля молекулы поворачиваются так, чтобы в направлении поля были ориентированы либо их дипольные электрические моменты (у полярных молекул), либо направления наибольшей поляризуемости (у неполярных молекул). В результате жидкость становится оптически анизотропной. Ориентирующему действию поля противится тепловое движение молекул. Этим обуславливается уменьшение постоянной Керра с повышением температуры.

Время, в течение которого устанавливается (при включении поля) или исчезает (при выключении поля) преимущественная ориентация молекул, составляет около  $10^{-10}$  с. Поэтому ячейка Керра, помещенная между скрещенными поляризаторами, может служить практически безынерционным световым затвором. В отсутствие напряжения на пластинах конденсатора затвор будет закрыт. При включении напряжения затвор пропускает значительную часть света, падающего на первый поляризатор.

## § 141. Вращение плоскости поляризации

**Естественное вращение.** Некоторые вещества, называемые оптически активными, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через них плоскополяризованного света. К числу таких веществ принадлежат кристаллические тела (например, кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и др.).

Кристаллические вещества сильнее всего вращают плоскость поляризации в случае, когда свет распространяется вдоль оптической оси кристалла. Угол поворота  $\varphi$  пропорционален пути  $l$ , пройденному лучом в кристалле:

$$\varphi = \alpha l. \quad (141.1)$$

Коэффициент  $\alpha$  называют постоянной вращения. Эта постоянная зависит от длины волны (дисперсия вращательной способности).

В растворах угол поворота плоскости поляризации пропорционален пути света в растворе  $l$  и концентрации активного вещества  $c$ :

$$\varphi = [\alpha] cl. \quad (141.2)$$

Здесь  $[\alpha]$  — величина, называемая удельной постоянной вращения.

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяются на право- и левовращающие. Направление вращения (относительно



луча) не зависит от направления луча. Поэтому, если луч, прошедший через оптически активный кристалл вдоль оптической оси, отразить зеркалом и заставить пройти через кристалл еще раз в обратном направлении, то восстанавливается первоначальное положение плоскости поляризации.

Все оптически активные вещества существуют в двух разновидностях — правовращающей и левовращающей. Существуют право- и левовращающий кварц, право- и левовращающий сахар и т. д. Молекулы или кристаллы одной разновидности являются зеркальным отражением молекул или кристаллов другой разновидности (рис. 141.1). Буквами  $C$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  обозначены отличающиеся друг

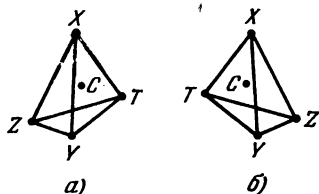


Рис. 141.1.

от друга атомы или группировки атомов (радикалы). Молекула  $b$  является зеркальным отражением молекулы  $a$ . Если смотреть на тетраэдр, изображенный на рис. 141.1, вдоль направления  $CX$ , то при обходе по часовой стрелке будет иметь место чередование  $ZYTZ$  для молекулы  $a$  и  $ZTYZ$  для молекулы  $b$ . То же самое наблюдается для любого из направ-

лений  $CY$ ,  $CZ$  и  $CT$ . Чередование радикалов  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  в молекуле  $b$  противоположно их чередованию в молекуле  $a$ . Поэтому если, например, вещество, образованное молекулами  $a$ , правовращающее, то вещество, образованное молекулами  $b$ , будет левовращающим.

Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить оптически активное вещество (кристалл кварца, прозрачную кювету с раствором сахара и т. п.), то поле зрения просветляется. Чтобы снова получить темноту, нужно повернуть один из поляризаторов на угол  $\varphi$ , определяемый выражением (141.1) или (141.2). В случае раствора, зная удельную постоянную вращения  $[\alpha]$  данного вещества и длину  $l$ , можно, измерив угол поворота  $\varphi$ , определить по формуле (141.2) концентрацию раствора  $c$ . Такой способ определения концентрации применяется в производстве различных веществ, в частности в сахароварении (соответствующий прибор называется сахариметром).

**Магнитное вращение плоскости поляризации.** Оптически неактивные вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации под действием магнитного поля. Это явление было обнаружено Фарадеем и поэтому называется иногда эффектом Фарадея. Оно наблюдается только при распространении света вдоль направления намагниченности. Поэтому для наблюдения эффекта Фарадея в полюсных наконечниках электромагнита просверливают отверстия, через которые пропускается световой луч. Исследуемое вещество помещается между полюсами электромагнита.

Угол поворота плоскости поляризации  $\varphi$  пропорционален пути  $l$ , проходимому светом в веществе, и намагниченности вещества. Намагниченность в свою очередь пропорциональна напряженности магнитного поля  $H$  (см. формулу (52.11)). Поэтому можно написать, что

$$\varphi = V l H. \quad (141.3)$$

Коэффициент  $V$  называется постоянной Верде или удельным магнитным вращением. Постоянная  $V$ , как и постоянная вращения  $\alpha$ , зависит от длины волны.

Направление вращения определяется направлением магнитного поля. От направления луча знак вращения не зависит. Поэтому если, отразив луч зеркалом, заставить его пройти через намагниченное вещество еще раз в обратном направлении, поворот плоскости поляризации удвоится.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникающей под действием магнитного поля прецессией электронных орбит (см. § 57).

Оптически активные вещества под действием магнитного поля приобретают дополнительную способность вращать плоскость поляризации, которая складывается с их естественной способностью.

## ГЛАВА XX

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

### § 142. Дисперсия света

Дисперсией света называются явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от длины световой волны. Эту зависимость можно охарактеризовать функцией

$$n = f(\lambda_0), \quad (142.1)$$

где  $\lambda_0$  — длина световой волны в вакууме.

Дисперсией вещества называется производная  $n$  по  $\lambda_0$ .

Для всех прозрачных бесцветных веществ функция (142.1) имеет в видимой части спектра характер, показанный на рис. 142.1.

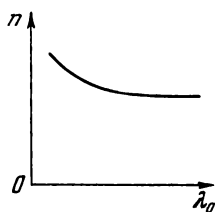


Рис. 142.1.

С уменьшением длины волны показатель преломления увеличивается со все возрастающей скоростью, так что дисперсия вещества  $dn/d\lambda_0$  отрицательна и растет по модулю с уменьшением  $\lambda_0$ .

Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения и вблизи нее ход дисперсии обнаруживает аномалию (см. рис. 144.2). На некотором участке дисперсия вещества  $dn/d\lambda_0$  оказывается положительной.

Такой ход зависимости  $n$  от  $\lambda_0$  называется аномальной дисперсией.

Среды, обладающие дисперсией, называются диспергирующими. В диспергирующих средах скорость световых волн зависит от длины  $\lambda_0$  или частоты  $\omega$ .

### § 143. Групповая скорость

Строго монохроматическая волна вида

$$E = A \cos (\omega t - kx + \alpha) \quad (143.1)$$

представляет собой бесконечную во времени и в пространстве последовательность «горбов» и «впадин», перемещающихся вдоль оси  $x$

с фазовой скоростью

$$v = \omega/k \quad (143.2)$$

(см. формулу (94.7)). С помощью такой волны нельзя передать никакого сигнала, так как каждый последующий «горб» ничем не отличается от предыдущего. Для передачи сигнала нужно на волне сделать «отметку», скажем, оборвав ее на некоторое время  $\Delta t$ . Однако в этом случае волна уже не будет описываться уравнением (143.1).

Проще всего передать сигнал с помощью светового импульса (рис. 143.1). Согласно теореме Фурье подобный импульс можно

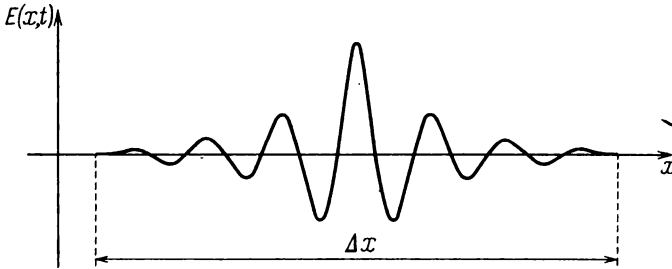


Рис. 143.1.

представить как наложение волн вида (143.1) с частотами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\omega$ . Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется волновым пакетом или группой волн. Аналитическое выражение для группы волн имеет вид

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega \quad (143.3)$$

(индекс  $\omega$  при  $A$ ,  $k$  и  $\alpha$  указывает на то, что эти величины для разных частот различны). При фиксированном  $t$  график функции (143.3) имеет вид, показанный на рис. 143.1. С изменением  $t$  график смещается вдоль оси  $x$ . В пределах пакета плоские волны в большей или меньшей степени усиливают друг друга, вне пакета они практически полностью гасят друг друга.

Соответствующий расчет дает, что чем меньше ширина пакета  $\Delta x$ , тем больший интервал частот  $\Delta\omega$  или соответственно больший интервал волновых чисел  $\Delta k$  требуется для того, чтобы описать пакет с помощью выражения (143.3). Имеет место соотношение

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi. \quad (143.4)$$

Подчеркнем, что для того, чтобы суперпозицию волн, описываемую

выражением (143.3), можно было считать группой волн, необходимо соблюдение условия  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

В недиспергирующей среде все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $v$ . Очевидно, что в этом случае скорость движения пакета совпадает с  $v$  и форма пакета со временем не изменяется. Можно показать, что в диспергирующей среде пакет с течением времени расплывается — ширина его увеличивается. Если дисперсия невелика, расплывание пакета происходит не слишком быстро. В этом случае пакету можно приписать скорость  $u$ , под которой понимается скорость, с которой перемещается центр пакета, т. е. точка с максимальным значением  $E$ . Эту скорость называют групповой скоростью. В диспергирующей среде групповая скорость  $u$  отличается от фазовой скорости  $v$  (имеется в виду фазовая скорость гармонической

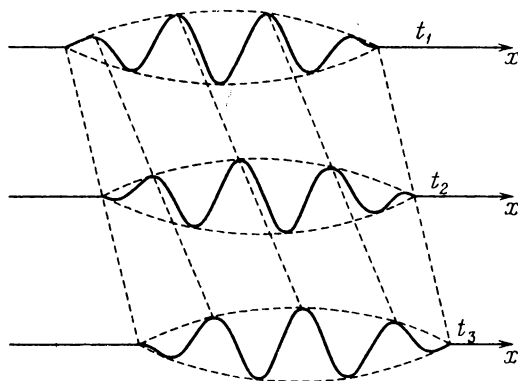


Рис. 143.2.

составляющей с максимальной амплитудой, иными словами — фазовая скорость для доминирующей частоты). Ниже мы покажем, что в случае, когда  $dn/d\lambda_0 < 0$ , групповая скорость оказывается меньше фазовой ( $u < v$ ); в случае, когда  $dn/d\lambda_0 > 0$ , групповая скорость больше фазовой ( $u > v$ ).

На рис. 143.2 показаны «фотографии» волнового пакета для трех последовательных моментов времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ . Рисунок выполнен для случая, когда  $u < v$ . Из рисунка видно, что наряду с перемещением пакета происходит движение «горбов» и «впадин» «внутри» пакета, причем у левой границы пакета все время зарождаются новые «горбы», которые, пробежав вдоль пакета, исчезают у его правой границы. В результате, в то время как пакет в целом перемещается со скоростью  $u$ , отдельные «горбы» и «впадины» перемещаются со скоростью  $v$ .

В случае, когда  $u > v$ , направления перемещения пакета и движения «горбов» внутри него оказываются противоположными.

Поясним сказанное на примере суперпозиции двух плоских волн с одинаковой амплитудой и разными  $\lambda$ . На рис. 143.3 дана «моментальная фотография» волн. Одна из них изображена сплошной линией, другая — пунктирной. Интенсивность максимальна в точке А, где фазы обеих волн в данный момент совпадают. В точках В и С обе волны находятся в противофазе, вследствие чего интенсивность результирующей волны равна нулю. Допустим, что обе волны распространяются слева направо, причем скорость «сплошной» волны меньше, чем «пунктирной» (в этом случае  $dv/d\lambda > 0$ , следовательно,  $dn/d\lambda < 0$ ). Тогда место, в котором волны усиливают друг друга,



Рис. 143.3.

будет со временем перемещаться влево относительно волн. В результате групповая скорость окажется меньше фазовой. Если скорость «сплошной» волны больше, чем «пунктирной» (т. е.  $dn/d\lambda > 0$ ), место, в котором происходит усиление волн, будет перемещаться вправо, так что групповая скорость окажется больше фазовой.

Напишем уравнения волн, положив для упрощения формул начальные фазы равными нулю:

$$\begin{aligned} E_1 &= A \cos(\omega t - kx), \\ E_2 &= A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]. \end{aligned}$$

Здесь  $k = \omega/v_1$ ,  $(k + \Delta k) = (\omega + \Delta\omega)/v_2$ . Пусть  $\Delta\omega \ll \omega$ , соответственно  $\Delta k \ll k$ . Тогда, сложив колебания и произведя преобразования по формуле для суммы косинусов, получим

$$E = E_1 + E_2 = \left[ 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right] \cos(\omega t - kx) \quad (143.5)$$

(во втором множителе мы пренебрегли  $\Delta\omega$  по сравнению с  $\omega$  и  $\Delta k$  по сравнению с  $k$ ).

Множитель, стоящий в квадратных скобках, изменяется с  $x$  и  $t$  гораздо медленнее, чем второй множитель. Поэтому выражение (143.5) можно рассматривать как уравнение плоской волны, амплитуда которой изменяется по закону<sup>1</sup>

$$\text{Амплитуда} = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right|.$$

<sup>1</sup> Ср. с формулами (56.1) и (56.2) 1-го тома. Зависимость функции (143.5) от  $x$  при фиксированном  $t$  изображается кривой, аналогичной кривой на рис. 56.1, а 1-го тома.

В данном случае имеется ряд одинаковых максимумов амплитуды, определяемых условием

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_{\max} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (143.6)$$

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн.

Разрешив (143.6) относительно  $x_{\max}$ , получим

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \text{const.}$$

Отсюда следует, что максимумы перемещаются со скоростью

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (143.7)$$

Полученное выражение представляет собой групповую скорость для случая, когда группа образована двумя составляющими.

Найдем скорость, с которой перемещается центр группы волн, описываемой выражением (143.3). Перейдя от косинусов к экспонентам, получим

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \widehat{A}_\omega \exp[i(\omega t - k_\omega x)] d\omega \quad (143.8)$$

( $\widehat{A}_\omega = A_\omega e^{i\alpha_\omega}$  — комплексная амплитуда).

Разложим функцию  $k_\omega = k(\omega)$  в ряд в окрестности  $\omega_0$ :

$$k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \dots \quad (143.9)$$

Здесь  $k_0 = k(\omega_0)$ ,  $(dk/d\omega)_0$  — значение производной в точке  $\omega_0$ .

Перейдем к переменной  $\xi = \omega - \omega_0$ . Тогда  $\omega = \omega_0 + \xi$ ,  $d\omega = d\xi$ . Произведя такую замену в (143.8) и подставив выражение (143.9) для  $k_\omega$ , можно написать

$$E(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \widehat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right] \xi\right\} d\xi. \quad (143.10)$$

Мы пришли к уравнению плоской волны с частотой  $\omega_0$ , волновым числом  $k_0$  и комплексной амплитудой

$$\widehat{A}(x, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \widehat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right] \xi\right\} d\xi. \quad (143.11)$$

Из (143.11) следует, что уравнение

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x = \text{const} \quad (143.12)$$

связывает время  $t$  и координату  $x$  той плоскости, в которой комплексная амплитуда имеет заданное фиксированное значение, в частности и такое значение, при котором модуль комплексной амплитуды, т. е. обычная амплитуда  $A(x, t)$ , достигает максимума.

Приняв во внимание, что  $1/(dk/d\omega)_0 = (d\omega/dk)_0$ , представим (143.12) в виде

$$x_{\max} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - \text{const}' \quad \left( \text{const}' = \frac{\text{const}}{(dk/d\omega)_0} \right). \quad (143.13)$$

Из (143.13) следует, что место, в котором амплитуда группы волн максимальна, перемещается со скоростью  $(d\omega/dk)_0$ . Таким образом, мы приходим к следующему выражению для групповой скорости:

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (143.14)$$

(индекс 0 опущен за ненадобностью). Ранее для группы из двух волн было получено аналогичное выражение (см. (143.7)).

Напомним, что мы пренебрегли членами высоких порядков малости в разложении (143.9). В этом приближении форма волнового пакета со временем не изменяется. Если учесть дальнейшие члены разложения, то для амплитуды получается выражение, из которого следует, что ширина пакета со временем растет — волновой пакет расплывается.

Выражению для групповой скорости можно придать другой вид. Заменяя  $\omega$  через  $vk$  (см. (143.2)), представим (143.14) следующим образом:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (143.15)$$

Далее напишем

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}.$$

Из соотношения  $\lambda = 2\pi/k$  вытекает, что  $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$ . Соответственно  $dv/dk = -(dv/d\lambda)(\lambda/k)$ . Подставив это значение в (143.15), получим

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (143.16)$$

Из этой формулы видно, что в зависимости от знака  $dv/d\lambda$  групповая скорость  $u$  может быть как меньше, так и больше фазовой скорости  $v$ . В отсутствие дисперсии  $dv/d\lambda = 0$  и групповая скорость совпадает с фазовой.

Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии волной равна групповой скорости.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что поглощение энергии волны в данной среде невелико. При значи-



тельном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Такой случай имеет место в области аномальной дисперсии. В этой области поглощение очень велико, и понятие групповой скорости оказывается неприменимым.

### § 144. Элементарная теория дисперсии

Дисперсия света может быть объяснена на основе электромагнитной теории и электронной теории вещества. Для этого нужно рассмотреть процесс взаимодействия света с веществом. Движение электронов в атоме подчиняется законам квантовой механики. В частности, понятие траектории электрона в атоме теряет всякий смысл. Однако, как показал Лоренц, для качественного понимания многих оптических явлений достаточно ограничиться гипотезой о существовании внутри атомов электронов, связанных квазиупруго. Будучи выведенными из положения равновесия, такие электроны начнут колебаться, постепенно теряя энергию колебания на излучение электромагнитных волн. В результате колебания будут затухающими. Затухание можно учесть, введя «силу трения излучения», пропорциональную скорости.

При прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон оказывается под воздействием лоренцевой силы

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}\mathbf{B}] = -e\mathbf{E} - e\mu_0[\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (144.1)$$

(см. формулу (43.5); заряд электрона равен  $-e$ ). Согласно (105.13) отношение напряженностей магнитного и электрического полей в волне равно  $H/E = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ . Следовательно, для отношения магнитной и электрической сил, действующих на электрон, получается из (144.1) значение

$$\frac{\mu_0 v H}{E} = \mu_0 v \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = v \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{v}{c}.$$

Даже если бы амплитуда колебаний электрона  $a$  достигла значения порядка  $1 \text{ \AA}$  ( $10^{-10} \text{ м}$ ), т. е. порядка размеров атома, амплитуда скорости электрона  $a\omega$  составила бы примерно  $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$  (согласно (110.6)  $\omega = 2\pi\nu$  равна приблизительно  $3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ). Таким образом, отношение  $v/c$  заведомо меньше  $10^{-3}$ , так что вторым слагаемым в (144.1) можно пренебречь.

Итак, можно считать, что при прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон находится под действием силы

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

( $\alpha$  — величина, определяемая координатами данного электрона,  $E_0$  — амплитуда напряженности электрического поля волны).

Чтобы упростить вычисления, затуханием за счет излучения вначале будем пренебрегать. Впоследствии мы учтем затухание, внося в полученные формулы соответствующие поправки. Уравнение движения электрона в этом случае имеет вид

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = - (e/m) E_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(см. формулу (50.13) 1-го тома;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний электрона). Добавим к правой части этого уравнения слагаемое  $-i(e/m)E_0 \sin(\omega t + \alpha)$  и перейдем таким образом к комплексным функциям  $\hat{E}$  и  $\hat{r}$ :

$$\ddot{\hat{r}} + \omega_0^2 \hat{r} = - (e/m) \hat{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (144.2)$$

Здесь  $\hat{E}_0 = E_0 e^{i\alpha}$  — комплексная амплитуда электрического поля волны.

Будем искать решение уравнения в виде  $\hat{r} = \hat{r}_0 e^{i\omega t}$ , где  $\hat{r}_0$  — комплексная амплитуда колебаний электрона. Соответственно  $\ddot{\hat{r}} = -\omega^2 \hat{r}_0 e^{i\omega t}$ . Подстановка этих выражений в уравнение (144.2) приводит после сокращения на общий множитель  $e^{i\omega t}$  к соотношению

$$-\omega^2 \hat{r}_0 + \omega_0^2 \hat{r}_0 = - (e/m) \hat{E}_0.$$

Отсюда

$$\hat{r}_0 = \frac{-(e/m) \hat{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Умножение полученного равенства на  $e^{i\omega t}$  дает, что

$$\hat{r}(t) = \frac{-(e/m) \hat{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Наконец, взяв вещественные части от комплексных функций  $\hat{r}$  и  $\hat{E}$ , найдем  $r$  как функцию  $t$ :

$$r(t) = \frac{-(e/m) E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (144.3)$$

Чтобы упростить задачу, будем считать молекулы неполярными. Кроме того, поскольку массы ядер велики по сравнению с массой электрона, пренебрежем смещениями ядер из положений равновесия под действием поля волны. В этом приближении дипольный электрический момент молекулы можно представить в виде

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k [\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{r}_k(t)] = \\ &= \left\{ \sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k \mathbf{r}_{0k} \right\} + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \mathbf{p}_0 + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t), \end{aligned}$$

где  $q_l$  и  $\mathbf{R}_{0l}$  — заряды и радиусы-векторы равновесных положений ядер,  $e_k$  и  $\mathbf{r}_{0k}$  — заряд и радиус-вектор равновесного положения

$k$ -го электрона,  $\mathbf{r}_k(t)$  — смещение  $k$ -го электрона из положения равновесия под действием поля волны,  $\mathbf{p}_0$  — дипольный момент молекулы в отсутствие поля, который по предположению равен нулю. Все  $\mathbf{r}_k(t)$  коллинеарны с  $\mathbf{E}(t)$ . Поэтому для проекции  $\mathbf{p}(t)$  на направление  $\mathbf{E}(t)$  получается выражение

$$p(t) = \sum_k e_k r_k(t) = \sum_k (-e) r_k(t)$$

(мы учли, что  $e_k$  всех электронов одинаковы и равны  $-e$ ). Подставим сюда значение (144.3) для  $r(t)$ , приняв во внимание, что входящие в состав молекулы электроны имеют неодинаковые собственные частоты  $\omega_{0k}$ . В результате получим

$$p(t) = \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} E(t). \quad (144.4)$$

Обозначим число молекул в единице объема буквой  $N$ . Произведение  $Np(t)$  дает поляризованность вещества  $P(t)$ . Согласно формулам (19.5) и (16.2) диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{P(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{p(t)}{E(t)}.$$

Подставив сюда значение отношения  $p(t)/E(t)$ , получающееся из (144.4), и заменив  $\epsilon$  через  $n^2$  (см. (110.3)), придем к формуле

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \quad (144.5)$$

При частотах  $\omega$ , заметно отличающихся от всех собственных частот  $\omega_{0k}$ , сумма в (144.5) будет мала по сравнению с единицей, так что  $n^2 \approx 1$ . Вблизи каждой из собственных частот функция (144.5) терпит разрыв: при стремлении  $\omega$  к  $\omega_{0k}$  слева она обращается в  $+\infty$ , при стремлении справа — в  $-\infty$  (см. пунктирные кривые на рис. 144.1). Такое поведение функции (144.5) обусловлено тем, что мы пренебрегли трением излучения (напомним, что при пренебрежении трением амплитуда вынужденных колебаний при резонансе обращается в бесконечность; см. формулу (60.18) 1-го тома). Учет трения излучения приводит к зависимости  $n^2$  от  $\omega$ , показанной на рис. 144.1 сплошной кривой.

Перейдя от  $n^2$  к  $n$  и от  $\omega$  к  $\lambda_0$ , получим кривую, изображенную на рис. 144.2 (дан лишь участок кривой в области одной из резонансных длин волн). Пунктирная кривая на этом рисунке изображает ход коэффициента поглощения света веществом (см. следующий параграф). Участок 3—4 аналогичен кривой, приведенной на рис. 142.1. Участки 1—2 и 3—4 соответствуют нормальной дисперсии ( $dn/d\lambda_0 < 0$ ). На участке 2—3 дисперсия аномальна ( $dn/d\lambda_0 > 0$ ).

В области 1—2 показатель преломления меньше единицы, следовательно, фазовая скорость волны превышает  $c$ . Это обстоятельство не противоречит теории относительности, основывающейся на утверждении, что скорость передачи сигнала не может превзойти  $c$ . В предыдущем параграфе мы выяснили, что передать сигнал с помощью идеально монохроматической волны невозможно. Передача же энергии (т. е. сигнала) с помощью не вполне монохроматической волны (группы волн) осуществляется со скоростью, равной групповой скорости, определяемой формулой (143.16). В области нормальной дисперсии  $dv/d\lambda > 0$  ( $dn$  и  $dv$  имеют разные знаки, а  $dn/d\lambda < 0$ ), так что, хотя  $v > c$ , групповая скорость оказывается меньше  $c$ .

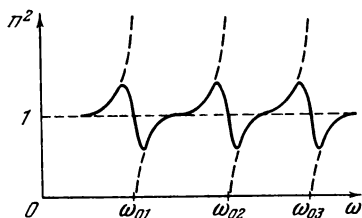


Рис. 144.1.

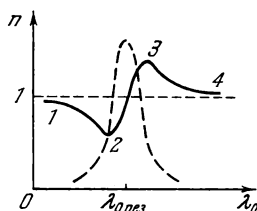


Рис. 144.2.

В области аномальной дисперсии понятие групповой скорости теряет смысл (поглощение очень велико). Поэтому вычисленное по формуле (143.16) значение  $u$  не будет характеризовать скорости передачи энергии. Соответствующий расчет дает и в этой области для скорости передачи энергии значение, меньшее  $c$ .

## § 145. Поглощение света

При прохождении световой волны через вещество часть энергии волны затрачивается на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых электронами; частично же она переходит в энергию движения атомов, т. е. во внутреннюю энергию вещества. Поэтому интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается — свет поглощается в веществе. Вынужденные колебания электронов, а следовательно, и поглощение света становятся особенно интенсивными при резонансной частоте (см. изображенную пунктиром кривую поглощения на рис. 144.2).

Опыт показывает, что интенсивность света при прохождении через вещество убывает по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-\kappa l}. \quad (145.1)$$

Здесь  $I_0$  — интенсивность света на входе в поглощающий слой (на границе или в каком-то месте внутри вещества),  $l$  — толщина слоя,

$\kappa$  — постоянная, зависящая от свойств поглощающего вещества и называемая коэффициентом поглощения. Соотношение (145.1) носит название закона Бугера.

Продифференцировав соотношение (145.1), получим

$$dI = -\kappa I_0 e^{-\kappa l} dl = -\kappa I dl. \quad (145.2)$$

Из этого выражения следует, что убыль интенсивности на пути  $dl$  пропорциональна длине этого пути и значению самой интенсивности. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поглощения.

Из формулы (145.1) вытекает, что при  $l = 1/\kappa$  интенсивность  $I$  оказывается в  $e$  раз меньше, чем  $I_0$ . Таким образом, коэффициент поглощения есть величина, обратная толщине слоя, при прохождении которого интенсивность света убывает в  $e$  раз.

Коэффициент поглощения зависит от длины волны света  $\lambda$  (или частоты  $\omega$ ). У вещества, атомы (или молекулы) которого практически не воздействуют друг на друга (газы и пары металлов при

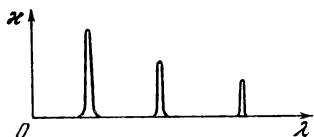


Рис. 145.1.

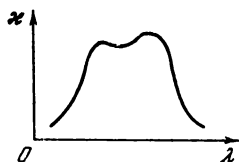


Рис. 145.2.

невысоком давлении), коэффициент поглощения для большинства длин волн близок к нулю и лишь для очень узких спектральных областей (шириной в несколько сотых ангстрема) обнаруживает резкие максимумы (рис. 145.1). Эти максимумы соответствуют резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов. В случае многоатомных молекул обнаруживаются также частоты, соответствующие колебаниям атомов внутри молекул. Поскольку массы атомов в десятки тысяч раз больше массы электрона, молекулярные частоты бывают намного меньше атомных — они попадают в инфракрасную область спектра.

Газы при высоких давлениях, а также жидкости и твердые тела дают широкие полосы поглощения (рис. 145.2). По мере повышения давления газов максимумы поглощения, первоначально очень узкие (см. рис. 145.1), все более расширяются, и при высоких давлениях спектр поглощения газов приближается к спектрам поглощения жидкостей. Этот факт указывает на то, что расширение полос поглощения есть результат взаимодействия атомов друг с другом.

Металлы практически непрозрачны для света (коэффициент  $\kappa$  для них имеет значение порядка  $10^6 \text{ м}^{-1}$ ; для сравнения укажем, что для стекла  $\kappa \approx 1 \text{ м}^{-1}$ ). Это обусловлено наличием в металлах

свободных электронов. Под действием электрического поля световой волны свободные электроны приходят в движение — в металле возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением ленц-джоулева тепла. В результате энергия световой волны быстро убывает, превращаясь во внутреннюю энергию металла.

### § 146. Рассеяние света

С классической точки зрения процесс рассеяния света заключается в том, что свет, проходящий через вещество, вызывает колебания электронов в атомах. Колеблющиеся электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям. Это явление, казалось бы, должно при всех условиях приводить к рассеянию света. Однако вторичные волны являются когерентными, так что необходимо учесть их взаимную интерференцию.

Соответствующий расчет дает, что в случае однородной среды вторичные волны полностью гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первичной волны. Поэтому перераспределения света по направлениям, т. е. рассеяния света, не происходит.

Вторичные волны не погашают друг друга в боковых направлениях только при распространении света в неоднородной среде. Световые волны, дифрагируя на неоднородностях среды, дают дифракционную картину, характеризующуюся довольно равномерным распределением интенсивности по всем направлениям. Такую дифракцию на мелких неоднородностях называют **р а с с е я н и е м с в е т а**.

Среды с явно выраженной оптической неоднородностью носят название **м у т н ы х с р е д**. К их числу относятся: 1) дымы, т. е. взвеси в газах мельчайших твердых частиц; 2) туманы — взвеси в газах мельчайших капелек жидкости; 3) взвеси или суспензии, образованные плавающими в жидкости твердыми частичками; 4) эмульсии, т. е. взвеси мельчайших капелек одной жидкости в другой, не растворяющей первую (примером эмульсии может служить молоко, представляющее собой взвесь капелек жира в воде); 5) твердые тела вроде перламутра, опалов, молочных стекол и т. п.

Свет, рассеянный на частицах, размеры которых значительно меньше длины световой волны, оказывается частично поляризованным. Это объясняется тем, что колебания электронов, вызванные рассеиваемым световым пучком, происходят в плоскости, перпендикулярной к пучку (рис. 146.1). Колебания вектора  $E$  во вторичной волне происходят в плоскости, проходящей через направление колебаний зарядов (см. рис. 109.2). Поэтому свет, рассеиваемый частицами в направлениях, перпендикулярных к пучку, будет полностью поляризован. В направлениях, образующих с пучком угол, отличный от прямого, рассеянный свет поляризован только частично.

В результате рассеяния света в боковых направлениях интенсивность в направлении распространения убывает быстрее, чем в случае одного лишь поглощения. Поэтому для мутного вещества в выражении (145.1), наряду с коэффициентом поглощения  $\kappa$ , должен стоять добавочный коэффициент  $\kappa'$ , обусловленный рассеянием:

$$I = I_0 e^{-(\kappa + \kappa')l}. \quad (146.1)$$

Постоянная  $\kappa'$  называется коэффициентом экстинкции.

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной световой волны (не более  $\sim 0,1\lambda$ ), интенсивность рассеянного света  $I$

оказывается пропорциональной четвертой степени частоты или обратно пропорциональной четвертой степени длины волны:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (146.2)$$

Эта зависимость носит название закона Рэлея. Ее происхождение легко понять, если учесть, что мощность излучения колеблющегося заряда пропорциональна четвертой степени частоты и, следовательно, обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (см. формулу (109.5)).

Если размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны, электроны, находящиеся в различных местах неоднородности, колеблются с заметным сдвигом по фазе. Это обстоятельство усложняет явление и приводит к другим закономерностям — интенсивность рассеянного света становится пропорциональной всего лишь квадрату частоты (обратно пропорциональной квадрату длины волны).

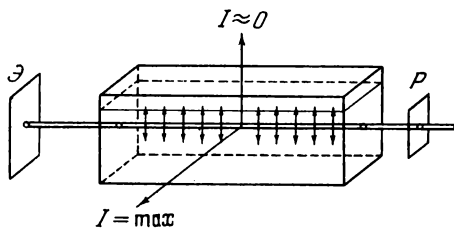


Рис. 146.2.

Проявление закономерности (146.2) легко наблюдать, пропуская пучок белого света через сосуд с мутной жидкостью (рис. 146.2). Вследствие рассеяния след пучка в жидкости хорошо виден сбоку, причем, поскольку короткие световые волны рассеиваются гораздо сильнее длинных, этот след представляется голубоватым. Прошедший через жидкость пучок оказывается обогащенным длинноволновым излучением и образует на экране Э не белое, а красновато-желтое пятно. Поставив на входе пучка в сосуд поляризатор Р, мы обнаружим, что интенсивность рассеянного света в различных

направлениях, перпендикулярных к первичному пучку, не одинакова. Направленность излучения диполя (см. рис. 109.3) приводит к тому, что в направлениях, совпадающих с плоскостью колебаний первичного пучка, интенсивность рассеянного света практически равна нулю, в направлениях же, перпендикулярных к плоскости колебаний, интенсивность рассеянного света максимальна. Поворачивая поляризатор вокруг направления первичного пучка, мы будем наблюдать попеременное усиление и ослабление света, рассеивающегося в данном направлении.

Даже тщательно очищенные от посторонних примесей и загрязнений жидкости и газы в некоторой степени рассеивают свет. Л. И. Мандельштам и М. Смолуховский установили, что причиной появления оптических неоднородностей являются в этом случае флуктуации плотности (т. е. наблюдаемые в пределах малых объемов отклонения плотности от ее среднего значения). Эти флуктуации вызваны беспорядочным движением молекул вещества; поэтому обусловленное ими рассеяние света называется молекулярным.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. Непрерывно возникающие в атмосфере, вследствие беспорядочного молекулярного движения, места сгущения и разрежения воздуха рассеивают солнечный свет. При этом согласно закону (146.2) голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обуславливая голубой цвет неба. Когда Солнце находится низко над горизонтом, распространяющиеся непосредственно от него лучи проходят большую толщу рассеивающей среды, в результате чего они оказываются обогащенными большими длинами волн. По этой причине небо на заре окрашивается в красные тона.

Особенно благоприятные условия для возникновения значительных флуктуаций плотности имеются вблизи критического состояния вещества (в критической точке  $dp/dV = 0$ ; см. § 123 1-го тома). Эти флуктуации приводят к столь интенсивному рассеянию света, что «на просвет» стеклянная ампула с веществом кажется совершенно черной. Это явление называется критической опалесценцией.

### § 147. Эффект Вавилова — Черенкова

В 1934 г. П. А. Черенков, работавший под руководством С. И. Вавилова, обнаружил особый вид свечения жидкостей под действием  $\gamma$ -лучей радия. Вавилов высказал правильное предположение, что источником излучения служат быстрые электроны, создаваемые  $\gamma$ -лучами. Это явление получило название эффекта Вавилова — Черенкова. Его полное теоретическое объяснение было дано в 1937 г. И. Е. Таммом и И. М. Франком<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В 1958 г. работа Черенкова, Тамма и Франка была отмечена Нобелевской премией.



Согласно электромагнитной теории заряд, движущийся равномерно, не излучает электромагнитных волн (см. § 109). Однако, как показали Тамм и Франк, это справедливо лишь в том случае, если скорость  $v$  заряженной частицы не превышает фазовую скорость  $c/n$  электромагнитных волн в той среде, в которой движется частица. При условии, что  $v > c/n$ , даже двигаясь равномерно, частица излучает электромагнитные волны. В действительности частица теряет энергию на излучение, вследствие чего движется с отрицательным ускорением. Но это ускорение является не причиной (как в случае  $v < c/n$ ), а следствием излучения. Если бы потеря энергии за счет излучения восполнялась каким-либо способом, то частица, движущаяся равномерно со скоростью  $v > c/n$ , все равно была бы источником излучения.

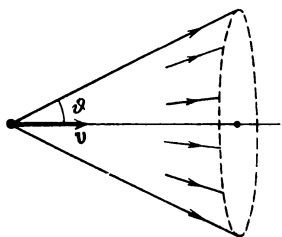


Рис. 147.1.

Эффект Вавилова — Черенкова наблюдался экспериментально для электронов, протонов и мезонов при движении их в жидких и твердых средах.

В излучении Вавилова — Черенкова преобладают короткие волны, поэтому оно имеет голубую окраску. Наиболее характерным свойством этого излучения является то, что оно испускается не по всем направлениям, а лишь вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы (рис. 147.1). Угол  $\theta$  между направлениями распространения излучения и вектором скорости частицы определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{c/n}{v} = \frac{c}{nv}. \quad (147.1)$$

Эффект Вавилова — Черенкова находит широкое применение в экспериментальной технике. В так называемых счетчиках Черенкова световая вспышка, порождаемая быстро движущейся заряженной частицей, превращается с помощью фотоумножителя<sup>1</sup> в импульс тока. Для того чтобы заставить сработать такой счетчик, энергия частицы должна превысить пороговое значение, определяемое условием:  $v = c/n$ . Поэтому черенковские счетчики позволяют не только регистрировать частицы, но и судить об их энергии. Удастся даже определить угол  $\theta$  между направлением вспышки и скоростью частицы, что дает возможность вычислить по формуле (147.1) скорость (а следовательно, и энергию) частицы.

<sup>1</sup> Фотоумножителем называют электронный умножитель, первый электрод которого (фотокатод) способен испускать электроны под действием света.

## ОПТИКА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

## § 148. Скорость света

Скорость света в вакууме является одной из фундаментальных физических величин. Установление конечности скорости света имело огромное принципиальное значение. Конечность скорости передачи сигналов, передачи взаимодействия, лежит в основе теории относительности.

В связи с тем, что числовое значение скорости света очень велико, экспериментальное определение этой скорости представляет собой весьма сложную задачу. Первые определения скорости света были осуществлены на основании астрономических наблюдений. В 1676 г. датский астроном Ремер определил скорость света из наблюдений за затмениями спутников Юпитера. Он получил значение, равное 215 000 км/с.

Движение Земли по орбите приводит к тому, что видимое положение звезд на небесной сфере изменяется. Это явление, называемое аберрацией света, использовал в 1727 г. английский астроном Бредли для определения скорости света.

Предположим, что направление на наблюдаемую в телескоп звезду перпендикулярно к плоскости земной орбиты. Тогда угол между направлением на звезду и вектором скорости Земли  $v$  будет в течение всего года равен  $\pi/2$  (рис. 148.1). Направим ось телескопа точно на звезду. За время  $\tau$ , которое требуется свету, чтобы пройти расстояние от объектива до окуляра, телескоп сместится вместе с Землей в направлении, перпендикулярном к лучу света, на расстояние  $v\tau$ . В результате изображение звезды окажется не в центре окуляра. Для того чтобы изображение звезды оказалось точно в центре окуляра, нужно повернуть ось телескопа в направлении вектора  $v$  на угол  $\alpha$ , тангенс которого определяется соотношением

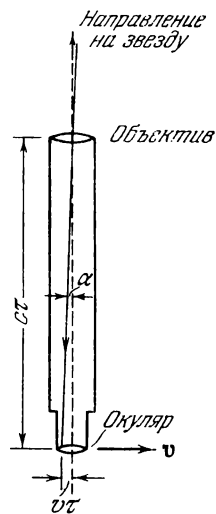


Рис. 148.1.

$$\operatorname{tg} \alpha = v/c \quad (148.1)$$

(см. рис. 148.1). Точно так же падающие вертикально капли дождя пролетят сквозь длинную трубу, установленную на движущейся тележке, лишь в том случае, если наклонить ось трубы в направлении движения тележки.

Итак, видимое положение звезды оказывается смещенным относительно истинного на угол  $\alpha$ . Вектор скорости Земли все время поворачивается в плоскости орбиты. Поэтому ось телескопа тоже поворачивается, описывая конус вокруг истинного направления на звезду. Соответственно видимое положение звезды на небесной сфере описывает окружность, угловой диаметр которой равен  $2\alpha$ . Если направление на звезду образует с плоскостью земной орбиты угол, отличный от прямого, видимое положение звезды описывает эллипс,

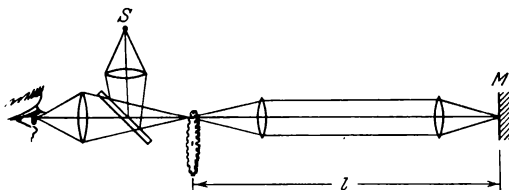


Рис. 148.2.

большая ось которого имеет угловой размер  $2\alpha$ . Для звезды, лежащей в плоскости орбиты, эллипс вырождается в прямую.

Из астрономических наблюдений Бредли нашел, что  $2\alpha = 40,9''$ . Соответствующее значение  $c$ , полученное по формуле (148.1), оказалось равным 303 000 км/с.

В земных условиях скорость света была впервые измерена французским ученым Физо в 1849 г. Схема опыта дана на рис. 148.2. Свет от источника  $S$  падал на полупрозрачное зеркало. Отразившийся от зеркала свет попадал на край быстро вращающегося зубчатого диска. Всякий раз, когда против светового пучка оказывалась прорезь между зубцами, возникал световой импульс, который доходил до зеркала  $M$  и отражался обратно. Если в момент, когда свет возвращался к диску, против пучка оказывалась прорезь, отраженный импульс проходил частично через полупрозрачное зеркало и попадал в глаз наблюдателя. Если на пути отраженного импульса оказывался зубец диска, наблюдатель света не видел.

За время  $\tau = 2l/c$ , которое свет затрачивал на прохождение пути до зеркала  $M$  и обратно, диск успевал повернуться на угол  $\Delta\phi = \omega\tau = 2l\omega/c$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения диска. Пусть число зубцов диска равно  $N$ . Тогда угол между серединами соседних зубцов равен  $\alpha = 2\pi/N$ . Свет не возвращался в глаз наблюдателя при таких скоростях вращения диска, при которых за время  $\tau$  диск успевал повернуться на углы  $\alpha/2, 3\alpha/2, \dots, (m - 1/2)\alpha$  и т. д.

Следовательно, условие  $m$ -го затемнения имеет вид

$$\Delta\varphi = (m - 1/2)\alpha \text{ или } 2l\omega_m/c = (m - 1/2)2\pi/N.$$

По этой формуле, зная  $l$ ,  $N$  и угловую скорость  $\omega_m$ , при которой получается  $m$ -е затемнение, можно определить  $c$ . В опыте Физо  $l$  было равно примерно 8,6 км. Для  $c$  получилось значение 313 000 км/с.

В 1928 г. для измерения скорости света были использованы ячейки Керра (см. § 140). С их помощью можно осуществить прерывание светового пучка с гораздо большей частотой ( $\sim 10^7 \text{ с}^{-1}$ ), чем с помощью зубчатого диска. Это позволило произвести измерения  $c$  при  $l$  порядка нескольких метров.

Майкельсон произвел несколько измерений скорости света методом вращающейся призмы. В опыте Майкельсона, осуществленном в 1932 г., свет распространялся в трубе длиной 1,6 км, из которой был откачан воздух.

В настоящее время скорость света в вакууме принимается равной

$$c = 299\,792,458 \text{ км/с.} \quad (148.2)$$

Отметим, что во всех опытах, в которых осуществлялось прерывание света, определялась не фазовая, а групповая скорость световых волн. В воздухе эти две скорости практически совпадают.

## § 149. Опыт Физо

До сих пор мы предполагали, что источники, приемники и другие тела, относительно которых рассматривалось распространение света, неподвижны. Естественно заинтересоваться вопросом, как скажется на распространении света движение источника световых волн. При этом возникает необходимость указать, относительно чего происходит движение. В § 103 мы выяснили, что движение источника или приемника звуковых волн относительно среды, в которой эти волны распространяются, оказывает влияние на протекание акустических явлений (эффект Доплера) и, следовательно, может быть обнаружено.

Первоначально волновая теория рассматривала свет как упругие волны, распространяющиеся в некоей гипотетической среде, получившей название мирового эфира. После создания теории Максвелла на смену упругому эфиру пришел эфир — носитель электромагнитных волн и полей. Под этим эфиром подразумевалась особая среда, заполняющая, как и ее предшественник упругий эфир, все мировое пространство и пронизывающая все тела. Раз эфир представлял собой некую среду, можно было рассчитывать обнаружить движение тел, например источников или приемников света, по отношению к этой среде. В частности, следовало ожидать суще-

ствования «эфирного ветра», обдувающего Землю при ее движении вокруг Солнца.

В механике был установлен принцип относительности Галилея, согласно которому все инерциальные системы отсчета являются в механическом отношении равноправными. Обнаружение эфира сделало бы возможным выделение (с помощью оптических явлений) особенной (связанной с эфиром), преимущественной, абсолютной системы отсчета. Тогда движение остальных систем можно было бы рассматривать по отношению к этой абсолютной системе.

Таким образом, выяснение вопроса о взаимодействии мирового эфира с движущимися телами играло принципиальную роль.

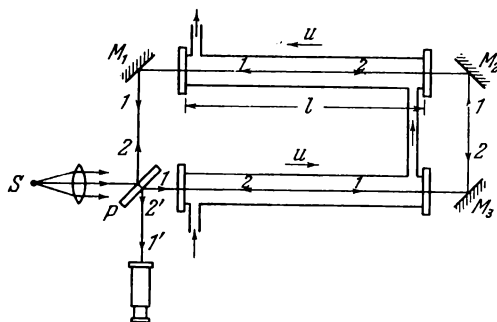


Рис. 149.1.

Можно было допустить три возможности: 1) эфир совершенно не возмущается движущимися телами; 2) эфир увлекается движущимися телами частично, приобретая скорость, равную  $\alpha v$ , где  $v$  — скорость тела относительно абсолютной системы отсчета,  $\alpha$  — коэффициент увлечения, меньший единицы; 3) эфир полностью увлекается движущимися телами, например Землей, подобно тому, как тело при своем движении увлекает прилежащие к его поверхности слои газа. Однако последняя возможность опровергается существованием явления абберации света. В предыдущем параграфе мы выяснили, что изменение видимого положения звезд может быть объяснено движением телескопа относительно системы отсчета (среды), в которой распространяется световая волна.

Для выяснения вопроса о том, увлекается ли эфир движущимися телами, Физо осуществил в 1851 г. следующий опыт. Параллельный пучок света от источника  $S$  разделялся посеребренной полупрозрачной пластинкой  $P$  на два пучка, обозначенных цифрами 1 и 2 (рис. 149.1). За счет отражения от зеркал  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  пучки, пройдя в общей сложности одинаковый путь  $L$ , снова попадали на пластинку  $P$ . Пучок 1 частично проходил через  $P$ , пучок 2 частично отражался, в результате чего возникало два когерентных пучка 1' и 2', которые давали в фокальной плоскости зрительной трубы интерфе-

ренционную картину в виде полос. На пути пучков 1 и 2 были установлены две трубы, по которым могла пропускаться вода со скоростью  $u$  в направлениях, указанных стрелками. Луч 2 распространялся в обеих трубах навстречу току воды, луч 1 — по течению.

При неподвижной воде пучки 1 и 2 проходят путь  $L$  за одинаковое время. Если вода при своем движении хотя бы частично увлекает эфир, то при включении тока воды луч 2, который распространяется против течения, затратит на прохождение пути  $L$  большее время, чем луч 1, распространяющийся по течению. В результате между лучами возникнет некоторая разность хода, и интерференционная картина сместится.

Интересующая нас разность хода возникает лишь на пути лучей, пролегающем в воде. Этот путь имеет длину  $2l$ . Обозначим скорость света относительно эфира в воде буквой  $v$ . Когда эфир не увлекается водой, скорость света относительно установки будет совпадать с  $v$ . Предположим, что вода при своем движении частично увлекает эфир, сообщая ему относительно установки скорость  $au$  ( $u$  — скорость воды,  $a$  — коэффициент увлечения). Тогда скорость света относительно установки будет равна  $v+au$  для луча 1 и  $v-au$  для луча 2. Луч 1 пройдет путь  $2l$  за время  $t_1 = 2l/(v+au)$ , луч 2 — за время  $t_2 = 2l/(v-au)$ . Из формулы (115.4) вытекает, что оптическая длина пути, на прохождение которой затрачивается время  $t$ , равна  $ct$ . Следовательно, разность хода лучей 1 и 2 равна  $\Delta = c(t_2 - t_1)$ . Разделив  $\Delta$  на  $\lambda_0$ , получим число полос, на которое сместится интерференционная картина при включении тока вода:

$$\Delta N = \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} \left( \frac{2l}{v-au} - \frac{2l}{v+au} \right) = \frac{4clau}{\lambda_0(v^2 - a^2u^2)}.$$

Физо обнаружил, что интерференционные полосы действительно смещаются. Соответствующее смещению значение коэффициента увлечения оказалось равным

$$a = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (149.1)$$

где  $n$  — показатель преломления воды. Таким образом, опыт Физо показал, что эфир (если он существует) увлекается движущейся водой только частично.

Легко убедиться в том, что результат опыта Физо объясняется релятивистским законом сложения скоростей. Согласно первой из формул (66.1) 1-го тома скорости  $v_x$  и  $v'_x$  некоторого тела в системах  $K$  и  $K'$  связаны соотношением

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x / c^2} \quad (149.2)$$

( $v_0$  — скорость системы  $K'$  относительно системы  $K$ ).

Свяжем с прибором Физо систему отсчета  $K$ , а с движущейся водой — систему  $K'$ . Тогда роль  $v_0$  будет играть скорость течения

воды  $u$ , роль  $v'_x$  — скорость света относительно воды, равная  $c/n$ , и, наконец, роль  $v_x$  — скорость света относительно прибора  $v_{\text{приб}}$ . Подстановка этих значений в формулу (149.2) дает

$$v_{\text{приб}} = \frac{c/n + u}{1 + u(c/n)/c^2} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn}.$$

Скорость течения воды  $u$  много меньше  $c$ . Поэтому полученное выражение можно упростить следующим образом:

$$v_{\text{приб}} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn} \approx \left( \frac{c}{n} + u \right) \left( 1 - \frac{u}{cn} \right) \approx \frac{c}{n} + u \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (149.3)$$

(мы пренебрегли членом  $u^2/cn$ ).

Согласно классическим представлениям скорость света относительно прибора  $v_{\text{приб}}$  равна сумме скорости света относительно эфира, т. е.  $c/n$ , и скорости эфира относительно прибора, т. е.  $au$ :

$$v_{\text{приб}} = c/n + au.$$

Сравнение с формулой (149.3) дает для коэффициента увлечения  $a$  значение, полученное Физо (см. (149.1)).

Следует иметь в виду, что одинакова во всех системах отсчета лишь скорость света в вакууме. Скорость света в веществе различна в разных системах отсчета. Значение  $c/n$  она имеет в системе отсчета, связанной со средой, в которой происходит распространение света.

## § 150. Опыт Майкельсона

В 1881 г. Майкельсон осуществил знаменитый опыт, с помощью которого он рассчитывал обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер). В 1887 г. Майкельсон повторил свой опыт совместно с Морли на более совершенном приборе. Установка Майкельсона — Морли изображена на рис. 150.1. Кирпичное основание поддерживало кольцевой чугунный желоб с ртутью. На ртуть плавал деревянный поплавок, имеющий форму нижней половины разрезанного вдоль бублика. На этот поплавок устанавливалась массивная квадратная каменная плита. Такое устройство позволяло плавно поворачивать плиту вокруг вертикальной оси прибора. На плите монтировался интерферометр Майкельсона (см. рис. 123.1), видоизмененный так, что оба луча, прежде чем вернуться к полупрозрачной пластинке, несколько раз проходили туда и обратно путь, совпадающий с диагональю плиты. Схема хода лучей показана на рис. 150.2. Обозначения на этом рисунке соответствуют обозначениям на рис. 123.1.

В основе опыта лежали следующие соображения. Предположим, что плечо  $PM_2$  интерферометра (рис. 150.3) совпадает с направлением движения Земли относительно эфира. Тогда время, необходимое лучу  $I$ , чтобы пройти путь до зеркала  $M_1$  и обратно,

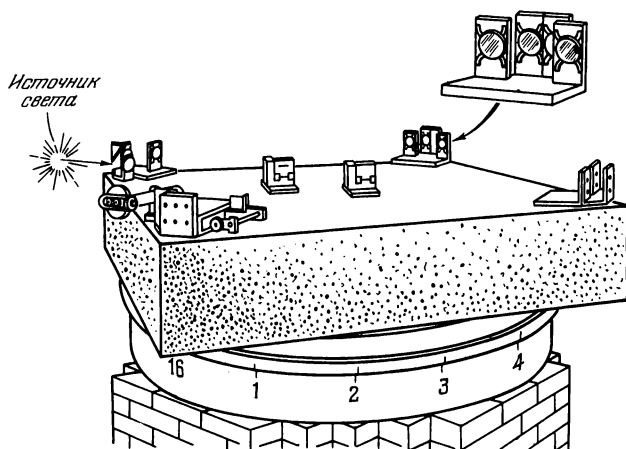


Рис. 150.1.

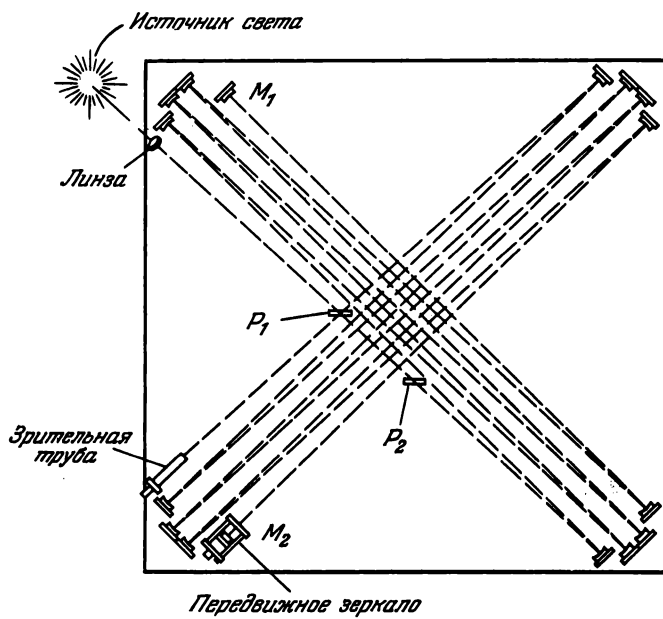


Рис. 150.2.



будет отлично от времени, необходимого для прохождения пути  $PM_2P$  лучом 2. В результате, даже при равенстве длин обоих плеч, лучи 1 и 2 приобретут некоторую разность хода. Если повернуть прибор на  $90^\circ$ , плечи поменяются местами и разность хода изменит знак. Это должно привести к смещению интерференционной картины, величину которого, как показали произведенные Майкельсоном расчеты, вполне можно было бы обнаружить.

Чтобы вычислить ожидаемое смещение интерференционной картины, найдем времена прохождения соответствующих путей лучами 1 и 2. Пусть скорость Земли относительно эфира равна  $v$ .

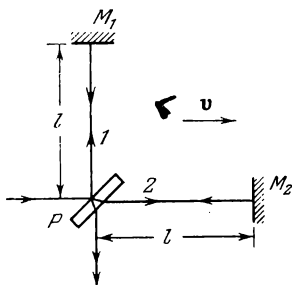


Рис. 150.3.

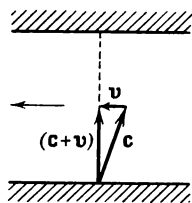


Рис. 150.4.

Если эфир не увлекается Землей и скорость света относительно эфира равна  $c$  (показатель преломления воздуха практически равен единице), то скорость света относительно прибора будет равна  $c - v$  для направления  $PM_2$  и  $c + v$  для направления  $M_2P$ . Следовательно, время для луча 2 определяется выражением

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (150.1)$$

(скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с, поэтому  $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$ ).

Прежде чем приступить к вычислению времени  $t_1$ , рассмотрим следующий пример из механики. Пусть катеру, который развивает скорость  $c$  относительно воды, требуется пересечь реку, текущую со скоростью  $v$ , в направлении, точно перпендикулярном к ее берегам (рис. 150.4). Для того чтобы катер перемещался в заданном направлении, его скорость  $c$  относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке. Поэтому скорость катера относительно берегов будет равна  $|c + v| = \sqrt{c^2 - v^2}$ . Такова же будет (как предполагал Майкельсон) скорость луча 1 относительно при-

бора. Следовательно, время для луча 1 равно<sup>1</sup>

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (150.2)$$

Подставив в выражение  $\Delta = c(t_2 - t_1)$  значения (150.1) и (150.2) для  $t_2$  и  $t_1$ , получим разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta = 2l \left[ \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = l \frac{v^2}{c^2}.$$

При повороте прибора на  $90^\circ$  разность хода изменит знак. Следовательно, число полос, на которое сместится интерференционная картина, составит

$$\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda_0} = 2 \frac{l}{\lambda_0} \frac{v^2}{c^2}. \quad (150.3)$$

Длина плеча  $l$  (учитывая многократные отражения) составляла 11 м. Длина волны света в опыте Майкельсона и Морли равнялась 0,59 мкм. Подстановка этих значений в формулу (150.3) дает

$$\Delta N = \frac{2 \cdot 11}{0,59 \cdot 10^{-6}} 10^{-8} = 0,37 \approx 0,4 \text{ полосы.}$$

Прибор позволял обнаружить смещение порядка 0,01 полосы. Однако никакого смещения интерференционной картины обнаружено не было. Чтобы исключить возможность того, что в момент измерений плоскость горизонта окажется перпендикулярной к вектору орбитальной скорости Земли, опыт повторялся в различное время суток. Впоследствии опыт производился многократно в различное время года (за год вектор орбитальной скорости Земли поворачивается в пространстве на  $360^\circ$ ) и неизменно давал отрицательные результаты. Обнаружить эфирный ветер не удавалось. Мировой эфир оставался неуловимым.

Было предпринято несколько попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона, не отказываясь от гипотезы о мировом эфире. Однако все эти попытки оказались несостоятельными. Исчерпывающее непротиворечивое объяснение всех опытных фактов, в том числе и результатов опыта Майкельсона, было дано Эйнштейном в 1905 г. Эйнштейн пришел к выводу, что мирового эфира, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, не существует. В соответствии с этим Эйнштейн распространил механический принцип относительности на все без исключения физические явления. Далее Эйнштейн постулировал в соответствии с опытными данными, что скорость света в вакууме одинакова во

<sup>1</sup> Мы воспользовались формулами  $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$  и  $1/(1-x) \approx 1+x$ , справедливыми для малых  $x$ .

всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образуют основу созданной Эйнштейном специальной теории относительности (см. главу VIII 1-го тома).

### § 151. Эффект Доплера

В акустике изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника по отношению к среде, являющейся носителем звуковых волн (см. формулу (103.2)). Для световых волн также существует эффект Доплера. Однако особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн, не существует.

Поэтому доплеровское смещение частоты световых волн определяется только относительной скоростью источника и приемника.

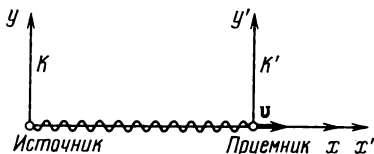


Рис. 151.1.

Свяжем с источником света начало координат системы  $K$ , а с приемником — начало координат системы  $K'$  (рис. 151.1). Оси  $x$

и  $x'$  направим, как обычно, вдоль вектора скорости  $v$ , с которой система  $K'$  (т. е. приемник) движется относительно системы  $K$  (т. е. источника). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источником по направлению к приемнику, будет в системе  $K$  иметь вид

$$E(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (151.1)$$

Здесь  $\omega$  — частота волны, фиксируемая в системе отсчета, связанной с источником, т. е. частота, с которой колеблется источник. Мы предполагаем, что световая волна распространяется в вакууме; поэтому фазовая скорость равна  $c$ .

Согласно принципу относительности законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, в системе  $K'$  волна (151.1) описывается уравнением

$$E'(x', t') = A' \cos \left[ \omega' \left( t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha' \right], \quad (151.2)$$

где  $\omega'$  — частота, фиксируемая в системе отсчета  $K'$ , т. е. частота, воспринимаемая приемником. Мы снабдили штрихами все величины, кроме  $c$ , которая одинакова во всех системах отсчета.

Уравнение волны в системе  $K'$  можно получить из уравнения в системе  $K$ , перейдя от  $x$  и  $t$  к  $x'$  и  $t'$  с помощью преобразований Лоренца. Заменяя в (151.1)  $x$  и  $t$  согласно формулам (63.16)

1-го тома, получим

$$E(x', t') = A \cos \left\{ \omega \left[ \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] + \alpha \right\}$$

(роль  $v_0$  играет  $v$ ). Последнее выражение легко привести к виду

$$E(x', t') = A \cos \left\{ \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha \right\}. \quad (151.3)$$

Уравнение (151.3) описывает в системе  $K'$  ту же волну, что и уравнение (151.2). Поэтому должно выполняться соотношение

$$\omega' = \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Изменим обозначения: частоту источника  $\omega$  обозначим через  $\omega_0$ , а частоту приемника  $\omega'$  — через  $\omega$ . В результате формула примет вид

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (151.4)$$

Перейдя от круговой частоты к обычной, получим

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (151.5)$$

Фигурирующая в формулах (151.4) и (151.5) скорость  $v$  приемника по отношению к источнику есть величина алгебраическая. При удалении приемника  $v > 0$  и согласно (151.4)  $\omega < \omega_0$ ; при приближении приемника к источнику  $v < 0$ , так что  $\omega > \omega_0$ .

В случае, если  $v \ll c$ , формулу (151.4) можно приближенно записать следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - (1/2)(v/c)}{1 + (1/2)(v/c)} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right).$$

Отсюда, ограничившись членами порядка  $v/c$ , получим

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{v}{c} \right). \quad (151.6)$$

Из этой формулы можно найти относительное изменение частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{v}{c} \quad (151.7)$$

(под  $\Delta\omega$  подразумевается  $\omega - \omega_0$ ).

Можно показать, что, кроме рассмотренного нами продольного эффекта, для световых волн существует также поперечный эффект Доплера. Он заключается в уменьшении воспринимаемой приемником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпенди-

кулярно к прямой, проходящей через приемник и источник<sup>1</sup> (когда, например, источник движется по окружности, в центре которой помещается приемник). В этом случае частота  $\omega_0$  в системе источника связана с частотой  $\omega$  в системе приемника соотношением

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (151.8)$$

Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (151.9)$$

пропорционально квадрату отношения  $v/c$  и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте, для которого относительное изменение частоты пропорционально первой степени  $v/c$ .

Существование поперечного эффекта Доплера было доказано экспериментально Айвсом в 1938 г. В опытах Айвса определялось изменение частоты излучения атомов водорода в канальных лучах (см. последний абзац § 85). Скорость атомов составляла примерно  $2 \cdot 10^6$  м/с. Эти опыты представляют собой непосредственное экспериментальное подтверждение справедливости преобразований Лоренца.

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль луча, а другая — перпендикулярно к лучу. Первая составляющая обусловит продольный, вторая — поперечный эффект Доплера.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звезд. Измерив относительное смещение линий в спектрах звезд, можно по формуле (151.4) определить  $v$ .

Тепловое движение молекул светящегося газа приводит вследствие эффекта Доплера к уширению спектральных линий. Из-за хаотичности теплового движения все направления скоростей молекул относительно спектрографа равновероятны. Поэтому в регистрируемом прибором излучении присутствуют все частоты, заключенные в интервале от  $\omega_0 (1 - v/c)$  до  $\omega_0 (1 + v/c)$ , где  $\omega_0$  — частота, излучаемая молекулами,  $v$  — скорость теплового движения (см. формулу (151.6)). Таким образом, регистрируемая ширина спектральной линии составит  $2\omega_0 v/c$ . Величину

$$\delta\omega_D = 2\omega_0 \frac{v}{c} \quad (151.10)$$

называют доплеровской шириной спектральной линии (под  $v$  подразумевается наиболее вероятная скорость молекул). По величине доплеровского уширения спектральных линий можно судить о скорости теплового движения молекул, а следовательно, и о температуре светящегося газа.

<sup>1</sup> Напомним, что для звуковых волн поперечного эффекта Доплера не существует.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе

Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi (2,997925)^2 \cdot 10^9} \text{ Ф/м} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м.}$$

Магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Электродинамическая постоянная

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Соотношения между единицами даны приближенно. Чтобы получить более точные значения, нужно в соотношениях, приведенных в последнем столбце, заменить 3 на 2,997925 и 9 на  $(2,997925)^2$ .

Величины и их обозначения	Единицы и их обозначения		Соотношения между единицами
	СИ	Гауссова система	
Сила $F$	ньютон (Н)	дина (дин)	$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$
Работа $A$ и энергия $W$	джоуль (Дж)	эрг (эрг)	$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$
Заряд $q$	кулон (Кл)	СГСЭ-ед.	$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$
Напряженность электрического поля $E$	вольт на метр (В/м)	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$
Потенциал $\phi$ , напряжение $U$ и э.д.с. $\mathcal{E}$	вольт (В)	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} = 300 \text{ В}$
Электрический дипольный момент $p$	Кл·м	СГСЭ-ед.	$1 \text{ Кл·м} = 3 \cdot 10^{11} \text{ СГСЭ-ед.}$
Поляризованность $P$	Кл/м <sup>2</sup>	СГСЭ-ед.	$1 \text{ Кл/м}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$

## Продолжение

Величины и их обозначения	Единицы и их обозначения		Соотношения между единицами
	СИ	Гауссова система	
Диэлектрическая восприимчивость $\kappa$	СИ-ед.	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = = $4\pi$ СИ-ед.
Электрическое смещение (электрическая индукция) $D$	кулон на квадратный метр ( $\text{Кл}/\text{м}^2$ )	СГСЭ-ед.	1 $\text{Кл}/\text{м}^2$ = = $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Поток электрического смещения (поток электрической индукции) $\Phi$	кулон (Кл)	СГСЭ-ед.	1 Кл = = $4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Электрическая емкость $C$	фарад (Ф)	сантиметр (см)	1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см
Сила тока $I$	ампер (А)	СГСЭ-ед.	1 А = = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Плотность тока $j$	ампер на кв. метр ( $\text{А}/\text{м}^2$ )	СГСЭ-ед.	1 $\text{А}/\text{м}^2$ = = $3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Электрическое сопротивление $R$	ом (Ом)	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = = $9 \cdot 10^{11}$ Ом
Удельное сопротивление $\rho$	ом-метр ( $\text{Ом} \cdot \text{м}$ )	СГСЭ-ед.	1 СГСЭ-ед. = = $9 \cdot 10^9$ Ом $\cdot$ м
Удельная проводимость $\sigma$	сименс на метр ( $\text{См}/\text{м}$ )	СГСЭ-ед.	1 $\text{См}/\text{м}$ = = $9 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Магнитная индукция $B$	тесла (Тл)	гаусс (Гс)	1 Тл = $10^4$ Гс
Поток магнитной индукции $\Phi$ и потоко-сцепление $\Psi$	вебер (Вб)	максвелл (Мкс)	1 Вб = $10^8$ Мкс
Магнитный момент $p_m$	ампер-квадратный метр ( $\text{А} \cdot \text{м}^2$ )	СГСМ-ед.	1 $\text{А} \cdot \text{м}^2$ = = $10^3$ СГСМ-ед.
Намагниченность $J$	ампер на метр ( $\text{А}/\text{м}$ )	СГСМ-ед.	1 СГСМ-ед. = = $10^3$ А/м
Напряженность магнитного поля $H$	ампер на метр ( $\text{А}/\text{м}$ )	эрстед (Э)	1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э 1 Э = 79,6 А/м
Магнитная восприимчивость $\chi$	СИ-ед.	СГСМ-ед.	1 СГСМ-ед. = = $4\pi$ СИ-ед.
Индуктивность $L$ и взаимная индуктивность $L_{12}$	генри (Гн)	сантиметр (см)	1 Гн = $10^9$ см

## II. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Напряженность электрического поля (определение)	$E = \frac{F}{q}$	
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$
Потенциал (определение)	$\varphi = \frac{W_p}{q}$	
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er}$	$\varphi = \frac{q}{er}$
Работа сил поля над зарядом	$A = q (\varphi_1 - \varphi_2)$	
Связь между $E$ и $\varphi$	$E = -\nabla\varphi$	
Связь между $\varphi$ и $E$	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl$	
Ротор вектора $E$ для электростатического поля	$[\nabla E] = 0$	
Циркуляция вектора $E$ для электростатического поля	$\oint E dl = 0$	
Электрический момент диполя	$p = ql$	
Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле	$N = [pE]$	
Энергия диполя в электрическом поле	$W = -pE$	
Дипольный момент «упругой» молекулы	$p = \beta\epsilon_0 E$	$p = \beta E$



## Продолжение

Наименование	СИ	Гауссова система
Поляризованность (определение)		$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}$
Связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$
Связь между $\mathbf{P}$ и объемной плотностью связанных зарядов		$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
Связь между $\mathbf{P}$ и поверхностной плотностью связанных зарядов		$\sigma' = P_n$
Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
Дивергенция вектора $\mathbf{D}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$
Теорема Гаусса для $\mathbf{D}$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \sum q$
Связь между диэлектрической проницаемостью $\epsilon$ и диэлектрической восприимчивостью $\kappa$	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi \kappa$
Связь между значениями $\kappa$ в СИ и в гауссовой системе		$\kappa_{\text{СИ}} = 4\pi \kappa_{\text{ГС}}$
Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в вакууме	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E}$
$\mathbf{D}$ поля точечного заряда	$D = \frac{1}{4\pi r^2} q$	$D = \frac{q}{r^2}$
Емкость конденсатора (определение)		$C = \frac{q}{U}$
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Энергия системы зарядов		$W = \frac{1}{2} \sum q \varphi$
Энергия заряженного конденсатора		$W = \frac{CU^2}{2}$

## Продолжение

Наименование	СИ	Гауссова система
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Сила тока (определение)		$I = \frac{dq}{dt}$
Плотность тока (определение)		$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$
Уравнение непрерывности		$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
Напряжение (определение)		$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$
Закон Ома		$I = \frac{1}{R} U$
Закон Ома в дифференциальной форме		$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$
Закон Джоуля — Ленца		$Q = \int_0^t R I^2 dt$
Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме		$Q_{yd} = \rho j^2$
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины)	$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{b}$
Поле свободно движущегося заряда	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}$
Закон Био — Савара	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{v}\mathbf{B}]$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$
Закон Ампера	$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
Магнитный момент контура с током	$p_m = IS$	$p_m = \frac{1}{c} IS$

## Продолжение

Наименование	СИ	Гауссова система
Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле		$\mathbf{N} = [\rho_m \mathbf{B}]$
«Механическая» энергия магнитного момента в магнитном поле		$W = - \rho_m \mathbf{B}$
Дивергенция вектора $\mathbf{B}$		$\nabla \mathbf{B} = 0$
Теорема Гаусса для $\mathbf{B}$		$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$
Намагниченность (определение)		$\mathbf{J} = \frac{\sum \rho_m}{\Delta V}$
Напряженность магнитного поля (определение)	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{J}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}$
Связь между $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$		$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$
Связь между магнитной проницаемостью $\mu$ и магнитной восприимчивостью $\chi$	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Связь между значениями $\chi$ в СИ и в гауссовой системе		$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{ГС}}$
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Ротор вектора $\mathbf{H}$ в случае стационарного поля	$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j}$	$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ в случае стационарного поля	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I$	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2I}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{I}{2R}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$

## Продолжение

Наименование	СИ	Гауссова система
Напряженность поля соленоида	$H = nI$	$H = \frac{4\pi}{c} nI$
Поток магнитной индукции (определение)	$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS$	
Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле	$A = I \Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c} I \Delta\Phi$
Потокоцепление, или полный магнитный поток (определение)	$\Psi = \sum \Phi$	
Э.д.с. индукции	$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{I}$	$L = c \frac{\Psi}{I}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu n^2 l S$	$L = 4\pi \mu n^2 l S$
Э.д.с. самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}$	$\mathcal{E}_s = - \frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров с током	$W = \frac{1}{2} \sum L_{ik} I_i I_k$	$W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{ik} I_i I_k$
Плотность тока смещения	$j_{cm} = \dot{\mathbf{D}}$	$j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = \rho$	$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho$

## Окончание

Наименование	СИ	Гауссова система
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	
Соотношение между амплитудами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в электромагнитной волне	$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$	$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$

## III. Векторный потенциал

В § 49 мы отметили, что магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  можно представить в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \quad (\text{III.1})$$

где  $\mathbf{A}$  — некоторая функция, называемая векторным потенциалом. Такое представление возможно в связи с тем, что дивергенция ротора всегда равна нулю. Поэтому условие  $\nabla \mathbf{B} = 0$  при таком представлении выполняется автоматически.

Подобно скалярному потенциалу  $\phi$  электрического поля векторный потенциал  $\mathbf{A}$  определяется неоднозначно. Добавление к  $\mathbf{A}$  градиента произвольной функции  $\psi$  не изменяет значения  $[\nabla \mathbf{A}]$ , т. е.  $\mathbf{B}$ . Действительно, заменим  $\mathbf{A}$  через  $\mathbf{A} + \nabla \psi$ . Согласно (11.38) ротор градиента любой функции равен нулю. Поэтому

$$[\nabla, (\mathbf{A} + \nabla \psi)] = [\nabla \mathbf{A}] + [\nabla, \nabla \psi] = [\nabla \mathbf{A}].$$

Таким образом, функция

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad (\text{III.2})$$

равно как и  $\mathbf{A}$ , будет векторным потенциалом данного магнитного поля.

Взяв дивергенцию от функции (III.2), получим

$$\nabla\mathbf{A}' = \nabla\mathbf{A} + \nabla(\nabla\psi) = \nabla\mathbf{A} + \Delta\psi.$$

Подбором функции  $\psi$  можно придать  $\nabla\mathbf{A}'$  любое наперед заданное, в частности нулевое, значение. Таким образом, векторный потенциал всегда можно выбрать так, чтобы его дивергенция равнялась нулю:

$$\nabla\mathbf{A} = 0, \quad (\text{III.3})$$

т. е. так, чтобы поле  $\mathbf{A}$  не имело источников.

Заметим, что даже при выполнении условия (III.3) функция  $\mathbf{A}$  остается неоднозначной. Для того чтобы определение векторного потенциала было однозначным, надо задать граничные условия для  $\mathbf{A}$ .

**Уравнение Пуассона.** В соответствии с (13.5) для поля в вакууме

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Заменим в этом соотношении  $\mathbf{E}$  на  $-\nabla\psi$ :

$$\nabla(\nabla\psi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Левая часть формулы представляет собой  $\nabla^2\psi = \Delta\psi$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\Delta\psi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (\text{III.4})$$

которое называется уравнением Пуассона. В развернутом виде это уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (\text{III.5})$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, распределенных с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , можно получить с помощью принципа суперпозиции и выражения для потенциала точечного заряда. Пометив штрихом переменные, по которым производится интегрирование, получим

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.6})$$

Функция (III.6) представляет собой решение уравнения (III.4).

Подставим в формулу (49.9) вместо  $\mathbf{B}$  ротор  $\mathbf{A}$ :

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{A}]] = \mu_0\mathbf{j}.$$

Преобразовав левую часть по формуле (11.40), получим

$$\nabla(\nabla\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}.$$

Выбрав  $\mathbf{A}$  так, чтобы выполнялось условие (III.3), придем к уравнению

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}, \quad (\text{III.7})$$

которое сходно с (III.4) и представляет собой уравнение Пуассона для векторного потенциала.

Уравнение (III.7) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\Delta A_k = -\mu_0 j_k \quad (k = x, y, z). \quad (\text{III.8})$$

Решение этих уравнений можно получить, заменив в (III.6) функцию  $(1/\epsilon_0) \rho(\mathbf{r}')$  функцией  $\mu_0 j_k(\mathbf{r}')$  (ср. уравнения (III.4) и (III.8)). В результате получим

$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_k(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (k = x, y, z). \quad (\text{III.9})$$

Три выражения (III.9) можно объединить в одно векторное:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.10})$$

Отметим, что интегрирование в формулах (III.9) и (III.10) распространяется на всю область, в которой текут токи, создающие поле.

Формула (III.10) позволяет по известному распределению токов в пространстве вычислить векторный потенциал поля, создаваемого этими токами. Определив затем ротор векторного потенциала, найдем магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  поля.

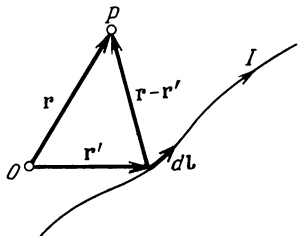


Рис. III.1.

**Закон Био — Савара.** Вычислим векторный потенциал, создаваемый током  $I$ , текущим по тонкому проводу. Разобьем провод на элементы длины  $dl$  и сопоставим каждому элементу вектор  $d\mathbf{l}$ , модуль которого равен  $dl$ , а направление совпадает с направлением вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  в данном элементе провода (рис. III.1). Положение элемента  $d\mathbf{l}$  относительно начала координат  $O$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ , а положение точки  $P$ , в которой определяется векторный потенциал, — радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ .

Согласно формуле (III.10) элемент тока  $d\mathbf{l}$  вносит в векторный потенциал в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  вклад, равный

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') S' dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{III.11})$$

где  $S'$  — площадь поперечного сечения провода в точке  $\mathbf{r}'$ , а  $S' dl = dV'$  — объем элемента  $d\mathbf{l}$ . Поскольку векторы  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  и  $d\mathbf{l}$  имеют одинаковое направление, числитель формулы (III.11) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') S' dl = j(\mathbf{r}') S' dl = I d\mathbf{l},$$

где  $I$  — сила тока, текущего в проводе. Таким образом, формуле (III.11) можно придать вид

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.12})$$

Отметим, что  $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$  есть приращение вектора  $\mathbf{r}'$  на отрезке  $d\mathbf{l}$ .

Векторный потенциал в точке  $P$  равен сумме выражений (III.12)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.13})$$

Чтобы подчеркнуть, что положение отрезка  $d\mathbf{l}$  относительно начала координат  $O$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ , мы записали его в виде  $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ . Интегрирование производится по всей длине провода.

Магнитная индукция в точке  $P$  определяется ротором функции (III.13)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \nabla_r \int \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (\text{III.14})$$

(постоянные скалярные величины мы вынесли за знак ротора).

Интегрирование в формуле (III.14) осуществляется по штрихованным координатам (по координатам точки, в которой находится элемент  $d\mathbf{l}$ ), а дифференцирование при вычислении ротора — по нештрихованным координатам (по координатам точки  $P$ ; чтобы подчеркнуть это мы снабдили оператор  $\nabla$  индексом  $r$ ). Поэтому операции интегрирования и вычисления ротора можно поменять местами. В результате формула (III.14) примет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left[ \nabla_r, \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] . \quad (\text{III.15})$$

Ротор в выражении (III.15) берется от произведения вектора  $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$  на скаляр  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Согласно правилам дифференцирования ротор в этом случае состоит из двух слагаемых, в одном из которых оператор  $\nabla_r$  действует на векторный сомножитель, а во втором — на скалярный сомножитель. Векторный сомножитель  $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$  не содержит нештрихованных координат. Поэтому первое слагаемое равно нулю. Следовательно, подынтегральная функция в (III.15) может быть представлена в виде

$$\left[ \nabla_r, \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \right] .$$

Несложные вычисления дают для градиента функции  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1/\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  (при нахождении градиента дифференцирование осуществляется по координатам  $x, y, z$ ) значение  $-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ . С учетом этого формула (III.15) принимает вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\mathbf{l}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (\text{III.16})$$

Мы пришли к закону Био — Савара (см. формулу (42.3), в которой  $\mathbf{r}$  соответствует  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  в формуле (III.16)).

**Поле на больших расстояниях от контура с током.** Найдем с помощью векторного потенциала магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  поля, создаваемого плоским контуром с током на расстояниях, значительно больших линейных размеров контура.

Выберем оси  $x$  и  $y$  в плоскости контура, причем так, чтобы направление тока образовывало с осью  $z$  праввинтовую систему (рис. III.2; обозначения на этом рисунке те же, что и на рис. III.1). Согласно формуле (III.13)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (\text{III.17})$$

Интеграл теперь берется по замкнутому контуру.

Воспользовавшись тем, что по условию  $r' \ll r$ , сохраним в подынтегральном выражении только члены порядка  $r'/r$ , отбросив члены более высоких по-



рядков малости. С учетом этого функцию  $1/(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  можно представить в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + r'^2}} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2}} \quad (\text{III.18})$$

(мы отбросили под корнем слагаемое  $(r'/r)^2$ ). Поскольку  $2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 \ll 1$ , цепочку преобразований (III.18) можно продолжить следующим образом:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r(1 - \mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2)} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} \right). \quad (\text{III.19})$$

Заменяв подынтегральную функцию в (III.17) ее приближенным выражением (III.19), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^3} \oint (\mathbf{r}\mathbf{r}') d\mathbf{l} \right\} \quad (\text{III.20})$$

(мы воспользовались тем, что  $r$  не зависит от штрихованных координат). Первое слагаемое равно нулю, поскольку  $\oint d\mathbf{l} = 0$ . Преобразуем второе слагаемое,

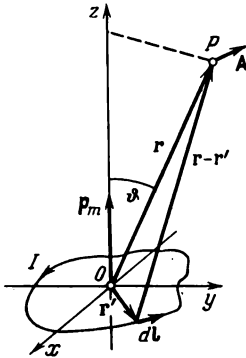


Рис. III.2.

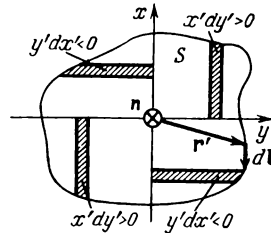


Рис. III.3.

выразив скалярное произведение через компоненты перемножаемых векторов и представив  $d\mathbf{l}$  в виде  $\mathbf{e}_x dx' + \mathbf{e}_y dy'$  (напомним, что  $x'$  и  $y'$  — координаты точки, в которой находится  $d\mathbf{l}$ ;  $z'$  этой точки равно нулю). В результате выражение (III.20) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (xx' + yy') (\mathbf{e}_x dx' + \mathbf{e}_y dy') = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \mathbf{e}_x \left( x \oint x' dx' + y \oint y' dx' \right) + \mathbf{e}_y \left( x \oint x' dy' + y \oint y' dy' \right) \right\}. \quad (\text{III.21}) \end{aligned}$$

Нештрихованные координаты мы вынесли за знак интегралов, поскольку интегрирование производится по штрихованным координатам.

Под знаком интеграла  $\oint x' dx'$  стоит дифференциал функции  $x'^2/2$ . Интеграл от полного дифференциала, взятый по замкнутому пути, равен нулю.

Аналогично равен нулю  $\oint y' dy'$ . Поэтому выражение (III.21) упрощается следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \mathbf{e}_x y \oint y' dx' + \mathbf{e}_y x \oint x' dy' \right\}. \quad (\text{III.22})$$

Из рис. III.3 видно, что первый интеграл в (III.22) равен площади контура  $S$ , взятой со знаком минус, а второй интеграл — площади  $S$ , взятой со знаком плюс. Таким образом,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} (-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x). \quad (\text{III.23})$$

Введем положительную нормаль  $\mathbf{n}$  к плоскости контура, т. е. вектор с компонентами  $(0, 0, 1)$  и вычислим векторное произведение

$$[\mathbf{n}\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x.$$

Сравнение с (III.23) показывает, что выражение для векторного потенциала можно представить в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} [\mathbf{n}\mathbf{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[(I S \mathbf{n}), \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Множитель  $I S \mathbf{n}$  представляет собой магнитный момент контура  $\mathbf{p}_m$  (см. формулу (46.5)). Следовательно,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (\text{III.24})$$

Из полученного выражения вытекает, что вектор  $\mathbf{A}$  в каждой точке  $P$  перпендикулярен к плоскости, проходящей через направление вектора  $\mathbf{p}_m$  и точку  $P$  (см. рис. III.2).

Заменив  $I S$  на  $\mathbf{p}_m$ , представим выражение (III.23) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^3} (-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y). \quad (\text{III.25})$$

Вычислив ротор функции (III.25), найдем магнитную индукцию поля:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{r^3} & \frac{x}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^5} \{ 3xz \mathbf{e}_x + 3yz \mathbf{e}_y + (3z^2 - r^2) \mathbf{e}_z \}. \quad (\text{III.26})$$

С помощью формулы (III.26) можно вычислить  $\mathbf{B}$  в любой точке, расстояние  $r$  которой от контура много больше линейных размеров контура. По этой формуле для точек  $(0, 0, z)$ , лежащих на оси  $z$ , получается значение

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^5} \{ 2z^2 \mathbf{e}_z \} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \quad (\text{III.27})$$

( $\mathbf{p}_m \mathbf{e}_z = \mathbf{p}_m$ ;  $z^2 = r^2$ ). Формула (III.27) совпадает с формулой (47.2), полученной

для кругового контура. Для точек  $(x, y, 0)$ , лежащих в плоскости контура,

$$\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 \rho_m}{4\pi r^5} (-r^2 \mathbf{e}_z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho_m}{r^3}$$

(ср. с формулами (9.9) и (9.10)).

Найдем модуль вектора  $\mathbf{B}$  в точке с координатами  $x, y, z$ . Согласно формуле (III.26)

$$\begin{aligned} B^2 &= \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right)^2 \{9x^2 z^2 + 9y^2 z^2 + (3z^2 - r^2)^2\} = \\ &= \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right)^2 \left\{ \frac{9(x^2 + y^2) z^2 + (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}{r^4} \right\}. \end{aligned}$$

Путем несложных выкладок можно убедиться в том, что выражение в фигурных скобках можно представить в виде

$$1 + 3 \frac{z^2}{r^2} = 1 + 3 \cos^2 \vartheta.$$

где  $\vartheta$  — угол между вектором  $\rho_m$  и направлением на точку  $P$  (см. рис. III.2). Таким образом, мы приходим к выражению

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho_m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

(см. формулу (47.6)).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света 467  
Ампер 100, 114, 158, 189  
Амплитуда волны 278, 288  
— комплексная 281, 320, 374, 377, 456, 459  
Ангстрем 60  
Антиферромагнетики 180
- Бетатрон 222, 314  
Бипризма Френеля 361
- Вебер 184, 189  
Вектор волновой 281, 318, 357  
— Пойнтинга 308, 309, 311, 318  
— световой 316  
— Умова 287  
Видность интерференционной полосы 373  
Волна плоская 276, 281, 304  
— стоячая 289, 291, 307  
— сферическая 276, 288  
Волновая зона 313  
— поверхность 276, 318, 438  
Волновое число 279, 316  
Волновой пакет 453, 457  
— фронт 276, 345  
Волны звуковые 292  
— когерентные 289, 347, 348  
— поперечные 274  
— продольные 274, 284  
— световые 316  
— упругие 274, 283, 285  
— электромагнитные 205, 308, 311, 314  
Вольт 23, 24, 184  
Восприимчивость диэлектрическая 63, 74, 159  
— магнитная 158, 159, 165, 166, 173, 175, 178  
Время когерентности 354, 356  
Высота звука 293
- Гаусс 119, 158  
Генератор Ван-де-Граафа 221
- Генри 189  
Гиромагнитное отношение 167  
Гистерезис 82, 177, 178, 180  
Градиент 36, 50  
Громкость звука 293, 294  
Группа волн 453, 461
- Двойное лучепреломление 307, 435, 437  
Децибел 294  
Дивергенция 40, 41, 43, 50  
— магнитного поля 145  
— электрического поля 54  
Диоптрия 342  
Диполь 28, 36, 62, 312, 313  
Дипольный момент магнитный 134, 140  
— — электрический 29, 35, 60, 140, 459  
Дисперсия вещества 452  
— дифракционной решетки 413  
— света 317, 452  
— спектрального прибора 412, 413  
Дифракция в параллельных лучах 382  
— от щели 398, 400, 404  
— света 381  
— Фраунгофера 382, 406  
— Френеля 382, 406  
Дихроизм 437  
Диэлектрик 60  
Длина когерентности 354, 356  
— пространственной когерентности 359  
— цуга 354  
Добротность контура 264, 268  
Домены 83, 179  
Дополнительные окраски 446
- Закон Ампера 126  
— Био — Савара — Лапласа 122  
— Брюстера 432, 434  
— Бугера 462  
— Видемана — Франца 232  
— Джоуля — Ленца 112, 231  
— Кулона 13, 15, 81, 127  
— Кюри 174, 176  
— Кюри — Вейсса 180

- Закон Малюса 431  
 — независимости световых лучей 333  
 — Ома 104, 105, 107, 108, 231, 238, 258  
 — отражения света 324, 333, 334  
 — Пашена 255  
 — преломления света 324, 333, 335, 436  
 — прямолинейного распространения света 333  
 — Рэлея 464, 465  
 — сохранения электрического заряда 12, 101, 107, 109  
 — электролиза 216  
 Заряд пробный 17, 21  
 — точечный 12, 18  
 — удельный 208, 210, 217  
 — электрический 11, 12, 127, 260  
 — элементарный 11, 14, 15, 169, 216, 217  
 Заряды индуцированные 86  
 — свободные 64  
 — связанные 64, 66, 69  
 — сторонние 64  
 Звук 292, 293  
 Зеркала Френеля 360  
 Зонная пластинка 388, 389  
 Зоны Френеля 384, 386, 407  
  
 Импеданс 270  
 Индуктивность 189, 190, 260  
 — взаимная 194  
 Индукция магнитная 117, 123, 157  
 — остаточная 177  
 — электрическая 70, 72  
 — электромагнитная 180, 199, 206  
 Интегралы Френеля 395  
 Интенсивность волны 287  
 — звука 293, 294, 298  
 — света 317, 318  
 Интерференция 289, 348, 381, 440  
 Интерферометр звездный 372  
 — Майкельсона 371, 372, 472  
 — Фабри — Перо 378, 380  
 Инфразвук 292  
 Источник косинусный 332  
 — ламбертовский 332  
 — точечный 279, 330  
  
 Кандела 330, 332  
 Кардинальные плоскости 338, 342  
 — точки 338, 342  
 Когерентность 352, 354  
 — временная 352, 357, 364  
 — пространственная 352, 357, 359  
 Кольца Ньютона 369  
 Конденсатор 57, 59, 89, 90, 91  
  
 Коэффициент отражения 327, 435  
 — поглощения 289, 460, 462  
 — пропускания 327, 435  
 — экстинкции 464  
 Критерий Рэлея 414, 423  
 Кулон 15, 71, 100, 114  
  
 Лазер 333, 359, 367, 424  
 Ларморова прецессия 171, 173  
 Линза 335, 344  
 Логарифмический декремент затухания 263, 264  
 Луч 318, 439  
 — необыкновенный 436, 437, 441  
 — обыкновенный 436, 437, 441  
 Люкс 330  
 Люмен 318, 330, 331  
  
 Магнетон Бора 169, 170  
 Магнитный момент орбитальный 166  
 — — собственный 168, 169, 179  
 Магнитомеханическое отношение 167  
 Максвелл 184  
 Масс-спектрограф 219, 220  
 Метод Дебая и Шерера 421  
 — Лауэ 420  
 — магнитной фокусировки 213  
 — парабола Томсона 217  
 Механический момент орбитальный 167  
 — — собственный 168, 169  
 Монополи Дирака 144  
 Монополь 36  
 Мультиполь 36  
  
 Намагниченность 153, 154, 158, 451  
 — остаточная 177  
 Напряжение 89, 194  
 Напряженность магнитного поля 9, 157, 159  
 — поля сторонних сил 103  
 — электрического поля 17, 26, 157  
  
 Обертон 293  
 Области спонтанного намагничивания 179  
 — спонтанной поляризации 83  
 Ом 104  
 Оператор набла 49  
 Оптика волновая 316  
 — геометрическая 333, 345, 381, 406  
 — лучевая 333  
 Оптическая длина пути 333, 334, 336  
 — разность хода 349  
 — сила 342  
 — система идеальная 337  
 — — центрированная 337, 343, 344  
 Опыт Айвса 478  
 — Араго 393

- Опыт Барнетта 168  
— Буша 214  
— Лауэ, Фридриха и Книппинга 416  
— Майкельсона 469, 472  
— Майкельсона — Морли 372, 472, 475  
— Мандельштама и Папалекси 228  
— Милликена 215  
— Рикке 227  
— Толмена и Стюарта 228  
— Томсона 212, 215, 218  
— Физо 468, 469, 471  
— Штерна и Герлаха 169, 170  
— Эйнштейна и де-Хааса 167, 168  
— Эрстеда 116, 117  
— Юнга 359  
Опыты Герца 306, 307  
— Лебедева 307, 312  
— Попова 307  
Освещенность 330  
Относительная спектральная чувствительность глаза 328  
  
Парамагнетик 166, 173, 180  
Петля гистерезиса 82, 177  
Плазма 248, 253  
Плотность заряда 54, 55, 66, 69  
— импульса 311  
— магнитной силы 126  
— оптическая среды 317  
— потока энергии 286, 311  
— тока 99  
— энергии магнитного поля 196  
— — электрического поля 96, 97  
Показатель преломления 316, 317, 318, 324, 432, 438  
Поле вихревое 148, 185, 200, 222, 314  
— магнитное 116, 117, 145  
— потенциальное 200  
— соленоидальное 148, 158  
— электрическое 16, 200  
— электростатическое 27, 51, 52, 200  
Полный магнитный поток 185, 189  
Поляризованность диэлектрика 62, 460  
— — остаточная 82  
— — спонтанная 81  
ПолярOID 437  
Порог болевого ощущения 293  
— слышимости 293  
Постоянная Верде 451  
— вращения 449  
— времени 192, 243  
— Керра 448, 449  
— Кюри 174, 176  
— магнитная 9, 115, 116  
— Планка 169  
— Холла 233, 235  
— электрическая 9, 16, 90, 116  
  
Постоянная электродинамическая 9, 115, 116  
Потенциал 22, 23, 26, 52  
— векторный 148, 486  
Поток вектора 37, 38  
— энергии 286  
Потокоосцепление 185  
Правило Ленца 182, 187, 190, 191  
Прецессия электронной орбиты 171, 173, 451  
Принцип Гюйгенса 345, 346, 382, 439  
— Гюйгенса — Френеля 346, 382, 383  
— суперпозиции волн 289, 381  
— — магнитных полей 117  
— — электрических полей 19  
— Ферма 333, 334  
Проводимость 105, 231  
Проницаемость диэлектрическая 9, 70, 71, 72, 73, 82, 90, 437, 460  
— магнитная 9, 159, 161, 178  
Просветление оптики 370  
  
Радиус когерентности 359, 373, 400, 408  
Разрешающая сила объектива 423  
— — решетки 414  
— — спектрального прибора 413  
Ротор 46, 47, 50  
— вектора **B** 147  
— — **E** 52  
  
Сантиметр 88, 189  
Сверхпроводимость 106  
Свет естественный 319, 428, 443  
— линейнополяризованный 319  
— монохроматический 327, 352  
— плоскополяризованный 319, 428  
— поляризованный 319, 428  
— — по кругу 319, 428, 442, 443  
— — частично 430, 432, 443  
— эллиптически поляризованный 319, 428, 443  
Светимость 331, 332  
Световой поток 329  
Сегнетоэлектрики 81, 178  
Сила коэрцитивная 82, 177  
— Лоренца 124, 458  
— магнитная 123, 125, 209  
— света 329, 330  
— тока 99, 260  
— электродвижущая 103  
— — индукции 181, 183, 185  
— — самоиндукции 190, 191, 195  
Силы сторонние 102, 107, 199, 222  
Сименс 105  
Скорость волны 278  
— групповая 452, 454, 457, 458, 461, 469

- Скорость звука 295, 298  
— света 16, 115, 467  
— фазовая 278, 285, 292, 316, 461  
Соленоид 148, 151, 162, 189, 195  
Сопротивление полное 270  
— реактивное 271  
— электрическое 104, 106, 231  
Спин 168, 169  
Спираль Корню 395, 396, 398  
Степень поляризации 430
- Таутохронность 334, 335, 336, 345  
Тембр звука 293  
Тензор диэлектрической восприимчивости 63  
— магнитной восприимчивости 158  
Теорема Гаусса для вектора **B** 144  
— — — **D** 71, 72, 78  
— — — — **E** 53  
— Остроградского — Гаусса 43, 51, 54  
— Стокса 49, 51  
Теория относительности 127, 461, 476  
Тесла 119, 123  
Ток индукционный 181  
— квазистационарный 258  
— полный 203  
— постоянный 100, 107  
— смещения 202, 203, 204, 205  
Токи вихревые 187  
— молекулярные 153, 166  
— Фуко 187, 188  
Точка Кюри 83, 180  
— — антиферромагнитная 180  
— Нееля 180
- Ультразвук 293, 295  
Уравнение волновое 281, 282, 303  
— затухающей волны 279  
— непрерывности 101, 202  
— плоской волны 278  
— сферической волны 280  
Уравнения Максвелла 205, 206, 302
- Уравнения Максвелла в интегральной форме 207  
Уровень громкости 294
- Фарад 88  
Фарадея постоянная 216, 217  
Ферроэлектрики 82  
Формула Брэгга — Вульфа 419, 420  
— Ньютона 343  
— оптической системы 343  
— Томсона 261  
Формулы Лауэ 418, 420  
— преобразования полей 131, 132  
— — — — — сил 129  
— Френеля 432, 433, 435
- Циклотрон 224  
Циркуляция 43, 44, 45  
Циркуляция вектора **B** 146  
— — — **E** 51  
— — — **H** 157  
Цуг волн 319, 348, 441
- Эквипотенциальная поверхность 27, 28, 76  
Электрическая проводимость 105  
Электрическое смещение 9, 70, 157  
Электролиты 216  
Электрон 11, 212, 214, 215, 216, 227  
Электронвольт 24  
Энергия волны 286  
— магнитного поля 195, 260  
— электрического поля 95, 260  
Эрстед 158  
Эталон Фабри — Перо 379  
Эфир 372, 469, 470, 472, 475  
Эффект Доплера 300, 301, 469, 477  
— Керра 448  
— Фарадея 450
- Яркость 331, 332  
Ячейка Керра 448, 449, 469

1 р. 20 к.