ББК 22.130я73 22.144 22.161

Арлазаров Виктор Владимирович, Татаринцев Андрей Владимирович, Тиханина Ирина Геннадиевна, Чекалкин Николай Степанович

Лекции по математике для физико-математических школ. Часть II: Иррациональные уравнения, системы и неравенства, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, тригонометрия, обратные тригонометрические функции: Учебное пособие. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 264 с.

Настоящая книга представляет собой курс лекций по математике, написанный с целью помочь читателям подготовиться к вступительным экзаменам в вузы, к единому государственному экзамену по математике и к математическим олимпиадам различного уровня. Лекции содержат большое количество теоретического материала и подробно разобранных примеров. В конце каждой лекции приведены задачи с ответами, предназначенные как для проведения практических занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для тех, кто хочет самостоятельно подготовиться к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения, для слушателей физико-математических школ, подготовительных курсов и подготовительных отделений вузов, а также для преподавателей математики.

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук А. В. Усков;
канд. физ.-мат. наук О. В. Бабурова

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 16,5. Зак. № 1513.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00710-6

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
URSS Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

5940 ID 74329

9 785382 007106

Введение

Этот курс лекций написан для абитуриентов, самостоятельно готовящихся к вступительным испытаниям, для слушателей физико-математических школ, подготовительных курсов и подготовительных отделений, готовящихся к вступительным экзаменам по математике или к ЕГЭ, и их преподавателей. Книга является продолжением курса лекций, изложенного в книге тех же авторов "Лекции по математике для физико-математических школ" часть I. Предполагается, что читатель знаком с этой книгой, так как вторая часть содержит большое количество ссылок на примеры и методы, изложенные в первой части. Предлагаемый курс содержит 7 лекций, включающих в себя темы: иррациональные уравнения, системы и неравенства, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, тригонометрические уравнения, системы и неравенства и обратная тригонометрия. Структура лекций позволяет работать с ними непосредственно ученику или преподавателю, который читает лекции и ведет практические занятия с группой учеников. Каждая лекция содержит теоретический материал с большим количеством подробно рассмотренных примеров и полный набор задач как для проведения практического занятия в аудитории, так и для задания на дом.

Решение каждой задачи, разобранной в лекции, представляет собой метод решения большого класса задач. Этот метод повторяется и углубляется в последующих задачах и в последующих лекциях. Большое количество решенных задач в каждой лекции позволяет создать достаточную базу методов решения, охватывающих практически все, что встречается на вступительных испытаниях по этим темам.

В каждой лекции разбираются задачи разного уровня сложности. От простых, повторяющих школьную программу задач (таких немного), до сложных задач, решение которых обеспечивает хорошую и отличную оценку на вступительных экзаменах (основная часть задач).

Идеология этого курса лекций отвергает способ обучения, при котором решается большое количество однотипных задач. Авторы полагают, что работа по выбору метода решения, а затем и непосредственная реализация избранного пути при решении даже одной непростой задачи принесет куда большую пользу.

Многие из задач, предлагающихся в курсе, можно назвать нестандартными. Но обычно то, что какое-то время назад было «изюминкой» в решении задачи вступительного экзамена, начинает перениматься другими авторами и затем встречается в решении множества других задач. Наконец, этим методом решения овладевают массы учеников и «изюминка» входит в систему подготовки как стандартный метод решения какой-то группы задач. Можно считать, что и в этом курсе многие нестандартные методы нашли свое систематизированное изложение.

Книгу можно использовать в различных вариантах обучения: преподавателем, читающим лекции и (или) ведущим практические занятия в физико-математической школе, слушателем этих школ, абитуриентам, самостоятельно готовящимся к вступительным испытаниям по математике. В виду большого количества разобранных задач ее можно использовать как справочник в случае возникновения затруднений у абитуриента в данных темах.

В последнее время, наряду с обычными вступительными экзаменами, централизованным тестированием и ЕГЭ, все большую роль, как вступительные испытания, играют олимпиады различного уровня. Грань между задачами на отличную оценку вступительных испытаний и олимпиадными задачами не всегда различима. Этот курс поможет подготовиться и к олимпиадам, так как содержит много теоретического и практического материала, необходимого для такой подготовки.

Лекции разбиты на достаточно большое количество параграфов и пунктов, по названиям которых легко можно найти интересующий раздел или метод решения. В параграф «Задачи для разбора с преподавателем» выделены задачи для решения в аудитории на практическом занятии с преподавателем. При самостоятельной подготовке их нужно решать, основываясь на примерах, разобранных в лекциях. В параграф «Задачи для самостоятельного решения» включены задачи для домашнего задания и составления контрольных работ преподавателем. Он также является источником задач, если их не хватает для аудиторной работы и для повторения при самостоятельной подготовке. Для контроля преподавателем или самоконтроля ко всем задачам даны ответы.

Широко известно, что знаний по математике хорошего выпускника большинства школ не достаточно для успешного поступления в обычный ВУЗ. Но у среднего выпускника школы их не достаточно даже для начала обучения по программе подготовки к вступительным экзаменам. Для многих слушателей подготовительных курсов и подобных программ обучения актуальной задачей является овладение программой средней школы по математике, начиная с действий с дробями и правил раскрытия скобок. Уже долгое время система довузовской подготовки без серьезной государственной поддержки и благодаря качественному преподавательскому составу с большим трудом закрывает эту дыру в школьном образовании и даже подтягивает уровень среднего выпускника до приемлемого. Но учебный курс не может растягиваться до столь различных полюсов, как низший школьный уровень и уровень отличных оценок на вступительном экзамене. Сложившаяся ситуация требует выбора между курсом, рассчитанным на абитуриента, более или менее приемлемо владеющего школьной программой, и курсом для абитуриента, нуждающегося в дополнительном обучении в рамках школьной программы. Курс лекций, изложенный в данной книге, предполагает, что основными методами решения задач в рамках программы общеобразовательных школ читатель владеет достаточно хорошо.

Книга написана преподавателями физико-математической школы МИРЭА, основателем, директором и вдохновителем которой был Александр Григорьевич Кисунько. Многие его идеи нашли воплощение в этой книге.

Часть задач курса являются авторскими. Другая часть взята из сборников задач Моденова П.С., Сивашинского И.Х., Шабунина М.И., Шарыгина И.Ф. и других, а также из вступительных экзаменов МГУ им. М.В.Ломоносова, МФТИ, МИРЭА, МИСиС, МЭИ и других ВУЗов.

При подготовке второй части авторы учли практически все пожелания, высказанные их коллегами, по первой части курса лекций. Мы выражаем всем, кто принял посильное участие в создании этого курса, огромную признательность и благодарность.

Авторы выражают отдельную глубокую признательность Александру Борисовичу Будаку, сделавшему ряд ценных замечаний, которые нашли отражение в книге.

Другие темы, не вошедшие в этот курс, будут изложены в следующих частях издания.

Мы желаем всем читателям и слушателям курса удачи и высоких оценок на вступительных испытаниях.

Лекция №1
Иррациональные уравнения и системы уравнений

Существует много методов решения иррациональных уравнений, причем вопрос о выборе конкретного метода для решения той или иной задачи является самым трудным. Попытаемся немного разобраться в этом вопросе.

1.1. Уравнения с квадратными корнями

1.1.1. Простейшие уравнения

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ будем называть простейшим иррациональными уравнением с квадратным корнем. Такое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}.$$

Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно решать переходя к одной из двух систем, каждая из которых равносильна исходному уравнению

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

В качестве рекомендации заметим следующее. Лучше иррациональное уравнение решать не выписывая условий каждого перехода, но при получении конечного результата обязательно делать проверку, подставляя получившиеся решения в исходное уравнение.

Заметим, что при решении иррациональных уравнений мы всегда будем делать либо равносильные переходы, либо переходы типа – следствие. В этих случаях невозможна потеря корней.

В ситуации, когда получаются "плохие" решения и проверку сделать довольно трудно, надо, конечно же, проверить равносильность всех переходов.

Мы будем придерживаться принципа: "Проверку надо делать даже тогда, когда ее нельзя сделать!"

1.1.2. Домножение на сопряженное выражение

Одним из основных способов решения уравнений с корнями квадратными является домножение на сопряженное выражение. Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, определим понятие сопряженных выражений.

Рассмотрим формулу

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}\right).$$

Скобки в правой части называются сопряженными выражениями.

Пример 1.1. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \frac{77}{4}$.

Возведение в квадрат приведет к конечному результату, однако, возиться с возникающими числами не очень хочется. Заметим, что разность подкоренных выражений дает единицу, что может оказаться полезным. Домножим обе части уравнения на сопряженное выражение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0$. Имеем

$$x + 1 - x = \frac{77}{4}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{4}{77}.$$

Полученное уравнение не проще исходного, однако, у нас теперь два равносильных уравнения. Вычтем из исходного уравнения получившееся

$$2\sqrt{x} = \frac{77}{4} - \frac{4}{77}.$$

Заметим, что подобная операция может привести к появлению посторонних корней. Например, уравнения $x = 0$ и $-x = 0$ являются равносильными и при сложении дают тождество $0 \equiv 0$. Избежать этой неприятности можно заменив операцию сложения на операцию вычитания. В принципе, лучше делать обе операции – сложения и вычитания и выбирать общие решения. Поскольку мы собираемся осуществлять проверку, то нас появление дополнительных решений

(если только их не бесконечно много) не пугает. Итак, получаем $x = \left(\frac{73\cdot 81}{77\cdot 8}\right)^2$.

Проверка делается с учетом того, что

$$x = \left(\frac{77^2 - 4^2}{4\cdot 77\cdot 2}\right)^2,$$

$$x + 1 = \frac{77^4 - 2\cdot 4^2\cdot 77^2 + 4^4 + 4\cdot 4^2\cdot 77^2}{4^2\cdot 77^2\cdot 2^2} = \left(\frac{77^2 + 4^2}{4\cdot 77\cdot 2}\right)^2.$$

Ответ: $x = \frac{34963569}{379456}$.

Заметим, что правая часть нашего уравнения была просто числом. В следующем примере правая часть представляет собой функцию.

Пример 1.2. $\sqrt{10x^2 + 8x + 7} + \sqrt{10x^2 - 8x + 7} = 8x$.

Разность подкоренных выражений равна $16x$, поэтому домножение на сопряженное выражение может только улучшить положение. В силу того, что мы будем делать проверку, нам не надо указывать, что выражение , на которое умножаются обе части уравнения, отлично от нуля

$$10x^2 + 8x + 7 - 10x^2 + 8x - 7 =$$

$$= 8x\left(\sqrt{10x^2 + 8x + 7} - \sqrt{10x^2 - 8x + 7}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x = 8x\left(\sqrt{10x^2 + 8x + 7} - \sqrt{10x^2 - 8x + 7}\right).$$

Итак, первый кандидат на решение найден: $x = 0$. Теперь складываем два уравнения

$$\sqrt{10x^2 + 8x + 7} - \sqrt{10x^2 - 8x + 7} = 2$$

$$\sqrt{10x^2 + 8x + 7} + \sqrt{10x^2 - 8x + 7} = 8x$$

Получаем

$$\sqrt{10x^2+8x+7}=4x+1,$$

возводим обе части уравнения в квадрат и получаем $x=\pm 1$.

Теперь осуществляем проверку.

1. $x=0 \Rightarrow \sqrt{7}+\sqrt{7}\neq 0 \Rightarrow x=0$ – посторонний корень.
2. $x=-1 \Rightarrow \sqrt{9}+\sqrt{25}\neq -8 \Rightarrow x=-1$ – посторонний корень.
3. $x=1 \Rightarrow \sqrt{25}+\sqrt{9}=8 \Rightarrow x=1$ – решение исходного уравнения

Ответ: $x=1$.

Мы уже уделили достаточно внимания проведению проверки Поэтому в дальнейшем, за исключением специальных случаев, проверка будет проводиться "за кадром".

Следующий пример показывает как, с помощью домножения на сопряженное, удается справиться с большим количеством иррациональностей.

Пример 1.3. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{7x-10}=\sqrt{5x-1}+\sqrt{5x-6}$.

Этот пример можно решать многими способами, в том числе и возведением в квадрат, продемонстрируем здесь два из них.

I способ. Разность подкоренных выражений в левой и правой частях уравнения одинакова, поэтому было бы хорошо использовать сопряженное выражение. Однако, сопряженные выражения для обеих частей разные, поэтому умножим обе части нашего уравнения на произведение сопряженных, т.е на выражение

$$\left(\sqrt{7x-5}-\sqrt{7x-10}\right)\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{5x-6}\right).$$

Тогда уравнение – следствие имеет вид

$$5\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{5x-6}\right)=5\left(\sqrt{7x-5}-\sqrt{7x-10}\right) \text{ или}$$

$$\sqrt{7x-5}-\sqrt{7x-10}=\sqrt{5x-1}-\sqrt{5x-6}.$$

Теперь складываем новое уравнение с исходным, и получаем

$$\sqrt{7x-5}=\sqrt{5x-1} \Leftrightarrow x=2.$$

Проверка показывает, что найденное решение удовлетворяет исходному уравнению.

Этот пример можно решить, используя свойства функций.

II способ. Обозначим $7x-5=a$, $5x-1=b$. Теперь уравнение имеет вид

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-5}=\sqrt{b}+\sqrt{b-5}$$

Это уравнение имеет единственное решение $a=b$.

Действительно, если $a\neq b$ и пусть, для определенности, $a>b$. В этом случае первый корень в левой части уравнения больше первого корня в правой части и второй корень в левой части также больше второго корня в правой части и равенство – невозможно.

В принципе, данный факт можно объяснить используя монотонность функции $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t-5}$.

Ответ: $x=2$.

Довольно часто возможность домножения на сопряженное надо создать, сделав необходимые алгебраические преобразования.

Пример 1.4. $\left(10x^2+14x+2\right)\sqrt{x^2-1}=10x^3+14x^2-3x-7$.

Здесь возведение в квадрат может привести к уравнению высокой степени, поэтому попробуем провести некоторые преобразования

$$\left(10x^2+14x+2\right)\sqrt{x^2-1}=x\left(10x^2+14x+2\right)-5x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(10x^2+14x+2\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=-5x-7.$$

Теперь умножим обе части уравнения на $\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$

$$10x^2+14x+2=(5x+7)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right).$$

Раскрываем скобки и приводим подобные

$$5x^2+7x+2=(5x+7)\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2=(5x+7)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right).$$

Снова умножаем обе части уравнения на $\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$

$$2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=-5x-7 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-1}=-7x-7 .$$

Теперь возводим обе части получившегося уравнения в квадрат и получаем два решения: $x=-1$ и $x=-\dfrac{53}{45}$.

Заметим, что до умножения на сопряженное выражение у нас было в левой части уравнения число, а в правой – выражение, которое после возведения в квадрат, является многочленом четвертой степени. После домножения на сопряженное выражение и возведения в квадрат мы получили в обеих частях уравнения по квадратному трехчлену. Таким образом, удачное домножение на сопряженное выражение позволяет понизить степень уравнения "перераспределив" ее между двумя частями уравнения.

Проверка показывает, что оба решения подходят.

Ответ: $x=-1$ и $x=-\dfrac{53}{45}$.

Пример 1.5. $4\sqrt{x}+81\sqrt{x+1}-4\sqrt{x^2+x}-4x=81$.

В данном примере слишком много иррациональностей, поэтому возведение в квадрат кажется занятием малоперспективным. Перепишем уравнение в другом виде

$$81\left(\sqrt{x+1}-1\right)-4\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(81-4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=4x$$

и домножим обе части на $\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

$$x\left(81-4\sqrt{x}\right)=4x\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

Первое решение $x=0$, и получается уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{77}{4},$$

которое мы уже решали (пример 1.1). Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=0$, $x=\dfrac{34963569}{379456}$.

Довольно часто, после домножения на сопряженное и получения нового уравнения, нужно, исходя из дополнительных соображений, выбирать какую из операций (сложение или вычитание) надо сделать.

Пример 1.6. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}$.

Разность подкоренных выражений дает $x-1$, которое является множителем правой части, поэтому домножение на сопряженное выглядит делом перспективным. Получим

$$x-1=\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right).$$

Первый кандидат на решение найден: $x=1$. Теперь уравнение приобрело вид

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x .$$

Если вычесть из исходного уравнения получившееся, то ничего хорошего это не даст. Если же сложить эти уравнения, то получим

$$2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}+x \Leftrightarrow 2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x-\frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2=0 .$$

Находим $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Мы получили довольно "плохие" корни, поэтому покажем, как сделать проверку.

1. $x=1 \Rightarrow 0+0=0 \Rightarrow x=1$ – решение исходного уравнения.

2. $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Этот корень получен из решения уравнения

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1,$$

поэтому цепочка сравнений выглядит следующим образом

$$1+\sqrt{1-\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\vee 1-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}\vee\frac{2}{\sqrt{5}-1}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}\vee\frac{2}{\sqrt{5}-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Таким образом, $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ – решение исходного уравнения.

3. $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 1+\sqrt{1-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}}\neq 1-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Левая часть больше единицы, правая – меньше. Таким образом, $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ - не является решением исходного уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x=1$.

В следующем примере домножение на сопряженное выражение используется как средство избавления от иррациональности в знаменателе.

Пример 1.7. $\dfrac{45}{\sqrt{x^2+9}-x}=\dfrac{5x^2}{\sqrt{x^2+9}+3}+\sqrt{3x+31}$.

Практически всегда необходимо избавляться от иррациональностей в знаменателе. В лекции I.1 мы проделывали подобную процедуру с числовыми выражениями с помощью домножения на

сопряженное выражение. В нашем случае умножаем числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{x^2+9}+x\neq 0$, а второй дроби – на $\sqrt{x^2+9}-3$. Второе сопряженное выражение обращается в нуль при $x=0$, поэтому убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения. В результате имеем

$$\frac{45\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)}{x^2+9-x^2}=\frac{5x^2\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^2+9-9}+\sqrt{3x+31}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+15=\sqrt{3x+31}\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $x=-2$.

1.1.3. Замена переменной

Пример 1.8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=\sqrt{x^2-10x+41}$.

Замечаем, что произведение подкоренных выражений в левой части есть $10x-x^2-9$, т.е., с точностью до знака и постоянной, совпадает с подкоренным выражением в правой части. Возводим обе части уравнения в квадрат

$$2\sqrt{10x-x^2-9}=x^2-10x+33.$$

Теперь делаем замену

$$\sqrt{10x-x^2-9}=t\geq 0\Rightarrow x^2-10x=-9-t^2,$$

и получаем

$$t^2+2t-24=0,$$

откуда, с учетом неотрицательности t, имеем

$$\sqrt{10x-x^2-9}=4\Leftrightarrow x=5.$$

Проверка показывает, что найденное значение является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=5$.

Пример 1.9. $7x-\frac{4}{x}=-3\sqrt{7x+\frac{4}{x}}$.

Выражения в левой и правой частях напоминают замены в возвратных уравнениях, поэтому возводим обе части уравнения в квадрат и получаем

$$49x^2-56+\frac{16}{x^2}=9\left(7x+\frac{4}{x}\right).$$

Теперь делаем замену $7x+\frac{4}{x}=t\Rightarrow t^2=49x^2+56+\frac{16}{x^2}$ и получаем уравнение

$$t^2-9t-112=0$$

с корнями $t=16$ и $t=-7$. Далее находим $x=2$ и $x=\frac{2}{7}$. Проверка показывает, что решением исходного уравнения является $x=\frac{2}{7}$.

Ответ: $x=\frac{2}{7}$.

Заметим, что возведение в квадрат желательно проводить в ситуации, когда видно, что делать на следующем шаге решения.

Пример 1.10. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-4}+x=4$.

В примерах, в которых есть сумма или разность квадратных корней и их произведение, надо попробовать действовать следующим образом. Вводим новую переменную

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=t\geq 0.$$

Тогда $t^2=2x+2\sqrt{x^2-4}\Rightarrow x+\sqrt{x^2-4}=\frac{t^2}{2}$. Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$t+\frac{t^2}{2}-4=0,$$

откуда, с учетом неотрицательности t, получаем $t=2$ или

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=2$$

Это уравнение можно решать разными способами, мы будем придерживаться следующего правила:"Если уравнение можно решить устно – его надо решать именно таким образом". Находим корень $x=2$ и в силу того, что в левой части стоит возрастающая и непрерывная на области определения функция, а в правой – константа, это решение – единственное.

Ответ: $x=2$.

Довольно часто замена делается для того, чтобы избавиться от иррациональностей с наименьшими затратами.

Пример 1.11. $\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{2-x}=3$.

Две различные иррациональности наводят на тягостные раздумья. Возведение в шестую степень не выглядит перспективным. Попробуем разобраться с корнями с помощью замен.

Обозначим $\sqrt[3]{2-x}=t$. Тогда $x=2-t^3$ и уравнение приобретает вполне приятный вид

$$\sqrt{9-t^3}=3-t\ \Leftrightarrow\begin{cases}9-t^3=(3-t)^2\\ t\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^3+t^2-6t=0\\ t\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-3.\\ t=2\end{array}\right.$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $x=2, x=-6, x=29$.

Следующий пример показывает, как обычное обозначение позволяет получить систему, которая довольно очевидным образом решается.

Пример 1.12. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16x}}{2}}=\frac{x+\sqrt{x^2+48}}{4}$.

Обозначим левую и правую части a и будем возводить в квадрат обе части уравнения по отдельности, то есть будем решать систему

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{9+16x}}{2}}=a \\ \dfrac{x+\sqrt{x^2+48}}{4}=a \\ a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9+16x=4a^4-12a^2+9 \\ x^2+48=16a^2-8ax+x^2 \\ 2a^2-3\ge 0 \\ a\ge 0 \\ 4a-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=a^4-3a^2 \\ ax=2\left(a^2-3\right) \\ 2a^2-3\ge 0 \\ a\ge 0 \\ 4a-x\ge 0 \end{cases}$$

Получаем два решения: $\begin{cases} a=2 \\ x=1 \end{cases}; \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ x=0 \end{cases}$.

Ответ: $x=0, x=1$.

1.2. Уравнения с кубическими корнями

В основе решений уравнений с кубическими корнями лежит условное равенство, полученное в примере I.1.13

$$\text{если } a+b+c=0, \text{ то } a^3+b^3+c^3=3abc. \qquad (1.1)$$

В силу того, что полученное равенство верно, в общем случае, только в одну сторону, использование описываемого приема при решении уравнений должно всегда заканчиваться проверкой.

Пример 1.13. $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{1-x}=3$.

Имеем $\sqrt[3]{x+8}=a$, $\sqrt[3]{1-x}=b$, $-3=c$, поэтому

$$\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^3+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3+(-3)^3=3\cdot(-3)\left(\sqrt[3]{x+8}\right)\left(\sqrt[3]{1-x}\right).$$

Раскрываем скобки, приводим подобные и получаем

$$\sqrt[3]{(x+8)(1-x)}=2 \Leftrightarrow (x+8)(1-x)=8 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x&=0 \\ x&=-7 \end{aligned}\right..$$

Подстановка полученных значений в исходное уравнение показывает, что оба корня подходят.

Ответ: $x=0, x=-7$.

Пример 1.14. $\sqrt[3]{x+27}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{8x+6}$.

Имеем $a=\sqrt[3]{x+27}, b=\sqrt[3]{x-3}, c=-\sqrt[3]{8x+6}$, поэтому в силу (1.1)

$$-6x+18=-3\sqrt[3]{(x+27)(x-3)(8x+6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(8(x-3)^2-(x+27)(8x+6)\right)=0.$$

Получаем решения: $x=3, x=-\dfrac{1}{3}$. Проверка показывает, что оба корня подходят.

Ответ: $x=3, x=-\dfrac{1}{3}$.

Пример 1.15. $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$.

В левой части уравнения нетрудно заметить неполный квадрат разности, поэтому домножим левую и правую части на $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}$, что является сопряженным выражением. В силу того, что мы, в обязательном порядке, будем делать проверку, указывать, что выражение, на которое умножаются обе части уравнения, не равно 0, не нужно. Получаем

$$\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}=5.$$

Это уравнение аналогично уравнению из примера 1.13.

Ответ: $x=0, x=-19$.

В следующих двух примерах нам понадобятся свойства дробей довольно часто используемые при решении похожих задач.

Пример 1.16. $\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{2x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{2x+3}}=\dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}$.

Отметим, что $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}=2\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

I способ. После замены $t=\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{2x-3}}$ уравнение принимает вид

$$t+\frac{1}{t}=\frac{4}{13}\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{4}{13}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^2-1+\frac{1}{t^2}\right).$$

В силу того, что $t+\dfrac{1}{t}\neq 0$, имеем

$$13t^2=4t^4-4t^2+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1=2,t_2=-2,t_3=\frac{1}{2},t_4=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{27}{14};x=\pm\frac{7}{6}.$$

II способ. Воспользуемся условной формулой (1.1). Пусть

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{2x-3}}=a,\ \sqrt[3]{\frac{2x-3}{2x+3}}=b,\ -\frac{8}{13}\cdot\frac{4x^2+9}{4x^2-9}=c.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{2x-3}+\frac{2x-3}{2x+3}-\frac{8^3}{13^3}\cdot\left(\frac{4x^2+9}{4x^2-9}\right)^3=-3\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{4x^2+9}{4x^2-9}.$$

Приводим к общему знаменателю первые две дроби и, после замены $\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}=y$, уравнение приобретает вид

$$\frac{50}{13}y-\frac{8^3}{13^3}y^3=0\Leftrightarrow y=0,y=\pm\frac{65}{16}\Rightarrow x=\pm\frac{27}{14},x=\pm\frac{7}{6}.$$

Непосредственная проверка показывает, что все 4 найденных корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=\pm\dfrac{27}{14}, x=\pm\dfrac{7}{6}$.

Пример 1.17. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{x}{x^2-1}$.

I способ. Как и в предыдущем примере используем то, что

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Делаем замену $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ и получаем

$$t-\frac{1}{t}=\frac{4}{21}\left(t^3-\frac{1}{t^3}\right)\Leftrightarrow\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{4t^2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{4}{21t^2}-1\right)=0.$$

В результате имеем

$$\left[\begin{array}{l} t-\dfrac{1}{t}=0 \\ 4t^4-17t^2+4=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\pm1,t=\pm\frac{1}{2},t=\pm2\Rightarrow x=0,x=\pm\frac{9}{7},x=\pm\frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=a$, $-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}=b$, $-\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{x}{x^2-1}=c$. Воспользовавшись формулой (1.1) получим

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{16^3}{21^3}\cdot\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^3=3\cdot\frac{16}{21}\cdot\frac{x}{x^2-1}.$$

Приводим к общему знаменателю первые две дроби и, после замены $\dfrac{x}{x^2-1}=y$, уравнение приобретает вид

$$\frac{9}{21}y-\frac{2^{10}}{21^3}y^3=0 \Leftrightarrow y=0, y=\pm\frac{63}{32} \Rightarrow x=0, x=\pm\frac{9}{7}, x=\pm\frac{7}{9}.$$

Непосредственная проверка показывает, что все найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=0$, $x=\pm\frac{9}{7}$, $x=\pm\frac{7}{9}$.

1.3. Сведение к системам

В этом разделе мы рассмотрим, в некотором смысле, универсальный способ решения иррациональных уравнений – сведение к системам. Этот способ действительно позволяет решать довольно много уравнений, правда в том случае, когда решение систем не представляет особого труда. Заметим, что мы уже применяли этот прием.

Пример 1.18. $\sqrt[3]{3x}+\sqrt{9-x}=3$.

Это классический пример, в котором использование системы позволяет довольно просто решить уравнение.

Пусть $\sqrt[3]{3x}=a$, $\sqrt{9-x}=b\ge 0$, тогда

$$\begin{cases} a^3=3x \\ b^2=9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3=3x \\ 3b^2=27-3x \end{cases},$$

далее складываем уравнения, избавляясь от x, и составляем систему

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+3b^2=27 \end{cases},$$

которая решается простой подстановкой.

Ответ: $x=0$, $x=9$, $x=-72$.

Пример 1.19. $\dfrac{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x-3}}=4-x$.

После замены: $a=\sqrt[3]{5-x}$, $b=\sqrt[3]{x-3}$, избавляемся от иррациональностей

$$\begin{cases} a^3=5-x \\ b^3=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=2 \\ a^3-b^3=2(4-x) \end{cases}.$$

Теперь составляем систему

$$\begin{cases} \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a^3-b^3}{2} \\ a^3+b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{2} \\ a^3+b^3=2 \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы следует решение

$$a-b=0 \Rightarrow \sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow x=4.$$

Далее, после сокращения на $a-b\neq 0$, перемножим левые и правые части обоих уравнений и, с учетом того, что $a+b\neq 0$, получим

$$a^2+ab+b^2=a^2-ab+b^2 \Leftrightarrow ab=0 \Rightarrow x=5, x=3.$$

Проверка показывает, что все три найденных корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=3$, $x=4$, $x=5$.

Пример 1.20. $\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}$.

Заметим, что суммы подкоренных выражений, стоящих в левой и правой частях, равны. Вводим обозначения

$$a=\sqrt[3]{2x+11};\ b=\sqrt[3]{3x+4};\ c=\sqrt[3]{x+9};\ d=\sqrt[3]{4x+6}$$

и получаем систему

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^3+b^3=c^3+d^3 \end{cases}.$$

Теперь воспользуемся обобщенной теремой Виета (теорема I.5.1) и получим, что исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2x+11}=\sqrt[3]{x+9}\\ \sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{4x+6}\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2x+11}=\sqrt[3]{4x+6}\\ \sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=0\\ \sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{5}{2}\\ x=-3\end{array}\right. .$$

Ответ: $x=-2, x=\dfrac{5}{2}, x=-3$.

Пример 1.21. $\sqrt{(10+x)^3}-\sqrt{(10-x)^3}=\dfrac{28x}{3}$.

Вводим новые переменные: $\sqrt{10+x}=a\geq 0, \sqrt{10-x}=b\geq 0$. Тогда

$$\begin{cases}a^2=10+x\\ b^2=10-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{a^2-b^2}{2}\\ a^2+b^2=20\end{cases}.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases}a^3-b^3=\dfrac{14}{3}\left(a^2-b^2\right)\\ a^2+b^2=20\end{cases}.$$

После преобразования первого уравнения имеем

$$\begin{cases}a-b=0\\ a^2+b^2=20\end{cases} \text{или} \begin{cases}a^2+ab+b^2=\dfrac{14}{3}(a+b)\\ a^2+b^2=20\end{cases}$$

Вторая система симметричная, поэтому вводим новые переменные: $u=a+b$; $v=ab$ и система приобретает вид

$$\begin{cases}u^2-v=\dfrac{14}{3}u\\ u^2-2v=20\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u_1=6\\ v_1=8\end{cases}\\ \begin{cases}u_2=\dfrac{10}{3}\\ v_2=-\dfrac{40}{9}\end{cases}\end{array}\right. .$$

Воспользовавшись неотрицательностью переменных a и b получим

$$\begin{cases}a_1=\sqrt{10}\\ b_1=\sqrt{10}\end{cases} \text{или} \begin{cases}a_2=4\\ b_2=2\end{cases} \text{или} \begin{cases}a_3=2\\ b_3=4\end{cases}.$$

Ответ: $x=0, x=6, x=-6$.

Пример 1.22. $\sqrt[4]{3x+72}+\sqrt[4]{25-3x}=5$.

Это тип примера, решаемого почти устно.

Вводим новые переменные

$$\sqrt[4]{3x+72}=a\geq 0; \sqrt[4]{25-3x}=b\geq 0.$$

Избавляемся от иррациональностей

$$\begin{cases}3x+72=a^4\\ 25-3x=b^4\end{cases} \Rightarrow a^4+b^4=97,$$

и составляем систему

$$\begin{cases}a+b=5\\ a^4+b^4=97\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=3+2\\ a^4+b^4=3^4+2^4\end{cases}.$$

Теперь воспользуемся обобщенной теоремой Виета и получим в качестве решений системы: $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ или $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ откуда легко находим ответ.

Ответ: $x=3, x=-\dfrac{56}{3}$.

Пример 1.23. $\sqrt{7-x^2}=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

На первый взгляд, пример производит весьма тягостное впечатление. Если действовать прямолинейно, то можно получить уравнение высокой степени, и не очень понятно, что с ним надо будет делать. Попробуем составить систему. Обозначим: $\sqrt{x}=a\geq 0, 1-\sqrt{x}=b$ и тогда получаем систему

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^4+b^4=7 \end{cases},$$

которая решается, например, как симметричная.

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.4. Использование свойств функций

Рассмотрим примеры, в которых для нахождения решений мы будем использовать такие свойства функций как монотонность, четность и ограниченность.

Пример 1.24. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

Этот пример можно решить методом, описанным в примере 1.13. Мы же попробуем решить его по другому. Функция $f(x)=x$ является возрастающей и непрерывной на всей числовой оси. Функция $g(t)=\sqrt[3]{t}$ так же является возрастающей и непрерывной на всей числовой оси. Несколько позже мы покажем, что возрастающая функция от возрастающей функции является возрастающей функцией и непрерывная от непрерывной является непрерывной функцией, пока же мы примем этот факт на веру. Таким образом, в левой части нашего уравнения находится возрастающая и непрерывная функция (довольно очевидно, что сумма возрастающих функций является возрастающей и сумма непрерывных является непрерывной). В правой части исходного уравнения – число, т.е. функция являющаяся постоянной. Решениями уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций в левой и правой частях. Понятно, что в случае, когда одна из функций монотонна, а вторая постоянна, таких

точек не может быть более одной. В нашем примере довольно легко угадать решение $x=-2$.

Договоримся в дальнейшем использовать стрелочки $\uparrow\downarrow$ справа от функции для указания возрастания или убывания, соответственно. С учетом обозначений корректная запись решения выглядит следующим образом

$$\begin{cases} x+a\uparrow \\ \sqrt[3]{x+a}\uparrow \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}\uparrow \Rightarrow x=-2.$$

Пример 1.25. $\dfrac{3}{5}\sqrt{1-\dfrac{16x^2}{25}}+\dfrac{4}{5}\sqrt{1-\dfrac{9x^2}{25}}=1$.

Первоначально кажется, что здесь нет никакой монотонности, так как квадратичная функция не является монотонной. Однако, если сделать замену $x^2=t\geq 0$, то относительно этой новой переменной функции будут убывающими и непрерывными на ОДЗ. Имеем слева монотонную функцию, а справа – константу. Угадываем решение $t=1$, которое будет единственным.

Ответ: $x=\pm 1$.

Пример 1.26. $\sqrt[3]{x^2-6x+10}=18x^2-x^4-80$.

Возведение в куб приводит к довольно сложному уравнению 12-ой степени. Выделим в подкоренном выражении и в правой части полные квадраты

$$\sqrt[3]{(x-3)^2+1}=1-\left(x^2-9\right)^2.$$

Теперь легко можно оценить левую и правую части. Действительно, левая часть не меньше единицы, а правая часть не больше единицы. Таким образом, единственная возможность – равенство единице левой и правой частей, т.е.

$$\begin{cases} x=3 \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $x=3$.

1.5. Избавление от иррациональности путем замены

Мы уже использовали такой прием в разделе 1.1.3, сейчас мы рас смотрим некоторые более сложные способы его применения.

Пример 1.27. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Довольно трудно увидеть, что под квадратными корнями нахо дятся полные квадраты. Поэтому вводим новую переменную $\sqrt{x-1}=t\geq 0 \Rightarrow x=t^2+1$. Уравнение относительно новой перемен ной принимает вид

$$\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-6t+9}=1 \Leftrightarrow |t-2|+|t-3|=1.$$

Мы уже решали подобные уравнения (пример I.7.6), поэтому дальнейшее – без комментариев

$$\left(|t-2|-(t-2)\right)+\left(|3-t|-(3-t)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 2 \\ t\leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2\leq \sqrt{x-1}\leq 3 \Leftrightarrow x\in[5;10].$$

Ответ: $x\in[5;10]$.

Пример 1.28. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Возведение в куб приведет к тяжелому уравнению девятой степени. Поэтому избавимся от иррациональности с помощью замены $t=\sqrt[3]{2x-1}$. Получим систему

$$\begin{cases} t^3=2x-1 \\ x^3=2t-1 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе и получим

$$(t-x)\left(t^2+tx+x^2+2\right)=0.$$

Вторая скобка не обращается в нуль никогда, поэтому

$$\begin{cases} t=x \\ x^3=2t-1 \end{cases} \Rightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x=1,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

1.6. Системы, содержащие иррациональные уравнения

Теперь мы рассмотрим как применять уже изученные и некоторые другие приемы к решению систем, содержащих иррациональные уравнения. Начнем с простых примеров.

Пример 1.29. $\begin{cases} x^2+y\sqrt[3]{x^2y}=17 \\ y^2+x\sqrt[3]{xy^2}=68 \end{cases}.$

Преобразум левые части обоих уравнений, вынося за скобки общий множитель , а затем разделим лывую и правую части второго уравнения на сооответствующие части первого. Получим уравнение–следствие

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}\right)=17 \\ \sqrt[3]{y^2}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}\right)=68 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=4 \Rightarrow y=\pm 8x.$$

Далее все просто.
Ответ: $(1;8)$, $(1;-8)$, $(-1;8)$, $(-1;-8)$.

Пример 1.30. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases},a>0$.

Из первого уравнения системы видно, что левая часть неотрицательна, следовательно, необходимо выполнение условия $y\geq 0$. Домножаем обе части первого уравнения на сопряженное выражение и получаем уравнение

$$y\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}\right)=2y^2.$$

Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a-b=1 \\ 2a^2-4b^2-7b+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-b=1 \\ 2b^2+3b-5=0 \end{cases}.$$

С учетом ограничений на переменные получаем единственное решение

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

В следующем примере используется прием, который в дальнейшем будет применяться многократно, особенно при изучении интегрирования.

Пример 1.33. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y} \\ xy=15 \end{cases}.$

Справедлива следующая цепочка

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}}=\frac{1}{|x-y|}\sqrt{x^2-y^2}.$$

Теперь первое уравнение системы принимает вид

$$x+y-\frac{1}{|x-y|}\sqrt{x^2-y^2}=\frac{12}{x-y}.$$

Обозначим $\sqrt{x^2-y^2}=t\ge 0$ и, раскрывая модуль, получим два случая:

1. $\begin{cases} x-y>0 \\ \sqrt{x^2-y^2}=t\ge 0 \\ t^2-t-12=0 \\ xy=15 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-y>0 \\ x^2-y^2=16 \\ xy=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x-y<0 \\ \sqrt{x^2-y^2}=t\ge 0 \\ t^2+t-12=0 \\ xy=15 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-y<0 \\ x^2-y^2=9 \\ xy=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{9+3\sqrt{109}}{2}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{3\sqrt{109}-9}{2}} \end{cases}.$

Ответ: $(5;3)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{9+3\sqrt{109}}{2}};-\sqrt{\dfrac{3\sqrt{109}-9}{2}}\right)$.

Теперь рассмотрим систему, в которой от иррациональности удается избавиться путем обычных алгебраических преобразований.

Пример 1.34. $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y^2+a^2}+\sqrt[3]{(x-y+a)^2}=2\sqrt[3]{4xy} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a} \end{cases}.$

Из второго уравнения системы следует, что $ax-ay-xy=0$ и

$$(x-y+a)^2=x^2+y^2+a^2+2(ax-ay-xy)=x^2+y^2+a^2.$$

Первое уравнение системы приобретает вид

$$(x-y+a)^2=4xy \text{ или } (x-y+a)^2-4ax+4ay=0$$

После раскрытия скобок получаем

$$x^2+y^2+a^2+2ax-2ay-2xy-4ax+4ay=0$$

Окончательно имеем

$$(x-y-a)^2=0.$$

Таким образом, исходная система оказалась равносильна

$$\begin{cases} x-y-a=0 \\ ax-ay-xy=0 \\ a\neq 0, x\neq 0, y\neq 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(a\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; -a\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(a\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; -a\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Следующий пример показывает как с помощью обычных преобразований можно довольно сложный пример свести к решению квадратного уравнения.

Пример 1.35. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2 \end{cases}.$

Возводим обе части первого уравнения системы в квадрат

$$x+y-2\sqrt{x^2-y^2}+x-y=a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{a^2}{2}.$$

Подставляем полученное выражение для $\sqrt{x^2-y^2}$ во второе уравнение

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3a^2}{2}-x.$$

Теперь возводим в квадрат оба выражения для $\sqrt{x^2-y^2}$ и $\sqrt{x^2+y^2}$, складываем и вычитаем левые и правые части получившихся уравнений

$$\begin{cases} 2x^2=x^2-a^2x+\dfrac{a^4}{4}+x^2-3a^2x+\dfrac{9a^4}{4} \\ y^2=a^4-a^2x \end{cases}.$$

После приведения подобных

$$\begin{cases} a^2x=\dfrac{5}{8}a^4 \\ y^2=\dfrac{3}{8}a^4 \end{cases}.$$

Отсюда следут, что при $a=0$ решением является $(x_0;0)$, где x_0 – любое действительное число.

При $a\neq 0$ решения имеют вид

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{8}a^2 \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{3}{8}}a^2 \end{cases}.$$

Неоднократное возведение в квадрат могло привести к появлению дополнительных решений, поэтому сделаем проверку.

Проверка.

1. Проверим решение $(x_0;0)$, полученное при $a=0$

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

2. $x=\dfrac{5}{8}a^2$, $y=\sqrt{\dfrac{3}{8}}a^2$.

Так как

$$\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}}=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 \text{ и } \frac{5}{8}-\sqrt{\frac{3}{8}}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2,$$

то, подставляя x и y в первое уравнение исходной системы, получаем сравнение

$$\sqrt{\left(\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)a^2}-\sqrt{\left(\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)a^2}\vee a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}-\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{1}{2}\right)\right)\vee a \Leftrightarrow |a|\vee a.$$

Равенство возможно только при $a\geq 0$.

Второе уравнение системы при проверяемых значениях x и y обращается в верное равенство.

$$\begin{cases} y=0 \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases}$$

Первая система решается просто, а во второй складываем первые два уравнения, и система приобретает вид

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2}=3y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases},$$

Решение такой системы не должно вызывать вопросов.

Ответ: $\left(\pm 2\sqrt{3}\,a;0\right)$, $\left(\pm 2\sqrt{5}\,a;4a\right)$.

Пример 1.31. $\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$.

Здесь надо быть предельно внимательным и аккуратным.

Домножаем обе части первого уравнения на $y\neq 0$ и получаем $2y+6y^2=x-y\sqrt{x-2y}$.

Теперь заменим $\sqrt{x-2y}=t\geq 0$ и получим обычное однородное уравнение

$$t^2-yt-6y^2=0,$$

решениями которого будут $t=-2y$ и $t=3y$ или $\sqrt{x-2y}=-2y$ и $\sqrt{x-2y}=3y$. Теперь наша исходная система, при условии $y\neq 0$, равносильна совокупности двух систем, которые мы будем решать последовательно.

1. $\begin{cases} \sqrt{x-2y}=-2y \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2y}=-2y \\ \sqrt{x-2y}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2y}=-2y \\ -2y=x+3y-2 \end{cases}.$$

Решением этой системы будет $x=12; y=-2$.

2. $\begin{cases} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+3y}=x+3y-2 \end{cases}$.

Обозначим $\sqrt{x+3y}=z\geq 0$ и второе уравнение системы примет вид $z^2-z-2=0$. Получаем систему $\begin{cases} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+3y}=2 \end{cases}$, решением которой является $x=\dfrac{8}{3}; y=\dfrac{4}{9}$.

Ответ: $(12;-2)$, $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{9}\right)$.

Пример 1.32. $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$.

Выглядит вполне естественным ввести новые переменные

$$\sqrt{11x-y}=a\geq 0, \sqrt{y-x}=b\geq 0$$

и избавиться от иррациональностей

$$\begin{cases} a^2=11x-y \\ b^2=y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2}{10} \\ y=\dfrac{a^2+11b^2}{10} \end{cases}.$$

Теперь исходная система приобретает вид

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 7b+6\cdot\dfrac{a^2+11b^2}{10}-26\cdot\dfrac{a^2+b^2}{10}=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+4}{2x-1} \\ \sqrt{\dfrac{3}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{9}{(2x-1)^2}}=\dfrac{3}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+4}{2x-1} \\ \sqrt{\dfrac{3}{x+1}}-\dfrac{3}{|2x-1|}=\dfrac{3}{2x-1} \end{cases}.$$

Если $2x-1>0$, то $x=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{4}$.

Если $2x-1<0$, то система решений не имеет.

Ответ: $\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{4}\right),\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right)$.

Отметим удивительно красивую симметрию этого примера.

Теперь рассмотрим два примера, в которых повторяются идеи решений систем рациональных уравнений.

Пример 1.37. $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4} \end{cases}.$

Наличие разности квадратов x^2-y^2 подсказывает идею решения. Сложим и вычтем левые и правые части обоих уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)-(x+y)\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{15}{4} \\ \dfrac{(x-y)+(x-y)\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)\left(1-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{15}{4} \\ \dfrac{(x-y)\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Теперь перемножим левые и правые части обоих уравнений и получим $x^2-y^2=\dfrac{15}{16}$. Подставляем это значение разности квадратов в исходную систему

$$\begin{cases} x-\dfrac{\sqrt{15}}{4}y=\dfrac{1}{2} \\ y-\dfrac{\sqrt{15}}{4}x=\dfrac{7}{16} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{32+7\sqrt{15}}{4};7+2\sqrt{15}\right)$.

Пример 1.38. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 \\ x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}+x}+y^2=0 \end{cases}.$

Первое, что необходимо сделать – это избавиться от иррациональности в знаменателе второго уравнения. Умножаем числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение, не равное нулю

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 \\ x+y\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+y^2=0 \end{cases}.$$

Иррациональность сильно мешает, поэтому избавимся от нее, сложив первое уравнение, умноженное на $y \neq 0$ и второе, умноженное на минус два. Получим уравнение следствие

$$x^2-2x\left(y-y^2\right)+\left(y^4-2y^3-3y^2\right)=0.$$

Теперь решаем его как квадратное относительно x, находим решения $x_1=-y^2-y$, $x_2=-y^2+3y$ и и добавив к ним второе уравнение преобразованной системы получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} x=-y-y^2 \\ x+y\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+y^2=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x=-y^2+3y \\ x+y\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+y^2=0 \end{cases}.$$

Принимая во внимание условие $y \neq 0$, находим ответ.
Ответ: $(0;-1)$.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить уравнения:

1.1. $\sqrt{4-x^2-6x}=x+4$.

1.2. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=2$.

1.3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1$.

1.4. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{7x-10}=\sqrt{5x-1}+\sqrt{5x-6}$.

1.5. $\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+10}=10-6x$.

1.6. $\sqrt{10x^2+8x+7}+\sqrt{10x^2-8x+7}=8x$.

1.7. $\sqrt{5-2x^2-3x}+\sqrt{2x-2x^2}=\sqrt{x^2-7x+6}+\sqrt{x^2-12x+11}$.

1.8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=\sqrt{x^2-10x+41}$.

1.9. $5-7x=\dfrac{7x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

1.10. $7x-\dfrac{4}{x}=-3\sqrt{7x+\dfrac{4}{x}}$.

1.11. $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$.

1.12. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-4}+x=4$.

1.13. $\dfrac{1}{2}-x^2=\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}$.

1.14. $2x\sqrt{x+x^2}+2x^2+x=9$.

1.15. $(x+2)\sqrt{x^2+1}=x^2+2x-3$.

1.16. $\left(10x^2+14x+2\right)\sqrt{x^2-1}=10x^3+14x^2-3x-7$.

1.17. $4\sqrt{x}+81\sqrt{x+1}-4\sqrt{x^2+x}-4x=81$.

1.18. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

1.19. $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}=x^2$.

1.20. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}$.

1.21. $\sqrt{10+x+6\sqrt{x+1}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$.

1.22. $\sqrt{(10+x)^3}+\sqrt{(10-x)^3}=\dfrac{28x}{3}$.

1.23. $\sqrt[4]{3x+72}+\sqrt[4]{25-3x}=5$.

1.24. $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$.

1.25. $\sqrt{x^2-2}+\sqrt{11x^2-10x+1}=\sqrt{5x^2-4x-10}+\sqrt{13x^2-12x-3}$.

1.26. $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{1-x}=3$.

1.27. $\sqrt[3]{x+27}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{8x+6}$.

1.28. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

1.29. $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{8x+1}=0.$

1.30. $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7.$

1.31. $\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{2x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{2x+3}}=\dfrac{8}{13}\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}.$

1.32. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{64}{273}\dfrac{x}{x^2-1}.$

1.33. $\dfrac{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x-3}}=4-x.$

1.34. $\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}.$

1.35. $\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{4x-x^2-3}.$

1.36. $3x-2\left|x-2\right|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$

1.37. $4x+4+x\sqrt{x^2+8}+(x+2)\sqrt{x^2+4x+12}=0.$

1.38. $\sqrt{16-x^2}=\left(3-\sqrt{x}\right)^2.$

1.39. $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)=8.$

Решить системы уравнений:

1.40. $\begin{cases} x^2+y\sqrt[3]{x^2y}=17 \\ y^2+x\sqrt[3]{xy^2}=68 \end{cases}.$

1.41. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases}.$

1.42. $\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}.$

1.43. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y} \\ xy=15 \end{cases}.$

1.44. $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y^2+a^2}+\sqrt[3]{(x-y+a)^2}=2\sqrt[3]{4xy} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a} \end{cases}.$

1.45. $\begin{cases} (1-x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)^2(1-y^2)=4x^2\sqrt{1+y^4} \\ \sqrt{2}(1-x^2)(1-y^2)=4xy \end{cases}$

1.46. $\begin{cases} \dfrac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x}{a} \\ x\sqrt{a-y}=y\sqrt{a+x} \end{cases}.$

1.47. $\begin{cases} (2y-1)\left(x^2+2+\sqrt{x^4+4x+3}\right)= \\ =(2x-1)\left(y^2+2+\sqrt{y^4+4y+3}\right). \\ \sqrt{\dfrac{y+1}{xy-1}}-\sqrt{\dfrac{2y-1}{2x-1}}=\dfrac{y+1}{x+1} \end{cases}$

1.48. $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}.$

1.49. $\begin{cases} 1+\sqrt{2x-y}=\dfrac{2x-y}{xy}+\dfrac{xy}{\sqrt{2x-y}} \\ xy\sqrt{\dfrac{xy}{2x-y}}=4-3\sqrt{2x-y} \end{cases}$

1.50. $\begin{cases} \sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2}=2x+2y \\ x^2+y^2+4xy=\dfrac{1}{5} \end{cases}.$

1.51. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2 \end{cases}.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1.1д. $\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{2-x}=3$.

1.2д. $7x-4=-\dfrac{7x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

1.3д. $\sqrt{2x^2-23x+69}-\sqrt{x^2-9x+20}=x-7$.

1.4д. $\dfrac{\sqrt{34+x}+\sqrt{34-x}}{\sqrt{34+x}-\sqrt{34-x}}=\dfrac{x}{18}$.

1.5д. $(2x+1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+x-1$.

1.6д. $\sqrt{\dfrac{x+16}{x-16}}+\sqrt{\dfrac{x-16}{x+16}}=\dfrac{30}{41}\dfrac{x^2+256}{x^2-256}$.

1.7д. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{x^2-6x+13}$.

1.8д. $\sqrt[4]{4x+69}+\sqrt[4]{28-4x}=5$.

1.9д. $\sqrt{4-x^2-6x}=-x-4$.

1.10д. $\sqrt[3]{200+2x}+\sqrt{300-x}=20$.

1.11д. $(x+14)\sqrt{1-x^2}=x+14-7x^2$.

1.12д. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2+x}+2x=1$.

1.13д. $5\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)+x+\sqrt{x^2+2x-15}=27$.

1.14д. $\sqrt{8x^2+7x+10}-\sqrt{8x^2-9x+10}=2x$.

1.15д. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x}=2$.

1.16д. $5\sqrt{x}+49\sqrt{x+1}-5\sqrt{x^2+x}-5x=49$.

1.17д. $5x-\dfrac{24}{x}=-2\sqrt{5x+\dfrac{24}{x}+23}$.

1.18д. $\sqrt{(6+x)^3}+\sqrt{(6-x)^3}=\dfrac{36x}{5}$.

1.19д. $\sqrt{5x^2+37x+102}-\sqrt{x^2-3x+2}=2x+10$.

1.20д. $\sqrt{5x-26}+\sqrt{5x-20}=\sqrt{4x-20}+\sqrt{4x-14}$.

1.21д. $(12x^2+22x+5)\sqrt{x^2-1}=12x^3+22x^2-x-11$.

1.22д. $\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{8x+1}+x$.

1.23д. $2x\sqrt{x+x^2}+2x^2+x=4$.

1.24д. $\sqrt{x^2+10x}+\sqrt{x^2+13}=13-10x$.

1.25д. $(16x^3+20x^2-2x-5)\sqrt{x^2-1}=16x^4+20x^3-10x^2-15x-1$.

1.26д. $\sqrt{\dfrac{3x+5}{3x-5}}+\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}=\dfrac{30}{41}\dfrac{9x^2+25}{9x^2-25}$.

1.27д. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$.

1.28д. $\sqrt{2-x^3}=\sqrt[3]{x^2-2}$.

1.29д. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2+x+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

1.30д. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{3+x-4\sqrt{x-1}}=1$.

1.31д. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

1.32д. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{2\left(x^3+1\right)}$.

1.33д. $\dfrac{x^2}{4}-2=\sqrt{4x+8}$.

1.34д. $(x-4)\sqrt{x^2+4}+x\sqrt{x^2-8x+20}=8$.

1.35д. $\sqrt{x^3-11x+4}+\sqrt{x^4-2x^2+1}=$

$=\sqrt{x^3+3x^2-32x+22}+\sqrt{x^4+5x^2-49x+43}$.

1.36д. $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-6}=3$.

1.37д. $\sqrt[3]{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^2+x+1}=\sqrt[3]{2x^2+2}$.

1.38д. $\sqrt[3]{4x+1}+\sqrt[3]{5x+1}+\sqrt[3]{9x+1}=0$.

1.39д. $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(11-x)(2-x)}+\sqrt[3]{(11-x)^2}=3$.

1.40д. $\sqrt[3]{2x+13}+\sqrt[3]{4x+5}=\sqrt[3]{x+14}+\sqrt[3]{5x+4}$.

1.41д. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

1.42д. $\sqrt[3]{\dfrac{5x+6}{5x-6}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x-6}{5x+6}}=\dfrac{8}{13}\dfrac{25x^2+36}{25x^2-36}$.

1.43д. $\sqrt[3]{\frac{2x+5}{2x-5}}-\sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+5}}=\frac{160}{21}\cdot\frac{x}{4x^2-25}$.

1.44д. $4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right|$.

1.45д. $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}$.

1.46д. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)=8$.

1.47д. $4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x$.

1.48д. $\frac{45}{\sqrt{x^2+9}-x}=\frac{5x^2}{\sqrt{x^2+9}+3}+\sqrt{3x+31}$.

1.49д. $\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}\right)^3=\left(7+\frac{18}{2x-3}\right)\sqrt{3x-5}+\left(7-\frac{18}{2x-3}\right)\sqrt{x-2}$.

1.50д. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}+\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}\right)^2=\frac{28}{27}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-4}+\frac{55}{27}$.

Решить системы уравнений:

1.51д. $\begin{cases} x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$.

1.52д. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}. \\ x+yx+y=9 \end{cases}$

1.53д. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$.

1.54д. $\begin{cases} \sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5 \\ \sqrt{y+2x}+y+x=1 \end{cases}$.

1.55д. $\begin{cases} y+\frac{2\sqrt{x^2-12y+1}}{3}=\frac{x^2+17}{12} \\ \frac{x}{8y}+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}-\frac{y}{2x} \end{cases}$.

1.56д. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ x^2+y^2=65 \end{cases}$.

1.57д. $\begin{cases} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \end{cases}$.

1.58д. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8} \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2} \end{cases}$.

1.59д. $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}-2\sqrt{x^2-1}+y^2=3 \\ 3(x-y)+\frac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x}+3y^2=0 \end{cases}$.

1.60д. $\begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x+y}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{x+y}}=\frac{5}{2}. \\ x^2+y^2=226 \end{cases}$

1.61д. $\begin{cases} 1-5y=\frac{x}{y}-6\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x-\sqrt{x-y}}=x-5y-6 \end{cases}$.

1.62д. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{a} \\ \sqrt[3]{x^2+y^2}+\sqrt[3]{x^2-y^2}=\sqrt[3]{a^2} \end{cases}$.

1.63д. $\begin{cases} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a \\ x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b \end{cases}$.

1.64д. $\begin{cases} \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 \\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{7}{4} \end{cases}$.

1.65д. $\begin{cases} x^3+(y+1)x^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x+1=0 \\ \sqrt{1+x^2y+xy}+\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}=1 \end{cases}.$

1.66д. $\begin{cases} x^3-xyz=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^3+y^3+z^3} \\ y^3-xyz=-\dfrac{5}{6}\sqrt{x^3+y^3+z^3} \\ z^3-xyz=\dfrac{7}{2}\sqrt{x^3+y^3+z^3} \end{cases}.$

1.67д. $\begin{cases} \sqrt{x-4y}-2\sqrt{3y+x}=1 \\ 7\sqrt{3y+x}+22y+5x=13 \end{cases}.$

1.68д. $\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}=\dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{\sqrt{x-2y}}{xy} \\ xy\sqrt{\dfrac{xy}{x-2y}}=2-\sqrt{x-2y} \end{cases}.$

1.69д. $\begin{cases} \sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}}=x \\ \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}}=y \end{cases}.$

1.70д. $\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}-y\sqrt{x^2+1}=-\dfrac{29}{20} \\ \sqrt{y^2-1}\cdot\sqrt{x^2+1}-xy=\dfrac{21}{20} \end{cases}.$

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

1.1. -1. **1.2.** $\frac{9}{16}$. **1.3.** 0. **1.4.** 2. **1.5.** $\frac{3}{4}$. **1.6.** 1. **1.7.** 1. **1.8.** 5. **1.9.** $\frac{95}{168}$. **1.10.** $\frac{2}{7}$.
1.11. $\frac{1}{4}$. **1.12.** 2. **1.13.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **1.14.** $\frac{9}{7}$. **1.15.** $\frac{-8-3\sqrt{11}}{7}$. **1.16.** $-1;-\frac{53}{45}$.
1.17. $0;\frac{73^2\cdot 81^2}{8^2\cdot 77^2}$. **1.18.** $\frac{5}{3};\frac{5}{4}$. **1.19.** ± 2. **1.20.** $1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **1.21.** $0;3$. **1.22.** $\frac{10\sqrt{65}}{9}$
1.23. $3;-\frac{56}{3}$. **1.24.** 7. **1.25.** 2. **1.26.** $0;-7$. **1.27.** $3;-\frac{1}{3}$. **1.28.** -2. **1.29.** $-\frac{7}{48}$.

1.30. $0;-19$. **1.31.** $\pm\frac{7}{6};\pm\frac{27}{14}$. **1.32.** **1.33.** $5;4;3$. **1.34.** $-3;-2;\frac{5}{2}$. **1.35.** 3. **1.36.** 6.
1.37. -1. **1.38.** $\frac{\sqrt{194}-9\pm 3\sqrt{2\sqrt{194}-27}}{2}$. **1.39.** 0. **1.40.** $(1;\pm 8),(-1;\pm 8)$.
1.41. $(\pm 2\sqrt{3}|a|;0),(\pm 2\sqrt{5}|a|;4|a|)$. **1.42.** $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right),(12;-2)$. **1.43.** $(5;3)$, $\left(-\sqrt{\frac{9+3\sqrt{109}}{2}};-\sqrt{\frac{-9+3\sqrt{109}}{2}}\right)$. **1.44.** $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}a;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a\right)$. **1.45.** $\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1};\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{2}\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1};-\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right)$. **1.46.** $\left(\frac{\sqrt{153}-11}{16}a;\frac{13-\sqrt{153}}{8}a\right)$, при $a>0$, $\varnothing$, при $a<0$. **1.47.** $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right),\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{2};\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right)$. **1.48.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.
1.49. $\left(-\frac{1}{2};-2\right),(1;1)$. **1.50.** $\left(-\frac{\sqrt{65}}{65};-\frac{2\sqrt{65}}{65}\right),\left(\frac{2\sqrt{65}}{65};\frac{\sqrt{65}}{65}\right)$.
1.51. $\left(\frac{5}{8}a^2;\frac{\sqrt{6}}{4}a^2\right)$, при $a\ge 0$; $\left(\frac{5}{8}a^2;-\frac{\sqrt{6}}{4}a^2\right)$, при $a<0$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1д. $2;29;-6$. **1.2д.** $\frac{36}{77}$. **1.3д.** 7. **1.4д.** ± 30. **1.5д.** $-\frac{3}{4}$. **1.6д.** ± 20. **1.7д.** 3.
1.8д. $3;-\frac{53}{4}$. **1.9д.** -6. **1.10д.** $156;-100;-600$. **1.11д.** $0;-\frac{7}{25}$. **1.12д.** 0. **1.13д.** 4.
1.14д. $0;1;-\frac{6}{7}$. **1.15д.** 0. **1.16д.** $0;\frac{39^2\cdot 49^2}{10^2\cdot 44^2}$. **1.17д.** $\frac{6}{5};-\frac{12}{5}$. **1.18д.** $\frac{18+48\sqrt{6}}{25}$.
1.19д. $1;2;-5$. **1.20д.** 6. **1.21д.** $-1;-\frac{73}{48}$. **1.22д.** $0;15$. **1.23д.** $\frac{4}{5}$. **1.24д.** $\frac{2}{3}$.
1.25д. $-1;-\frac{13}{12}$. **1.26д.** $\pm\frac{25}{12}$. **1.27д.** $\frac{3}{5};\frac{4}{5};\frac{-5-\sqrt{73}}{14}$. **1.28д.** $\varnothing$. **1.29д.** 15. **1.30д.** $[2;5]$.
1.31д. -1. **1.32д.** 1. **1.33д.** $2+2\sqrt{3}$. **1.34д.** 4. **1.35д.** 6. **1.36д.** $5;-2$. **1.37д.** $\varnothing$.
1.38д. $-\frac{7}{36}$. **1.39д.** $10;3$. **1.40д.** $-3;1;3$. **1.41д.** $-\frac{1}{2}$. **1.42д.** $\pm\frac{14}{15};\pm\frac{54}{35}$.

1.43д. $0; \pm\frac{45}{14}; \pm\frac{35}{18}$. **1.44д.** 7. **1.45д.** 2. **1.46д.** 1. **1.47д.** $\sqrt{10}-2\pm2\sqrt{\sqrt{10}-3}$.
1.48д. -2. **1.49д.** 3. **1.50д.** $\pm\frac{18}{7}$. **1.51д.** $(216;27),(-27;-216)$.
1.52д. $\left(-9;-\frac{9}{4}\right),(4;1)$. **1.53д.** $(1;1)$. **1.54д.** $\left(8-\sqrt{33};\frac{\sqrt{33}-11}{2}\right)$.
1.55д. $\left(-3;-\frac{1}{2}\right),\left(5;\frac{5}{6}\right)$. **1.56д.** $(8;1),(1;8)$. **1.57д.** $(5;4),(-5;-4),(15;-12)$, $(-15;12)$. **1.58д.** $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3};2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. **1.59д.** $\left(\frac{5}{3};\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}\right)$. **1.60д.** $(15;1),(-15;-1)$, $\left(15\sqrt{\frac{226}{481}};-16\sqrt{\frac{226}{481}}\right),\left(-15\sqrt{\frac{226}{481}};16\sqrt{\frac{226}{481}}\right)$. **1.61д.** $(42;6)$, $\left(\frac{47+\sqrt{229}}{5};\frac{2+\sqrt{229}}{25}\right)$. **1.62д.** $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a;\sqrt{1+\frac{11\sqrt{3}}{18}}a\right)$. **1.63д.** если $a>0$ и $|b|\le 8a$, то $\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\pm\sqrt{2-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}}{2}a,\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\mp\sqrt{2-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}}{2}a\right)$; если $a>0$ и $b=-\frac{\sqrt{2}a}{4}$, то $\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$; если $a>0$ и $b=\frac{\sqrt{2}a}{4}$, то $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$; если $a>0$ и $b=a$, то $(a;0),(0;a)$; если $a>0$ и $b=-a$, то $(-a;0),(0;-a)$; если $b=a=0$, то $(0;0)$; если $a=0, b\ne0$, то $\varnothing$, если $a<0$, то $\varnothing$. **1.64д.** $\left(\frac{32+7\sqrt{15}}{4};7+2\sqrt{15}\right)$.
1.65д. $(-1;1)$. **1.66д.** $(0;0;0),(2;1;3)$. **1.67д.** $(13;-3)$. **1.68д.** $\left(2;\frac{1}{2}\right),(-1;-1)$.
1.69д. $(2;3)$. **1.70д.** $\left(\frac{4a^2-1}{4a};\frac{25a^2+1}{10a}\right)$, где $a\ge\frac{1}{5}$.

Лекция №2

Иррациональные неравенства

Прежде чем мы начнем рассматривать различные методы решения неравенств, отметим, что, в принципе, практически любое неравенство можно решать как уравнение, после этого нанести корни уравнения на ось и на каждом интервале, входящем в ОДЗ неравенства, определить знак функции. Однако, такой метод решения может привести к довольно большой работе, поэтому мы уделим некоторое время исследованию методов решения непосредственно неравенств.

2.1. Простейшие неравенства

Сначала рассмотрим правила решения простейших неравенств.

2.1.1. Неравенства вида $\sqrt{f(x)}\le g(x)$

Правая часть должна быть неотрицательной, то есть для решения неравенства необходимо, чтобы $g(x)\ge0$. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно – $f(x)\ge0$. Левая и правая части при указанных условиях неотрицательны и можно эти части возводить в квадрат.

Таким образом, решение неравенства рассматриваемого типа равносильно решению системы

$$\begin{cases} f(x)\ge0 \\ g(x)\ge0 \\ f(x)\le g^2(x) \end{cases} \qquad (2.1)$$

Пример 2.1. $\sqrt{3x+1}\le x+1$.

Выписываем систему, решение которой представлено на рис. 2.1.

$$\begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ 3x+1\le (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup[1;+\infty).$$

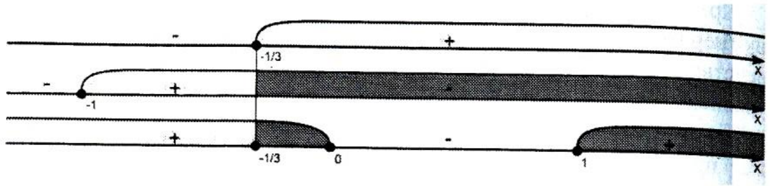

Рис. 2.1.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3},0\right]\cup[1,+\infty)$.

2.1.2. Неравенства вида $\sqrt{f(x)}\ge g(x)$

Теперь правая часть может быть любого знака, поэтому рассматриваем два случая.

1. Пусть $g(x)<0$. Тогда исходное неравенство выполняется всюду на ОДЗ – $f(x)\ge 0$.

2. Пусть $g(x)\ge 0$. Тогда, с учетом условия неотрицательности подкоренного выражения, можно обе части исходного неравенства возвести в квадрат. В результате получается система

$$\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)\ge 0 \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases}.$$

Заметим, что условие неотрицательности $f(x)$ является лишним, так как оно автоматически следует из последнего неравенства системы.

Таким образом, неравенство рассматриваемого вида равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. . \qquad (2.2)$$

Пример 2.2. $\sqrt{7+x}\ge 7-2x$.

В соответствии с (2.2) имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-2x<0 \\ 7+x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-2x\ge 0 \\ 7+x\ge (7-2x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{2} \\ 2\le x\le\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[2;+\infty).$$

Ответ: $[2,+\infty)$.

Теперь рассмотрим примеры, в которых мы будем, в той или иной степени, использовать описанные выше правила решения простейших иррациональных неравенств.

2.2. Использование принципов решения рациональных неравенств

Пример 2.3. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\ge 0$.

Мы уже рассматривали в лекции I.5 вопрос о решении нестрогих неравенств. Правда, там речь шла о рациональных неравенствах, однако, спроецируем некоторые предложения на решение любых неравенств.

Сначала решаем уравнение $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}=0$ и находим его корни $x=3, x=1, x=-2$. Считаем найденные значения одними из решений нашего неравенства (напомним, что при $x=3$ надо проверить неотрицательность подкоренного выражения). После этого решаем строгое неравенство, которое в силу положительности арифметического корня (нулевые точки уже рассмотрены), сводится к системе

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Объединяем решения уравнения и строгого неравенства и получаем ответ.

Ответ: $\{-2\}\cup\{1\}\cup[3,+\infty)$.

Как показывает практика, подавляющее большинство абитуриентов, избирающих иной путь решения, теряют изолированные точки.

2.3. Использование сопряженных выражений

Пример 2.4. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{6x-9}\le x+5$.

Этот пример вполне можно решить обычным возведением в квадрат и сведением после этого к довольно непростой системе рациональных неравенств. Мы изберем другой путь, который в подобных примерах выглядит предпочтительнее.

Заметим, что разность подкоренных выражений дает удвоенную правую часть. Если бы мы решали уравнение, то домножение на сопряженное выражение привело бы нас к быстрому результату. В случае неравенства мы, в общем случае, не можем домножить на сопряженное выражение, так как это выражение может быть любого знака. Попробуем обойти эту проблему. Запишем

$$x+5=\frac{\left(\sqrt{8x+1}-\sqrt{6x-9}\right)\left(\sqrt{8x+1}+\sqrt{6x-9}\right)}{2},$$

так как $\sqrt{8x+1}+\sqrt{6x-9}>0$ при $x\ge\frac{3}{2}$, то получим неравенство равносильное на ОДЗ исходному

$$\sqrt{6x-9}-\sqrt{8x+1}\le-2.$$

Теперь складываем левые и правые части получившегося и исходного неравенств. Подобный прием мы использовали при решении иррациональных уравнений, но тогда нам было неважно складываем мы или вычитаем уравнения. В случае неравенств возможно только сложение равносильных неравенств одного направления знака.

В результате получаем простейшее иррациональное неравенство

$$2\sqrt{6x-9}\le x+3.$$

Отметим одно черезвычайно важное обстоятельство. При подобном методе решения конечное неравенство равносильно исходному, то есть условие неотрицательности второго подкоренного выражения будет выполняться автоматически.

Ответ: $\left[\frac{3}{2},3\right]\cup[15,+\infty)$.

Рассмотрим теперь более сложный пример на эту же тему.

Пример 2.5. $\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15}\le|3x-6|$.

Замечаем, что разность подкоренных выражений дает $3x-6$, но использовать напрямую прием из предыдущего примера мешает модуль. Поэтому сначала решаем неравенство $|f(x)|\ge g(x)$. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} 3x-6\ge\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15} \\ 3x-6\le-\sqrt{9x^2-48x-21}-\sqrt{9x^2-51x-15} \end{array}\right.$$

Теперь последовательно решаем оба неравенства, для упрощения записи обозначив $\sqrt{9x^2-48x-21}=a\ge0$ и $\sqrt{9x^2-51x-15}=b\ge0$.

В силу того, что система

$$\begin{cases} 9x^2-48x-21=0 \\ 9x^2-51x-15=0 \end{cases}$$

не имеет решений,то $a+b>0$ на ОДЗ.

$$1.\ \begin{cases} a+b\le a^2-b^2 \\ b+a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a\le-1 \\ b+a\le 3x-6 \end{cases}.$$

Складываем левые и правые части последних двух неравенств

$$2\sqrt{9x^2-51x-15}\le 3x-7$$

и получаем систему

$$\begin{cases} 9x^2-51x-15\ge 0 \\ 27x^2-162x-109\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6},\dfrac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]. \\ 3x-7\ge 0 \end{cases}$$

Второе неравенство решается практически таким же образом

$$2.\quad \begin{cases} a+b\le b^2-a^2 \\ a+b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b\le -1 \\ b+a\le -3x+6 \end{cases}.$$

Снова складываем левые и правые части двух неравенств последней системы

$$2\sqrt{9x^2-48x-21}\le -3x+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 9x^2-48x-21\ge 0 \\ 27x^2-162x-109\le 0\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{27-4\sqrt{66}}{9};\dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right]. \\ -3x+5\ge 0 \end{cases}$$

И вновь, после сложения неравенств мы получаем неравенство, равносильное решаемому, даже с учетом того, что одного из радикалов нет.

Ответ: $\left[\dfrac{27-4\sqrt{66}}{9},\dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6},\dfrac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

2.4. Пересечение участков знакопостоянства функций

Теперь возвращаемся к способу решения неравенств, примененному в примере I.7.15.

Пример 2.6. $\dfrac{\sqrt{4x-7}-3x+5}{16-3x^2+22x}\le 0$.

Сначала находим участки знакопостоянства функции,стоящей в знаменателе. Для этого раскладываем на множители квадратный трехчлен

$$16-3x^2+22x=-3(x-8)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

и расставляем на числовой оси знаки (первая линия на рис. 2.2).

Решаем уравнение $\sqrt{4x-7}-3x+5=0\Leftrightarrow x_1=2,x_2=\dfrac{16}{9}$ и с учетом знаменателя исходного неравенства определяем, что эти значения являются решениями нашего неравенства.

Наносим на числовую ось найденные точки, и для расстановки знаков находим значения функции $f(x)=\sqrt{4x-7}-3x+5$ в произвольных точках на каждом из получившихся промежутков

$$f(3)=\sqrt{5}-4<0;$$

$$f\left(\frac{17}{9}\right)=\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{2}{3}>0;$$

$$f\left(\frac{7}{4}\right)=-\frac{21}{4}+5<0.$$

Расставляем знаки на второй прямой рис. 2.2.

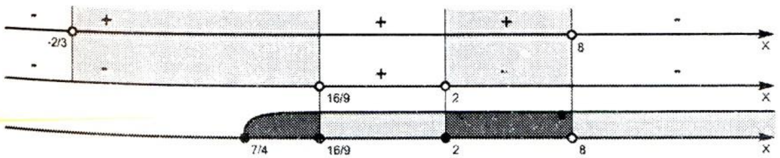

Рис.2.2.

Через каждую точку на обеих прямых проводим вертикальные линии. Закрашенные области – это области, без учета области существования функций, входящих в исходное неравество, являются решениями этого неравенства.

Теперь пересекаем найденные интервалы с областью, где подкоренное выражение неотрицательно $\left(x \ge \dfrac{7}{4}\right)$ (третья линия на рис.2.2), добавляем уже найденные точки (решения уравнения) и получаем ответ.

Ответ: $\left[\dfrac{7}{4}, \dfrac{16}{9}\right] \cup [2, 8)$.

В следующем примере нам придется вспомнить каким образом можно заменять функции на эквивалентные по знаку.

2.5. Замена на эквивалентные по знаку

Мы уже встречались с этим термином в лекции I.7. Напомним, что там было доказано, что разность $|f(x)| - |g(x)|$ эквивалентна по знаку (в каждой точке области определения имеет тот же знак) выражению $(f(x)+g(x))\cdot(f(x)-g(x))$.

Попробуем теперь найти эквивалентное по знаку выражение для разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$.

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \vee \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0.$$

Таким образом, разность $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ эквивалентна по знаку, при $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$, разности подкоренных выражений $f(x) - g(x)$. Использование этого факта позволяет решать довольно сложные неравенства.

Пример 2.7. $\dfrac{(x^2-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)\left(\sqrt{3+x^2}-\sqrt{2+x^2}\right)}{|x-2|-|4x+3|} \ge 0$.

В силу вышесказанного, заменим знаменатель и последнюю скобку в числителе на эквивалентные по знаку выражения. Получаем неравенство, равносильное исходному

$$\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{(5x+1)(-3x-5)} \ge 0$$

или

$$\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)} \le 0.$$

Заметим, что для $\sqrt{3+x^2}+2x$ мы не выписали выражения эквивалентного по знаку, в силу того, что знак выражения $2x$ не определен.

Далее, как в предыдущем примере, наносим на первую ось (рис.2.3) участки знакопостоянства для рациональной части

$$\frac{(x-1)(x+1)}{\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)},$$

решаем уравнение $\sqrt{3+x^2}+2x=0 \Leftrightarrow x=-1$ определяем, что нули числителя $(x=\pm 1)$ являются решениями исходного неравенства и наносим на вторую прямую (рис. 2.3) участки знакопостоянства функции $\sqrt{3+x^2}+2x$. В результате получаем ответ.

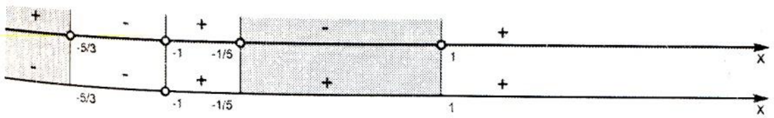

Рис.2.3.

Ответ: $\left(-\infty, -\dfrac{5}{3}\right) \cup \{-1\} \cup \left(-\dfrac{1}{5}, 1\right]$.

2.6. Замена переменной

Решение следующих примеров сильно напоминает решение аналогичных уравнений.

Пример 2.8. $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}\le\frac{2}{3}\sqrt{(7-x)(3+x)}$.

Так как в неравенстве присутствует разность корней и их произведение, то обозначим $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}=t$, тогда

$$t^2=7-x+3+x-2\sqrt{(7-x)(3+x)} \text{ и}$$

$$\sqrt{(7-x)(3+x)}=\frac{10-t^2}{2}.$$

Сделаем здесь важное замечание. Может возникнуть представление, что подобное использование новой переменной ведет к неравносильному неравенству – возведение в квадрат может нарушать равносильность перехода. Однако, в подобных случаях новая переменная играет роль простого обозначения, сокращающего запись. Действительно, преобразуем правую часть исходного неравенства

$$\frac{2}{3}\sqrt{(7-x)(3+x)}=\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{(7-x)(3+x)}-10\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(10-\left(\sqrt{(7-x)}-\sqrt{(3+x)}\right)^2\right)$$

и теперь понятно, что новая переменная является простым обозначением.

Исходное неравенство принимает вид

$$t^2+3t-10\le0\Leftrightarrow-5\le t\le2$$

делая обратную замену получаем систему, равносильную исходному неравенству

$$\begin{cases}\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}\ge-5\\ \sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}\le2\end{cases}.$$

Для решения каждого неравенства системы довольно непросто придумать наиболее эффективный способ решения. Можно воспользоваться самым прямолинейным. Вместо неравенства решить в каждом случае уравнение и затем найти участки знакопостоянства.

Воспользуемся другим способом.

Функция $f(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}+5$ является убывающей на всей области существования. Так как уравнение $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}-5=0$ не имеет решений, то это означает, что функция $f(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}+5$ на ОДЗ не меняет знака. Легко установить, что эта функция положительна. Таким образом, первое неравенство системы выполняется всегда для всех допустимых значений переменной.

Уравнение $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}=2$ имеет, опять-таки, в силу монотонности левой части, единственное решение – $x=-2$. Определяем знаки функции $g(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}-2$.

$g(x)<0$, при $x>-2$; $g(x)>0$, при $x<-2$ и, учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $[-2,7]$.

Пример 2.9. $x\left(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\le11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x}$.

На первый взгляд, не очень понятно, как подступиться к этому примеру. Попробуем преобразовать неравенство, использовав для этого следующий прием.

Пусть есть неравенство (уравнение) $R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\vee0$, где $\vee$ заменяет один из знаков: $=;>;\ge;<;\le$, а R означает рациональную функцию. Обозначим

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t\ge0,$$

где $ad\ne bc$.

Тогда $ax+b=ct^2x+dt^2 \Rightarrow x=\dfrac{dt^2-b}{a-ct^2}$, и выражение для сравнения принимает вид

$$R\left(\frac{dt^2-b}{a-ct^2},t\right)\vee 0,a-ct^2\neq 0,$$

т.е. превращается в обычное рациональное неравенство. Этот прием будет применяться довольно часто в дальнейшем.

В нашем случае надо создать дробно-линейную иррациональность, поэтому проверяем, что при $x=-1$ неравенство не выполняется и делим левую и правую части на $\sqrt{1+x}>0$. Получаем неравенство, равносильное исходному при $-1<x\leq 1$

$$x\left(8\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)\leq 11-16\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

и, в соответствии с вышесказанным, делаем замену

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t\geq 0\Leftrightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Исходное неравенство приобретает вид

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}(8t+1)\leq 11-16t\Leftrightarrow 4t^3-6t^2+12t-5\leq 0\Leftrightarrow t\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

При последнем переходе мы учли, что $t\geq 0$.
Возвращаясь к переменной x

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\leq\dfrac{1}{2}\\ -1<x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{5};1\right].$$

Второе неравенство системы – это ОДЗ без точки $x=-1$.

Ответ: $\left[\dfrac{3}{5},1\right]$.

Пример 2.10. $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}}>x+\dfrac{1}{2}$.

На вид ничего примечательного в этом неравенстве нет, однако, при решении нам придется преодолеть некоторые трудности.

Рассматриваем неравенство как простейшее, поэтому, в соответствии с (2.2), получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}<0\\ x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+\dfrac{1}{2}\geq 0\\ x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}>x^2+x+\dfrac{1}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система решается легко и находим $x\in\left[1,\dfrac{65}{56}\right)$.

С первой системой дело обстоит не столь просто. После возведения в квадрат левой и правой частей второго неравенства и выписывания всех условий имеем систему

$$\begin{cases}x\leq -4\\ x^4+4x^3+3x^2-3x+4\geq 0.\end{cases}$$

На первый взгляд не очень ясно, как решать неравенство четвертой степени. В таких случаях, нередко удается показать, что неравенство либо выполняется при всех допустимых значениях переменной, либо, наоборот, не выполняется ни при каких значениях переменной из допустимого множества.

В нашем случае перепишем второе неравенство системы в виде

$$x^3(x+4)+\left(3x^2-3x+4\right)\geq 0.$$

Так как первое слагаемое при $x\leq -4$ неотрицательно и выражение во второй скобке положительно при всех значениях x, то неравенство выполняется для всех $x\leq -4$.

Ответ: $(-\infty,-4]\cup\left[1,\dfrac{65}{56}\right)$.

2.7. Использование свойств функций

Пример 2.11. $\sqrt{3+x} \geq 3-x$.

Это довольно простой пример, который можно решить средствами, описанными в п. 2.1.2. Попытаемся решить его по другому.

В левой части неравенства имеем возрастающую и непрерывную на ОДЗ функцию, а в правой – убывающую и непрерывную на всей числовой оси. Графики этих функции могут пересечься не более чем в одной точке. Если эта точка $(x_0 ; y_0)$ существует, то для всех значений x из ОДЗ, удовлетворяющих условию $x \geq x_0$ наше неравенство будет выполняться, а для $x < x_0$ – нет. Если же такой точки пересечения не существует, то либо решением неравенства будет ОДЗ, либо неравенство не имеет решений, что устанавливается непосредственной проверкой любого значения из ОДЗ.

В нашем случае точка пересечения есть – $(1;2)$, а поскольку ОДЗ имеет вид $x \geq -3$, то решением нашего неравенства будет $1 \leq x < +\infty$.

Ответ: $[1,+\infty)$.

Пример 2.12. $x^3+x+2\sqrt{2x^3+x+1} \geq 6$.

Если предыдущий пример допускал довольно простое решение обычным способом, то в этом примере только использование монотонности функции, позволяет найти решение без особых проблем, а решения прямым способом добиться довольно трудно.

Действительно, в левой части имеем возрастающую и непрерывную на ОДЗ функцию, в правой части – константу. Если есть точка пересечения графиков этих функций, то – единственная. В нашем случае это точка $(1;6)$. Таким образом, та часть ОДЗ, которая удовлетворяет условию $x \geq 1$ и есть решение нашего неравенства. Однако, найти ОДЗ в исходном неравенстве представляется задачей довольно трудоемкой, поэтому попробуем обойти эти трудности Функция, находящаяся под квадратным корнем, является возрастающей и в точке $x=1$ принимает положительное значение. Значит и при $x>1$ значение подкоренной функции будет положительным т.е. все множество $x \geq 1$ входит в ОДЗ нашего неравенства.

Ответ: $[1,+\infty)$.

Пример 2.13. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}} > \dfrac{1}{1+|x-2|}$.

Неравенство выглядит малопривлекательным, поэтому раскрываем модуль.

1. Пусть $x>2$, а с учетом неотрицательности подкоренного выражения $2< x \leq 4$. На этом промежутке имеем неравенство, равносильное исходному

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}} > 0 \ .$$

Приводим к общему знаменателю первые две дроби и получаем

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}} > 0 \ .$$

Вводим новую переменную

$$\sqrt{4+3x-x^2}=t \geq 0 \Rightarrow x^2-3x=4-t^2 \ .$$

Теперь неравенство принимает вид

$$\frac{5t^2+3t-36}{\left(6-t^2\right)(6-3t)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(t-\frac{12}{5}\right)(t+3)}{\left(6-t^2\right)(6-3t)} < 0 .$$

Второй множитель в числителе положителен, поэтому, делая обратную замену, имеем

$$\frac{\sqrt{4+3x-x^2}-\frac{12}{5}}{\left(x^2-3x+2\right)\left(2-\sqrt{4+3x-x^2}\right)} < 0 .$$

Теперь заменим числитель и вторую скобку знаменателя на эквивалентные по знаку

$$\frac{4+3x-x^2-\frac{144}{25}}{\left(4-4-3x+x^2\right)(x-1)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{11}{5}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)}{(x-1)(x-2)(x-3)x} > 0.$$

Решаем это неравенство с учетом того, что $2 < x \le 4$ и получаем первую часть нашего решения $x \in \left(2, \frac{11}{5}\right) \cup (3, 4]$.

Попутно отметим, что выражение $6 - 3\sqrt{4 + 3x - x^2}$ обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 3$.

2. Пусть теперь $-1 \le x < 2$. Исходное неравенство при данных условиях приобретает вид

$$\frac{5}{6 - 3\sqrt{4 + 3x - x^2}} > \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{2 - x}.$$

В данном случае все не столь понятно и очевидно. Можно, конечно, привести все дроби к общему знаменателю и попробовать решить получившееся неравенство, но в перспективе нас ожидает уравнение четвертой степени, поэтому выглядит этот путь мало перспективным, и пока оставим его.

Попробуем рассмотреть поведение функций в левой и правой частях неравенства на рассматриваемом промежутке. Знаменатель левой части может поменять знак только в точке $x = 0$, поэтому разобьем рассматриваемый промежуток на два.

2.1. $0 < x < 2$. Правая часть неравенства положительна, а левая – отрицательна, значит неравенство не выполняется.

2.2. $-1 \le x < 0$. Функция $f_1(x) = \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{2 - x}$ при $x \in [-1, 0]$ является возрастающей функцией и, значит, на рассматриваемом промежутке меньше, чем значение в точке $x = 0$, т.е. $f_1(x) < \frac{5}{6}$.

Рассмотрим поведение функции $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ при $-1 \le x < 0$. Так как $x_в = \frac{3}{2}$ и коэффициент при x^2 отрицательный, то на рассматриваемом промежутке функция $f(x)$ является возрастающей и $0 \le f(x) < 4$. значит функция $f_2(x) = \frac{5}{6 - 3\sqrt{4 + 3x - x^2}}$ на этом промежутке является возрастающей. Таким образом, значения $f_2(x)$ при $x \in (-1; 0)$ больше чем $f_2(-1)$, то есть $f_2(x) > \frac{5}{6}$.

Предшествующие рассуждения показывают, что при $-1 \le x < 0$ левая часть неравенства всегда больше правой, т.е неравенство выполняется всюду при указанных значениях переменной.

Ответ: $[-1, 0) \cup \left(2, \frac{11}{5}\right) \cup (3, 4]$.

2.8. Использование известных неравенств

Теперь мы рассмотрим пару примеров, решение которых основано на неравенствах, изученных нами в лекции I.6.

Пример 2.14. $16x - 5 \le$

$$\le \sqrt{40x^2 - 43x + 7} + \sqrt{15x^2 + 12x - 3} + \sqrt{24x^2 + 3x - 21}.$$

Разложим на множители подкоренные выражения и получим

$$16x - 5 \le \sqrt{(8x - 7)(5x - 1)} +$$

$$+ \sqrt{(3x + 3)(5x - 1)} + \sqrt{(8x - 7)(3x + 3)}.$$

Теперь просматривается ход решения. Если обозначить: $\sqrt{8x - 7} = a$, $\sqrt{5x - 1} = b$, $\sqrt{3x + 3} = c$, $a, b, c \ge 0$ и заметить, что сумма подкоренных выражений равна $16x - 5$, то наше неравенство приобретет вид

$$a^2 + b^2 + c^2 \le ab + ac + bc.$$

Мы уже доказывали (пример I.6.3), что это неравенство для любых a, b, c выполняется с противоположным знаком, т.е. в нашем случае возможно только равенство левой и правой частей, которое верно при $a = b = c$ (пример I.6.3), т.е.

$$\sqrt{8x - 7} = \sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x + 3} \Leftrightarrow x = 2.$$

Однако, при таком решении была упущена одна очень важная деталь. Дело в том, что $\sqrt{8x - 7}$, $\sqrt{5x - 1}$, $\sqrt{3x + 3}$ могут на ОДЗ не существовать.

Действительно, ОДЗ исходного неравенства является облас $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{7}{8},+\infty\right)$.

При $x\ge\frac{7}{8}$ выражения $8x-7$, $5x-1$, $3x+3$ неотрицательны применим рассмотренный выше способ решения.

При $x\le -1$ выражения $8x-7$, $5x-1$, $3x+3$ неположительны рассмотренный выше способ решения неприменим. Однако, при та ких значениях переменной левая часть исходного неравенства отри цательна, а правая – положительна, т.е. неравенство выполняется дл любых значений переменной из рассматриваемого промежутка.

Ответ: $x\in\left(-\infty,-1\right]\cup\{2\}$.

Пример 2.15. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\ge 2\sqrt{1+x^2}$.

Это типичный пример на неравенство Коши-Буняковского (при мер I.6.13). Обозначим

$$a_1=x, a_2=1,\ b_1=\sqrt{1+x}, b_2=\sqrt{3-x}.$$

Тогда наше неравенство принимает вид

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\le a_1b_1+a_2b_2.$$

Но знак в неравенстве Коши-Буняковского направлен в другук сторону, что оставляет в нашем случае только равенство, которо возможно при выполнении одного из условий: либо $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, либо $a_1=a_2=0$, либо $b_1=b_2=0$.

Последние два условия не выполняются ни при каких значения x.

Выполнение первого условия возможно при значениях x, удов летворяющих уравнению

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=1+\sqrt{2}.\end{cases}$$

Ответ: $x=1, x=1+\sqrt{2}$.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить неравенства:

2.1. $\sqrt{3x+1}\le x+1$.

2.2. $\sqrt{7+x}\ge 7-2x$.

2.3. $\sqrt{4+3x-x^2}>\frac{\sqrt{6}}{5}-\frac{1}{2}$.

2.4. $\sqrt{x^2-3x-4}<x-2$.

2.5. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}<3$.

2.6. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$.

2.7. $(x-3)\sqrt{x^2+3}\le x^2-9$.

2.8. $\sqrt{x^2-x+1}>1+x+x^2$.

2.9. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\ge 0$.

2.10. $\left(9-x^2\right)\sqrt{x+4}\ge 0$.

2.11. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

2.12. $\sqrt{x^2+4x+3}<1+\sqrt{x^2-2x+2}$.

2.13. $\frac{13-6x+\sqrt{4x^2-2x-6}}{5-2x}>1$.

2.14. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{6x-9}\le x+5$.

2.15. $\left(\sqrt{3+x}+x-3\right)\left(\sqrt{5+4x}+x-4\right)\le 0$.

2.16. $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x+1}\le x^2-2x-3$.

2.17. $\frac{\left(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2\right)\left(|2x+3|-|3x+2|\right)}{\left(x^2-5x+4\right)\left(\sqrt{3-x}+1-x\right)(x-1)}\le 0$.

2.18. $\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{|x-2|-4x+3}\ge 0$.

2.19. $x\left(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\le 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x}$.

2.20. $x^3+x+2\sqrt{2x^3+x+1}\geq 6$.

2.21. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.22. $\sqrt{4x-x^2-3}\geq\sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}$.

2.23. $\frac{\sqrt{4x-7}-3x+5}{16-3x^2+22x}\leq 0$.

2.24. $|x+3|\leq 6-3\sqrt{1-x}$.

2.25. $\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15}\leq|3x-6|$.

2.26. $\left(x^2-4x-5\right)\sqrt{x^2-x-12}\geq 0$.

2.27. $(x+5)^2\geq(x+5)+\sqrt{(x+5)^2\left(2x^2+4x-5\right)}$.

2.28. $2\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5}>\sqrt{3-5x}$.

2.29. $\sqrt{x+14}-\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}$.

2.30. $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}\geq\frac{2}{3}\sqrt{(7-x)(3+x)}$.

2.31. $\frac{13-3x+\sqrt{x^2-x-6}}{5-x}>1$.

2.32. $\frac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6}\geq 2x-10$.

2.33. $\frac{1}{2-\sqrt{x^2-x-2}}\leq\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.

2.34. $\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\leq 0$.

2.35. $\frac{\left|x^2-5x+6\right|+|9-2x|-5}{\sqrt{19x^2-4x^3-4x+19}}\leq 0$.

2.36. $\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}}>9-|x|$.

2.37. $\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x}\leq 0$.

2.38. $\sqrt{2+\frac{2}{2x-1}}<4\sqrt{2-\frac{1}{x}}-2$.

2.39. $5|x|\leq x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right)$.

2.40. $\sqrt{\frac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}}\leq x^3$.

2.41. $5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leq 9\sqrt{x+4}$.

2.42. $x+\sqrt[3]{3x+6}+\sqrt[3]{9x^2+36x+36}\geq 1$.

2.43. $\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}{x-\frac{23}{32}}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}$.

2.44. $\frac{1}{x-2}+\frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}}>\frac{1}{1+|x-2|}$.

2.45. $|2x+3|+\sqrt{6-x-x^2}\geq\sqrt[3]{2x^3-6x^2+6x-5}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

2.1д. $\sqrt{x^2-3x-3}<5-x$.

2.2д. $2x-13\leq\sqrt{1+7x-x^2}$.

2.3д. $\sqrt{x^2-2x-3}>\frac{\sqrt{7}}{8}-\frac{1}{3}$.

2.4д. $\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x}$.

2.5д. $\frac{\sqrt{3x-2}}{x-4}<1$.

2.6д. $x\sqrt{5+2x}\geq 5x-x^2$.

2.7д. $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\leq x$.

2.8д. $\sqrt[3]{x-3}<2+\sqrt[3]{x-5}$.

2.9д. $\sqrt{x^2+2x-3}<x+1.$

2.10д. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2.$

2.11д. $\sqrt{5+x^2-\sqrt{x-2}}\geq x+1.$

2.12д. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}\geq 2.$

2.13д. $\left(\sqrt{7+x}+x-5\right)\left(\sqrt{6+5x}+x-6\right)\leq 0.$

2.14д. $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}}>x+\dfrac{1}{2}.$

2.15д. $\sqrt{x^3+x^2-4x+1}\geq|x-2|.$

2.16д. $\dfrac{\sqrt{5+x^2}+x-5}{x^2-4}<0.$

2.17д. $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}<x^2.$

2.18д. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}.$

2.19д. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}.$

2.20д. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x.$

2.21д. $\sqrt{9x+7}+\sqrt{7x-5}\leq x+6.$

2.22д. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$

2.23д. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\leq 2\sqrt{1+x^2}.$

2.24д. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leq 3x+2.$

2.25д. $\dfrac{\sqrt{x^2-3}-3}{|x+2|-5}\geq 1.$

2.26д. $\sqrt{x^2+x+4}\leq 2x+|3x-2|.$

2.27д. $\left(x^2+4x-12\right)\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0.$

2.28д. $(x+1)^2\geq(4x+4)-\sqrt{(x+1)^2\left(8+2x-x^2\right)}.$

2.29д. $\sqrt{x+12}-\sqrt{x-4}\leq\sqrt{x+3}-\sqrt{x-9}.$

2.30д. $\sqrt{2x-1}<\sqrt{6-x}+\sqrt{x-1}.$

2.31д. $6\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x}\right)\leq\sqrt{(x+8)(5-x)}.$

2.32д. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2.$

2.33д. $x-4<\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}\right)^2.$

2.34д. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1.$

2.35д. $-2(x+1)>(x+2)\left(\sqrt{x+1}-x-2\right).$

2.36д. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}-4}<\dfrac{1}{2|x-5|-5}.$

2.37д. $\sqrt{9-\sqrt{76-12x^3}}<3-x.$

2.38д. $(x+2)\sqrt{x^2+2x-3}\geq 0.$

2.39д. $\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)\leq 0.$

2.40д. $\dfrac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{3-x}>1.$

2.41д. $\dfrac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4}\geq 3x-10.$

2.42д. $\dfrac{1}{4-\sqrt{x^2-2x-8}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}}.$

2.43д. $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{\left|x^2-7x+6\right|-\left|x^2-x-2\right|}\geq 0.$

2.44д. $\sqrt{\dfrac{x^2+30x-675}{x-3}}>15-|x|.$

2.45д. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}}{x-\dfrac{23}{27}}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}}.$

2.46д. $\sqrt[3]{2x-(x+2)\sqrt{x+2}-1}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{2x-1}\le 0$.

2.47д. $\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}}<\sqrt{2+\dfrac{2}{x}}+1$. **2.48д.** $\sqrt{\dfrac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}}\le x^3$

2.49д. $3|x|\le x\left(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}\right)$.

2.50д. $4\sqrt{\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}}+3\sqrt{\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}}\le 7\sqrt{x-2}$.

2.51д. $\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+|1+2x|-5}{\sqrt{3x^2+4x^3+4x+3}}\le 0$.

2.52д. $\dfrac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}}-\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{1+|x+1|}$.

2.53д. $\sqrt{x^2-5x-6}<1+\sqrt{x^2-x+1}$.

2.54д. $\sqrt{4-\dfrac{\sqrt{33+32x^3}}{2}}<2+x$.

2.55д. $|3x-1|+\sqrt{4-3x-x^2}\ge\sqrt[3]{3x^3-9x^2+9x-4}$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

2.1. $\left[-\dfrac{1}{3},0\right]\cup[1;+\infty)$. **2.2.** $[2;+\infty)$. **2.3.** $[-1,4]$. **2.4.** $[4;8)$.

2.5. $[-2,-1)\cup(2,3]$. **2.6.** $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. **2.7.** $(-\infty,-1]\cup[3;+\infty)$.

2.8. $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{417}-61}{2}}-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{417}+61}{2}}-\dfrac{2}{3},0\right)$. **2.9.** $[3,+\infty)\cup\{-2;1\}$.

2.10. $\{-4\}\cup[-3;3]$. **2.11.** $[-2;-1]\cup\{3\}$. **2.12.** $(-\infty,-3]\cup\left[-1,\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}\right)$.

2.13. $(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2},+\infty\right)$. **2.14.** $\left[\dfrac{3}{2},3\right]\cup[15;+\infty)$. **2.15.** 1. **2.16.** $\{1;$

2.17. $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup(1;2)$. **2.18.** -1. **2.19.** $\left[\dfrac{3}{5},1\right]$. **2.20.** $[1;+\infty)$.

2.21. $\left[0,\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$. **2.22.** 3. **2.23.** $\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{16}{9}\right]\cup[2,8)$. **2.24.** $\{-3\}\cup[0;1]$.

2.25. $\left[3-\sqrt{\dfrac{352}{27}};\dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6};3+\sqrt{\dfrac{352}{27}}\right]$.

2.26. $(-\infty;-3]\cup\{4\}\cup[5;+\infty)$. **2.27.** $\{-5\}\cup\left[-3;-\dfrac{2+\sqrt{14}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2};7\right]$.

2.28. $\left(\dfrac{-66-4\sqrt{517}}{89};\dfrac{3}{5}\right]$. **2.29.** $\varnothing$. **2.30.** $[-3;-2]$.

2.31. $(-\infty,-2]\cup[3,5)\cup(7,+\infty)$. **2.32.** $[0;4]\cup\{5\}\cup\left(6,\dfrac{15}{2}\right]$.

2.33. $(-\infty,-2)\cup\{-1\}\cup(3,+\infty)$. **2.34.** $[1,2)\cup\left(2+\sqrt{3},6\right]$. **2.35.** $\left[2,\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$.

2.36. $[-18,-3)\cup(0,2)\cup(9,+\infty)$. **2.37.** $\{0\}\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

2.38. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. **2.39.** $\left[-4,\dfrac{2\sqrt{101}-25}{13}\right]\cup\{0\}\cup\left[\dfrac{23}{13},2\right]$.

2.40. $\{0\}\cup\left[\sqrt[3]{4},2\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}\right]$. **2.41.** -3. **2.42.** $\left[1+\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{100},+\infty\right)$.

2.43. $\left(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[1,\dfrac{19+4\sqrt{15}}{16}\right]$. **2.44.** $[-1,0)\cup\left(2,\dfrac{11}{5}\right)\cup(3,4]$. **2.45.** $[-3,2]$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1д. $\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{21}}{2},4\right)$. **2.2д.** $\left[\dfrac{7-\sqrt{53}}{2},7\right]$. **2.3д.** $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

2.4д. $[-3;6)$. **2.5д.** $\left[\dfrac{2}{3},4\right)\cup(9,+\infty)$. **2.6д.** $\left[-\dfrac{5}{2},0\right]\cup[2,+\infty)$.

2.7д. $[-2,-1)\cup[0,1]$. **2.8д.** $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$. **2.9д.** $[1,+\infty)$. **2.10д.** $(-\infty,0)\cup[1,2]$.

2.11д. 2. **2.12д.** $[8,17]$. **2.13д.** 1. **2.14д.** $(-\infty;-4]\cup\left[1;\dfrac{65}{56}\right)$. **2.15д.** $\left[\sqrt[3]{3},+\infty\right)$.

2.16д. $(-\infty,-2)$. **2.17д.** $(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\sqrt[4]{12}\right]\cup\left[\sqrt[4]{12},2\right)\cup(2,+\infty)$.

2.18д. $(1,+\infty)$. **2.19д.** $\left(1,\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$. **2.20д.** $\left[0,\left(\dfrac{29}{12}\right)^2\right)$. **2.21д.** $\left[\dfrac{5}{7},2\right]\cup[18,+\infty)$.

2.22д. $\left[-2,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},2\right]$. **2.23д.** $[-1,3]$. **2.24д.** $\left[-\dfrac{2}{3},-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{5}{2}\right]$.

2.25д. $(-\infty;-7)\cup\left[\sqrt{3};3\right)$. **2.26д.** $(-\infty,0]\cup\left[\frac{7}{8},+\infty\right)$.

2.27д. $(-\infty;-6]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$. **2.28д.** $[-2,-1]\cup\left[2-\sqrt{\frac{7}{2}},4\right]$. **2.29д.** $[9,13$

2.30д. $[1,5)$. **2.31д.** $[-8,1]$. **2.32д.** $(1,2)\cup\left(2,\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **2.33д.** $[-1,8)$.

2.34д. $(1,2)\cup(10,+\infty)$. **2.35д.** $[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

2.36д. $(-4,-2]\cup\left(\frac{17-\sqrt{22}}{3},6\right)\cup\left(\frac{15}{2},7+\sqrt{6}\right)$. **2.37д.** $\left[-\sqrt[4]{\frac{5}{12}},\sqrt{2}\right)$.

2.38д. $\{-3\}\cup[1;+\infty)$. **2.39д.** 1. **2.40д.** $(-\infty,-4]\cup[1,3)\cup(5,+\infty)$.

2.41д. $\left[0,\frac{8}{3}\right]\cup\left\{\frac{10}{3}\right\}\cup(4,5]$. **2.42д.** $(-\infty,-4)\cup\{-2\}\cup(6,+\infty)$.

2.43д. $\left[-2,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{4}{3},3\right]$. **2.44д.** $[-45,-5)\cup(0,3)\cup(15,+\infty)$.

2.45д. $\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]\cup\left[1,\frac{15+4\sqrt{11}}{9}\right]$. **2.46д.** $\{-2\}\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **2.47д.** $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

2.48д. $\{0\}\cup\left[\sqrt[4]{\frac{5}{2}};\sqrt[3]{2}\right]$. **2.49д.** $\left[-3,\frac{8\sqrt{3}-19}{13}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{11}{13},1\right]$. **2.50д.** 3.

2.51д. $\left[\frac{5-\sqrt{41}}{2},2\right]$. **2.52д.** $[-3,-2)\cup\left(-\frac{6}{5},-1\right)\cup(1,2]$.

2.53д. $\left(\frac{17-\sqrt{109}}{6},-1\right]\cup[6,+\infty)$.

2.54д. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt[3]{\frac{31}{32}}\right]$. **2.55д.** $[-4,1]$.

Лекция №3
Показательные уравнения

3.1. Показательная функция. Основные свойства

Определение 3.1. Функция $y=f(x)=a^x$, $a>0$ называется показательной функцией.

Свойства показательной функции.

1°. Показательная функция $f(x)=a^x$ положительна для $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

2°. Показательная функция $f(x)=a^x$ непрерывна на всей числовой оси.

3°. Показательная функция $f(x)=a^x$ монотонна: при $a>1$ функция возрастает, при $0<a<1$ функция убывает, при $a=1$ функция тождественно равна 1.

На рис. 3.1. показаны графики показательной функции $f(x)=a^x$ при различных значениях a.

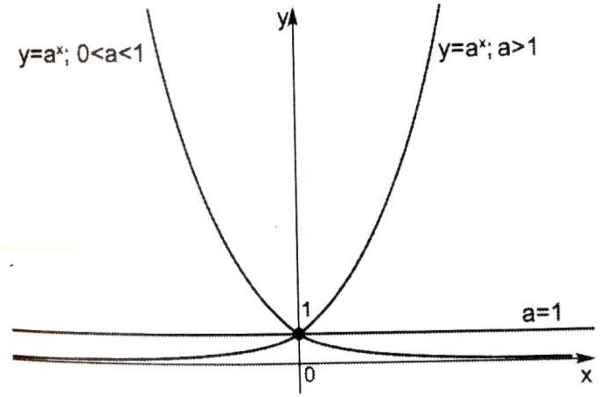

Рис.3.1

Прежде чем переходить к изучению основных способов решения уравнений, содержащих показательную функцию, рассмотрим решение простейших показательных уравнений.

3.2. Уравнения, содержащие показательную функцию

3.2.1. Простейшие показательные уравнения

1.Уравнение вида $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$ имеет то же решение, чт
и совокупность

$$\left[\begin{array}{l} a(x)=1 \\ \begin{cases} f(x)=g(x) \\ a(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последнее неравенство задает область определения показател
ной функции.

2.Уравнение вида $a(x)^{f(x)}=b(x)^{f(x)}$ равносильно совокупност

$$\left[\begin{array}{l} a(x)=b(x)>0 \\ \begin{cases} f(x)=0 \\ a(x)>0,\ b(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

И в этом случае последние неравенства определяют область су
ществования показательной функции.

3.2.2. Группировка

Простейшим приемом решения показательных уравнений являе
ся группировка слагаемых с одинаковыми основаниями показател
ной функции.

Пример 3.1. $2^{x^2-1}-3^{x^2-1}=3^{x^2-2}-2^{x^2}$.

Перепишем уравнение в виде

$$2^{x^2-1}+2^{x^2}=3^{x^2-2}+3^{x^2-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}(1+2)=3^{x^2-2}(1+3)\Leftrightarrow\frac{2^{x^2-1}}{4}=\frac{3^{x^2-2}}{3}\Leftrightarrow 2^{x^2-3}=3^{x^2-3}.$$

Таким образом, в соответствии с п. 2 имеем $x^2=3$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{3}$.

3.2.3. Замена переменной

Пример 3.2. $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$.

Отметим, что $4^x=\left(2^x\right)^2$, $2^{x-1}=\dfrac{2^x}{2}$, заменим $2^x=t>0$ и получим

$$\begin{cases} t^2-5t-24=0 \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow t=8\Rightarrow 2^x=2^3\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $x=3$.

Пример 3.3. $\sqrt{2^x-1}+2^{x+1}=5$.

Снова заменим $\sqrt{2^x-1}=t\geq 0$. Тогда $2^x=t^2+1$ и получим

$$\begin{cases} t+2t^2+2=5 \\ t\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1,$$

Ответ: $x=1$.

Пример 3.4. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=10$.

Используем то, что

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1}.$$

Обозначим $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=t>0$ и наше уравнение примет вид

$$t+\frac{1}{t}=10\Rightarrow t_{1,2}=5\pm 2\sqrt{6}.$$

Теперь воспользуемся тем, что $5\pm 2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2$ и получим ответ.

Ответ: $x=\pm 2$.

Пример 3.5. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = \sqrt{33+\sqrt{128}} - 1$.

В этом примере необходимо преобразовать правую часть. Отме-тим, что

$$\sqrt{33+\sqrt{128}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{32}\right)^2} = 1+\sqrt{32}$$

и тогда наше уравнение принимает вид

$$x^2 - 2x - 10 = 5 \Leftrightarrow x_1 = 5, x_2 = -3.$$

Ответ: $x = 5, x = -3$.

3.2.4. Сведение к однородному уравнению

Рассмотрим два примера, в которых уравнение с помощью заме сводится к однородному уравнению (пример I.4.19).

Пример 3.6. $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

Обозначим $4^x = a > 0, 9^x = b > 0 \Rightarrow 36^x = ab$, и получаем однород-ное уравнение

$$3a^2 - 5ab + 2b^2 = 0,$$

которое решается как квадратное относительно одной из перемен-ных и дает решения $a_1 = b, a_2 = \frac{2}{3}b$. Далее все просто.

Ответ: $x = 0, x = \frac{1}{2}$.

Пример 3.7. $3^{2x^2+6x-9} + 4\cdot 15^{x^2+3x-5} = 3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

Это уравнение несколько сложнее чем предыдущее. Перепише его в виде

$$3\cdot 3^{2x^2+6x-10} + 4\cdot(3\cdot 5)^{x^2+3x-5} = 3\cdot 5\cdot 5^{2x^2+6x-10}.$$

Теперь обозначим $3^{x^2+3x-5} = a > 0$ и $5^{x^2+3x-5} = b > 0$. Тогда по-лучим однородное уравнение

$$3a^2 + 4ab - 15b^2 = 0.$$

Из двух решений $a_1 = \frac{5}{3}b, a_2 = -3b$ оставляем только первое, так как a и b являются величинами положительными.

Ответ: $x = -4, x = 1$.

3.2.5. Сведение к известным рациональным уравнениям

Следующие два примера основаны на том, что показательное уравнение с помощью замен сводится к симметрическому или воз-вратному уравнению.

Пример 3.8. $8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0$.

В этом примере легко увидеть симметрическое уравнение. Дела-ем замену $2^x + 2^{-x} = t \geq 2$. Тогда $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$ и исходное урав-нение с новой переменной приобретает вид

$$8t^2 - 54t + 85 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{5}{2}; t_2 = \frac{17}{4}.$$

Теперь, обозначив $2^x = u > 0$, получим пару квадратных уравне-ний

$$4u^2 - 17u + 4 = 0 \quad \text{и} \quad 2u^2 - 5u + 2 = 0.$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $x = \pm 1, x = \pm 2$.

Пример 3.9. $27\cdot 2^{-3x} + 9\cdot 2^x - 2^{3x} - 27\cdot 2^{-x} = 8$.

Рассмотрим два способа решения этого примера.

I способ. Обозначим $2^x = t > 0$ и запишем наше уравнение в виде

$$\left(\left(\frac{3}{t}\right)^3 - t^3\right) - 9\left(\frac{3}{t} - t\right) = 8.$$

Получилось уравнение, которое после приведения к общему зна-менателю становится возвратным.

Пусть $\frac{3}{t} - t = u$, тогда $\left(\frac{3}{t}\right)^3 - t^3 = u^3 + 9u$ и

$$u^3 = 8 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0.$$

II способ. Обозначим $\frac{3}{2^x} = a > 0, 2^x = b > 0$.

Тогда $9 \cdot 2^x = 3ab^2$, $27 \cdot 2^{-x} = 3a^2 b$ и, переписав в этих обозна
ниях левую часть исходного уравнения, несложно увидеть полн
куб разности

$$a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 = 8 \Leftrightarrow (a-b)^3 = 8 \Rightarrow \frac{3}{2^x} - 2^x = 2.$$

Далее – очевидно.

Ответ: $x = 0$.

3.2.6. Использование свойств показательной функции

В этом пункте мы будем для решения использовать свойства п
казательной функции.

Пример 3.10. $2^x = 3 - x$.

Подобные примеры мы уже решали. Функция в левой части ура
нения – возрастающая и непрерывная на всей числовой оси. Фу
кция в правой части – убывающая и непрерывная на всей числово
оси. Значит графики этих функции если и пересекаются, то только
одной точке. Угадываем точку $(1;2)$ и других точек пересечени
быть не может.

Ответ: $x = 1$.

Пример 3.11. $13^x = 5^x + 12^x$.

В левой и правой частях уравнения расположены возрастающие
непрерывные на всей числовой оси функции, поэтому способ реше
ния предыдущего примера кажется неприменимым. Однако, элемен
тарным преобразованием можно получить в левой и правой частя
возрастающую и убывающую функции. Разделим для этого обе час
ти уравнения на 12^x . В результате получим

$$\left(\frac{13}{12}\right)^x = \left(\frac{5}{12}\right)^x + 1.$$

Теперь очевидно, что корень $x = 2$ является единственным.

Ответ: $x = 2$.

Пример 3.12. $x \cdot 3^{x+1} = 5x + 4$.

Во всех примерах, связанных с монотонностью функции, мы говорили о непрерывности и нигде ранее нам разрывные функции не встречались. В этом примере условие непрерывности имеет важное значение.

Очевидно, что $x = 0$ не является решением уравнения, поэтому полагаем, что $x \neq 0$ и делим обе части уравнения на x

$$3^{x+1} = 5 + \frac{4}{x}.$$

В левой части уравнения имеем возрастающую и непрерывную на всей числовой оси функцию. В правой части – функцию, которая является убывающей и непрерывной на двух промежутках: при $x < 0$ и при $x > 0$, и разрывной в точке $x = 0$. Поэтому будем решать уравнение на каждом участке монотонности.

При $x < 0$ функции в обеих частях уравнения непрерывны и разномонотонны, поэтому если и есть решение, то только одно. Угадываем его: $x = -1$.

При $x > 0$ аналогично показывается единственность решения $x = 1$.

Ответ: $x = -1$, $x = 1$.

Пример 3.13. $25^x + (x - 31) \cdot 5^x = 25x - 150$.

Здесь, на первый взгляд, не ясно, как использовать монотонность показательной функции, поэтому обозначим $5^x = t > 0$, получим и решим квадратное уравнение относительно новой переменной

$$t^2 + (x - 31)t - (25x - 150) = 0$$

$$D = (x - 31)^2 + 4(25x - 150) = (x + 19)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{31 - x + x + 19}{2} = 25, t_2 = \frac{31 - x - x - 19}{2} = 6 - x.$$

В результате имеем два уравнения

1. $5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$.
2. $5^x = 6 - x \Leftrightarrow x = 1$.

Единственность решения во втором уравнении показывается ка
в примере 3.10.

Ответ: $x=2$; $x=1$.

Пример 3.14. $2^{\sin x}+2^{-\sin 3x}=1$.

Мы еще не изучали тригонометрии, однако, для решения это
примера достаточно начальных знаний этого раздела. Одновреме
но, появление этого примера до изучения тригонометрии подсказы
вает, что тригонометрия здесь не имеет особого значения.

Оценим левую часть уравнения, учитывая ограниченность триго
нометрических функций

$$\begin{cases} -1\le\sin x\le 1 \\ -1\le-\sin 3x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le 2^{\sin x}\le 2 \\ \dfrac{1}{2}\le 2^{-\sin 3x}\le 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\le 2^{\sin x}+2^{-\sin 3x}\le 4.$$

Левая часть исходного уравнения для любых x не меньше едини
цы, а правая часть равна единице. Таким образом, единственная во
можность существования решения – равенство единице левой части
т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}=2^{\sin x} \\ \dfrac{1}{2}=2^{-\sin 3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=\sin x \\ -1=-\sin 3x \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Мы не будем сейчас подробно останавливаться на решении три
гонометрической системы, скажем лишь, что решение ищется следу
ющим образом. Решается первое уравнение системы и проверяется
что найденное решение удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Рассмотрим более сложный пример, связанный с оценкой показа
тельной функции.

Пример 3.15. $2^{y^2-2xy}+2^{3-2x}=\left(4+2x-x^2\right)\cdot 2^{-x^2}$.

Домножим левую и правую части уравнения на $2^{x^2}\ne 0$

$$2^{y^2-2xy+x^2}+2^{x^2-2x+3}=4+2x-x^2.$$

Теперь выделим полные квадраты в правой части уравнения и в показателях степеней левой части

$$2^{(x-y)^2}+2^{(x-1)^2+2}=5-(x-1)^2.$$

Справедливы следующие оценки

$$\begin{cases} (x-y)^2\ge 0 \\ (x-1)^2+2\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{(x-y)^2}\ge 1 \\ 2^{(x-1)^2+2}\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{(x-y)^2}+2^{(x-1)^2+2}\ge 5,$$

и

$$5-(x-1)^2\le 5.$$

Таким образом, обе части получившегося уравнения должны быть равны 5, что возможно только при

$$\begin{cases} x=y \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Ответ: $(1;1)$.

3.3. Системы, содержащие показательную функцию

Мы не будем рассматривать простые системы, в которых естественным образом решается одно из уравнений и результат подставляется в другое уравнение. Рассмотрим системы, которые решаются необычным способом.

Пример 3.16. $\begin{cases} x\,9^{y-x}+2y\cdot 3^{-y-x}=8\cdot 3^{y-2x} \\ 3x\cdot 3^{2y+x}+2y\cdot 3^{1-y+2x}=72\cdot 9^{x-y} \end{cases}$.

Перепишем систему так, чтобы основания показательных функций были одинаковыми

$$\begin{cases} x\,3^{2y-2x}+2y\cdot 3^{-y-x}=8\cdot 3^{y-2x} \\ x\cdot 3^{2y+x+1}+2y\cdot 3^{1-y+2x}=8\cdot 3^{2x-2y+2}. \end{cases}$$

При внимательном взгляде на систему понятно, что решать е надо следующим образом. Обе части одного из уравнений надо дом ножить на некоторый множитель и после этого взять разности лево и правой частей получившихся уравнений. Главный вопрос связан выбором этого множителя.

Обычно в таких ситуациях необходимо найти некую связь межд показателями степеней. Однако, исследование закономерностей показателях степеней может оказаться задачей не из легких. Попр буем унифицировать этот процесс.

Домножим второе уравнение на $3^k \neq 0$ (здесь k зависит от x y, а домножение не приводит к появлению посторонних решений) найдем разности левых и правых частей получившихся уравнени и, в зависимости от результата, подберем нужное нам k

$$x\left(3^{2y-2x}-3^{2y+x+1+k}\right)+2y\left(3^{-y-x}-3^{1-y+2x+k}\right)=$$

$$=8\left(3^{y-2x}-3^{2x-2y+2+k}\right).$$

Теперь разберемся с принципами нахождения k. Мы хотим, что бы одна из скобок обратилась в нуль. После этого, при найденно значении k, надо будет исследовать получившееся уравнени Если уравнение даст простую связь между x и y, то задача выпол нена. Если же решение уравнения сопряжено с большими трудностя ми, то надо попробовать приравнять к нулю другую скобку.

Начнем в порядке поступления предложений.

$$1.\ \ 3^{2y-2x}-3^{2y+x+1+k}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y-2x=2y+x+1+k \Leftrightarrow\ \ k=-3x-1$$

При найденном значении k обращается в нуль и вторая скобка

Получилось с первого раза! Заметим, что если приравнять к нул вторую скобку, то получим такой же результат. Если же приравнят к нулю последнюю скобку, то получится довольно сложное уравн ние, которое решить средствами элементарной алгебры вряд ли во можно.

Получаем из правой части

$$3^{y-2x}-3^{2x-2y+2-3x-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-2x=2x-2y+2-3x-1 \Leftrightarrow x=3y-1.$$

Найденное выражение подставляем в первое уравнение исходной системы

$$(3y-1)\,3^{2y-6y+2}+2y\cdot 3^{-y-3y+1}=8\cdot 3^{y-6y+2}.$$

После приведения подобных и сокращения на $3^{-4y+1}\neq 0$

$$11y-3=8\cdot 3^{-y+1}.$$

В левой части монотонно возрастающая и непрерывная функция, в правой части – монотонно убывающая и непрерывная, поэтому решение $y=1$ – единственно.

Кажется, что решение было довольно долгим. Однако, попробуйте разобраться и увидеть зависимость в показателях степеней.Если Вас посетит вдохновение, то Вы сделаете это довольно быстро. Как говорил один профессиональный игрок в карты о людях играющих по вдохновению: "В конце концов, эти люди остаются с вдохновением, а я – с выигранными у них деньгами!"

Ответ: $(2;1)$.

Следующие две системы помимо метода решения показывают, как можно "придумывать" сложные задачи.

Пример 3.17. $\begin{cases} x+2^x=y+2^y \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$

Первое действие, которое хочется осуществить – это попытаться разложить на простые множители второе уравнение. К сожалению этого сделать не удается. Обратим свой взор на первое уравнение системы и заметим, что в левой и правой частях одна и та же функция $f(t)=t+2^t$, примененная к разным аргументам. Посмотрим какими свойствами обладает эта функция. Она непрерывна и возрастает на всей числовой оси. Но монотонная функция каждое свое значение принимает только один раз, то есть монотонная функция принимает одинаковые значения только при одинаковых значениях аргумента. Следовательно, единственным решением первого уравнения будет $x=y$. Далее – все очевидно.

Ответ: $(2;2),(-2;-2)$.

Пример 3.18. $\begin{cases} 4^{x+1} - 2^{y+2} = y - 2x \\ 4x^2 + 2xy + 12x + 6y + y^2 = 0. \end{cases}$

На первый взгляд между этим примером и предыдущим нет ничего общего. Однако, попробуйте заменить в предыдущем примере $x \to 2x+2$ и $y \to y+2$ и получите рассматриваемую систему.

Ответ: $(0;0), (-2;-4)$.

3.4. Использование известных неравенств

Посмотрим теперь как можно решать показательные уравнения с помощью неравенств, разобранных в лекции I.6.

Пример 3.19. $25^x + 49^x + 81^x = 35^x + 45^x + 63^x$.

Обозначим: $5^x = a > 0$, $7^x = b > 0$, $9^x = c > 0$. Тогда наше уравнение принимает вид

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Из примера I.6.3 известно, что это равенство возможно только, если $a = b = c \Rightarrow x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 3 20. $2^x + 2^{\frac{4}{x}} = 8$.

Преобразовывать сумму показательных функции мы особенно не умеем, но вот как преобразовывать произведение известно, поэтому, напрашивается применение неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных величин (пример I.6.2). В соответствии с указанным неравенством имеем

$$2^x + 2^{\frac{4}{x}} \ge 2\sqrt{2^{x+\frac{4}{x}}},$$

причем, равенство возможно только при $2^x = 2^{\frac{4}{x}}$.

Отметим, что при $x < 0$ исходное уравнение решений не имеет из-за того, что

$$2^x < 1, 2^{\frac{4}{x}} < 1 \Rightarrow 2^x + 2^{\frac{4}{x}} < 2,$$

т.е. левая часть уравнения при $x < 0$ не равна правой.

Теперь применим указанное неравенство к показателю степени $x + \frac{4}{x}, x > 0$

$$x + \frac{4}{x} \ge 4,$$

причем равенство возможно только при $x = \frac{4}{x}$.

Таким образом, используя возрастание функции 2^t получаем

$$2^x + 2^{\frac{4}{x}} \ge 2^3 \Rightarrow 2^x + 2^{\frac{4}{x}} \ge 2\sqrt{2^{x+\frac{4}{x}}} \ge 8.$$

Значит, равенство возможно только при $x = \frac{4}{x}$. Отсюда, с учетом положительности x, получаем ответ.

Ответ: $x = 2$.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить уравнения:

3.1. $9^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7} = \left(\frac{1}{27}\right)^{3x}$.

3.2. $\left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \frac{3}{128}$.

3.3. $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

3.4. $16^x - 2^{4x-3} - 4^{2x-1} = 160$.

3.5. $3^{\frac{2}{x}} - 3^{\frac{2-x}{x}} + 9^{\frac{1+x}{x}} = 29$.

3.6. $2^{x^2+1} - 3^{x^2} = 3^{x^2+1} - 2^{x^2+2}$.

3.7. $3^{x+7} - 7^{x+5} = 3^{x+5} + 7^{x+6}$.

3.8. $x \cdot 3^{x-1} + 3^{1+\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

3.9. $3 \cdot 4^x + 7\sqrt{x} \cdot 6^x = 2x \cdot 3^{2x+1}$.

3.10. $4^x + y \cdot 2^{x+2} + y^4 + 4 = 0$.

3.11. $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4$.

3.12. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

3.13. $\sqrt{2^x-1}+2^{x+1}=5.$

3.14. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=10.$

3.15. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1.$

3.16. $\dfrac{18^x-2^{x+4}}{3^x-4}=5\cdot\left(\sqrt{12}\right)^x.$

3.17. $\dfrac{8^x+8}{2^x+2}=3\cdot 2^x.$

3.18. Найти значенние суммы 2^x+2^{-x}, если $8^x+8^{-x}=18.$

Решить уравнения:

3.19. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$

3.20. $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}.$

3.21. $\dfrac{4^x}{\sqrt{4^x+1}-1}+1=4^x+\dfrac{1}{\sqrt{4^x+1}+2^x}.$

3.22. $\left|2^{x-2}-2\right|+\left|2^{x-2}-4\right|=2.$

3.23. $2^x=3-x.$

3.24. $5^x=3^x+4^x.$

3.25. $3^{4x}+(2x-7)\cdot 9^x=6x-12.$

3.26. $x\cdot 3^{x+1}=5x+4.$

3.27. $3^{\sin 5x}+6^{-\sin 3x}=2^{2\sin x-3}.$

3.28. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

3.29. $(x-6)\left(3+\sqrt{x^2-12x+39}\right)+5^x\left(3+\sqrt{5^{2x}+3}\right)=0.$

3.30. $4\cdot 2^{2x+\frac{1}{2x}}-8\cdot 2^{x+\frac{1}{4x}}+3=-2\left|2\cdot 2^{x+\frac{1}{4x}}-1\right|.$

3.31. $4^{-x\sqrt{3-2x}}+1=\left(4+2x-x^2\right)\cdot 2^{-x^2+2x-3}.$

Решить системы уравнений:

3.32. $\begin{cases} x^{x+y}=y^{x-y} \\ yx^2=1 \end{cases}.$

3.33. $\begin{cases} 3^{x+y+1}+7\cdot 3^{y-2}=8 \\ \sqrt{x+y^2}=x+y \end{cases}.$

3.34. $\begin{cases} x9^{y-x}+2y\cdot 3^{-y-x}=8\cdot 3^{y-2x} \\ 3x\cdot 3^{2y+x}+2y\cdot 3^{1-y+2x}=72\cdot 9^{x-y} \end{cases}.$

3.35. $\begin{cases} 2^x+x=2^y+y \\ x^2+xy+y^2=12 \end{cases}.$

3.36. $\begin{cases} 4^x-2^{y+3}=\dfrac{12-8x+4y}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+2}} \\ 4x^2-3xy+2y^2-6x+6y=-3 \end{cases}.$

Задачи для самостоятельного решения

3.1д. Найти значенние суммы 2^x+2^{-x}, если $\dfrac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=6.$

Решить уравнения:

3.2д. $3^{12x-1}-9^{6x-1}-27^{4x-1}+81^{3x+1}=2192.$

3.3д. $3\cdot 4^x+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$

3.4д. $8^{\frac{1}{x}+1}+2^{\frac{3-x}{x}}-4^{\frac{3+x}{2x}}=26.$

3.5д. $25^x-7^x-7\cdot 5^{2x+1}+5\cdot 7^{x+1}=0.$

3.6д. $5^{\frac{1+x}{x}}-3^{\frac{1+2x}{x}}=3^{\frac{1}{x}}-5^{\frac{1}{x}}.$

3.7д. $x^2\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+4^{x+2}=2^{4+2\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 4^x.$

3.8д. $10^{x^2+1}-10^{1-x^2}=99.$

3.9д. $2^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}=3.$

3.10д. $2^{3x+1}-8^{\sqrt{x+2}}=4^x\cdot 2^{\sqrt{x+2}}.$

3.11д. $4^x-4^{1+\sqrt{x}}=3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}.$

3.12д. $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0.$

3.13д. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{x}{2}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x}{2}}=4.$

3.14д. $\dfrac{8^x+8}{2^{x-1}+1}=3\cdot 16^x-2^{x+2}.$

3.15д. $5\cdot 5^{2x}+3\cdot 10^x=2\cdot 4^x.$

3.16д. $2^{\cos 2x}=3\cdot 2^{\cos^2 x}-4$.

3.17д. $4^{\mathrm{tg}^2 x}+8=3\cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

3.18д. $2\cdot 7^{x+1}-21\cdot 2^x=43\cdot 14^{\frac{x}{2}}$.

3.19д. $\dfrac{4^x}{\sqrt{2}}+2^x\left(4+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)+4\sqrt{3}=\dfrac{16^x-9}{2^x-\sqrt{3}}$.

3.20д. $x\cdot 3^x=81$.

3.21д. $3^x+x^3=4$.

3.22д. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1}\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^{x-1}=\dfrac{81}{160}$.

3.23д. $7^x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6}-\left(\dfrac{7}{4}\right)^x=0$.

3.24д. $(x+1)\cdot 5^{x+2}=13x+25$.

3.25д. $x\cdot 9^x+(3x-1)\cdot 3^{x+1}=27$.

3.26д. $4^{\frac{1}{x}}-x\cdot 2^{\frac{x+1}{x}}+4x^2=6x-3$.

3.27д. $2^{y^2-2xy}+2^{3-2x}=\left(4+2x-x^2\right)\cdot 2^{-x^2}$.

3.28д. $x^{\log_2 3}=x^2-1$.

3.29д. $5^x=3^{2-x}+2$.

3.30д. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x^2-6x+11}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{x^2-6x+9}=\dfrac{4}{\sqrt{5}-2}$.

3.31д. $5^{3x}+5^{3(1-x)}+15\cdot\left(5^x+5^{1-x}\right)=216$.

3.32д. $\dfrac{3^{x+2}+1}{x-3}+\dfrac{2-x}{3^x}=8$.

3.33д. $8\left(4^x+4^{-x}\right)-54\left(2^x+2^{-x}\right)+101=0$.

3.34д. $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$.

3.35д. $x\cdot 4^x+(3x-1)=3\cdot 4^{-x}$.

3.36д. $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$.

3.37д. $2^{\sin x}+2^{-\sin 3x}=1$.

3.38д. При каком x равенство выполнено для всех n

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\ldots+2^{x+n}=2^{x^2+n-5}-2^x.$$

Решить уравнения:

3.39д. $\left(\sqrt{3}+2\right)^{x^2-2x+3}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$.

3.40д. $2^{x+3}-3^{x^2+2x-6}=3^{x^2+2x-5}-2^x$.

3.41д. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

3.42д. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

3.43д. $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$.

3.44д. $(x-4)\left(5+\sqrt{x^2-8x+17}\right)+3^x\left(5+\sqrt{3^{2x}+1}\right)=0$.

3.45д. $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$.

3.46д. $5^{2x}-3^x-15\cdot 25^x+15\cdot 3^x=0$.

3.47д. $5^{1+\frac{2}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+2\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$.

3.48д. $\sqrt{10-2\cdot 5^x}=5^{x+1}-13$.

3.49д. $5\cdot 4^x+3\cdot 10^x=2\cdot 25^x$.

3.50д. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-2x+2}+\left(17+\sqrt{288}\right)^{\frac{x^2}{2}-x+1}=6$.

3.51д. $18\cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}}-21\cdot 3^{x+\frac{1}{4x}}+5=-5\left|3\cdot 3^{x+\frac{1}{4x}}-1\right|$.

3.52д. $(x+1)\cdot 2^x=3x+1$.

3.53д. $\sqrt{6^{-x}+2x}=x+3$.

Решить системы уравнений:

3.54д. $\begin{cases}(x-3)\cdot 2^x+y=-1\\ 3\cdot 4^x-2^x-3y=x\end{cases}$.

3.55д. $\begin{cases}x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2\\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1\end{cases}$.

3.56д. $\begin{cases}4^{x+1}-2^{y+2}=y-2x\\ 4x^2+10x+4y+xy+y^2=4\end{cases}$.

3.57д. $\begin{cases}2^{x+y+1}+7\cdot 2^{y-5}=4\\ \sqrt{2x+y^2}=x+y\end{cases}$.

3.58д. $\begin{cases} 9^{y}-3^{x+2}=\dfrac{18-18y+9x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-3}} \\ 5x^{2}+2xy-4y^{2}-16x+6y=-8 \end{cases}$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

3.1. -1. **3.2.** -6. **3.3.** $3;-\frac{1}{5}$. **3.4.** 2. **3.5.** 2. **3.6.** ± 1. **3.7.** -5. **3.8.** $2;3$. **3.9.** 1. **3.10.** $\left(\frac{3}{2};-\sqrt{2}\right)$. **3.11.** $1;4$. **3.12.** 3. **3.13.** 1. **3.14.** ± 2. **3.15.** $5;-3$. **3.16.** $0;\log_3 16$ **3.17.** $0;2$. **3.18.** 3. **3.19.** $0;\frac{1}{2}$. **3.20.** $1;-4$. **3.21.** 1. **3.22.** $[3;4]$. **3.23.** 1. **3.24.** 2. **3.25.** $\frac{1}{2}$. **3.26.** ± 1. **3.27.** $\varnothing$. **3.28.** 0. **3.29.** 1. **3.30.** $-\frac{1}{2}$. **3.31.** 1. **3.32.** $\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\sqrt[3]{9}\right),(1;1)$. **3.33.** $\left(0;\log_3\frac{36}{17}\right),(2\log_3 7-3;2-\log_3 7)$. **3.34.** $(2;1)$. **3.35.** $(2;2),(-2;-2)$. **3.36.** $(1;-1)$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1д. 3. **3.2д.** $\frac{1}{4}$. **3.3д.** $-\frac{1}{2}$. **3.4д.** $\frac{3}{2}$. **3.5д.** 0. **3.6д.** 1. **3.7д.** $2;\pm 4$. **3.8д.** ± 1. **3.9д.** $\frac{\pi}{2}n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. **3.10д.** 2. **3.11д.** 4. **3.12д.** $3;-2$. **3.13д.** 2. **3.14д.** $\frac{1}{2}$. **3.15д.** -1. **3.16д.** $\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. **3.17д.** $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots;$ $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. **3.18д.** 2. **3.19д.** $\frac{1}{2}$. **3.20д.** 3. **3.21д.** 1. **3.22д.** 2. **3.23д.** 1; -3. **3.24д.** $-2;0$. **3.25д.** 1. **3.26д.** $\varnothing$. **3.27д.** $(1;1)$. **3.28д.** 2. **3.29д.** 1. **3.30д.** 3. **3.31д.** $0;1$. **3.32д.** -1. **3.33д.** $\pm 1;\pm 2$. **3.34д.** $1;-\log_2 3$. **3.35д.** $\frac{1}{2}$. **3.36д.** $\{-3\}\cup[-1,+\infty)$. **3.37д.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. **3.38д.** $-2;3$. **3.39д.** 1. **3.40д.** $2;-4+\log_3 2$. **3.41д.** $1;2$. **3.42д.** 1. **3.43д.** $3;4+\log_5 3$. **3.44д.** 1. **3.45д.** 1. **3.46д.** 0. **3.47д.** -1. **3.48д.** $\log_5 3$. **3.49д.** 1. **3.50д.** 1. **3.51д.** $-\frac{1}{2}$. **3.52д.** $0;1$. **3.53д.** -1. **3.54д.** $(1;3),\left(-\log_2 3;\frac{1}{3}\log_2 3\right)$. **3.55д.** $(1;-1)$. **3.56д.** $(-2;-4),\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$. **3.57д.** $(0;7-\log_2 71),(-6+2\log_2 7;4-\log_2 7)$. **3.58д.** $(2;2)$.

Лекция №4

Логарифмические уравнения

Определение 4.1. Пусть выполняется равенство

$$a^{c}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0.$$

Тогда число c называется логарифмом числа b по основанию числа a и обозначается $c=\log_a b$. Иными словами $\log_a b$ это показатель степени, в которую надо возвести положительное, не равное единице, число a, чтобы получить положительное число b.

4.1. Свойства логарифма

1°. $\log_a a^{c}=c,\ a>0,\ a\neq 1$.

2°. $a^{\log_a b}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$. Это равенство называется основным логарифмическим тождеством.

Докажем это свойство. Обозначим $c=\log_a b$. Нам нужно доказать равенство $a^{c}=b$. Но это равенство, при сделанном обозначении, следует из определения 4.1.

3°. $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0$.

Для доказательства обозначим: $\log_a b=t_1,\ \log_a c=t_2$. Таким образом $b=a^{t_1},\ c=a^{t_2}$. Заменим в левой части доказываемого равенства b и c. Получим $\log_a a^{t_1+t_2}=t_1+t_2$, откуда и следует требуемое равенство.

4°. $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0$.

Это свойство доказывается вполне аналогично предыдущему.

5°. $\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$.

Обозначим $c=\log_a b$. Тогда

$$a^{c}=b\Rightarrow b^{\alpha}=a^{c\alpha}\Rightarrow\log_a b^{\alpha}=\log_a a^{c\alpha}=\alpha c=\alpha\log_a b.$$

6°. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{1}{\log_b a},\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1$.

Обозначим $d=\log_a b$. Тогда

$$a^d = b \Rightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c a^d}{\log_c a} = d = \log_a b \, .$$

Последнее равенство в 6° доказывается, если положить $c = b$.

7°. $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$, $a>0\,, a\neq 1\,, b>0\,, \beta\neq 0$. Это свойство легко доказывается последовательным применением свойств 5° и 6°.

8°. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $a>0\,, b>0, c>0, c\neq 1$.°

Докажем это свойство последовательным применением основного логарифмического тождества и свойства 5°

$$a^{\log_c b} = c^{\log_c a^{\log_c b}} = c^{\log_c b \cdot \log_c a} \quad \text{и} \quad b^{\log_c a} = c^{\log_c b^{\log_c a}} = c^{\log_c a \cdot \log_c b} .$$

9°. $\log_a 1 = 0\,, a>0\,, a\neq 1$.

Мы ограничимся только этими девятью свойствами логарифмов. Если нам понадобятся какие-либо другие свойства, мы их докажем по ходу решения конкретных примеров.

4.2. Свойства логарифмической функции $f(x) = \log_a x$

1°. Функция $y = f(x) = \log_a x$ определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$, а множеством значений этой функции является интервал $(-\infty\,, +\infty)$.

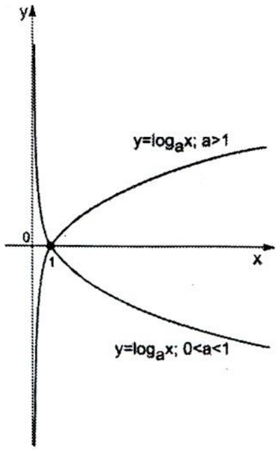

Рис. 4.1

2°. Функция $y = \log_a x$ является обратной к функции $y = a^x$, при $x > 0$.

3°. Функция $y = \log_a x$ при $a>1$ является возрастающей на всей области определения и убывающей при $a<1$. Графики функции $y = \log_a x$ представлены на рис. 4.1. Отметим, что график функции $y = \log_a x$ симметричен графику $y = a^x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4.3. Преобразования логарифмических выражений

Пример 4.1. Найти $\log_6 9$, если $\log_6 2 = k$.

Так как $\log_6 9 = \log_6 3^2 = 2\log_6 3$, то нам требуется найти $\log_6 3$. Заметим, что

$$\log_6 6 = 1 = \log_6 (3\cdot 2) = \log_6 2 + \log_6 3 \Rightarrow \log_6 3 = 1 - k \, .$$

Ответ: $2 - 2k$.

Пример 4.2. Доказать, что

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a \, ,$$

если $c^2 - b^2 = a^2$, $c - b \neq 1\,, c+b\neq 1\,, a\,, b\,, c > 0\,, c > b$.

При $a=1$ доказываемое равенство очевидно справедливо. Полагаем $a\neq 1$ и преобразуем левую часть, воспользовавшись свойствами 1°, 3° и 6°

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a (c+b)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} =$$

$$= \frac{\log_a (c+b) + \log_a (c-b)}{\log_a (c+b) \cdot \log_a (c-b)} = \frac{\log_a (c^2 - b^2)}{\log_a (c+b)\cdot \log_a (c-b)} =$$

$$= \frac{2}{\log_a (c+b) \cdot \log_a (c-b)} = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a \, .$$

Пример 4.3. Доказать равенство

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdots \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2,$$

где n – натуральное число.

В принципе, основным приемом при преобразовании логарифмов является переход везде, где это возможно, к одному основанию. В нашем примере перейдем к основанию $n+1$

$$\frac{\log_{n+1} 2}{\log_{n+1} 3} \cdot \frac{\log_{n+1} 3}{\log_{n+1} 4} \cdot \frac{\log_{n+1} 4}{\log_{n+1} 5} \cdots \frac{\log_{n+1} n}{\log_{n+1}(n+1)} = \log_{n+1} 2.$$

4.4. Решение уравнений

Прежде чем переходить к решению уравнений отметим некоторые проблемы общего характера, которые могут появиться .

1. Применение свойств логарифмов может привести к изменению ОДЗ уравнения, причем не только к появлению дополнительных решений (это можно откорректировать с помощью проверки), но и к потере корней уравнения. Например, применение свойства 3°

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,\ a>0, a \neq 1, b>0, c>0$$

при преобразовании суммы логарифмов в логарифм произведения может привести к расширению ОДЗ и к появлению лишних корней. Если же логарифм произведения преобразовать в сумму логарифмов, то ОДЗ сужается, что может привести к потере решений. Поэтому, лучше использовать это свойство при преобразовании суммы логарифмов в логарифм произведения и проводить проверку. В обратную сторону это свойство можно использовать только при абсолютной уверенности, что потери корней не будет.

2. С учетом вышесказанного при решении уравнений приоритетом является проверка, а не учет ОДЗ.

3. Никогда не забываем о том, что при вынесении четной степени под знаком логарифма получаем модуль функции

$$\log_a (f(x))^{2n} = 2n \log_a |f(x)|.$$

4.4.1. Простейшие логарифмические уравнения

Уравнение $\log_a f(x) = b$, где $a>0, a \neq 1$ и b – числа, равносильно уравнению

$$f(x) = a^b,$$

причем ни проверка, ни ОДЗ не требуются.

4.4.2. Использование свойств логарифмов

Пример 4.4. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1$.

Преобразуем уравнение

$$\sqrt{9\log_3 x} - \frac{4}{2}\log_{3^2}(3x) = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3 - \log_3 x = 1.$$

Теперь обозначаем $\sqrt{\log_3 x} = t \geq 0$ и получаем

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 81.$$

Проверка показывает, что оба найденных корня подходят.

Ответ: $x = 3, x = 81$.

Пример 4.5. $\sqrt{\log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

В выписывании всей области допустимых значений нет необходимости, отметим только, что x – отрицательный.

Таким образом, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Делаем замену $\sqrt{\log_8(-x)} = t \geq 0$ и получаем

$$t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -8.$$

Непосредственная проверка показывает, что оба найденных решения подходят.

Ответ: $x = -1, x = -8$.

Пример 4.6. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

В показательных уравнениях мы, обычно, стремимся переходить к одному основанию. В нашем случае переходим к основанию 3, используя основное логарифмическое тождество

$$x^{\log_3 x} = 3^{\log_3 x^{\log_3 x}} = 3^{\log_3^2 x}.$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$3^{\log_3^2 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}, x = 9.$$

В данном примере можно не делать проверки в соответствии с правилами решения простейших логарифмических уравнений.

Ответ: $x = \frac{1}{9}, x = 9$.

4.4.3. Логарифмирование

Пример 4.7. $\dfrac{100x^{2\lg^2 x}}{x^3} = x^{3\lg x}$.

Это типичный пример на логарифмирование обеих частей уравнения. Отметим, что для проведения операции логарифмирования необходимо, чтобы обе части уравнения были положительны. В нашем случае положительность обеих частей обеспечивает условие существования логарифма: $x > 0$. Выбор основания для логарифмирования, в целом, произволен и зависит от конкретного примера. В нашем случае наличие десятичного логарифма указывает на то, что надо использовать логарифм по основанию 10

$$\lg\frac{100x^{2\lg^2 x}}{x^3} = \lg x^{3\lg x} \Leftrightarrow \lg 100 + \lg x^{2\lg^2 x} - \lg x^3 = 3\lg^2 x.$$

Заменим $\lg x = t$ и получим уравнение

$$2t^3 - 3t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Находим корни $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = \frac{1}{2}$. Теперь определяем решения исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{10}, x = \sqrt{10}, x = 100$.

Рассмотрим еще один пример на подобный метод.

Пример 4.8. $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$.

У нас, снова, сложно-показательное выражение с положительной левой $(x > 0)$ и правой частями, поэтому логарифмируем обе части по основанию 2

$$\log_2 \frac{x}{98} \log_2 x + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = 0.$$

Теперь обозначим $\log_2 x = t$, $\log_2 7 = a$ и получим уравнение

$$(t - 1 - 2a)\,t + a(a+1) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (2a+1)\,t + a^2 + a = 0,$$

которое решаем как квадратное относительно t.

Находим два решения $t_1 = a$ и $t_2 = a + 1$ и, вернувшись к исходным переменным, без труда получим ответ.

Ответ: $x = 7, x = 14$.

4.4.4. Использование формулы перехода к другому основанию

Пример 4.9. $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

В правой части уравнения просматривается формула перехода к другому основанию. Если ею воспользоваться, то новым основанием будет $x + 2$. В дроби левой части нам нужно в числителе получить логарифм по основанию 12, тогда мы, воспользовавшись формулой перехода к другому основанию, также получим основание $x + 2$. Заметим, что ОДЗ при подобном переходе не меняется. Имеем

$$2 - 4\log_{12} 2 = \log_{12} 144 - \log_{12} 2^4 = \log_{12} 9.$$

Таким образом, наше уравнение представимо в виде

$$\frac{\log_{12} 9}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+2} 9 - 1 = \log_{x+2}(8-x) \Leftrightarrow \log_{x+2}\frac{9}{8-x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8-x} = x+2 \Leftrightarrow x=-1\,, x=7\,.$$

Проверка, которая в данном примере необходима, показывает, что первый корень не подходит (нуль в знаменателе).

Ответ: $x=7$.

Пример 4.10. $1+\log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}\left(x-1\right)^2$.

Преобразуем правую часть и получим равносильное уравнение

$$1+\log_6 \frac{x+3}{x+7} = \log_6\left|x-1\right| \Leftrightarrow \log_6 \frac{6x+18}{x+7} = \log_6\left|x-1\right|.$$

Имеем уравнение-следствие

$$\frac{6x+18}{x+7} = \left|x-1\right|.$$

Здесь удобнее раскрыть модуль

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2+12x+11=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \\ x=-11 \end{array}\right. .$$

Непосредственная проверка показывает, что все три найденных решения удовлетворяют исходному уравнению.

Заметим, что если модуль не поставить, то это приведет к потере двух корней.

Ответ: $x=5\,, x=-1\,, x=-11$.

Пример 4.11. $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x =$

$$= \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_3 x \cdot \log_5 x + \log_4 x \cdot \log_5 x\,.$$

На вид – довольно страшный пример. Однако, если разделить обе части уравнения на произведение логарифмов, то пример станет тривиальным. Единственная тонкость заключается в том, что необходимо проверить не делим ли мы на нуль. Левая часть равна нулю только при $x=1$. Но при этом значении неизвестной и правая часть

равна нулю. Поэтому, фиксируем первое решение – $x=1$, полагаем $x \ne 1$ и делим обе части уравнения на $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x$. В результате получим

$$1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_3 x} \Leftrightarrow 1 = \log_x 5 + \log_x 4 + \log_x 3 \Leftrightarrow x = 60\,.$$

Ответ: $x=1\,, x=60$.

Вообще, в элементарной математике существует почти всегда выполняемое правило:"Чем длинее условие примера, тем проще его решение". Обратное утверждение, вообще говоря, не всегда верно.

Пример 4.12. $\log_{3x} 9 = \log_x^2 3$.

В данном примере разные, но очень похожие основания логарифмов. Использование этой похожести может привести к тупиковому пути решения. Одинаковыми (с точностью до показателя степени) у обоих логарифмов являются подлогарифмические выражения. Поэтому переходим к логарифмам с основанием 3

$$\frac{2}{\log_3(3x)} = \frac{1}{\log_3^2 x} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\log_3 x} = \frac{1}{\log_3^2 x}\,.$$

Заменяем $\log_3 x = t$, приводим к общему знаменателю и получаем квадратное уравнение

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1\,, t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 3\,, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Проверка показывает, что оба найденных решения удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=3\,, x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.4.5. Произведение логарифмов

Пример 4.13. $\log_2 x \cdot \log_2\left(x-3\right) = \log_2\left(x^2-3x\right) - 1$.

В этом примере появляется произведение логарифмов, которое, в общем случае, довольно сложно преобразовать.

Обозначим для удобства $\log_2 x = a$, $\log_2(x-3) = b$. Тогда ура[в]нение принимает вид

$$ab = a + b - 1.$$

Мы уже неоднократно встречались с подобным выражением и п[о]мним, что оно раскладывается на множители: $(a-1)(b-1)=0$. Отсюда находим, что $x=2$, $x=5$. Проверка показывает, что перво[е] решение не подходит.

Ответ: $x=5$.

Посмотрим, как еще можно справиться с произведением логарифмов.

Пример 4.14. $\lg^2(1+x) = \lg(1+x)\cdot\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.

Обозначим $\lg(1+x) = a, \lg(x-1) = b$. Тогда уравнение принимает вид

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b,\ a = 2b.$$

Обычное однородное уравнение.

Далее все очевидно.

1. $\lg(1+x) = -\lg(x-1) \Rightarrow 1+x = \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Проверка показывает, что подходит только $x = \sqrt{2}$.

2. $\lg(1+x) = 2\lg(x-1) \Rightarrow 1+x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$.

Проверка показывает, что подходит только $x = 3$.

Ответ: $x = \sqrt{2}$, $x = 3$.

4.4.6. Задачи на оценку

Пример 4.15. $\log_{3^{\sqrt{x+y}}}\left(3^{\sqrt{x+y}} + \sqrt{y\sqrt{x}+1}\right) = 2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}}$.

В этом примере намешано так много различных функций, что напрашивается произвести оценку левой и правой частей уравнения. Заметим, что эта процедура, не занимающая много времени, может оказаться очень эффективной.

Правая часть, очевидно не больше единицы. В левой части в основании логарифма находится выражение большее единицы, которое мы обозначим $3^{\sqrt{x+y}} = a > 1$. Под логарифмом находится число не меньшее самого a, поэтому сам логарифм не меньше единицы.

Таким образом, равенство возможно только при

$$\begin{cases} y\sqrt{x} = -1 \\ x - y - 2\sqrt{x} = 0. \\ x + y > 0 \end{cases}$$

Заметим, что условие $x \neq -y$ является условием неравенства единице основания логарифма

Обозначим $\sqrt{x} = b \geq 0$ и система приобретает вид

$$\begin{cases} yb = -1 \\ b^2 - 2b - y = 0. \\ b^2 + y > 0 \end{cases}$$

Система решается прямой подстановкой и, с учетом условия $b \geq 0$, имеет решение $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Откуда получается единственное решение уравнения.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Пример 4.16. $\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x) = 4$.

Попробуем решить данное уравнение с помощью оценки левой части. Для этого воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Однако, прежде чем использовать это неравенство, необходимо показать, что оба логарифма могут быть только положительными.

Предположим, что $\log_2(x-4) < 0$. Тогда $4 < x < 5 \Rightarrow 12 - x > 1$ и второй логарифм положительный, т.е. левая часть отрицательна. Аналогично показывается, что и второй логарифм не может быть отрицательным. Теперь наше уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)}=2$$

и применение указанного выше неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим дает

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)}\le\frac{\log_2(x-4)+\log_2(12-x)}{2}=$$

$$=\frac{\log_2((x-4)\cdot(12-x))}{2}=\frac{\log_2(-x^2+16x-48)}{2}.$$

Подлогарифмическое выражение представляет собой квадратичную функцию, графиком которой является парабола с ветвями направленными вниз, т.е. максимальное значение этого выражения достигается либо в вершине, если вершина входит в ОДЗ, либо на одной из границ ОДЗ. В нашем случае $x_в=8$, т.е. удовлетворяет ОДЗ. Значит

$$\log_2(-x^2+16x-48)\le 4$$

Теперь окончательно получаем

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)}\le 2,$$

то есть должно выполняться равенство $\log_2(x-4)=\log_2(12-x)$, и $x=8$ – единственный корень уравнения.

Рассмотрим другой способ решения, позволяющий переходить к показательным функциям, которые оценивать проще.

Обозначим $\log_2(x-4)=a, \log_2(12-x)=b$. Тогда

$$\begin{cases}2^a=x-4\\2^b=12-x.\end{cases}$$

Теперь с учетом исходного уравнения составляем систему, избавляясь от x

$$\begin{cases}ab=4\\2^a+2^b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=4\\2^a+2^{\frac{4}{a}}=8.\end{cases}$$

Далее как в примере 3.20.

Ответ: $x=8$.

4.5. Решение систем уравнений, содержащих логарифмы

Пример 4.17. $\begin{cases}\dfrac{\log_3(2-3x-4y)-1}{\log_3(x-2y-4)}=\dfrac{\log_5(2x-y-5)}{\log_5(1-2x-3y)}.\\2y^2+xy+2x=x^2+y+1\end{cases}$

Первый шаг здесь довольно традиционен – решаем второе уравнение как квадратное относительно, например, x

$$x^2-(y+2)x-(2y^2-y-1)=0$$

$$D=(y+2)^2+4(2y^2-y-1)=9y^2.$$

Таким образом, получаются два случая: $x=1-y$ и $x=2y+1$. Рассмотрим их.

1. $\begin{cases}\dfrac{\log_3(2-3+3y-4y)-1}{\log_3(1-y-2y-4)}=\dfrac{\log_5(2-2y-y-5)}{\log_5(1-2+2y-3y)}\\x=1-y\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_3(-y-1)-1}{\log_3(-3y-3)}=\dfrac{\log_5(-3y-3)}{\log_5(-y-1)}.\\x=1-y\end{cases}$$

Теперь решаем первое уравнение системы, для чего обозначим $-y-1=t$ и перейдем везде к логарифму по основанию 3

$$\frac{\log_3 t-1}{\log_3 t+1}=\frac{\dfrac{\log_3 t+1}{\log_3 5}}{\dfrac{\log_3 t}{\log_3 5}}.$$

Обозначим $\log_3 t=u$ и получим уравнение

$$\frac{u-1}{u+1}=\frac{u+1}{u}\Leftrightarrow u=-\frac{1}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\Rightarrow x=2+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

2. Пусть $x=2y+1$, тогда $x-2y-4=-3$ и подлогарифмическое выражение оказывается отрицательным.

Ответ: $\left(2+\frac{\sqrt[3]{9}}{3};-1-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right)$.

Пример 4.18. $\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^{\log_2(x-y)}=8\\(x+y)^{\log_2\left(x^2-y^2\right)}=64\end{cases}$.

Это типичный пример на логарифмирование. Сначала обозначим, для удобства, $x+y=a>0, x-y=b>0$. Тогда

$$\begin{cases}(ab)^{\log_2 b}=8\\a^{\log_2(ab)}=64\end{cases}$$

и прологарифмируем обе части каждого уравнения по основанию 2

$$\begin{cases}\log_2 b\cdot\log_2(ab)=3\\\log_2 a\cdot\log_2(ab)=6\end{cases}.$$

Теперь, учитывая то, что ни один из сомножителей в уравнениях не может быть равен нулю, разделим левую и правую части второго уравнения системы на, соответственно, левую и правую части первого уравнения. Получим уравнение-следствие

$$\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=2\Rightarrow a=b^2.$$

Подставляем найденное выражение в первое уравнение системы и получаем: $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$ и $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$. Откуда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}\\\begin{cases}x+y=\frac{1}{4}\\x-y=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=\frac{3}{8}\\y=-\frac{1}{8}\end{cases}\end{array}\right..$$

Делаем проверку и убеждаемся, что оба решения удовлетворяют исходной системе.

Ответ: $(3;1),\left(\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$.

Пример 4.19.

$$\begin{cases}\log_2^2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x+y)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x-2y)=2\log_2^2(x-2y)\\x^2-xy-2y^2=64\end{cases}.$$

Обозначим $\log_2(x+y)=a$ и $\log_2(x-2y)=b$ и первое уравнение системы приобретает вид

$$a^2+ab-2b^2=0\Leftrightarrow a_1=b, a_2=-2b.$$

Теперь рассматриваем два случая.

1. $a=b$.

$$\begin{cases}x+y=x-2y\\x^2-xy-2y^2=64\\x+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=0\end{cases}.$$

2. $a=-2b$.

$$\begin{cases}(x+y)(x-2y)^2=1\\x^2-xy-2y^2=64\\x-2y>0\end{cases}$$

Заметим, что левая часть второго уравнения системы раскладывается на множители $(x+y)(x-2y)=64$ и далее все действительно просто.

$$\begin{cases} x-2y=\dfrac{1}{64} \\ x+y=64^2 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{174763}{64};\dfrac{87381}{64}\right)$.

И, в заключение, рассмотрим пример, в котором нам потребуются некоторые знания о производных.

Пример 4.20. $$\begin{cases} \dfrac{xy}{9}+\dfrac{xz}{25}-\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{7x}{15} \\ \dfrac{xy}{9}-\dfrac{xz}{25}+\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{5y}{21} \\ -\dfrac{xy}{9}+\dfrac{xz}{25}+\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{3z}{35} \end{cases}.$$

Сначала определим те сведения о производной функции $f(t)$, которые нам потребуются.

Во-первых, производная от функции $\ln t$ равна $\dfrac{1}{t}$.

Во-вторых, если производная функции на некотором интервале определена и положительна, то функция на этом промежутке возрастает, если же на некотором интервале производная определена и отрицательна, то функция на этом промежутке убывает.

Теперь, обремененные этим багажом знаний, приступим к решению системы, учитывая то, что $x, y, z>0$.

Сложим попарно уравнения системы. Для примера покажем, что произойдет с суммой первого и второго уравнений.

$$\frac{2xy}{9}=2+2\ln\frac{7x}{15}+2\ln\frac{5y}{21}\Leftrightarrow\frac{xy}{9}=1+\ln\frac{xy}{9}.$$

Рассмотрим уравнение $t=1+\ln t$. Это уравнение имеет очевидное решение $t=1$. Покажем, что других решений нет.

Рассмотрим функцию, $f(t)=t-1-\ln t$, которая существует и непрерывна при $t>0$.

Производная этой функции имеет вид

$$f'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}.$$

На участке $0<t<1$ функция $f(t)$ имеет отрицательную производную, т.е. убывает. В точке $t=1$ функция равна нулю, при $t>1$ функция $f(t)$ возрастает. Значит ни в одной другой (кроме $t=1$) точке эта функция не может обратиться в нуль.

Теперь, с учетом нашего разбора, система приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{9}=1 \\ \dfrac{xz}{25}=1 \\ \dfrac{zy}{49}=1 \\ x, y, z>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{y}{z}=\dfrac{9}{25} \\ yz=49 \\ \dfrac{xz}{25}=1 \\ x, y, z>0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{15}{7};\dfrac{21}{5};\dfrac{35}{3}\right)$.

Задачи для разбора с преподавателем

Вычислить без калькулятора:

4.1. $\log_3\sqrt[3]{9\sqrt{27}}$.

4.2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{1,5}4-\log_{\frac{9}{4}}9}$.

4.3. $\dfrac{\log_5 15-\frac{1}{2}\cdot\log_5 45}{\log_7 147-\frac{1}{3}\cdot\log_7 189}$.

4.4. $\dfrac{\log_5\sqrt{243}+3\log_5\sqrt{3}}{\log_5 90-\log_5 10}$.

4.5. $\left(3^{\log_2 5}+2\cdot 5^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$.

4.6. Известно, что $\log_{27} a=b$. Найти

$$2+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a^3}{3}}+6\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[3]{3a^4}+\log^2_{\sqrt[3]{a^2}} 81.$$

4.7. Найти $\log_6 9$, если $\log_6 2=k$.

4.8. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 2\cdot\lg 5=k$.

4.9. Доказать, что $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a$, если $c^2-b^2=a^2$, $c-b\neq 1, a, b, c>0$.

4.10. Доказать, что $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$ если $a^2+b^2=7ab$.

4.11. Доказать, что если $a, b, c, d>0, c\neq 1, b\neq 1, d\neq 1$, то $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a$.

4.12. Доказать, что $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$ если $a, b, c>0, a\neq 1$.

4.13. Доказать, что если $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, то $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

4.14. Доказать равенство

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdots\log_{n+1} n=\log_{n+1} 2.$$

4.15. Доказать равенство $\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5}}=1$.

4.16. Доказать, что если $a=\log_{12} 18, b=\log_{24} 54$, то $ab+5(a-b)=1$.

4.17. Найти $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3=a$, $\log_{30} 5=b$.

Решить уравнения:

4.18. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{\log_5 2+x}$.

4.19. $\lg\frac{x^2-2x}{4-x}=\lg\frac{3-2x}{x-4}$.

4.20. $\log_4(x+2)+\log_2\sqrt{x}=\log_5 25$.

4.21. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg\left(35-x^3\right)=0$.

4.22. $\lg\left(3x^2+12x+19\right)-\lg(3x+4)=1$.

4.23. $2\lg x^2-\left(\lg(-x)\right)^2=4$.

4.24. $\sqrt{\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

4.25. $\frac{1}{2}\log_3(x+1)-\log_3\sqrt{x+4}=-2+\log_3\frac{9}{2}$.

4.26. $\frac{\lg\lg\left(x^2+13x+2\right)}{\lg(1+\lg x)}=1$.

4.27. $\frac{7}{8}\sqrt{\lg x}=1-\lg\sqrt[8]{x}$.

4.28. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.

4.29. $\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x=$

$$=\log_3 x\cdot\log_4 x+\log_3 x\cdot\log_5 x+\log_4 x\cdot\log_5 x.$$

4.30. $\log_4\log_3\log_2 x=\frac{1}{2}$.

4.31. $\lg\lg x+\lg\left(\lg x^2-1\right)=1$.

4.32. $\frac{2-4\log_{12} 2}{\log_{12}(2+x)}-1=\frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

4.33. $1+\log_6\frac{x+3}{x+7}=\frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$.

4.34. $\frac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x}=1$.

4.35. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

4.36. $\frac{100x^{2\lg^2 x}}{x^3}=x^{3\lg x}$.

4.37. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_x 7-1}=7$.

4.38. $x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

4.39. $\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)^{1+\lg x^2}\cdot 2^{\lg(4x)}=\frac{1}{2}$.

4.40. $\log_{\sqrt{2}}(x-2)^3\cdot\log_{x^3}\left(\frac{1}{16}\right)\cdot\log_{\frac{1}{x^2}}\left(x^3-2x^2\right)+4=0$.

4.41. $\log_2(x+2)\cdot\log_2\left(\frac{x^3}{x+2}\right)=2\log^2_{\frac{1}{2}} x$.

4.42. $\left(2^{\log_x\left(5x^2\right)}+5^{\log_x(2x)}\right)^{\log_3 x}=(3x-2)\cdot 2^{\log_3 5}$.

4.43. $x\log_3^2 x-(4x+3)\log_3 x+12=0$.

4.44. $x(1-\lg 5)=\lg\left(2^{x+1}-12\right)$.

4.45. $\log_{3x} 9=\log_x^2 3$.

4.46. $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3$.

4.47. $\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)=4$.

4.48. $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)=\log_2\left(x^2-3x\right)-1$.

4.49. $\log_{\sqrt{x}}\left(x+|x-3|\right)=\log_x\left(2x+3+2|x-3|\right)$.

4.50. $\log_{\sin(5-x)}\left(15x+2-16\sqrt{3x-2}\right)=2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$.

4.51. $(x-3)^2\log_2(x-1)+2\log_{x-1}\sqrt{2}=$

$$=(x-3)^2\log_{x-1}2+2\log_2\sqrt{x-1}.$$

4.52. $\log_7(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)=\log_7(3-2x)+\log_7 x^2$.

4.53. $\lg^2\left(1+\dfrac{4}{x}\right)+\lg^2\left(1-\dfrac{4}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\dfrac{2}{x-1}-1\right)$.

4.54. $\log_{2\sqrt{y-x}}\left(2^{\sqrt{y-x}}+\sqrt{x\sqrt{y}-1}\right)=3^{-\sqrt{x+y-2\sqrt{y}}}$.

4.55. При каких значениях a уравнение

$$\frac{\lg(x)}{\lg\left(x-a-a^2\right)}=2$$

имеет хотя бы один корень? Найти все корни этого уравнения.

4.56. Найти решения системы

$$\begin{cases}\log_3(5y-x-2)-\log_9(x-y)^2=1\\ \log_3\left(1-\dfrac{2}{y}-4x\right)-\log_9 x^2=1\end{cases},$$

удовлетворяющие условию $x-y<0$.

Решить системы уравнений:

4.57. $\begin{cases}\log_2\left(x^2y+2xy^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4\\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0\end{cases}$.

4.58. $\begin{cases}\log_2^2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x+y)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x-2y)=2\log_2^2(x-2y)\\ x^2-xy-2y^2=64\end{cases}$.

4.59. $\begin{cases}\dfrac{\log_2(5x-3y-1)}{\log_2(2y-x+3)}=\dfrac{\log_2(5+4y-3x)-1}{\log_2(3x-y+1)}\\ 2x^2-3xy+y^2=1+x\end{cases}$.

4.60. $\begin{cases}y\cdot x^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}}\\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1\end{cases}$.

4.61. $\begin{cases}\dfrac{xy}{9}+\dfrac{xz}{25}-\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{7x}{15}\\ \dfrac{xy}{9}-\dfrac{xz}{25}+\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{5y}{21}\\ -\dfrac{xy}{9}+\dfrac{xz}{25}+\dfrac{zy}{49}=1+2\ln\dfrac{3z}{35}\end{cases}$.

4.62. $\begin{cases}(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=y(y-1)(y-3)(y-4)\\ \dfrac{x^2+y^2+6x-4y+13}{\log_3(x+y+1)}=\dfrac{5}{\log_3(x-y+5)}\end{cases}$.

4.63. $\begin{cases}(6x-y)\cdot\log_2 x=10x-3y-3\\ 4^{2x-y}+(6x-y-3)\cdot 2^{-2x-y}=2x\cdot\left(2^{6x-y}-3+6x-y\right)\end{cases}$.

4.64. $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{2-4x}{x^2}\\ (1-x)\cdot 2^{-\log_y 2}=\dfrac{x^2+y^2}{8}\end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить без калькулятора:

4.1д. $\log_2\left(6\cdot\log_4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\right)$.

4.2д. $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\log_5 72-\frac{1}{2}\cdot\log_5 12}{\log_5 135-\frac{1}{2}\cdot\log_5 75}$.

4.3д. $\left(\log_2 7+\log_{\frac{1}{4}} 147\right)\cdot\log_9 32.$

4.4д. Известно, что $\log_3 a=b$. Найти

$$\log_{\frac{3}{a}} a^3+4\log_{a^2}\left(9\sqrt{a}\right)+\left(\log_{27}\left(\frac{a}{3}\right)\right)^{-1}.$$

4.5д. Доказать равенство $\dfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_{ab}\dfrac{b}{a}$.

4.6д. Найти $\log_9 20$, если $\log_{10} 2=a$, $\log_{10} 3=b$.

4.7д. Найти $\log_{54} 168$, если $\log_7 12=a$, $\log_{12} 24=b$.

Решить уравнения:

4.8д. $\lg\left(x+\sqrt{2}\right)+1+\lg\left(x-\sqrt{2}\right)=0.$

4.9д. $\lg\left(\dfrac{1}{4^x}-1\right)=\lg\dfrac{9\cdot 2^{-x}-6}{4}.$

4.10д. $\dfrac{\lg(5-2x)-\lg 3}{\lg\sqrt{2-x}}=1.$

4.11д. $\dfrac{\lg\lg\left(x^2+6x-5\right)}{\lg\sqrt{1+\lg x}}=2.$

4.12д. $\log_x(3x)+\log_x 9=\dfrac{5}{2}.$

4.13д. $\sqrt{\log_2\dfrac{1}{x}+3}=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

4.14д. $\log_2\left(4^x+4\right)=x+\log_2\left(2^{x+1}-3\right).$

4.15д. $\left(3x^2+2\right)^{\log_{3x}(4x)}-(7x)^{(1+\log_{4x}0{,}75)^{-1}}=0.$

4.16д. $\log_{x^2+6x+8}\log_{2x^2+2x+3}\left(x^2-2x\right)=0.$

4.17д. $\log_2\dfrac{10x-2x^2}{3x+6}=\log_2\dfrac{2-x}{x+2}.$

4.18д. $\log_{x^2-4x+1}\left(x^3-3x^2-3x+1\right)=2.$

4.19д. $\log_3 2+\log_3\log_3(4-x)=\log_3\log_3(19-6x).$

4.20д. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2.$

4.21д. $2\log_2\operatorname{ctg}x=\log_2\cos x.$

4.22д. $\log_{\sin 3x}(\cos x-\cos 2x)=1.$

4.23д. $\log_{\sin(2+x)}\left(47-15x-16\sqrt{7-3x}\right)=\log_3\operatorname{tg}^2\dfrac{13\pi}{4}.$

4.24д. $x(1-\lg 5)=\lg\left(2^x+x-1\right).$

4.25д. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=\log_x 5.$

4.26д. $\log_2 x^2-\log_2^2(-x)=-3.$

4.27д. $3\log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right)+4\log_{2\cos x}(\sin x)=7.$

4.28д. $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x=2.$

4.29д. $\log_2\dfrac{4x-2}{2x+5}-\dfrac{1}{2}=\log_2\dfrac{1+x}{x+13}+\dfrac{1}{2}.$

4.30д. $\log_{2-2x^2}\left(2-x^2-x^4\right)=2-\dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}\left(2-2x^2\right)}.$

4.31д. $2x+1=2\log_2\left(9^x+3^{2x-1}-2^{x+3{,}5}\right).$

4.32д. $x+\lg\left(1+2^x\right)=x\lg 5+\lg 6.$

4.33д. $x^{\log_3 x}=25\log_{243}3\sqrt[5]{3}-3^{\log_3^2 x}.$

4.34д. $9^{\log_9^2 x}+x^{\log_9 x}=2\cdot 5^{\frac{2}{\log_3 5}}.$

4.35д. $\log_3 2+\log_3\log_3(4-x)=\log_3\log_3(19-6x).$

4.36д. $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(21+23x+6x^2\right)=4.$

4.37д. $\lg^2(1+x)=\lg(1+x)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1).$

4.38д. $x(1-\lg 5)=\lg\left(2^x+x-1\right).$

4.39д. $x^{\lg x}-1=10\left(1-x^{-\lg x}\right).$

4.40д. $2^{\sqrt{\log_2 x}}-2=2-x^{\sqrt{\log_x 2}}.$

4.41д. $\left(\dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)^{1+\log_3 x^2}\cdot 2^{-4\log_3 x}=2.$

4.42д. $\left(\dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)^{2-\lg x^2}\cdot 9^{\lg\left(\frac{16}{x}\right)}=9.$

4.43д. $x^{\log_2 9}=x^2\cdot 3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}.$

4.44д. $3x\log_3 x+2=\log_{27}x^3+6x.$

4.45д. $\left(\log_4(2x+9)+1\right)\cdot\log_{x+2}2=1.$

4.46д. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}\left(5x^2-2x-3\right)=x^2+2x.$

4.47д. $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$.

4.48д. $\left(5^{\log_x\left(3x^2\right)}+2\cdot 3^{\log_x 5}\right)^{\log_3 x}=7x+26$.

4.49д. $\left(3^{\log_x\left(2x^2\right)}-2^{\log_x 3}\right)^{\log_3 x}=19-x$.

4.50д. $3^{\log_x 6}+6^{\log_x 3}=2^{\log_x 15}$.

4.51д. $\log_5^2 x+(x-8)\log_5 x+12=2x$.

4.52д. $1+\log_x\dfrac{4-x}{10}=(\lg\lg n-1)\log_x 10$.

4.53д. $\lg\left(x^2-x-6\right)+x=\lg(x+2)+4$.

4.54д. $2x-\lg\left(5^{2x}+x-2\right)=\lg 4^x$.

4.55д. $\log_2\left(2^x+1\right)\cdot\log_2\left(2^{x+1}+2\right)=2$.

4.56д. $\log_{16x} x^3+\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=2$.

4.57д. $\log_2(\log_2 x)=\log_2(1+\log_x 16)+1$.

4.58д. $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4)$.

4.59д. $\log_{3^{\sqrt{x+y}}}\left(3^{\sqrt{x+y}}+\sqrt{y\sqrt{x}+1}\right)=2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}}$.

4.60д. $\log_3(3x)+\log_3(4x+1)=\log_{4x^2+x} 9$.

4.61д. При каких a имеет единственное решение уравнение

$$\frac{\lg(ax)}{\lg(x+1)}=2\ ?$$

Решить системы уравнений:

4.62д. $\begin{cases}\log_2\left(\dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}\right)=2\\ \log_8 x\cdot\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

4.63д. $\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^{\log_2(x-y)}=8\\ (x+y)^{\log_2\left(x^2-y^2\right)}=64\end{cases}$.

4.64д. $\begin{cases}(x-y)^{\lg(x+1,5)}=0{,}2\\ (0{,}1)^{\lg(x-y)}=2x+3\end{cases}$

4.65д. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4\dfrac{1}{y}=3\\ [illegible]+16y^2=17\end{cases}$.

4.66д. $\begin{cases}3^{\log_3 x}+2^{\log_4 y}=41\\ 3^{\log_3\sqrt{x}}-2^{\log_{16} y}=1\end{cases}$.

4.67д. $\begin{cases}([illegible]4)(x+1)=y(y+5)\\ [illegible]_{x-2}(2+y)=\dfrac{x-2}{y^2}\end{cases}$.

4.68д. $\begin{cases}[illegible](\log_y x+\log_x y)=26\\ [illegible]=64\end{cases}$.

4.69д. $\begin{cases}\log_2 x\cdot\log_x(x-3y)=2\\ [illegible]y^{\log_x y}=y^{\frac{5}{2}}\end{cases}$.

4.70д. $\begin{cases}\log_{12} x\left(\dfrac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right)=\log_2 x\\ \log_2 x\cdot\log_3(x+y)=3\log_3 x\end{cases}$.

4.71д. $\begin{cases}\log_5 x+3^{\log_3 y}=7\\ [illegible]=5^{12}\end{cases}$.

4.72д. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2}\\ [illegible]y=a^2+a\end{cases}$.

4.73д. $\begin{cases}\dfrac{\lg x+\lg y}{\lg(x+y)}=1\\ x^2+y^2=8\end{cases}$.

4.74д. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 x+\log_9 z=2\\ \log_4 z+\log_{16} y+\log_{16} x=2\end{cases}$.

4.75д. $\begin{cases}[illegible]+\dfrac{xz}{4}-\dfrac{zy}{9}=1+2\ln\dfrac{3x}{14}\\ [illegible]-\dfrac{xz}{4}+\dfrac{zy}{9}=1+2\ln\dfrac{2y}{21}\\ [illegible]+\dfrac{xz}{4}+\dfrac{zy}{9}=1+2\ln\dfrac{7z}{6}\end{cases}$.

4.76д. $\begin{cases}\log_3\left(\dfrac{x^2}{y}+x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^2}{x}+y\right)=2\\ \log_2|x+y|=1\end{cases}$.

4.77д. Найти решения системы

$$\begin{cases} \log_2(3y-3x+1)-\log_4(x-3y)^2=1 \\ \log_2\left(1-\dfrac{1}{y}-3x\right)-\log_4 x^2=1 \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x-3y<0$.

Решить системы уравнений:

4.78д. $\begin{cases} 2\log_3^2(x+2y)-\log_{\frac{1}{3}}(x+2y)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(x-y)= \\ =\log_3^2(x-y) \\ x^2+xy-2y^2=9 \end{cases}$

4.79д. $\begin{cases} \dfrac{\log_2(4-3x-2y)-1}{\log_2(x+3y+1)}=\dfrac{\log_7(3x+5y-1)}{\log_7(3-2x-y)} \\ x^2+3xy+2y^2=1+y \end{cases}$.

4.80д. $\begin{cases} (4y^2-y+6)\cdot 2^x=20y \\ x+\log_2 y=2 \end{cases}$. **4.81д.** $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27 \\ \log_3 y-\log_3 x=1 \end{cases}$.

4.82д. $\begin{cases} \log_2\left(65-2^{2+y}\right)=4-y \\ \log_2\left(\dfrac{2x+y}{y-2x+6}\right)=\log_2(x-1)-\log_2(2-x) \end{cases}$.

4.83д. $\begin{cases} (x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=y(y-2)(y+2)(y+4) \\ \dfrac{x^2+y^2-4x+2y+5}{\log_7(x-y-3)}=\dfrac{10}{\log_3(x+y-1)} \end{cases}$.

4.84д. $\begin{cases} (x+5y)\cdot\log_3 y=2-x-11y \\ 9^{2y+x}+(x+5y-4)\cdot 3^{x-y}=y\cdot\left(3^{x+5y}-4+x+5y\right) \end{cases}$.

4.85д. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{8-8y}{y^2} \\ (2-y)\cdot 4^{-\log_x 8}=\dfrac{x^2+y^2}{64} \end{cases}$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

4.1. $\frac{7}{6}$. **4.2.** $\frac{3}{4}$. **4.3.** $\frac{3}{10}$. **4.4.** 2. **4.5.** 9. **4.6.** $\frac{4}{b^2}-3b$. **4.7.** $2-2k$.
4.8. $\lg 2=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$, $\lg 5=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}$. **4.17.** $3-3a-3b$. **4.18.** 0. **4.19.** 3.
4.20. $\sqrt{17}-1$. **4.21.** $2;3$. **4.22.** $-1;7$. **4.23.** -100. **4.24.** $-1;-8$. **4.25.** 0. **4.26.** $\varnothing$.
4.27. 10. **4.28.** $81;3$. **4.29.** $1;60$. **4.30.** 512. **4.31.** $10^{-2};10^{\frac{5}{2}}$. **4.32.** 7. **4.33.** $5;-1;-11$.
4.34. 0. **4.35.** $\frac{1}{9};9$. **4.36.** $\frac{1}{10};\sqrt{10};100$. **4.37.** $\frac{1}{7}$. **4.38.** $7;14$. **4.39.** $4;\frac{\sqrt{10}}{5}$.
4.40. $1+\sqrt{2}$. **4.41.** 2. **4.42.** 2. **4.43.** $3;81$. **4.44.** $\log_2 12$. **4.45.** $3;\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.46.** $2;\sqrt[3]{4}$.
4.47. $\frac{1}{2};1$. **4.48.** 5. **4.49.** $(0,1)\cup(1,3]$. **4.50.** $\frac{57}{25}$. **4.51.** $\frac{3}{2};3;4$. **4.52.** $\frac{1}{2}$.
4.53. $\sqrt{2};\sqrt{6}$. **4.54.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **4.55.** при $a\in(-\infty,-1)$ решение $x=a^2$, при $a\in(-1,0)$ решения $x=a^2$ и $x=(a+1)^2$, при $a\in(0,+\infty)$ решение $x=(a+1)^2$.
4.56. $\left(1-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **4.57.** $(-6;1)$, $(2;-3)$. **4.58.** $(8;0)$, $\left(\frac{174763}{64};\frac{87381}{64}\right)$.
4.59. $\left(-1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2};-2+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$. **4.60.** $(4;16)$. **4.61.** $\left(\frac{15}{7};\frac{21}{5};\frac{35}{3}\right)$. **4.62.** $\left(\sqrt{5}-3;2\right)$.
4.63. $(4;-11)$, $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **4.64.** $\left(-2;\sqrt{2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1д. 1. **4.2д.** $\frac{1}{15}$. **4.3д.** $-\frac{5}{4}$. **4.4д.** $\frac{4}{b}-2$. **4.6д.** $\frac{a+1}{2b}$. **4.7д.** $\frac{ab+1}{8a-5ab}$. **4.8д.** $\frac{\sqrt{210}}{10}$.
4.9д. -1. **4.10д.** $\frac{7}{4}$. **4.11д.** 5. **4.12д.** 9. **4.13д.** $\frac{1}{64}$. **4.14д.** 2. **4.15д.** 2. **4.16д.** -1.
4.17д. $\frac{1}{2}$. **4.18д.** 5. **4.19д.** -1. **4.20д.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.
4.21д. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. **4.22д.** $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.
4.23д. $\frac{18}{25}$. **4.24д.** 1. **4.25д.** 5. **4.26д.** $-\frac{1}{2};-8$. **4.27д.**. **4.28д.** $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.
4.29д. 1. **4.30д.** $\pm\frac{1}{2}$. **4.31д.** $\frac{3}{2}$. **4.32д.** 1. **4.33д.** $\frac{1}{3};3$. **4.34д.** $\frac{1}{9};9$. **4.35д.** -1.

4.36д. $-\frac{1}{4}$. **4.37д.** $\sqrt{2};3$. **4.38д.** 1. **4.39д.** $1;10;\frac{1}{10}$. **4.40д.** 2. **4.41д.** $8;\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4.42д. 4; 810. **4.43д.** 2. **4.44д.** $\frac{1}{3};9$. **4.45д.** 8. **4.46д.** $-2;-\frac{13}{5};3$. **4.47д.** 4; 8.
4.48д. 2. **4.49д.** 3. **4.50д.** $5\cdot 3^{-\log_2 3}$. **4.51д.** 25; 5. **4.52д.** исправить. **4.53д.** 4. **4.54д.** 2.
4.55д. 0. **4.56д.** $4;2^{\frac{8}{3}}$. **4.57д.** 16. **4.58д.** 2^{12}. **4.59д.** $\frac{\sqrt{5}+3}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **4.60д.** $\frac{3}{4};\frac{1}{12}$.
4.61д. $(-\infty;0)\cup\{4\}$. **4.62д.** $(2;3),(\sqrt{2};15)$. **4.63д.** $(3;1),\left(\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$.
4.64д. $\left(\frac{7}{2};\frac{17}{5}\right),\left(-\frac{7}{5};-\frac{32}{5}\right)$. **4.65д.** $\left(\frac{1}{4};4\right)$. **4.66д.** $(25;256)$. **4.67д.** $(6;2)$.
4.68д. $(2;32),(32;2)$. **4.69д.** $(16;4)$. **4.70д.** $(2;6),(6;2)$.
4.71д. $(125;4),(625;3)$. **4.72д.** при $a\in(0,1)\cup(1;+\infty)$ решения $(a;a^2),(a^2;a)$, при $a\in(-\infty,-2)\cup(-2;-1)$ решения $\left(-a-1;(a+1)^2\right),\left((a+1)^2;-a-1\right)$, при $a=-2$ или $a=1$ - решений нет. **4.73д.** $(2;2)$. **4.74д.** $\left(\frac{2}{3};\frac{27}{8};\frac{32}{3}\right)$.
4.75д. $\left(\frac{14}{3};\frac{21}{9};\frac{6}{7}\right)$. **4.76д.** $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),(-3;1)$. **4.77д.** $\left(1-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
4.78д. $\left(-\frac{728}{27};\frac{1459}{27}\right)$. **4.79д.** $\left(2+\frac{\sqrt[3]{4}}{2};-1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$. **4.80д.** $(1;2)$.
4.81д. $(3;9),\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$. **4.82д.** $\left(\frac{3}{2};4\right),((1,2);-2)$. **4.83д.** $(\sqrt{10}+2;-1)$.
4.84д. $\left(-\frac{17}{9};\frac{1}{9}\right),\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. **4.85д.** $(2\sqrt{2};-4)$.

Лекция №5

Показательные и логарифмические неравенства

Сначала мы поговорим об общих принципах решения показательных и логарифмических неравенств. Отметим, что принципы, которых мы будем придерживаться, довольно сильно отличаются от преподаваемых в средней школе. Это обстоятельство весьма усложнит восприятие материала для читателя, который уже прошел логарифмы в школе, а для тех, кто еще не изучал этой темы, довольно просто будет ее понять, но могут в дальнейшем возникнуть проблемы при изучении школьного материала. Поэтому постараемся максимально аккуратно обосновывать все теоретические соображения.

5.1. Показательные неравенства

Рассмотрим показательное неравенство $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}$. Это неравенство равносильно совокупности

$$a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ f(x)\ge g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ f(x)\le g(x)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)\ge 0.\qquad(5.1)$$

Если исходное неравенство строгое, то везде нестрогие неравенства заменяются на строгие такой же направленности.

Из всего вышесказанного следует, что разность $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ для каждого значения x, для которого определены функции, входящие в неравенство, имеет тот же знак, что и произведение $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ (эквивалентна по знаку).

5.2. Логарифмические неравенства

Рассмотрим логарифмическое неравенство $\log_{g(x)} f(x) \ge 0$. Это неравенство равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)>1 \\ f(x)>1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)>0 \\ g(x)\ne 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<g(x)<1 \\ 0<f(x)<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\ne 1 \\ \big(f(x)-1\big)\big(g(x)-1\big)\ge 0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

Для случая, когда знак неравенства направлен в другую сторону, цепочка выглядит следующим образом

$$\log_{g(x)} f(x) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)>1 \\ 0<f(x)<1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)>0 \\ g(x)\ne 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<g(x)<1 \\ f(x)>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\ne 1 \\ \big(f(x)-1\big)\big(g(x)-1\big)\le 0 \end{cases} \qquad (5.3)$$

Если неравенство строгое, то в совокупности не рассматривается случай $f(x)=1$ и в последней системе знак нестрогого неравенства меняется на знак строгого.

Как и в случае показательных функций получаем, что для каждого значения переменной из области существования логарифмов, входящих в неравенство, выражения $\log_{g(x)} f(x)$ и $\big(f(x)-1\big)\big(g(x)-1\big)$ эквивалентны по знаку.

Последнее обстоятельство позволит нам без лишних хлопот решать смешанные неравенства. В школьной программе обычно при решении показательных и логарифмических неравенств предпочитают переходить к совокупностям, мы, наоборот, будем стремиться переходить только к единым системам.

5.3. Решение неравенств

Сформулируем основные приемы решения логарифмических и показательных неравенств.

Приводим неравенства к виду, при котором надо определить знак произведения логарифмов или разностей показательных функций. После этого производим замену на эквивалентные по знаку, дописываем область существования логарифмов или показательных функций и решаем получившуюся систему. Заметим, что мы не выписываем все ОДЗ, а ограничиваемся лишь областью существования логарифмов и показательных функций. Никакие нули знаменателя нас не интересуют (эти точки будут выколоты в процессе решения неравенств).

Пример 5.1. $\log_3(2x-3)<\log_3(x+1)$.

Перепишем неравенство в виде

$$\log_3\frac{2x-3}{x+1}<0,$$

и воспользуемся (5.3) с учетом замечания о строгом неравенстве

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1>0 \\ (3-1)\left(\dfrac{2x-3}{x+1}-1\right)<0 \end{cases}.$$

Первое и второе неравенства – область существования логарифмов, а третье – замена логарифма на эквивалентное по знаку выражение. Дальнейшее решение достаточно просто.

Заметим важное обстоятельство. Скобку $(3-1)$ писать обязательно! При ненаписании этой скобки переход можно посчитать необоснованным.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

Пример 5.2. $\dfrac{\left(2^{x^2}-2^{x+2}\right)\left(7^x-49\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3+2x^2}-2^{-x-2}} \geq 0$.

Перепишем неравенство в виде

$$\frac{\left(2^{x^2}-2^{x+2}\right)\left(7^x-7^2\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3+2x^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x}} \geq 0,$$

и заменим каждую разность на эквивалентное по знаку выражение

$$\frac{(2-1)\left(x^2-x-2\right)(7-1)(x-2)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(x^3+2x^2-x-2\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x+2)} \leq 0.$$

Далее решаем методом интервалов.

Ответ: $(-2,-1) \cup (-1,1) \cup \{2\}$.

Пример 5.3. $\dfrac{1}{\left|\log_3(9x)\right|-3} \leq \dfrac{1}{\left|\log_9 x^2\right|-1}$.

Так как область существования первого логарифма $x>0$, то $\log_9 x^2 = \log_3 x$. Обозначаем $t = \log_3 x$ и неравенство приобретает вид

$$\frac{1}{|t+2|-3} \leq \frac{1}{|t|-1}.$$

Напомним, что точно такой пример мы уже решали (пример I.7.16), поэтому ограничимся выписыванием ответа: $t \in (-5,-1) \cup [0,1) \cup (1,+\infty)$.

Теперь надо решить совокупность

$$\left[\begin{array}{l} (t+1)(t+5)<0 \\ \dfrac{t}{(t-1)^2} \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\log_3 x+1\right)\left(\log_3 x+5\right)<0 \\ \dfrac{\log_3 x}{\left(\log_3 x-1\right)^2} \geq 0 \end{array}\right..$$

Заметим, что мы несколько необычно записали двойные неравенства в виде произведений. Дело в том, что так удобнее переходить к эквивалентным по знаку.

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(3x)\cdot\log_3\left(3^5 x\right)<0 \\ \dfrac{\log_3 x}{\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^2} \geq 0 \end{array}\right..$$

В каждом из неравенств заменяем логарифмы на эквивалентные по знаку и добавляем область существования исходных логарифмов

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (3-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(3-1)\left(x-\frac{1}{3^5}\right)<0 \\ \dfrac{(3-1)(x-1)}{(3-1)^2(x-3)^2} \geq 0 \end{array}\right. \\ x>0 \end{array}\right..$$

Можно использовать то, что функция $x=3^t$ является функцией возрастающей и, поэтому

$$t \in (-5,-1) \cup [0,1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(3^{-5}, 3^{-1}\right) \cup \left[3^0, 3^1\right) \cup \left(3^1, +\infty\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3^5}, \frac{1}{3}\right) \cup [1,3) \cup (3,+\infty)$.

Пример 5.4. $\log^2_{\frac{1}{2}} x^2 > 1$.

Этот пример ничем особенным не примечателен, единственное, что показывает опыт вступительных экзаменов, подобные примеры становятся непреодолимой преградой для большинства абитуриентов. На самом деле этот пример решается с технической скоростью.

Перенесем единичку и раскроем разность квадратов

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 1\right)\left(\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 1\right) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2} > 0.$$

Теперь добавляем область существования исходного логарифма и заменяем каждый логарифм на эквивалентное по знаку выражение

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(2x^2-1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{x^2}{2}-1\right) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\cup\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Пример 5.5. $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right) < 1$.

Перепишем пример в виде

$$\log_3 \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}{3} < 0$$

Заменяем внешний логарифм на эквивалентное по знаку

$$(3-1)\left(\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}{3} - 1\right) < 0$$

После преобразования в скобках заменяем в получившемся неравенстве

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(8x^2-8\right) < 0$$

оставшийся логарифм на эквивалентное по знаку

$$\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(8x^2-9\right) < 0.$$

Теперь добавляем область существования исходных логарифмов, которую здесь не просто выписать, и получаем систему равносильную исходному неравенству

$$\begin{cases} 8x^2-9>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-9>0 \\ \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(x^2-2\right)>0 \\ x^2-1>0 \end{cases}.$$

Решение такой системы не составит труда.

Ответ: $\left(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right)$.

Пример 5.6. $\left(3-10x-8x^2\right)\log_2\left(1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right) \le 0$.

Теперь подобные примеры не могут вызвать никаких затруднений. Заменяем логарифм и, добавив область существования логарифма, получим систему, равносильную исходному неравенству

$$\begin{cases} -8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)(2-1)\left(1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}-1\right) \le 0 \\ 1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \le 0 \\ 9x^2+9x+2>0 \end{cases}.$$

Мы воспользовались тем, что $x^2+x+1>0$ для всех x.

Ответ: $\left[-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right]$.

Пример 5.7. $\log_{x-2}6+\log_{x+2}6\ge\log_{x-2}6\cdot\log_{x+2}6$.

У всех логарифмов общим является подлогарифмическое число, поэтому переходим к логарифмам по основанию 6

$$\frac{1}{\log_6(x-2)}+\frac{1}{\log_6(x+2)}\ge\frac{1}{\log_6(x-2)\cdot\log_6(x+2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\log_6\dfrac{x^2-4}{6}}{\log_6(x-2)\cdot\log_6(x+2)}\ge 0.$$

Заменяем каждый логарифм на эквивалентное по знаку выражение, добавляем условия существования логарифмов исходного неравенства и получаем

$$\begin{cases}\dfrac{(6-1)(x^2-10)}{(6-1)(x-3)(6-1)(x+1)}\ge 0\\ x+2>0\\ x-2>0\\ x+2\ne 1, x-2\ne 1\end{cases}.$$

Ответ: $(2,3)\cup\left[\sqrt{10},+\infty\right)$.

В следующих двух примерах надо продемонстрировать не только технику решения логарифмических или показательных неравенств.

Пример 5.8. $\sqrt{3\lg^2x^2+\lg^2(x+2)}>\lg x^2+\lg(x+2)$.

В соответствии с методикой решения иррациональных неравенств (лекция II.2) имеем

$$\left[\begin{array}{l}\lg x^2+\lg(x+2)<0\\ \begin{cases}\lg x^2+\lg(x+2)\ge 0\\ 3\lg^2x^2+\lg^2(x+2)>\lg^2x^2+2\lg x^2\cdot\lg(x+2)+\lg^2(x+2)\end{cases}\end{array}\right..$$

Сначала решаем первое неравенство

$$\begin{cases}\lg(x^3+2x^2)<0\\ x+2>0, x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10-1)(x^3+2x^2-1)<0\\ x>-2, x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)<0\\ x>-2, x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-2,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup(-1,0)\cup\left(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Теперь решаем систему

$$\begin{cases}\lg(x^3+2x^2)\ge 0\\ \lg x^2\left(\lg x^2-\lg(x+2)\right)>0\\ x+2>0, x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(10-1)(x^3+2x^2-1)\ge 0\\ (10-1)(x^2-1)(10-1)\left(\dfrac{x^2}{x+2}-1\right)>0\\ x+2>0, x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right)\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\cup(2,+\infty).$$

Объединяя найденные промежутки получим ответ.

Ответ: $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$.

Теперь рассмотрим похожий пример, но с показательными функциями.

Пример 5.9. $\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}>4$.

Обозначим $3^{\sqrt{2-x}}=t\ge 1$ и перепишем наше неравенство в виде

$$\sqrt{3-t^2+2t}>4-2t.$$

Это неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t\ge 1\\ 4-2t<0\\ t^2-2t-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} t\ge 1\\ 4-2t\ge 0\\ 5t^2-18t+13<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<t\le 3 \Rightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{2-x}}>1\\ 3^{\sqrt{2-x}}\le 3\end{cases}.$$

Первое неравенство последней системы выполняется для любых $x<2$, поэтому получаем окончательную систему, равносильную исходному неравенству

$$\begin{cases} 2-x>0\\ 3^{\sqrt{2-x}}\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x>0\\ (3-1)\left(\sqrt{2-x}-1\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow 1\le x<2.$$

Ответ: $[1,2)$.

Следующие два примера показывают как можно эффективно, с помощью замены на эквивалентные по знаку, решать довольно сложные примеры.

Пример 5.10. $\log_{|x|}|2x+3|\cdot\log_{|x|}|2x+5|\ge 0$.

Заменим логарифмы на эквивалентные по знаку

$$(|x|-1)(|2x+3|-1)(|x|-1)(|2x+5|-1)\ge 0.$$

Теперь заменяем каждую скобку на эквивалентные по знаку и добавляем область существования логарифмов в исходном неравенстве

$$\begin{cases} (x^2-1)\left((2x+3)^2-1\right)(x^2-1)\left((2x+5)^2-1\right)\ge 0\\ x\ne 0, x^2\ne 1\\ 2x+3\ne 0\\ 2x+5\ne 0\end{cases}$$

Решение этой системы не должно оставить большого труда.

Ответ: $(-\infty,-3]\cup\{-2\}\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Следующий пример несколько более сложный, однако, идея решения такая же.

Пример 5.11. $\log_{|x+5|}|x|\ge\log_{|x+3|}|x|$.

Как почти во всех логарифмических неравенствах и уравнениях, надо перейти к одному основанию. В данном примере напрашивается основание $|x|$. Однако, прежде чем осуществлять переход к этому новому основанию, надо проверить, что будет с нашим неравенством при $|x|=1$. Получается, что оба значения неизвестной $x=\pm 1$ удовлетворяют исходному неравенству, поэтому, фиксируем эти решения и дальше будем считать, что $|x|\ne 1$. Теперь можно спокойно переходить к новому основанию и приводить к общему знаменателю, попутно избавляясь от модулей, как в предыдущем примере

$$\frac{\log_{|x|}\left|\dfrac{x+3}{x+5}\right|}{\log_{|x|}|x+3|\cdot\log_{|x|}|x+5|}\ge 0.$$

Как и в предыдущем примере заменяем логарифмы и получившиеся выражения с модулем на эквивалентные по знаку, добавляем область существования логарифмов для исходного неравенства и получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{(|x|-1)(|x+3|-|x+5|)}{|x+5|(|x|-1)(|x+3|-1)(|x|-1)(|x+5|-1)}\ge 0\\ x\ne -6, x\ne -5, x\ne -4, x\ne -3, x\ne -2, x\ne 0, x\ne\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)(x+4)}{(x-1)^2(x+1)^2(x+2)(x+4)^2(x+5)^2(x+6)}\le 0\\ x\ne -6, x\ne -5, x\ne -4, x\ne -3, x\ne -2, x\ne 0, x\ne\pm 1\end{cases}.$$

Решаем систему и добавляем ранее найденные решения $x=\pm 1$.

Ответ: $(-\infty,-6)\cup(-4,-3)\cup(-3,-2)\cup[-1,0)\cup(0,1]$.

Заметим, что избавляться от модуля в логарифмах можно и другим способом. Действительно,

$$\log_{|f(x)|}|g(x)|=\log_{f^2(x)} g^2(x).$$

Теперь рассмотрим пару примеров, сводящихся к однородным неравенствам.

Пример 5.12. $\lg^2(x+1)\geq \lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

Мы уже решали аналогичное уравнение (пример 4.14), поэтому теперь нам будет проще.

Обозначим $\lg(x+1)=a$, $\lg(x-1)=b$. Тогда неравенство примет вид

$$a^2-ab-2b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-2b)\geq 0.$$

Возвращаемся к исходной переменной

$$\left(\lg(x+1)+\lg(x-1)\right)\left(\lg(x+1)-\lg(x-1)^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\left(x^2-1\right)\cdot \lg\frac{x+1}{(x-1)^2}\geq 0.$$

Заметим, что переходы при логарифмических преобразованиях равносильные, так как область существования логарифмов не изменилась. Решаем систему

$$\begin{cases}(10-1)^2\left(x^2-2\right)\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}-1\right)\geq 0\\ x+1>0, x-1>0\end{cases}.$$

Ответ: $\left[\sqrt{2},3\right]$.

Следующий пример – с теми же мотивами, но с показательными функциями.

Пример 5.13. $\left(4^x+1\right)^2+2^{x+1}\left(4^x+1\right)\leq 8\cdot 4^x$.

Вводим обозначения $\left(4^x+1\right)=a, 2^x=b$ и получаем однородное выражение. Неравенство приобретает вид

$$a^2+2ab-8b^2\leq 0 \Leftrightarrow (a+4b)(a-2b)\leq 0.$$

Возвращаемся к исходным переменным

$$\left(4^x+1+4\cdot 2^x\right)\left(4^x+1-2\cdot 2^x\right)\leq 0.$$

Учитывая то, что первая скобка всегда положительна, вторая представляет полный квадрат, получаем, что единственным решением будет $2^x=1$.

Ответ: $x=0$.

Пример 5.14. $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1$.

Неравенства подобного типа являются одними из самых неприятных. Дело в том, что это неравенство относительно сложно-показательной функции, в основании которой находится не число, а функция, зависящая от переменной. В этом случае ограничение на область существования обычной показательной функции (положительность основания) уже не действует. Дело в том, что при каждом фиксированном значении переменной получается выражение вида: число в числовой степени, и необходимо рассматривать все возможные случаи.

В нашем примере надо рассмотреть случай $x=-1$. При этом значении получается верное неравенство $0^5<1$, поэтому $x=-1$ – является решением исходного неравенства.

При всех остальных значениях переменной основание показательной функции положительно, поэтому при $x\neq -1$ перепишем неравенство в виде

$$\begin{cases}|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<|x+1|^0\\ x\neq -1\end{cases}$$

и после замены на эквивалентные по знаку получим систему

$$\begin{cases}\left(|x+1|-1\right)\left(x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)<0\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\left(x+1\right)^2-1\right)\left(x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)<0 \\ x \neq -1 \end{cases},$$

из которой найдем решение.

Заметим, что при решении нам очень помог модуль в основании сложно-показательной функции. Если бы его не было, то пример стал бы очень трудно решаемым. Необходимо было бы рассматривать все возможности, при которых основание может принять отрицательное значение и отслеживать значения показателя степени.

Ответ: $\left(-2,0\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

Пример 5.15. $4^{\log_{|x|}\frac{1}{64}} \ge \dfrac{16}{x}$.

В этом примере напрашивается логарифмирование левой и правой частей по основанию 4. Однако, для логарифмирования необходимо, чтобы обе части были положительны. В нашем случае левая часть положительна, а вот правая может быть как положительной, так и отрицательной. Рассмотрим два случая.

1. $\dfrac{16}{x}<0$. В этом случае неравенство выполняется для всех допустимых значений x

$$\begin{cases} \dfrac{16}{x}<0 \\ x\neq 0, x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right).$$

2. $\dfrac{16}{x}>0$. Теперь можно логарифмировать обе части по основанию 4. Так как $\log_4 z$ является монотонно возрастающей функцией при $z>0$, то знак неравенства сохраняется. Кроме того, условие $\dfrac{16}{x}>0$ позволяет просто убрать модуль

$$\log_x \frac{1}{64} \ge 2-\log_4 x \Leftrightarrow \log_4 x-\frac{3}{\log_4 x}-2\ge 0.$$

Обозначим для удобства $\log_4 x = t$ и получим

$$\frac{t^2-2t-3}{t}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(t+1\right)\left(t-3\right)}{t}\ge 0.$$

Теперь возвращаемся к исходной переменной

$$\frac{\left(\log_4 x+1\right)\left(\log_4 x-3\right)}{\log_4 x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_4\left(4x\right)\cdot\log_4\dfrac{x}{64}}{\log_4 x}\ge 0.$$

Меняем логарифмы на эквивалентные по знаку, добавляем область существования для логарифмов, условие для данного случая $x>0$, получаем

$$\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ \dfrac{\left(4-1\right)\left(4x-1\right)\left(4-1\right)\left(\dfrac{x}{64}-1\right)}{\left(4-1\right)\left(x-1\right)}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{4},1\right)\cup\left[64,+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left[\dfrac{1}{4},1\right)\cup\left[64,+\infty\right)$.

Пример 5.16. $\dfrac{6}{2x-1}>\dfrac{2+\log_2 x}{x-1}$.

Наличие в этом примере совершенно разных функций подсказывает необходимость применения метода оценки левой и правой частей неравенства. Однако, оценить дробь в правой части не так просто. Поэтому будем рассматривать два случая: $x>1$ и $0<x<1$.

1. $x>1$. Наше неравенство после домножения на положительное выражение $x-1$ принимает вид

$$\frac{6x-6}{2x-1}>2+\log_2 x \Leftrightarrow \frac{6x-3-3}{2x-1}>2+\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{2x-1}>\log_2 x.$$

При $x>1$ левая часть

$$1-\frac{3}{2x-1}<1, \text{ а } \log_2 x>0,$$

поэтому требуется более детальное исследование.

1.1. Пусть $1< x<2$, тогда

$$1-\frac{3}{2x-1}<0, \text{ а } \log_2 x>0,$$

и исходное неравенство при указанных значениях x не выполняется.

1.2. Пусть $2\le x$, тогда

$$0\le 1-\frac{3}{2x-1}<1, \text{ а } \log_2 x\ge 1,$$

следовательно, исходное неравенство при указанных значениях x снова не выполняется.

2. $0< x<1$. Наше неравенство после домножения обеих частей на отрицательное выражение $x-1$ принимает вид

$$\frac{6x-6}{2x-1}<2+\log_2 x \Leftrightarrow \frac{6x-3-3}{2x-1}<2+\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{2x-1}<\log_2 x .$$

Ничего определенного пока сказать нельзя, поэтому разобьем рассматриваемый интервал $0< x<1$ на две части $0< x<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}< x<1$.

2.1. $0< x<\frac{1}{2}$. В этом случае справедливо

$$1-\frac{3}{2x-1}>0 \text{ и } \log_2 x<0$$

и неравенство снова не выполняется.

2.2. $\frac{1}{2}< x<1$. Верно

$$1-\frac{3}{2x-1}<-2 \text{ и } \log_2 x>-1.$$

Теперь неравенство выполняется для всех x из рассматриваемого промежутка.

Ответ: $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Пример 5.17. Найти $\log_3 \frac{3^x}{3x}$, если

$$\left|\log_9 x^{2x}-3\log_3 x\right|+\left|\,|\log_3 x|-|3-x|\,\right|\le (x-3)\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x} .$$

Сначала преобразуем выражение, которое надо найти

$$\log_3 \frac{3^x}{3x}=x-\log_3 x-1.$$

Теперь займемся преобразованием неравенства

$$\left|x\log_3 x-3\log_3 x\right|+\left|\,|\log_3 x|-|3-x|\,\right|\le (x-3)\log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|(x-3)\log_3 x\right|+\left|\,|\log_3 x|-|x-3|\,\right|\le (x-3)\log_3 x .$$

Обозначим для удобства $\log_3 x=a, x-3=b$ и перепишем неравенство в новых обозначениях

$$(|ab|-ab)+\left|\,|a|-|b|\,\right|\le 0$$

Оба слагаемых неотрицательны, поэтому неравенство выполняется только при

$$\begin{cases} ab\ge 0 \\ |a|=|b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)\log_3 x\ge 0 \\ |x-3|=|\log_3 x| \end{cases}.$$

Пусть первое неравенство выполняется как равенство. Тогда

1. $x=3 \Leftrightarrow \log_3 x=1$ и не выполняется второе равенство системы.
2. $\log_3 x=0 \Leftrightarrow x=1$ и не выполняется второе равенство системы.

Если первое неравенство выполняется как строгое неравенство, то во втором уравнении системы можно убрать модуль, так как выражения $x-3$ и $\log_3 x$ – одного знака. В результате получаем, что

$$\begin{cases} x \in (0,1) \cup (3,+\infty) \\ x-3=\log_3 x \end{cases}.$$

Ответ: 2.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить неравенства:

5.1. $\log_3(2x-3) < \log_3(x+1)$.

5.2. $\lg\dfrac{x+3}{x+4} > \lg\dfrac{x+5}{x+2}$.

5.3. $\log^2_{\frac{1}{2}} x^2 > 1$.

5.4. $\log^2_{\frac{2}{3}} \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right) < 1$.

5.5. $\log_2\left(3-4^x\right) < \log_2 11-2x-4$.

5.6. $\log_2\left(6+2^x\right) > 4-x$.

5.7. $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} \geq \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

5.8. $\log_2\left(x^2-4\right) - 3\log_2\dfrac{x+2}{x-2} > 2$.

5.9. $\left(3-10x-8x^2\right)\log_2\left(1-\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) \leq 0$.

5.10. $x^2\cdot 3^x - 3^{x-1} \leq 0$.

5.11. $3^{|x+2|} + 3^{|x-1|} \geq 28$.

5.12. $\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}} + 2\cdot 3^{\sqrt{2-x}} > 4$.

5.13. $\left(3^{x+2}+3^{-x}\right)^{3\lg x-\lg\left(2x^2+3x\right)} < 1$.

5.14. $\dfrac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x} < 1$.

5.15. $7-2\left|2^x-2\right| < \sqrt{17-2^{x+1}}$.

5.16. $x\log_2(x+2) \geq 0$.

5.17. $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2 > \log^2_{4x} 2$.

5.18. $\dfrac{2-3\cdot 5^{1-x}}{5^x-1} \leq \dfrac{1}{5^{-x}-1}$.

5.19. $\left(4^x-1\right)^2 + 2^{x+1}\left(2^x-1\right) < 8\cdot 4^x$.

5.20. $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1$.

5.21. $\begin{cases} 81^x + 2\cdot 27^x - 6^x - 7\cdot 3^x + 3y \geq 0 \\ x^{\log_4 y} = 3x - 2y^{\log_4 x} \end{cases}$.

5.22. $x^{8\log_{16} x} \geq \dfrac{64}{x}$.

5.23. $x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}\left(16x^4-8x^2+1\right)} < \dfrac{1}{3}$.

5.24. $x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right) > 1$

5.25. $\sqrt{\log_5\left(31-6\cdot 5^{2x^2}\right)} > x$.

5.26. $\sqrt{32^x+4} - \sqrt{\left|32^x-7\right|} < 1$.

5.27. $7-2\left|2^x-2\right| < \sqrt{17-2^{x+1}}$.

5.28. $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3} > 0$.

5.29. $2\sqrt{5\cdot 6^x - 2\cdot 9^x - 3\cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}$.

5.30. $3^{\log_x\left(3x^2+2x-1\right)} \leq \left(x^2+x\right)^{\log_x 9}$.

5.31. $\dfrac{1}{9}\cdot|x|^{5\log_2 3\cdot\log_2(-x)} > \left(\sqrt{3}\right)^{9\log_2 x^2}$.

5.32. $4^{\log_{|x|}\frac{1}{64}} \geq \dfrac{16}{x}$.

5.33. $\sqrt{x^{x\log_x 4}+16\cdot 2^{x-2}+4} + \sqrt{x^{x\log_x 4}-96\cdot 2^{x-4}+9} \leq 9$.

5.34. $\dfrac{\log_3\left(3^x-1\right)}{x-1} \geq 1$.

5.35. $\log_{x+2} x^2 > 1$.

5.36. $\log_{x-2} 6 + \log_{x+2} 6 \geq \log_{x-2} 6\cdot\log_{x+2} 6$.

5.37. $\log_{2x-10}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{-x+8}\right)<1.$

5.38. $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1.$

5.39. $\log_{\frac{2x-1}{2x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 1.$

5.40. $\log_{2x^2-x}\left(\left|x+2\right|-\left|x\right|\right)>\log_{2x^2-x}\sqrt{2-x^2}.$

5.41. $\log_{x+3}\left(6+x-x^2\right)+\log_{\sqrt{6+x-x^2}}(3+x)\leq 3.$

5.42. $\log_{|x|}\dfrac{|x+3|-|x|}{2-x}>1.$

5.43. $\dfrac{6}{2x-1}>\dfrac{2+\log_2 x}{x-1}.$

5.44. $\dfrac{1}{\left|\log_3(9x)\right|-3}\leq\dfrac{1}{\left|\log_9 x^2\right|-1}.$

5.45. $\log_{|x|}|2x+3|\cdot\log_{|x|}|2x+5|\geq 0.$

5.46. $\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)}>\lg x^2+\lg(x+2).$

5.47. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0.$

5.48. $\log_{|x+5|}|x|\geq\log_{|x+3|}|x|.$

5.49. $\log_{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}|x+3|\cdot\log_{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}x\leq 0.$

5.50. $\log_{x^2}\dfrac{|5x-1|}{2x-1}\leq\dfrac{1}{2}.$

5.51. $\dfrac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x}\leq\log_4 9.$

5.52. $\dfrac{6}{\log_{x-2}\left(x-2-\sqrt{x-2}\right)^4}-3\leq\log_{\sqrt{x-2}}\left(\dfrac{1}{x-1-\sqrt{4x-8}}\right).$

5.53. $\sqrt{\log_{2-x}\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)}<\log_{(x-2)^2}\left(2x^2-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}-x^3\right).$

5.54. $4\log_{2|x|+1}\sqrt{5x+3}-\log_{\sqrt{5x+3}}\left(2|x|+1\right)>0.$

5.55. $\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{2}\right|}\left(\dfrac{1}{4}-x\right)-1\right)\cdot\log_9\left(\dfrac{1}{4}-x\right)>\log_3\dfrac{\frac{1}{4}-x}{\left|2x+\frac{1}{2}\right|}.$

5.56. $\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)<\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right).$

5.57. Найти $\log_2\dfrac{3^x}{3x}$, если

$$\left|\log_9 x^{2x}-3\log_3 x\right|+\left|\left|\log_3 x\right|-\left|3-x\right|\right|\leq(x-3)\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x}.$$

Решить неравенства:

5.58. $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2-|x-1|\right)>\log_{\sqrt{10}}\left(2x-x^2\right).$

5.59. $\log_9\left(x+\dfrac{7}{2}\right)\cdot\log_{\frac{3}{4}}x^2\geq\log_{\frac{3}{4}}\left(x+\dfrac{7}{2}\right).$

5.60. $\arccos\left(\dfrac{3|x|}{8}\right)\cdot\dfrac{\log_{x^2}\left(9x^2+42x+50\right)}{\log_{|2x-5|}\left(|x|-1\right)}\leq 0.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

5.1д. $\sqrt{\log_2(4x+20)}\leq\log_2(x+5).$

5.2д. $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)}\leq 2.$

5.3д. $\dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_9\left(x^2-2x+1\right)}\leq\dfrac{\log_3(1-x)}{\log_3(2x+3)}.$

5.4д. $2\log_2\left(x^2+4x\right)\leq 15-\dfrac{|x-3|}{x-3}.$

5.5д. $4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<9\cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}.$

5.6д. $\log_{x+1}\dfrac{x^2+3x-4}{2x-4}\leq 1.$

5.7д. $\left(x^2+\dfrac{3}{4}\right)\log_{x+2}\dfrac{1}{3}\geq\log_{x+2}3^{2x}.$

5.8д. $\left|\log_{2x} x-2\right|\le 3$.

5.9д. $\log_x\left(\log_2\dfrac{4x-9}{2x-1}\right)\le 0$.

5.10д. $\dfrac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}\ge 0$.

5.11д. $\log_2\left(x^2+4x+3\right)\ge 1+\log_2(x+3)\cdot\log_2(x+1)$.

5.12д. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\ge 5$.

5.13д. $2^{|x+2|}>16$.

5.14д. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

5.15д. $\dfrac{(|x|-1)\,(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x}\le 0$.

5.16д. $9\cdot 2^x\sqrt{3+x}+9x\cdot 2^x+3\ge 27\cdot 2^x+\sqrt{3+x}+x$.

5.17д. $\dfrac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{65\cdot 5^x-3^{x+1}}<1$.

5.18д. $\left|3^x-2\right|\le 1$.

5.19д. $\dfrac{(|x+1|-2x)\,(2^x-2)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{3+x^2}-2x\right)}\le 0$.

5.20д. $(x+1)\cdot\log_8\left(x^2+2x-2\right)<0$.

5.21д. $(x-2)\cdot\lg\dfrac{x}{3}\ge 0$.

5.22д. $\log_x\log_3\left(9^x-3^{x+2}+9\right)\le 1$.

5.23д. $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x<0$.

5.24д. $x^{4\log_9 x}\ge\dfrac{x}{\sqrt[9]{3}}$.

5.25д. $\sqrt{\log_2\dfrac{3-2x}{1-x}}<1$.

5.26д. $\sqrt{\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2-5x+2\right)}<1$.

5.27д. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}$ [illegible] 0.

5.28д. $4^{1+\sqrt{x}}+3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}$ [illegible] $2x$.

5.29д. $\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^{\log_{\frac{x-2}{3}}(17-x)}$ [illegible] 2.

5.30д. $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_{\text{[illegible]}}\log_2(x+6)}>1$.

5.31д. $\begin{cases}625^x+2\cdot 125^x\ \text{[illegible]}\ 25^x-8\cdot 5^x+5y\ge 0\\ x^{\log_3 y}=5x-4\ \text{[illegible]}_3\, x\end{cases}$.

5.32д. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_9\left(9x^2-6+\frac{1}{x^2}\right)}$ [illegible] $\dfrac{1}{x}$.

5.33д. $\dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2}-2\cdot 7^{\text{[illegible]}}\right)>1$.

5.34д. $\sqrt{13^x+3}-\sqrt{\left|13^x-4\right|}<1$.

5.35д. $4^x\left(\sqrt{16^{1-x}-1}\ \text{[illegible]}\right)<4\left|4^x-1\right|$.

5.36д. $5-3\left|3^x-1\right|<\sqrt{\text{[illegible]}-3^{x+1}}$.

5.37д. $\log_{\frac{1}{3}}\log_4\dfrac{x^2-|x+1|-13}{x+4}>0$.

5.38д. $2\sqrt{7\cdot 10^x-2\cdot 4^x-5\cdot 25^x}+2^x<4\cdot 5^x$.

5.39д. $\dfrac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\ge\dfrac{1}{1-2^x}$.

5.40д. $3^{\log_{|x|}\frac{1}{81}}\ge\dfrac{27}{x}$.

5.41д. $\log_{(2^x-2)^2}\left(4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+24\right)-$

$$-\log_{(2^x-2)^{-2}}\left(2^{2x-2}-7\cdot 2^{x-2}+\frac{5}{2}\right)\ge\frac{3}{2}.$$

5.42д. $\log_4\left(x+\dfrac{8}{3}\right)\cdot\log_{\frac{3}{5}} x^2\ge\log_{\frac{3}{5}}\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$.

5.43д. $\frac{1}{8}\cdot|x|^{4\log_5 2\cdot\log_5(-x)} > \left(\sqrt{x}\right)^{-11\log_5 x^2}$.

5.44д. $\sqrt{x^{x\log_x 9}+54\cdot 3^{x-3}+1}+\sqrt{x^{x\log_x 9}-72\cdot 3^{x-2}+16}\le 11$.

5.45д. $\log_5\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-4|x|}{|x|-7}\le 0$.

5.46д. $\log_{x+1}\frac{x^2-2x-10}{2(x-1)}\ge 1$.

5.47д. $\log_{\frac{1-x}{3}}\log_2\frac{6+x}{x+3}\ge 0$.

5.48д. $\left(4^x-9\cdot 2^x+7\right)\cdot\lg(1-3x)\ge\lg\frac{1}{1-3x}$.

5.49д. $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2\frac{x-1}{x+2}\right)\ge 0$.

5.50д. $\log_{x-2}(2x-1)\le 2$.

5.51д. $\log_{x+1}\frac{x^2+6x+9}{2x+2}\le 1$.

5.52д. $\log_{x^2-4x+4}\left(\sqrt{(5-x)(1+x)}-x+1\right)+\log_{\frac{1}{4}}2\ge 0$.

5.53д. $\sqrt{\log_x\left(3x^6\right)}-\sqrt{\log_x 9-5}\ge\sqrt{\log_x(3x)}$.

5.54д. $\log_{x-3}4+\log_{x+3}4\ge\log_{x-3}4\cdot\log_{x+3}4$.

5.55д. $\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

5.56д. $\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right)\le 1$.

5.57д. $\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(2-x)}>\lg x^2+\lg(2-x)$.

5.58д. $\log_x(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\ge 0$.

5.59д. $\left(x^2-5x+3\right)\cdot\lg\left(1-\frac{x}{3}\right)\ge\lg\frac{3}{3-x}$.

5.60д. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

5.61д. $\log_{x+2}\left(x(x+1)(x+3)(x+4)-4\right)>2$.

5.62д. $\log_{\sqrt{x}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 1$.

5.63д. $\log_{|x|}|2x+5|\ge\log_{|x|}|3x$ [illegible]

5.64д. $\log_{|x|}|x+2|\cdot\log_{|x|}|x+4$ [illegible]

5.65д. $\log_{\sqrt{4x^2+1}-2x}|2x+3|\cdot\log$ [illegible] $+1+2x}\, x\le 0$.

5.66д. $\log_{|2x+6|}|x|\ge\log_{|2x+7|}x$.

5.67д. $\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}\ge\frac{1}{2}$.

5.68д. $\log_{x-1}\frac{x^2-6x}{2(x-3)}\le 1$.

5.69д. $\log_{\frac{4+x}{2}}\log_2\frac{2x-1}{x+3}\le 0$.

5.70д. $\log_{x^2}(2+x)<1$.

5.71д. $\log_{x^2(x-1)^2}\frac{2x\text{[illegible]}x}{\sqrt{x^2\left(x^2-2x+\text{[illegible]}\right)-6x^2+6x+9}}\le\log_4 2$.

5.72д. $\log_x\sqrt{20-x}>1$.

5.73д. $\frac{1}{\log_2 x}\le\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

5.74д. $\log^2_{\frac{1}{2}}x-|\log_2 x|-2<0$.

5.75д. $\log_x\left|x^2-1\right|>0$.

5.76д. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^5}{4}\right)^2-$ [illegible] $\log_2 x+148<0$.

5.77д. $\frac{\left(|2x+1|-x-2\right)\left(\log_{\frac{1}{3}}(4\text{[illegible]})+1\right)}{2^{x^2+1}-2^{|x|}}\ge 0$.

5.78д. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$.

5.79д. $\sqrt{\log_4\left(21-5\cdot 4^{2-x^2}\right)}>x$.

5.80д. $\log_{\frac{1}{2}}\left(3-\sqrt{2^{-x}-1}\right)>x$.

5.81д. $\log_{2|x|+1}(3x+2)-\log_{3x+2}\left(2|x|+1\right)>0$.

5.82д. $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2-|x|\right)>\log_{\sqrt{10}}\left(1-x^2\right)$.

5.83д. $5^{\log_{x+1}\left(3x^2+8x+4\right)}\le\left(x^2+3x+2\right)^{\log_{x+1}25}$.

5.84д. $\left(\log_{\left|x+\frac{1}{2}\right|}\left(\frac{1}{4}-x\right)-1\right)\cdot\log_{16}\left(\frac{1}{4}-x\right)>\log_4\dfrac{\frac{1}{4}-x}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}$.

5.85д. $\log_{|x-2|}\left(9^x-4^x\right)<\log_{|x-2|}\left(\left(3^x+2^x\right)\left(3^{x-2}+2^x\right)\right)$.

5.86д. $2\log_{2x-8}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{-x+7}\right)<1$.

5.87д. $\log_{2x+9}\left(24+2x-x^2\right)+\log_{\sqrt{24+2x-x^2}}(9+2x)\le 3$.

5.88д. $\arccos\left(\dfrac{3|x|}{14}\right)\cdot\dfrac{\log_{x^2}\left(9x^2-78x+170\right)}{\log_{|2x+9|}\left(|x|-3\right)}\le 0$.

5.89д. $\sqrt{\log_{4-x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}<\log_{(x-4)^2}\left(4x^2-\frac{x}{4}+1-x^3\right)$.

5.90д. Найти $\log_2\dfrac{2x}{2^x}$, если

$$\left|\log_{\sqrt{2}}x^{\frac{x}{2}}-2\log_2 x\right|+\left|\left|2-x\right|-\left|\log_2 x\right|\right|\le(x-2)\log_8 x^3.$$

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

5.1. $\left(\frac{3}{2},4\right)$. **5.2.** $(-\infty,-5)$

5.3. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

5.4. $\left(-\sqrt{2},-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. **5.5.** $(-\infty,-1)\cup\left(\log_4\frac{11}{4},\log_4 3\right)$.

5.6. $(1,+\infty)$. **5.7.** $\left(1,\sqrt[3]{2}\right]\cup[8;+\infty)$. **5.8.** $(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$.

5.9. $\left[-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right]$. **5.10.** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. **5.11.** $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$.

5.12. $(-\infty,1]\cup\left[2-\log_3^2 2,2\right)$. **5.13.** $(0,3)$. **5.14.** $\left(\log_{\frac{3}{5}}\frac{122}{49},1\right)$.

5.15. $(-2,-1]\cup[0,+\infty)$. **5.16.** $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4},\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. **5.17.** $(0,1]$.

5.18. $\left(\log_2\left(\sqrt{5}-2\right),\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$. **5.19.** $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

5.20. $(-2,0)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$. **5.21.** $\left(1;\left(0,\log_3\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right];\left(\left[\log_3\frac{\sqrt{17}-1}{2},+\infty\right);4\right)\right.$.

5.22. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$. **5.23.** $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty)$.

5.24. $(-\infty,-2)\cup\left(\log_{\frac{5}{2}}2,2\right)$. **5.25.** $(-\infty,-1)\cup\left(\sqrt{\log_5 6},\sqrt{2}\right)$.

5.26. $\left(-\infty,\log_{32}\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. **5.27.** $(-\infty,-1)\cup\left(2;\log_2\frac{17}{2}\right)$.

5.28. $\left(-\sqrt{15},-3\right)\cup(5,6)$. **5.29.** $\left(0,\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right)\cup\left(\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3},1\right)$. **5.30.** $\left(\frac{1}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

5.31. $(-\infty,-4)\cup\left(-\frac{\sqrt[5]{16}}{2};0\right)$. **5.32.** $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup[64,+\infty)$.

5.33. $(0,1)\cup(1,\log_2 5)$. **5.34.** $(0,1-\log_3 2]\cup(1,+\infty)$. **5.35.** $(2;+\infty)$.

5.36. $(2,3)\cup\left[\sqrt{10},+\infty\right)$. **5.37.** $\left(\frac{11}{2},8\right]$. **5.38.** $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)\cup(3,6)$.

5.39. $\varnothing$. **5.40.** $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}-4}{5}\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$.

5.41. $\left(-2,\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left[-\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right]\cup\left[-1,\sqrt{3}\right]\cup\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2},3\right)$.

5.42. $\left(-1,2-\sqrt{7}\right)\cup(1,2)$. **5.43.** $\left(\frac{1}{2},1\right)$. **5.44.** $\left(\frac{1}{243},\frac{1}{3}\right)\cup[1,3)\cup(3,+\infty)$.

5.45. $(-\infty,-3]\cup\{-2\}\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

5.46. $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$. **5.47.** $(-2;-1]\cup(1;2)$.

5.48. $(-\infty,-6)\cup(-4,-3)\cup(-3,-2)\cup[-1,0)\cup(0,1]$. **5.49.** $[1,+\infty)$.

5.50. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left[\frac{3+\sqrt{7}}{2},+\infty\right)$. **5.51.** $(0,1)\cup(1,2)$.

5.52. $\left(2,\frac{11-3\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(3,\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[6,\frac{11+3\sqrt{5}}{2}\right]$.

5.53. $\left(-\infty,-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2},1\right)$.

5.54. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{7},0\right)\cup(0,+\infty)$. **5.55.** $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{12},0\right)$.

5.56. $(-3,-2)\cup(-1,0)$. **5.57.** $\log_2 9$. **5.58.** $(0,2)$.

5.59. $\left(-\frac{7}{2},-3\right]\cup\left[-\frac{5}{2},0\right)\cup(0,3]$.

5.60. $\left\{-\frac{8}{3};-\frac{7}{3}\right\}\cup(-2,-1)\cup(1,2)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1д. $\left[-\frac{19}{4},-\frac{9}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$. **5.2д.** $\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right)\cup\left[\frac{19}{49},+\infty\right)$.

5.3д. $\left(-\frac{3}{2},\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right]\cup\left(0,\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

5.4д. $\left[-2-2\sqrt{65},-4\right)\cup(0,3)\cup\left(3,-2+2\sqrt{33}\right]$.

5.5д. $\left[-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right]$. **5.6д.** $(-1,0)\cup(0,1)\cup[5,+\infty)$.

5.7д. $\left(-2,-\frac{3}{2}\right]\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$. **5.8д.** $\left(0,2^{-\frac{5}{4}}\right]\cup\left[2^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$.

5.9д. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(4,+\infty)$. **5.10д.** $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2},2\right)\cup[3,+\infty)$. **5.11д.** $(-1,1]$.

5.12д. $\left(-\infty,\log_3\frac{1}{2}\right]\cup\left[\log_3\frac{3}{5},\log_3\frac{5}{3}\right)$. **5.13д.** $(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$.

5.14д. $[-2,-1)\cup[1,+\infty)$. **5.15д.** 1. **5.16д.** $[1,+\infty)$.

5.17д. $\left(-\infty,\log_{\frac{3}{5}}\frac{65}{3}\right)\cup\left[\log_{\frac{3}{5}}\frac{10}{3},+\infty\right)$. **5.18д.** $[0,1]$. **5.19д.** $(-\infty,1)\cup(1,2)$.

5.20д. $(-\infty,-3)\cup\left(-1+\sqrt{3},1\right)$. **5.21д.** $(0,2]\cup[3,+\infty)$. **5.22д.** $(\log_3 8,2]$.

5.23д. $\left(\log_{\frac{2}{5}}2,+\infty\right)$. **5.24д.** $\left(0,\sqrt[6]{3}\right]\cup\left[\sqrt[3]{3},+\infty\right)$. **5.25д.** $[2,+\infty)$.

5.26д. $\left[\frac{5-\sqrt{21}}{2},\frac{35-\sqrt{861}}{14}\right)\cup\left(\frac{35+\sqrt{861}}{14},\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$.

5.27д. $\left(0,\frac{1}{8}\right)\cup(1,2)$. **5.28д.** $[4,+\infty)$. **5.29д.** $(2,5)\cup(5,15)$. **5.30д.** $(0,3)$.

5.31д. $\left(\left(0,\log_5\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\log_5\frac{1+\sqrt{26}}{2},+\infty\right);3\right);\left(1;(0,+\infty)\right)$.

5.32д. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. **5.33д.** $\left(\log_7\frac{4}{9},\log_7\frac{1}{2}\right)\cup(0,\log_7 4)$.

5.34д. $\left(-\infty,\log_{13}\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. **5.35д.** $\left(\log_4\frac{16}{5},1\right]$.

5.36д. $(-\infty,0)\cup\left(\log_3 2,\log_2\frac{10}{3}\right]$. **5.37д.** $\left(1+\sqrt{19},\frac{5+\sqrt{145}}{2}\right)$.

5.38д. $\left[-1,\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}\right)\cup\left(\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{2},0\right]$. **5.39д.** $(0,\log_2 3]$.

5.40д. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup\left[\frac{1}{3},1\right)\cup[81,+\infty)$.

5.41д. $(-\infty,0)\cup\left[\log_2\frac{9+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$. **5.42д.** $\left(-\frac{8}{3},-2\right]\cup\left[-\frac{5}{3},0\right)\cup(0,2]$.

5.43д. $\left(-\infty,-\sqrt[4]{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{125},0\right)$. **5.44д.** $(0,1)\cup(1,\log_3 7]$. **5.32д.** $\left[-\frac{7}{2},-1\right]\cup\left[1,\frac{7}{2}\right]$.

5.46д. $(0,1)$. **5.47д.** $(-3,-2)\cup[0,1)$. **5.48д.** $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

5.49д. $(-6,-5]\cup(-3,-2)$. **5.50д.** $(2,3)\cup[5,+\infty)$.

5.51д. $(-1,0)\cup\left[1+2\sqrt{2},+\infty\right)$. **5.52д.** $\left[2-2\sqrt{2},1\right)\cup\left[\frac{8+2\sqrt{11}}{5},3\right)$.

5.53д. $\left[\sqrt[3]{3};\sqrt[5]{9}\right]$. **5.54д.** $\left(3,\sqrt{13}\right]\cup(4,+\infty)$. **5.55д.** $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

5.56д. $\left(\log_2\sqrt{7},\log_2 3\right]$. **5.57д.** $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$.

5.58д. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$. **5.59д.** $(-\infty,0]\cup[1,3)$. **5.60д.** $(1,4)$.

5.61д. $\left(\sqrt{6}-2,+\infty\right)$. **5.62д.** $\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

5.63д. $\left[-3,-\frac{8}{3}\right)\cup\left(-\frac{8}{3},-\frac{13}{5}\right]\cup(-1,0)\cup(0,1)$.

5.64д. $[-5,-4)\cup(-4,-2)\cup(-2,-1)$. **5.65д.** $[1,+\infty)$. **5.66д.** $[1,+\infty)$.

5.67д. $\left[\sqrt{6}-1,2\right)\cup(2,5]$. **5.68д.** $(1,2)\cup(6,+\infty)$.

5.69д. $(-4,-3)\cup(4,+\infty)$. **5.70д.** $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$.

5.71д. $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[\frac{3+\sqrt{29}}{2},+\infty\right)$. **5.72д.** $(1,4)$.

5.73д. $(0,1)\cup[2,+\infty)$. **5.74д.** $\left(\frac{1}{4},4\right)$. **5.75д.** $(0,1)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

5.76д. $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{8}\right)\cup(8,16)$. **5.77д.** $(-4,1]$. **5.78д.** $\left(2^{-\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,2^{\sqrt{2}}\right)$.

5.79д. $(-\infty,-1]\cup\left(\sqrt{\log_4 5},\sqrt{2}\right)$. **5.80д.** $(-\log_2 10,-1)$.

5.81д. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$. **5.82д.** $(-1,1)$.

5.83д. $\left[-2+\sqrt{2},0\right)\cup(0,+\infty)$. **5.84д.** $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{8},0\right)$.

5.85д. $(0,1)\cup(2,3)$. **5.86д.** $\left(4,\frac{9}{2}\right)\cup(5,6)$.

5.87д. $\left(-4,1-2\sqrt{6}\right)\cup\left[-\sqrt{15},-\frac{19}{5}\right]\cup\left[-3,\sqrt{15}\right]\cup\left(1+2\sqrt{6},6\right)$.

5.88д. $\left[-\frac{14}{3},-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2},-4\right)\cup(-4,-3)\cup(3,4)\cup\left\{\frac{14}{3};\frac{13}{3}\right\}$.

5.89д. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},3\right)$. **5.90д.** -1.

Лекция №6

Тригонометрия

6.1. Тригонометрические преобразования

6.1.1. Основные формулы тригонометрии

Мы приступаем к самой сложной (как показывает практика вступительных экзаменов) части изучения алгебры – к тригонометрии. Будем считать, что некоторые сведения из школьной программы известны читателю. К таким сведениям относятся значения тригонометрических функций от углов: $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ и некоторые другие.

Нарисуем на плоскости OXY окружность радиуса R, с центром в начале координат и проведем радиус (рис 6.1.). Величину (меру) угла между положительным направлением оси OX и этим радиусом обозначим α. Будем считать, что $\alpha>0$, если угол отсчитывается против часовой стрелки и $\alpha<0$, если – по часовой.

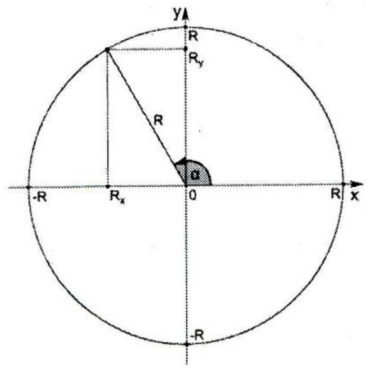

Рис.6.1.

В дальнейшем, говоря об угле, мы будем подразумевать величину угла.

Углы измеряются в радианах и в градусах. Перевод из градусной меры в радианную осуществляется исходя из того, что углу в π радиан соответствует угол в 180°.

Определение 6.1. Косинусом угла α называется отношение проекции радиуса на ось OX к самому радиусу; то есть $\cos\alpha = \frac{R_x}{R}$ (рис. 6.1).

Функция $y = \cos x$ определена для любого значения x является ограниченной $|\cos x| \le 1$, четной, т.е. $\forall x \ \cos(-x) = \cos x$, $\forall x$ и имеет период равный 2π.

Определение 6.2. Синусом угла α называется отношение проекции радиуса на ось OY к самому радиусу: $\sin\alpha = \frac{R_y}{R}$ (рис. 6.1).

Функция $y = \sin x$ определена для любого значения является ограниченной $|\sin x| \le 1$, нечетной, т.е. $\forall x \ \sin(-x) = -\sin x$, и имеет период равный 2π.

Определение 6.3. Тангенсом угла α называется отношение проекции радиуса на ось OY к проекции радиуса на ось OX: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x}$ (рис. 6.1).

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для любого значения $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$ и имеет период равный π.

Определение 6.4. Котангенсом угла α называется отношение проекции радиуса на ось OX к проекции радиуса на ось OY: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{R_x}{R_y}$ (рис. 6.1).

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для любого значения $x \ne \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$ и имеет период равный π.

Будем считать известными следующие факты:

1°. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2°. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cos\alpha \ne 0 \left(\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

3°. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha \ne 0 \ (\alpha \ne \pi n)$.

4°. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. (6.1)

5°. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. (6.2)

Из этих фактов попробуем получить все известные в школе формулы тригонометрии. Дело в том, что бессмысленное запоминание формул (опять-таки, как показывает практика) обычно ни к чему хорошему не приводит, т.е. формулы в самый нужный момент забываются. Если же школьнику удается понять как эти формулы выводятся, то он может, затратив совсем немного времени, получить необходимое ему соотношение. Во многих школах основные формулы тригонометрии развешены на стенах как наглядная агитация. Это приводит к тому, что подавляющее большинство выпускников средних школ тригонометрии не знают. Да и, вообще, зачем что-нибудь знать, если все написано на стене. Для людей, которые так считают, напомним народную мудрость:"На сарае написано "мир", а в сарае находятся дрова ".

Итак, вернемся к тригонометрии. Довольно легко, используя четность и нечетность тригонометрических функций, получить формулы косинуса и синуса разности двух углов

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (6.3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad (6.4)$$

Получим теперь формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (6.5)$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Если воспользуемся еще и тем, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то для косинуса двойного угла получим

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha. \qquad (6.6)$$

Из последних формул легко получаются формулы понижения второй степени. Действительно, если выразить $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$, то

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{6.7}$$

Выведем теперь формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) + \cos\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \left(1 - \sin^2\alpha\right) 2\sin\alpha$$

Окончательно получаем

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \tag{6.8}$$

Абсолютно аналогично

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{6.9}$$

Отметим еще две полезные формулы понижения третьей степени, следующие непосредственно из (6.8) и (6.9):

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \quad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

Аналогично получаются формулы для $\sin 5\alpha, \cos 5\alpha$ и $\sin^5\alpha, \cos^5\alpha$.

Теперь выведем формулы для суммы и произведения тригонометрических функций. Для этого выпишем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Сложим левые и правые части равенств

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right). \tag{6.10}$$

Возьмем теперь разность левых и правых частей

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right). \tag{6.11}$$

Аналогично, выписав формулы для синуса суммы и синуса разности и взяв их сумму и разность, соответственно, получим

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right). \tag{6.12}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right). \tag{6.13}$$

Обозначим $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$. Тогда $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$.

Подставим эти значения в формулы (6.10) – (6.13)

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{6.14}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{6.15}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{6.16}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{6.17}$$

Выведем теперь выражение для тригонометрических функций угла α через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ и окончательно получим

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{6.18}$$

Абсолютно аналогично

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad (6.19)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad (6.20)$$

$$\alpha \neq \pi + 2\pi n, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \quad (6.20')$$

$$\alpha \neq \pi n, \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Из (6.20), в частности, следует

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0. \quad (6.21)$$

Формулы (6.18) – (6.20') называются формулами универсальной тригонометрической подстановки.

Теперь выведем одно из самых важных тригонометрических соотношений – формулу вспомогательного угла.

Пусть нам требуется преобразовать выражение $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, где оба коэффициента не обращаются в нуль одновременно. Разделим и умножим это выражение на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, и получим

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Из того, что

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \text{ и } \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \text{ и } \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

следует существование угла φ такого, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$. Имеем

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi \sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right). \quad (6.22)$$

Единственное, о чем мы еще не говорили – это формулы приведения. Будем считать, что любой школьник их знает и приведем только самые важные из них.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha .$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha .$$

$$\sin\left(\pi \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha .$$

$$\cos\left(\pi \pm \alpha\right) = -\cos\alpha .$$

Этим мы ограничимся. Все, что касается формул для тангенса и котангенса,то они получаются из уже найденных соотношений.

6.1.2. Преобразования с использованием основных формул

Пример 6.1.Доказать тождество

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1 .$$

Мы уже выводили тригонометрические формулы для тройного угла, поэтому приведем вывод без комментариев

$$\cos 4\alpha = \cos(2\alpha + 2\alpha) = \cos 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 2\alpha =$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)^2 - 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha =$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)^2 - 4\cos^2\alpha (1 - \cos^2\alpha) \ .$$

Далее раскрываем скобки, приводим подобные члены и получаем искомое выражение. Для доказательства второй формулы заменим $\cos^2\alpha$ на $1 - \sin^2\alpha$.

Пример 6.2. Доказать, что для всех допустимых значений α верно

$$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{tg}4\alpha + 8\operatorname{ctg}8\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \ .$$

Получим, сначала, формулу для разности $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$ для всех допустимых значений α . Имеем

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

или, окончательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha \ . \qquad (6.23)$$

Отметим, что эта формула довольно часто встречается при решении уравнений.

Перепишем доказываемое тождество в виде

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - 8\operatorname{ctg}8\alpha = 0$$

и для его доказательства последовательно применим выведенную нами формулу (6.23).

Пример 6.3.Доказать тождество

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0 .$$

Сначала преобразуем вторую скобку

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \ .$$

Можно продолжить упрощения используя то, что

$$2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 4\alpha}{4}$$

и получить

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4} \ .$$

Для преобразования первой скобки исходного примера воспользуемся формулой суммы кубов

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha =$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) .$$

Теперь подставим $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ и получим

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8} \ .$$

Подставляем в исходный пример вместо скобок полученные выражения через $\cos 4\alpha$ и тождество доказано.

6.1.3. Преобразование произведения в сумму

Пример 6.4. Доказать $8\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sqrt{3}$.

Это типичный пример, в котором надо преобразовывать произведение нескольких тригонометрических функций в сумму. Прежде, чем это проделывать, обозначим левую часть A и заметим, что $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$, $\cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$ и тогда

$$A = 8\cos 10^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ = 4\cos 10^\circ (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)$$

Теперь раскроем скобки и воспользуемся формулой произведения косинусов для $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ$

$$A = 2\cos 30^\circ + 2\cos 10^\circ - 4\cos 10^\circ \cos 60^\circ =$$

$$= \sqrt{3} + 2\cos 10^\circ - 2\cos 10^\circ = \sqrt{3} \ .$$

Пример 6.5. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Будем преобразовывать правую часть, которую обозначим A. Сначала заменим произведение последних двух косинусов – суммой

$$A=\cos\alpha\left(\cos(\alpha+2\beta)+\cos\alpha\right)=\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\alpha+2\beta).$$

Снова воспользуемся формулой произведения косинусов

$$A=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha+2\beta)+\cos2\beta\right).$$

Теперь используем формулу косинуса двойного угла и, окончательно, получаем

$$A=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2(\alpha+\beta)+2\cos^2\beta-1\right).$$

В следующем примере мы снова преобразуем произведение нескольких тригонометрических функций в сумму, только углы будут связаны некоторым соотношением.

Пример 6.6. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Обратимся к правой части, которую по традиции обозначим A

$$A=1-\sin\alpha\left(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)\right).$$

По условию $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma,\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta,\gamma+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, поэтому

$$A=1-\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\gamma\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)-1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma-1\right).$$

Далее, воспользовавшись формулой $\cos2x=2\cos^2x-1$, получаем необходимый результат.

Пример 6.7. Упростить выражение $\sin3\alpha\cos^3\alpha+\cos3\alpha\sin^3\alpha$.

Можно использовать различные способы преобразования подобных выражений. Мы воспользуемся формулами понижения третьей степени

$$\sin3\alpha\cos^3\alpha+\cos3\alpha\sin^3\alpha=$$

$$=\sin3\alpha\left(\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos3\alpha\right)+\cos3\alpha\left(\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin3\alpha\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\sin3\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos3\alpha\right)=\frac{3}{4}\sin4\alpha.$$

Далеко не всегда надо использовать формулы понижения степени.

Пример 6.8. Упростить выражение $\sin\alpha\cos^5\alpha-\cos\alpha\sin^5\alpha$.

Наличие знака "-" сильно упрощает преобразования.

$$\sin\alpha\cos^5\alpha-\cos\alpha\sin^5\alpha=\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha=\frac{1}{4}\sin4\alpha.$$

Пример 6.9. Доказать тождество

$$4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin3\alpha.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства за A и преобразуем ее

$$A=2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha=$$

$$=\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin 3\alpha.$$

Пример 6.10. Доказать

$$\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}.$$

При преобразовании левой и правой частей мы будем пользоваться приемом, который называется, в просторечии, "матрешка".

Пусть нам необходимо преобразовать выражение

$$2^{n+1}\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x.$$

Умножим и разделим это выражение на $\sin x\neq 0$ и будем последовательно использовать формулу синуса двойного угла

$$\frac{2^{n+1}\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x}{\sin x}=$$

$$=\frac{2^{n}\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x}{\sin x}=$$

$$=\frac{2^{n-1}\cdot\sin 4x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x}{\sin x}.$$

Окончательно получаем

$$2^{n+1}\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{\sin x}. \qquad (6.24)$$

Эта формула весьма полезна при решении многих тригонометрических уравнений.

Возвращаемся к нашему примеру.

Преобразуем левую часть, которую обозначим A. Сгруппируем первый с четвертым и второй с третьим сомножители и используем формулу произведения косинусов. Получим, используя формулу (6.24)

$$A=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{16}\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{16}\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{16}.$$

В правой части, которую обозначим B, формулу (6.24) можно применять, ничего не группируя

$$B=-\frac{1}{16}\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}}=-\frac{1}{16}\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)}{\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{1}{16}.$$

Получили, что левая и правая части равны.

Мы уже научились преобразовывать различные произведения тригонометрических функций в сумму, а теперь выведем две важные формулы, которые позволяют преобразовывать сумму в произведение.

6.1.4. Преобразование суммы в произведение

Пусть надо преобразовать выражение

$$A=\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n,$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – последовательные члены арифметической прогрессии с разностью $2d$, т.е. $\alpha_k=\alpha_1+(k-1)2d$ $k=1,2,\ldots,n$.

Домножим левую и правую части этого выражения на $2\sin d\neq 0$, после чего раскроем все произведения синусов

$$2A\sin d=\cos(\alpha_1-d)-\cos(\alpha_1+d)+\cos(\alpha_2-d)-\cos(\alpha_2+d)+$$

$$+\ldots+\cos(\alpha_n-d)-\cos(\alpha_n+d)=$$

$$=\cos(\alpha_1-d)-\cos(\alpha_1+d)+\cos(\alpha_1+d)-\cos(\alpha_1+3d)+\ldots+$$

$$+\cos(\alpha_1+(2n-3)d)-\cos(\alpha_1+(2n-1)d).$$

Теперь получаем

$$A=\frac{\cos\left(\alpha_1-d\right)-\cos\left(\alpha_1+(2n-1)d\right)}{2\sin d}$$

или, применяя формулу разности косинусов,

$$A=\frac{\sin nd\sin\left(\alpha_1+d(n-1)\right)}{\sin d}. \qquad (6.25)$$

Аналогично преобразуется сумма косинусов – домножается на $2\sin d\neq 0$, раскрываются произведения косинусов на синус и т.д.

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n=$$

$$=\frac{\sin nd\cdot\cos\left(\alpha_1+d(n-1)\right)}{\sin d}. \qquad (6.26)$$

Посмотрим теперь на простых примерах возможности применения полученных формул.

Пример 6.11. Найти сумму $S=\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx$.

Используем сначала формулу понижения степени

$$S=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\ldots+\frac{1-\cos 2nx}{2}=$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx}{2}.$$

Для выражения в скобках воспользуемся формулой (6.26), где вместо α_1 надо подставить $2x$, а вместо d – x

$$S=\frac{n}{2}-\frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x},\ \sin x\neq 0.$$

Если же $\sin x=0$, то искомая сумма, очевидно, равна нулю.

В следующем примере мы получим простой и красивый результат, не прилагая особых усилий.

Пример 6.12. Найти сумму $S=\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}$.

Воспользуемся формулой (6.26) при $d=\frac{\pi}{19}$, $\alpha_1=\frac{\pi}{19}$ и $n=9$

$$S=\frac{\sin\frac{9\pi}{19}\cos\frac{9\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{18\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6.1.5. Вычисление нестандартных значений некоторых тригонометрических функций

Пример 6.13. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $2\,\mathrm{ctg}^2\alpha+7\,\mathrm{ctg}\,\alpha+3=0$ и $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Сначала решим уравнение относительно $\mathrm{ctg}\,\alpha$ и получим $(\mathrm{ctg}\,\alpha)_{1,2}=\frac{-7\pm 5}{4}$. Теперь воспользуемся ограничениями на угол и определим какой из корней удовлетворяет этим ограничениям.

Функция $y=\mathrm{ctg}\,\alpha$ при $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ является убывающей и меньшей $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$, а при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ выполняется $\mathrm{ctg}\,\alpha>0$. Поэтому подходит по условию задачи только решение $\mathrm{ctg}\,\alpha=-3$. Воспользуемся одной из формул универсальной тригонометрической подстановки (6.19), учитывая, что $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{1}{3}$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$

Пример 6.14. Вычислить $\sin 15°$, $\sin 36°$.

Для первого случая воспользуемся тем, что

$$\sin^2 15° = \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 15° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{8}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Заметим, что аналогичным образом можно вычислять значения тригонометрических функций от довольно большого количества углов.

Выражение $\sin 15°$ можно вычислить и другим способом

$$\sin 15° = \sin\left(45° - 30°\right) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Со вторым случаем дело обстоит несколько сложнее. Нетрудно видеть, что $\sin 36° = \sin\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{5}$. Обозначим $\frac{\pi}{5} = x$ и получим уравнение $\sin 2x = \sin 3x$. Воспользуемся формулами синуса двойного и тройного углов и тем, что $\sin x \neq 0$ и получим

$$2\sin x \cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = 3 - 4\left(1-\cos^2 x\right) \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, и принимая во внимание, что угол находится в первой четверти, получаем

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

6.1.6. Разные примеры

Пример 6.15. Доказать, что числа

$$4\cos^2\frac{\pi}{7},\ 4\cos^2\frac{2\pi}{7},\ 4\cos^2\frac{3\pi}{7}$$

есть корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$.

Применим теорему Виета для кубического уравнения. Нам надо доказать три равенства

$$4\cos^2\frac{\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} + 4\cos^2\frac{3\pi}{7} = 5,$$

$$16\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7} + 16\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7} + 16\cos^2\frac{3\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7} = 6,$$

$$64\cos^2\frac{\pi}{7}\ \cos^2\frac{2\pi}{7}\ \cos^2\frac{3\pi}{7} = 1.$$

Будем доказывать их последовательно, причем, сразу воспользуемся формулой понижения степени. Начнем с первого

$$2\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right) + 2\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right) + 2\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$

$$= 6 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Для выражения в скобках воспользуемся формулой (6.26), где $\alpha_1 = \frac{2\pi}{7}$, $d = \frac{\pi}{7}$ и $n = 3$

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, первое равенство доказано.

Для доказательства второго равенства снова используем формулу понижения степени и, раскрыв скобки, получим

$$12+8\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+$$

$$+4\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Выражение в первой скобке мы уже вычислили. Найдем теперь выражение во второй скобке, которое обозначим A. Используем формулу произведения косинусов

$$A=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right).$$

Воспользуемся равенствами: $\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{8\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$, которые доказываются с помощью формул приведения. Например, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{7}\right)=\cos\frac{4\pi}{7}$. Таким образом получаем

$$A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Нам удалось доказать и второе равенство.

Для доказательства третьего равенства снова будем использовать формулу понижения степени и после раскрытия скобок получим

$$8\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Мы воспользовались уже доказанными выше двумя равенствами. Для преобразования полученного произведения заменим $\cos\frac{6\pi}{7}$ на $-\cos\frac{\pi}{7}$ и воспользуемся методом "матрешки": домножим и разделим полученное выражение на $\sin\frac{\pi}{7}$. В результате получим

$$8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=1.$$

Мы доказали все три равенства.

Пример 6.16. Доказать, что если $\operatorname{tg}a_1$, $\operatorname{tg}a_2$, $\operatorname{tg}a_3$ корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0, b\neq 1$, а $\operatorname{tg}b_1$, $\operatorname{tg}b_2$, $\operatorname{tg}b_3$ корни уравнения $x^3+cx^2+bx+a=0$, то $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=\pi k$, где k – любое целое число.

Для решения этого примера нам потребуется формула тангенса суммы двух углов, которую мы еще нигде не упоминали, поэтому выведем эту формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6.27)$$

Для того, чтобы показать в нашей задаче, что $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=\pi k$, нам достаточно показать, что $\operatorname{tg}(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3)=0$. Обозначив $\alpha=a_1+a_2+a_3$, $\beta=b_1+b_2+b_3$ и воспользовавшись формулой (6.27) получим, что нам надо показать, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=0$. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(a_1+(a_2+a_3))=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}a_1+\operatorname{tg}(a_2+a_3)}{1-\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}(a_2+a_3)}=\frac{\operatorname{tg}a_1+\frac{\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_3}{1-\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3}}{1-\operatorname{tg}a_1\frac{\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_3}{1-\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3}}=$$

$$= \frac{\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_3 - \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3}{1 - \left(\operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_3 + \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_2\right)} = \frac{c-a}{1-b}.$$

При последнем переходе мы воспользовались теоремой Виета.

Аналогично получаем, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{a-c}{1-b}$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$, что и требовалось доказать. Заметим,что

$$1 - \operatorname{tg}\alpha \ \operatorname{tg}\beta = \frac{c-a}{1-b}\cdot\frac{c-a}{1-b} = 1 + \frac{(-a)^2}{(1-b)^2} \neq 0.$$

Прежде чем мы начнем рассматривать методы решения тригонометрических уравнений договоримся о следующем. В дальнейшем, если не указано противное, будем считать, что буквы n, k, l, m обозначают любое целое число.

6.2. Тригонометрические уравнения

6.2.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Прежде всего напомним некоторые основные правила решения тригонометрических уравнений.

1°. Решением уравнения $\sin\alpha = \sin\beta$ является

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \beta + 2\pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{array}\right.$$

2°. Уравнение $\sin\alpha = -\sin\beta$ сводится к уравнению $\sin\alpha = \sin(-\beta)$ и далее как в пункте 1°.

3°. Решением уравнения $\cos\alpha = \cos\beta$ является

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \beta + 2\pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{array}\right.$$

4°. Уравнение $\cos\alpha = -\cos\beta$ сводится к уравнению $\cos\alpha = \cos(\pi - \beta)$ и далее как в пункте 3°.

5°. Уравнение $\sin\alpha = \cos\beta$ сводится к виду $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ и далее как в пункте 1°.

6°. Решение уравнения $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ записывается в виде

$$\alpha = \beta + \pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

7°. Решение уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ записывается в виде

$$\alpha = \beta + \pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Тривиальные уравнения сводятся к описанным выше по следующим правилам

$$\sin\alpha = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(\arcsin a),$$
$$\cos\alpha = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos(\arccos a),$$
$$\operatorname{tg}\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a),$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} a).$$

Мы будем придерживаться этих правил при решений тригонометрических уравнений.

6.2.2. Непосредственное использование основных формул тригонометрии.

Пример 6.17. $\sin x - \sin 3x = \sin 4x - \sin 2x$.

В примерах такого вида надо группировать тригонометрические функции по парам так, чтобы после использования формулы преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение появлялся общий множитель. В данном случае все уже сгруппировано

$$-2\sin x \cos 2x = 2\sin x \cos 3x \Leftrightarrow \sin x(\cos 2x + \cos 3x) = 0.$$

Наше уравнение разбивается на два

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos 2x = -\cos 3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \sin 0 \\ \cos 2x = \cos(\pi - 3x)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n \\ x=\pi+2\pi m \\ 2x=\pi-3x+2\pi k \\ 2x=3x-\pi+2\pi l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n \\ x=\pi+2\pi m \\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2\pi k}{5} \\ x=\pi+2\pi l \end{array}\right. .$$

Заметим, что первое, второе и четвертое решения можно записать в виде $x=\pi n$. В принципе, если в ответе писать все три решения, то ничего страшного не произойдет. Однако, в таких явных случаях лучше этого не делать.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2\pi k}{5}, k=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{array}\right.$.

Пример 6.18. $\cos 5x+\sin x\sin 4x=0$.

Здесь все предельно просто. Представляем $5x=x+4x$ и используем формулу косинуса суммы двух углов

$$\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x+\sin x\sin 4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 4x=0 \end{array}\right. .$$

Такие задачи возникают при решении более сложных уравнений и принцип их решения довольно прост. Если аргумент отдельной тригонометрической функции равен сумме или разности аргументов тригонометрических функций в произведении, то действуя, как в рассмотренном примере, можно будет добиться необходимого результата.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{array}\right.$.

Пример 6.19. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

Воспользуемся сначала формулой понижения степени. Наше уравнение преобразуется к виду

$$\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=0.$$

Теперь действуем как в примере 6.17, т.е. группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвертым и используем формулу суммы косинусов

$$\cos 5x\cos x+\cos 9x\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 5x=\cos(\pi-9x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \\ 5x=\pi-9x+2\pi k \\ 5x=-\pi+9x+2\pi l \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots, x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi}{7}k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$
$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}l, l=0,\pm1,\pm2,\ldots.$

6.2.3. Использование формулы вспомогательного аргумента

Пример 6.20. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$.

Перепишем уравнение в виде

$$\sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x=\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x$$

и применим формулу дополнительного аргумента (6.22) к обеим частям, т.е. разделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$:

$$\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\cos 6x.$$

Теперь вместо числовых коэффициентов подставим тригонометрические выражения от известных углов, но выбирать их будем так, чтобы получались тригонометрические формулы от одной функции. В нашем случае будем, например, действовать следующим образом

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin 8x-\sin\frac{\pi}{3}\cos 8x=\cos\frac{\pi}{6}\sin 6x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{3}+8x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+6x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\frac{\pi}{6}+6x=-\frac{\pi}{3}+8x+2\pi n\\&\frac{\pi}{6}+6x=\pi+\frac{\pi}{3}-8x+2\pi k\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{7}k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\\&x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{aligned}\right..$

6.2.4. Использование специальных приемов

Пример 6.21. $\sin^6 2x+\cos^6 2x=\frac{5}{8}$.

Мы уже преобразовывали выражение в левой части (пример 6.3), поэтому воспользуемся полученной формулой

$$\frac{5+3\cos 8x}{8}=\frac{5}{8}\Leftrightarrow \cos 8x=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Пример 6.22. $16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$.

Это типичный пример на метод "матрешки". Однако, прежде чем домножить обе части уравнения на $\sin x$, покажем, что среди решений уравнения $\sin x=0$ нет решений нашего уравнения. Действительно, если $x=\pi n,\ n\in Z$, то все косинусы нашего уравнения равны или единице или минус единице и, значит, $x=\pi n$ не является решением нашего уравнения.

Домножаем на $\sin x\neq 0$ и получаем

$$\sin x=\sin 16x\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=16x+2\pi l\\&x=\pi-16x+2\pi k\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{2\pi}{15}l\\&x=\frac{\pi}{17}(2k+1)\end{aligned}\right..$$

Теперь надо отбросить те значения l и k, при которых $\sin x=0$.

1. $\frac{2\pi}{15}l\neq\pi n\Rightarrow l\neq 15m$;

2. $\frac{\pi}{17}(2k+1)\neq\pi n\Rightarrow 2k+1\neq 17m\Rightarrow 2k+1\neq 17(2t+1)\Rightarrow k\neq 17t+8$.

Более детальное исследование вопроса об отборе корней в тригонометрических уравнениях будет проведено позднее.

Ответ: $\left[\begin{aligned}&x=\frac{2\pi}{15}l,\ l\neq 15n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\\&x=\frac{\pi}{17}(2k+1),\ k\neq 17m+8;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{aligned}\right..$

6.2.5. Замена переменной

Одним из основных приемов решения тригонометрических уравнений является замена переменной, причем замены эти крайне разнообразны. Посмотрим как делать эти замены на примерах.

Пример 6.23. $\sin x+\cos x=1-4\sin x\cos x$.

В уравнениях, в которых присутствует сумма или разность синуса и косинуса одного аргумента, а так же их произведение надо попробовать сделать замену

$$\sin x\pm\cos x=t\Rightarrow t^2=1\pm2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}.$$

Наше уравнение принимает вид

$$2t^2+t-3=0\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x+\cos x=1\\&\sin x+\cos x=-3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{3}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varnothing \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=2\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots; x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Далеко не всегда замена бывает столь очевидной.

Пример 6.24. $3\sin^2 x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$.

Сделаем замену $\cos x+2\sin x=t$. Тогда

$$t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x+4\sin x\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x=t^2-\cos^2 x-4\sin^2 x .$$

Подставляем найденные выражения в наше уравнение

$$3\sin^2 x-3t+t^2-\cos^2 x-4\sin^2 x+3=0\Leftrightarrow t^2-3t+2=0 .$$

Получаем два уравнения $\cos x+2\sin x=1, \cos x+2\sin x=2$. В каждом используем формулу вспомогательного угла

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x+\varphi)=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right. ,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $x=2\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots;$

$x=\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi m, m=0,\pm1,\pm2,\ldots;$

$x=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots;$

$x=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi l, l=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

В следующей лекции мы научимся преобразовывать подобные выражения, а пока отметим лишь, что $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\arcsin\frac{3}{5}$.

Пример 6.25. $2+\cos x=2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

В этом примере напрашивается применение формулы универсальной тригонометрической подстановки (6.19). Обозначим $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ и получим уравнение

$$2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2t\Leftrightarrow 2t^3-t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1 .$$

Сделаем теперь два черезвычайно важных замечания. Во-первых, наличие в уравнении функций тангенса или котангенса немедленно должно приводить к рассмотрению ОДЗ. Во-вторых, выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла не всегда верно ($\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$). Поэтому, прежде чем делать эту подстановку надо проверить не теряются ли корни. В нашем примере, в силу его простоты, нет ни корней, отбрасываемых по ОДЗ, ни корней, потерянных в результате использования универсальной тригонометрической подстановки. Это объясняется еще и тем, что тангенс половинного угла в явном виде присутствует в уравнении.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Пример 6.26. $\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$.

Такие примеры довольно частые гости на вступительных экзаменах по математике. Обычно абитуриенты пытаются найти какую-нибудь связь между углами. Это не совсем рациональный путь. Попробуем решать такие уравнение примерно так же, как мы составляли системы для иррациональных уравнений. Обозначим

$\alpha = \frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}$ и $\beta = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$ и избавимся от x. Домножим обе части второго выражения на 3 и сложим с первым. Получим $\alpha + 3\beta = \pi$. Заметим, что это довольно простой способ поиска связи между углами. Теперь получаем

$$\sin(\pi - 3\beta) = 2\sin\beta \Leftrightarrow 3\sin\beta - 4\sin^3\beta = 2\sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\beta = 0 \\ \sin^2\beta = \frac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Во втором уравнении применим формулу понижения степени

$$\left[\begin{array}{l} \sin\beta = 0 \\ \cos 2\beta = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \dots, x = \frac{4\pi}{15} + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots,$

$x = \frac{14\pi}{15} + 2\pi l, l = 0, \pm1, \pm2, \dots.$

6.2.6. Использование различных преобразований

В следующих примерах придется делать тригонометрические преобразования для получения уравнения приемлемого вида.

Пример 6.27. $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{1}{8}$.

Преобразуем левую часть уравнения используя формулы произведения косинусов и произведения синусов

$$\cos^2 x \ \cos x \cos 3x + \sin^2 x \ \sin x \sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2 x\left(\cos 4x + \cos 2x\right) + \sin^2 x\left(\cos 2x - \cos 4x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x\left(1 + \cos 4x\right) = \cos^3 2x .$$

Получаем

$$\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что такой же результат можно получить используя формулы понижения третьей степени. Действительно,

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x =$$

$$= \cos 3x\left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right) + \sin 3x\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\cos 4x + \cos 2x\right) + \frac{1}{8}\left(\cos 0 + \cos 6x\right) +$$

$$+ \frac{3}{8}\left(\cos 2x - \cos 4x\right) - \frac{1}{8}\left(1 - \cos 6x\right) = \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{3}{4}\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right) + \frac{3}{4}\cos 2x = \cos^3 2x .$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$

Пример 6.28. $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = \left(\sin x + \sin 2x + \sin 3x\right)^3$.

Для решения этого уравнения надо вспомнить формулу, полученную в примере I.1.14

$$\left(a + b + c\right)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right).$$

Используя эту формулу получим совокупность, равносильную исходному уравнению

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \sin(-2x) \\ \sin x = \sin(-3x) \\ \sin 2x = \sin(-3x) \end{array}\right. .$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} n, n = 0, \pm1, \pm2, \dots, x = \frac{2\pi}{3} k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots,$

$x = \frac{2\pi}{5} l, l = 0, \pm1, \pm2, \dots.$

Пример 6.29. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.

Теперь мы более подробно остановимся на уравнениях, в которых встречаются тангенсы и котангенсы.

Выпишем ОДЗ

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases}.$$

Перейдем к синусам и косинусам в левой части

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \left(\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos 3x \sin 4x - \sin 3x \cos 4x}{\sin 3x \sin 4x} =$$

$$= \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 4x \sin 3x}\right) = \sin x \frac{\sin 4x \sin 3x - \cos x}{\sin 4x \sin 3x \cos x}.$$

Таким образом наше уравнение с учетом ОДЗ разбилось на совокупность двух:

1. $\sin x = 0$. Решения этого уравнения, очевидно, не принадлежат ОДЗ.

2. $\sin 4x \sin 3x - \cos(4x - 3x) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x \cos 3x = 0$.

Теперь из получившихся решений $x = \frac{\pi}{6}(2n+1)$ и $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$ надо отобрать те, которые не совпадают с $x = \frac{\pi}{2}(2l+1), x = \frac{\pi l}{4}$, $x = \frac{\pi l}{3}$.

Сначала покажем как это делается для первой серии решений.

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1) \neq \frac{\pi}{2}(2l+1) \Leftrightarrow n \neq 3l+1$.

2. $\frac{\pi}{6}(2n+1) \neq \frac{\pi l}{3} \Leftrightarrow 2n+1 \neq 2l$. Это выполняется всегда, так как в левой части находится нечетное целое число, а в правой – четное.

3. $\frac{\pi}{6}(2n+1) \neq \frac{\pi l}{4} \Leftrightarrow 2n+1 \neq \frac{3}{2}l \Leftrightarrow 4n+2 \neq 3l$. Рассмотрим и исключим случаи выполнения равенства

$$4n+2 = 3l.$$

Для выполнения равенства в правой части должно быть четное число, не кратное 4, поэтому $l = 4p+2$. После подстановки получаем

$$n = 3p+1,$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Таким образом, $n \neq 3p+1$. В силу произвольности целых чисел p и l можно сказать, что случаи 1. и 3. совпадают.

Для второй серии решений получается следующее.

1. $\frac{\pi}{8}(2k+1) \neq \frac{\pi}{2}(2l+1) \Leftrightarrow 2k+1 \neq 4(2l+1)$. Левая часть является нечетным, а правая – четным числом, поэтому это соотношение всегда выполняется.

2. $\frac{\pi}{8}(2n+1) \neq \frac{\pi l}{3} \Leftrightarrow 2n+1 \neq \frac{8}{3}l$. Выполняется всегда, так как в левой части находится нечетное число, а в правой либо дробное, либо четное.

3. $\frac{\pi}{8}(2n+1) \neq \frac{\pi l}{4} \Leftrightarrow 2k+1 \neq 2l$. Выполняется всегда, так как в левой части находится нечетное число, а в правой – четное.

Вторая серия решений полностью подходит.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}(2n+1), n \neq 3l+1, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x = \frac{\pi}{8}(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}\right.$.

Пример 6.30. $2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x$.

В примерах, подобных рассматриваемому, надо сначала сгруппировать слагаемые так, чтобы коэффициенты при тангенсах или котангенсах были одинаковыми, а затем переходить к синусам и косинусам.

В нашем случае выпишем ОДЗ: $\cos 2x \neq 0, \cos 3x \neq 0$ и перепишем уравнение

$$2 \operatorname{tg} 3x - 2 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)=\operatorname{tg} 2x\left(1+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\frac{\sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x}{\cos 3x\cos 2x}=\operatorname{tg} 2x\,\frac{\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x}.$$

С учетом ОДЗ, используя формулы синуса и косинуса разности, получим

$$2\sin x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cos x\Leftrightarrow \sin x\left(1-\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=\cos^2 x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=1\end{array}\right..$$

Заметим, что мы опять использовали формулу понижения степени.

В результате получаем решения $x=\pi n$, которые принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x=\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

Пример 6.31. $3\cos x=\sin x+2\sin 3x$.

Первое действие, которое нужно сделать для решения этого уравнения, похоже на первоначальные действия в предыдущем примере. Представим $3\cos x$ как $2\cos x+\cos x$. Получим

$$2\left(\cos x-\sin 3x\right)=\sin x-\cos x\ .$$

Теперь преобразуем выражение в скобке, использовав сначала формулу приведения, а затем формулу разности синусов

$$\cos x-\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin 3x=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

Преобразуем правую часть, используя формулу вспомогательного угла

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right).$$

Мы должны заменить $\frac{1}{\sqrt{2}}$ либо на $\sin\frac{\pi}{4}$, а на $\cos\frac{\pi}{4}$, причем это надо сделать таким образом, чтобы получился $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, т.е. один из сомножителей левой части уравнения. Заменим первую дробь $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на $\sin\frac{\pi}{4}$, а вторую – на $\cos\frac{\pi}{4}$. В результате получим

$$4\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Далее все просто.

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi l,\ l=0,\pm 1,\pm 2,$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, $x=\frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi k,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

Пример 6.32. $1+2\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\right)=0$.

На первый взгляд это довольно простой пример. Воспользуемся формулами косинуса двойного и тройного углов и, обозначив $\cos 2x=t$, получим кубическое уравнение

$$8t^3+4t^2-4t-1=0,$$

которое не имеет рациональных корней. В принципе, мы умеем решать кубические уравнения (лекция I.4), однако оставим этот способ на крайний случай и попробуем справиться средствами тригонометрии.

Воспользуемся для выражения в скобках формулой (6.26) с $\alpha_1=2x$, $d=x$ и $n=3$ и получим

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{\sin 3x \cos 4x}{\sin x}, \sin x \neq 0.$$

Отметим, что $x = \pi n$ не является решением исходного уравнения. Таким образом, наше уравнение при $\sin x \neq 0$ приобретает вид

$$\sin x + 2\sin 3x \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin(4x - 3x) + 2\sin 3x \cos 4x = 0$$

Окончательно получаем систему

$$\begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{7}, n \neq 7m.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{7}, n \neq 7m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6.2.7. Тригонометрическая подстановка

Довольно часто средства тригонометрии используются для решения рациональных и иррациональных уравнений и систем. В этих случаях неизвестная заменяется на какую-нибудь тригонометрическую функцию, т.е. осуществляется тригонометрическая подстановка.

Пример 6.33. $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Непонятно как решать это иррациональное уравнение. Однако, структура подкоренных выражений подсказывает тригонометрическую подстановку.

В силу того, что ОДЗ является $-1 \le x \le 1$, сделаем замену $x = \cos t, 0 \le t \le \pi$. Тогда $1 - x = 2\sin^2\frac{t}{2}$, $\sqrt{1-x} = \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$. Заметим, что мы не используем модуль, так как при $0 \le t \le \pi$ функция $\sin\frac{t}{2}$ неотрицательна. Из тех же соображений $\sqrt{1-x^2} = \sin t$. Получаем

$$\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t \sin t \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = \cos 2t + \sin 2t .$$

Используя для правой части уравнения формулу вспомогательного угла, имеем

$$\sin\frac{t}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}n \\ t = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}k \end{array}\right. .$$

Определим теперь те значения n и k, при которых $t \in [0; \pi]$.

1. $n = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \notin [0; \pi]$.
2. $n = 1 \Rightarrow t = \frac{7\pi}{6} \notin [0; \pi]$.
3. $k = 0 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{10} \in [0; \pi]$.
4. $k = 1 \Rightarrow t = \frac{11\pi}{10} \notin [0; \pi]$.
5. $k = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \notin [0; \pi]$.

Очевидно, что при любых других целых n и k значения t не принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Ответ: $x = \cos\frac{3\pi}{10}$.

Пример 6.34. Решить систему $\begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2 \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6 \\ \frac{3x}{z} - 3zx = 2 \end{cases}$.

Сначала сделаем замену так, чтобы система стала циклической. Для этого разделим обе части второго уравнения системы на 3

$$\begin{cases} \frac{3y}{3x} - 3x \cdot 3y = 2 \\ \frac{z}{3y} - 3y \cdot z = 2 \\ \frac{3x}{z} - 3x \cdot z = 2 \end{cases} .$$

Теперь вводим новые переменные $u=3x$, $v=3y$, $t=z$ и перепишем нашу систему в виде

$$\begin{cases} v=\dfrac{2u}{1-u^2} \\ t=\dfrac{2v}{1-v^2} \\ u=\dfrac{2t}{1-t^2} \\ uvt\neq 0 \end{cases}.$$

Получили циклическую систему. Внимательно посмотрев на правые части уравнений, сопоставим их с формулой (6.20), которая выражает тангенс угла через тангенс половинного угла. Обе формулы структурно одинаковы, поэтому сделаем естественную замену $u=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Теперь наша система выглядит просто замечательно

$$\begin{cases} u=\operatorname{tg}\alpha \\ v=\operatorname{tg}2\alpha \\ t=\operatorname{tg}4\alpha \\ u=\operatorname{tg}8\alpha \end{cases}.$$

Получаем, что $\alpha=\dfrac{\pi}{7}n$, $n=\pm1,\pm2,\pm3$.

Ответ: $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3};\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{3};\operatorname{tg}4\alpha\right)$, где $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{7},\pm\dfrac{2\pi}{7},\pm\dfrac{3\pi}{7}$.

Сделаем теперь ряд общих рекомендаций по поводу использования тригонометрической подстановки.

Если встречается радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то бывает полезно попробовать замену $x=a\cos t$, $0\le t\le\pi$ или $x=a\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Если встречается радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то бывает полезно попробовать замену $x=a\operatorname{ctg}t$, $0<t<\pi$ или $x=a\operatorname{tg}t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$.

По крайней мере, эти замены позволят избавиться от иррациональности.

6.2.8. Отбор корней

Мы уже встречались с примерами, в которых необходимо было отбирать корни по ОДЗ. Рассмотрим еще уравнения, в которых отбор корней производится не только из-за ОДЗ.

Пример 6.35. $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}$.

Этот, на первый взгляд, довольно простой пример таит в себе немало трудностей.

Получаем

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\frac{\pi}{3}+\pi n.$$

Получаем квадратное уравнение

$$(3n-1)x^2+(3n-7)x+(3n-1)=0.$$

Для того, чтобы это уравнение имело решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был неотрицательным, поэтому

$$D=(3n-7)^2-(6n-2)^2=-9(n-1)(3n+5)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}\le n\le 1.$$

Так как n – целое, то подходят только значения $n=0$ и $n=\pm1$. Теперь находим x при каждом возможном значении n.

1. $n=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{45}}{2}$.
2. $n=1\Rightarrow x=1$.
3. $n=-1\Rightarrow x=-2$, $x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{45}}{2}$, $x=1$, $x=-2$, $x=-\dfrac{1}{2}$.

Следующие два примера одинаковы с точки зрения решения уравнений, но разные с точки зрения отбора корней.

Пример 6.36. $\dfrac{\sin 10x}{1-\cos 10x}=\dfrac{\sin 16x}{1-\cos 16x}$.

Преобразуем обе части уравнения, использовав для числителей формулы синуса, а для знаменателей – косинуса двойного угла

$$\frac{2\sin 5x\cos 5x}{2\sin^2 5x}=\frac{2\sin 8x\cos 8x}{2\sin^2 8x}\Rightarrow \sin 3x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}n.$$

ОДЗ нашего уравнения имеет вид

$$\begin{cases}\sin 5x\neq 0\\ \sin 8x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{5}l\\ x\neq\dfrac{\pi}{8}k\end{cases}.$$

Таким образом, для отбора корней надо разобраться с двумя соотношениями: $\frac{\pi}{3}n\neq\frac{\pi}{5}l$ и $\frac{\pi}{3}n\neq\frac{\pi}{8}k$.

1. $\frac{\pi}{3}n\neq\frac{\pi}{5}l\Leftrightarrow n\neq\frac{3}{5}l\Leftrightarrow 5n\neq 3l$. Решаем уравнение $5n=3l$ в целых числах. l кратно 5, то есть $l=5p\Rightarrow n=3p$. Таким образом, для того чтобы ни для каких целых l не выполнялось $\frac{\pi}{3}n\neq\frac{\pi}{5}l$ необходимо $n\neq 3p$.

2. $\frac{\pi}{3}n\neq\frac{\pi}{8}k\Leftrightarrow n\neq\frac{3}{8}k\Leftrightarrow 8n\neq 3k$. Аналогично предыдущему пункту получаем $n\neq 3s$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3n+1)$; $x=\frac{\pi}{3}(3m+2)$, $n,m=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Пример 6.37. $\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}+\dfrac{\sin 14x}{1+\cos 14x}=0$.

Для решения уравнения проделаем такую же процедуру, что и в предыдущем примере

$$\frac{2\sin 2x\cos 2x}{2\cos^2 2x}+\frac{2\sin 7x\cos 7x}{2\cos^2 7x}=0\Rightarrow \sin 9x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9}n.$$

ОДЗ нашего уравнения выглядит так

$$\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \cos 7x\neq 0\end{cases}\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}(2l+1)\\ x\neq\dfrac{\pi}{14}(2k+1)\end{cases}.$$

Для отбора корней надо разобраться с двумя соотношениями: $\frac{\pi}{9}n\neq\frac{\pi}{4}(2l+1)$ и $\frac{\pi}{9}n\neq\frac{\pi}{14}(2k+1)$.

1. $\frac{\pi}{9}n\neq\frac{\pi}{4}(2l+1)\Leftrightarrow n\neq\frac{9}{4}(2l+1)$. Отметим, что в данном случае неравенство выполняется при всех целых l и n, так как числитель правой части целое нечетное число, а знаменатель- целое четное.

2. $\frac{\pi}{9}n\neq\frac{\pi}{14}(2k+1)\Leftrightarrow n\neq\frac{9}{4}(2k+1)$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Ответ: $x=\frac{\pi}{9}n$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$.

6.2.9. Задачи на оценку

В уравнениях этого раздела мы будем пользоваться ограниченностью тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 6.38. $\sin x=2+\sin x\cos 6x$.

Заметим, что $\sin x\leq 1$, а $2+\sin x\cos 6x\geq 1$, поэтому решения уравнения являются с решениями системы

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \sin x\cos 6x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \cos 6x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}k\end{cases}.$$

Полученные системы можно решать двумя способами.

I способ. Выбираем одно из решений (самое удобное) и подставляем его в оставшееся уравнение или уравнения. Далее выбираем те значения n, которые подходят при подстановке.

В нашем случае подставляем решение первого уравнения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ во второе уравнение $\cos 6x=-1$ и получаем, что при всех целых n значения переменной x удовлетворяют этому уравнению.

II способ. Выбираем из всех функций, входящих в систему, ту, у которой самый большой период. Отмечаем на числовой оси длиной в этот период или на круге точки, являющиеся решениями каждого из уравнений. Те точки, которые совпадут и будут решениями системы. После этого к полученным решениям добавляем самый большой период, умноженный на целое число.

На рис. 6.2. показано как для нашей системы использовать круг. На рис. 6.2. кружочками отмечены решения первого уравнения, а крестиком – решения второго уравнения. Они совпали в точке $\frac{\pi}{2}$.

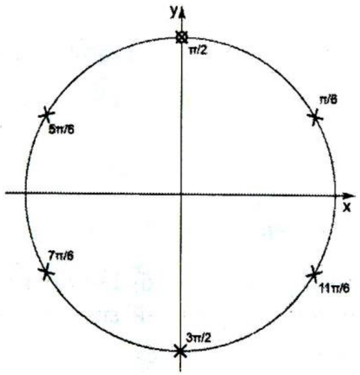

Рис.6.2.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Далеко не всегда оценка в тригонометрических уравнениях является столь очевидной как в предыдущем примере. Довольно часто для получения выражения, которое можно оценивать надо потрудиться.

Пример 6.39. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x$.

В нашем примере так много квадратов, что непреодолимо тянет выделить полный квадрат

$$\sin^2 4x-2\sin 4x\cos^4 x+\cos^8 x=\cos^8 x-\cos^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin 4x-\cos^4 x\right)^2=\cos^2 x\left(\cos^6 x-1\right).$$

Теперь можно оценивать обе части уравнения. Левая часть являетс неотрицательной, а правая неположительной, в силу того, что $\cos^6 x-1\le 0$ и $\cos^2 x\ge 0$.

Таким образом, наше уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 4x-\cos^4 x=0\\ \cos^2 x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 4x-\cos^4 x=0\\ \cos^2 x=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 4x=0\\ \cos 2x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 4x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 4x=0\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 4x=1\\ x=\pi k\end{cases}\end{array}\right..$$

Подстановка, решений полученных в одном из уравнений каждой системы, позволяет легко получить ответ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Отметим, что в тригонометрических задачах на оценку вторая часть решения, зачастую, оказывается более сложной нежели сама оценка.

Пример 6.40. $\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(1-\sin^2 x\cos 2x-2\sin^2 x\right)=1$.

Сначала преобразуем выражение в скобках

$$1-\sin^2 x\cos 2x-2\sin^2 x=\cos 2x-\sin^2 x\cos 2x=\cos^2 x\cos 2x.$$

Теперь наше уравнение принимает вид

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=1,\cos x\ne 0.$$

Произведение косинусов может равняться единице только, если каждый из косинусов будет по модулю равным единице. Если начать выписывать системы, при которых выполняется указанное выше условие, то их окажется слишком много. Поэтому мы сначала преобразуем произведение косинусов в сумму, причем условие $\cos x \neq 0$ мы можем уже не учитывать, так как оно будет выполняться для всех решений системы

$$\cos x\left(\cos 5x+\cos x\right)=2 \Leftrightarrow \cos 6x+\cos 4x+\cos 2x=3 .$$

Теперь уравнение будет выполняться только при равенстве единице каждого из косинусов:

$$\begin{cases}\cos 6x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi n .$$

Ответ: $x=\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Пример 6.41. $\left|5x-19-\cos 2\pi x\right|+6\left|x-20\right|=100-x$.

Это уравнение очень похоже на рассмотренное в примере I.7.16.

Обозначим $5x-19-\cos 2\pi x=a$ и $6x-120=b$. Тогда наше уравнение приобретает вид

$$|a|+|b|=a-b-1+\cos 2\pi x$$

или

$$\left(|a|-a\right)+\left(|b|+b\right)+\left(1-\cos 2\pi x\right)=0 .$$

Выражение в каждой скобке неотрицательно, поэтому для существования решения эти выражения должны равняться нулю и исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5x-19-\cos 2\pi x\geq 0\\ x-20\leq 0\\ \cos 2\pi x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 4\\ x\leq 20\\ x=n\end{cases}.$$

Ответ: $x=4,5,6,\ldots,20$.

Пример 6.42. $\cos x\left(\cos 4x+\cos 8x\right)+\sin^2 x=2$.

Этот пример достаточно провокационный. Дело в том, что, на первый взгляд, вообще не понятно при чем здесь оценка. Однако, лучше такие примеры начинать с предлагаемого ниже пути решения, нежели пускаться в сложные тригонометрические преобразования.

Заменим $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ и получим квадратное уравнение относительно $\cos x$

$$\cos^2 x-\left(\cos 4x+\cos 8x\right)\cos x+1=0 .$$

Для существования решения данного уравнения необходимо (но не достаточно) чтобы дискриминант квадратного уравнения был неотрицательным

$$D=\left(\cos 4x+\cos 8x\right)^2-4\geq 0 .$$

Из очевидного неравенства $-2\leq\left(\cos 4x+\cos 8x\right)\leq 2$ следует, что дискриминант неположителен и решение квадратного уравнения существует только при

$$\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 8x=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos 4x=-1\\ \cos 8x=-1\end{cases}.$$

Мы получили только необходимые условия существования решения. Для получения достаточных условий (в данном случае просто решений) надо подставить полученные значения в исходное уравнение и решить его. В результате получим две системы

$$\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 8x=1\\ \cos x=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos 4x=-1\\ \cos 8x=-1\\ \cos x=-1\end{cases}.$$

Мы уже не будем останавливаться на решении таких систем, а сразу выписшем ответ.

Ответ: $x=2\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Пример 6.43. $\sin^8 x+\cos^7 x=1$.

Отметим два очевидных неравенства

$$\sin^8 x\leq\sin^2 x ,\cos^7 x\leq\cos^2 x .$$

Сложим левые и правые части этих неравенств и получим $\sin^8 x+\cos^7 x\leq 1$. Таким образом, уравнение будет иметь решение только при

$$\begin{cases} \sin^8 x = \sin^2 x \\ \cos^7 x = \cos^2 x \end{cases}$$

Эта система разбивается на совокупность четырех систем

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases}, \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}, \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}, \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases}.$$

Из этих систем только первые имеют решения.

1. $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

2. $\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi k$.

Ответ: $x = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Пример 6.44. $\sin\left(4\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\pi\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x - 80}}\right)}$.

Здесь настолько разные аргументы у тригонометрических функций, что первое желание – попробовать оценить левую и правую части уравнения

$$\sin\left(4\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1, \quad \sqrt{1 + \sin^2\left(\pi\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x - 80}}\right)} \ge 1$$

Следовательно наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(4\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(\pi\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x - 80}}\right) = 0. \end{cases}$$

Решим, сначала, второе уравнение системы.

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x - 80}} = n \Leftrightarrow \begin{cases} n \ge 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 80} = x - n^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge n^2 \\ x = \dfrac{n^4 + 80}{2n^2 - 2} \\ n > 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить возможные целые значения n решаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{n^4 + 80}{2n^2 - 2} \ge n^2 \\ n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = \dfrac{161}{16}. \end{array}\right.$$

Теперь определяем при каком из найденных значений x выполняется условие $\sin\left(4\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ и получаем ответ.

Ответ: $x = \dfrac{161}{16}$.

6.2.10. Разные задачи

При решении уравнений этого раздела применяются столь разнообразные приемы, что мы их решили поместить под вывеской "разное".

Пример 6.45. $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = 1$.

Этот пример можно решать как пример 6.43. Мы покажем другой путь решения, который будет в дальнейшем использоваться при решении многих задач, в том числе и по математическому анализу.

Выпишем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и возведем обе части в степень n, использовав для этого формулу бинома Ньтона (лекция I.2)

$$\sin^{2n} x + C_n^1 \sin^{2n-2} x \cos^2 x + \dots + C_n^1 \sin^2 x \cos^{2n-2} x + \cos^{2n} x = 1$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$C_n^1 \sin^{2n-2} x \cos^2 x + \dots + C_n^1 \sin^2 x \cos^{2n-2} x = 0.$$

Каждое слагаемое в полученной сумме неотрицательно, поэтому решения могут быть получены из совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}n .$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Пример 6.46. $23\sin x-16\sin 3x+8\sin 5x-\sin 7x=0$.

Если бы мы раскрыли синусы тройного, пятерного и семерного углов, то у нас было бы сразу уравнение, дающее часть решений $\sin x=0$. Значит нам надо, не используя эти формулы, так преобразовать левую часть уравнения, чтобы появился общий множитель $\sin x$. Кроме формул разности или суммы синусов нам здесь применить вряд ли что-нибудь удастся, поэтому надо понять, когда в этих формулах появляется множитель $\sin x$. Очевидно, что это происходит при преобразовании разностей: $\sin 7x-\sin 5x$, $\sin 5x-\sin 3x$, $\sin 3x-\sin x$. Теперь понятно как надо производить группировку

$$-\left(\sin 7x-\sin 5x\right)+7\left(\sin 5x-\sin 3x\right)-$$

$$-9\left(\sin 3x-\sin x\right)+14\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x\cos 6x+14\sin x\cos 4x-18\sin x\cos 2x+14\sin x=0 .$$

Часть решений нами уже была найдена – $\sin x=0$, $x=\pi n$.

Для дальнейшего обозначим $\cos 2x=t$, $|t|\le 1$ и, использовав формулы косинуса двойного и тройного углов, получим:

$$-4t^3+14t^2-6t=0\Leftrightarrow t=0 , t=\frac{1}{2} , t=3 .$$

Последнее значение t не подходит, поэтому остается два уравнения: $\cos 2x=0$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $x=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$,

$x=\pm\frac{\pi}{6}(6m+1)$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

6.3. Тригонометрические системы

Тригонометрические системы и неравенства не очень частые гости на вступительных экзаменах. Однако, они очень часто возникают как промежуточные задачи при решении более сложных примеров. Мы постараемся уделить некоторое внимание основным методам решения хотя, без сомнения, эта тема требует более глубокого и детального исследования.

Пример 6.47. $\left\{\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\end{array}\right.$.

Это простейшая система, которая решается подстановкой

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{tg} x+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right.\end{array}\right. .$$

Ответ: $\left(\pi n ; \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k ; -\pi k\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Заметим, что в данном случае при записи ответа надо целые числа в каждом решении обозначать одними и теми же буквами.

Пример 6.48. $\left\{\begin{array}{l}\sin x=\cos 2y\\ \sin 2x=\cos y\end{array}\right.$.

Решаем каждое из уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)\\ \sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}-2y+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{2}+2y+2\pi k\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}-y+2\pi l\\ 2x=\frac{\pi}{2}+y+2\pi m\end{array}\right.\end{array}\right. .$$

В результате, нам надо решить четыре системы. Мы не будем подробно решать каждую из них. Решим одну, а остальные системы желающие могут решить самостоятельно.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2y + 2\pi n \\ x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2} + \pi l \end{cases}.$$

Вычитаем из первого уравнения второе, и получаем:

$$y = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(2n - l) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}(n - 2l).$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3}(n-2l); \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}(2n-l)\right), n, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

$\left(\dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}(n+2m); \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}(2n-m)\right), n, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

$\left(\dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}(k+2l); -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}(l-2k)\right), k, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

$\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}(2m-k); -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}(m-2k)\right), m, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Пример 6.49. $\begin{cases} \sin(\pi x) + \sin(\pi y) = \dfrac{3}{2} \\ \cos(\pi x) + \cos(\pi y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$

Используем в первом уравнении системы формулу суммы синусов, а во втором – суммы косинусов

$$\begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\pi\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\pi\right) = \dfrac{3}{2} \\ 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\pi\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Теперь разделим левые и правые части этих уравнений

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\pi\right) = \sqrt{3}.$$

Далее все понятно.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2} + 2k; \dfrac{1}{6} + 2(n-k)\right), n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

$\left(\dfrac{1}{6} + 2l; \dfrac{1}{2} + 2(m-l)\right), m, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Пример 6.50. $\begin{cases} \cos 3x - 4\sin 2y + \cos x = 0 \\ \cos 2x - 2\cos x\,(2\cos y - \sin y) + 1 - 2\sin 2y = 0 \end{cases}.$

Эта система уже не такая простая как предыдущие. К первому уравнению, вообще, не понятно как подступиться. Для второго уравнения применим прием, который мы уже несколько раз использовали. Решим это уравнение как квадратное относительно $\cos x$

$$\cos^2 x - \cos x\,(2\cos y - \sin y) - \sin 2y = 0.$$

$$D = 4\cos^2 y - 4\cos y \sin y + \sin^2 y + 8\sin y \cos y =$$

$$= (2\cos y + \sin y)^2.$$

Получаем два решения: $\cos x = 2\cos y$ и $\cos x = -\sin y$.

Теперь решаем две системы.

1. $\begin{cases} \cos 3x - 4\sin 2y + \cos x = 0 \\ \cos x = 2\cos y \end{cases}.$

Воспользуемся формулой косинуса тройного угла и получим уравнение

$$\cos y\,(8\sin^2 y + 2\sin y - 7) = 0.$$

Первое решение системы $\cos y = 0, \cos x = 0$. При решении квадратного уравнения получим $\sin y = \dfrac{-1-\sqrt{57}}{8} < -1$ и $\sin y = \dfrac{-1+\sqrt{57}}{8}$.

Но во втором случае для вычисления $\cos x$ оценим $|\cos x| = 2|\cos y| = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{57}}}{4} > 1$.

Значит и второе решение не подходит.

Дальше все очевидно, поэтому переходим ко второй системе.

2. $\begin{cases} \cos 3x - 4\sin 2y + \cos x = 0 \\ \cos x = -\sin y \end{cases}$.

Снова используем формулу косинуса тройного угла и получаем уравнение

$$\sin y\left(2\cos^2 y - 4\cos y - 1\right) = 0.$$

Первое решение системы: $\sin y = 0, \cos x = 0$. Из решений квадратного уравнения нам подходит только $\cos y = \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$.

Поскольку нам надо вычислить $\sin y$, а угол $\arccos\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$ находится во второй четверти, где синус положителен. Поэтому, $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ и $\cos x = -\sin y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}$.

Угол $y = -\arccos\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$ лежит в третьей четверти и тогда $\cos x = -\sin y = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right), \left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \pi k\right)$,

$\left(\pm\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}\right)+2\pi n; \arccos\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}+2\pi k\right)$,

$\left(\pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}\right)+2\pi n; -\arccos\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}+2\pi k\right)$,

$n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Пример 6.51. $\begin{cases} a\cos(2x+y) = \cos y \\ a\cos(x+2y) = \cos x, a>1 \end{cases}$.

Умножим левую часть первого уравнения на правую часть второго и, наоборот, правую часть первого – на левую часть второго уравнения. Получим уравнение-следствие

$$\cos(2x+y)\cos x = \cos(x+2y)\cos y.$$

Теперь, использовав формулу произведения косинусов, получим

$$\cos(3x+y) = \cos(x+3y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y = x+3y+2\pi n \\ 3x+y = -x-3y+2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y+\pi n \\ x = -y+\dfrac{\pi}{2}k \end{array}\right..$$

1. Пусть $x = y + \pi n$. Тогда, подставив это выражение вместо x в первое уравнение исходной системы, затем, использовав формулу косинуса тройного угла, получим

$$\cos y\left(\cos^2 y - \frac{3a+1}{4a}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos y = 0 \\ \cos 2y = \dfrac{a+1}{2a} \end{array}\right..$$

Отметим, что при $a>1$ справедливо $0 < \dfrac{a+1}{2a} < 1$.

2. Пусть $x = -y + \dfrac{\pi}{2}k$. Тогда,

$$a\cos(-y+\pi k) = \cos y \Leftrightarrow \cos y = 0.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi(n+k); \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right), \left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(k-2n); \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$,

$\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a+1}{2a}+\pi k; \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a+1}{2}+\pi k\right)$,

$\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a+1}{2a}+\pi k; -\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a+1}{2}+\pi k\right)$,

$n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Пример 6.52. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}\operatorname{tg} y \end{cases}$.

Подобные системы довольно часто возникают при решении задач на оценку.

Возводим обе части обоих уравнений системы в квадрат, помятуя о том, что в конце надо будет отбирать решения

$$\begin{cases} \sin^2 x = 2\sin^2 y \\ \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 3\dfrac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y} \end{cases}.$$

Обозначим, для удобства, $\sin^2 x = a, 0 \le a < 1$ и $\sin^2 y = b, 0 \le b < 1$. Тогда система приобретет довольно простой вид:

$$\begin{cases} a = 2b \\ a(1-b) = 3b(1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4b^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right..$$

С первым случаем все ясно: $x = \pi n$; $y = \pi k$ и эти решения удовлетворяют исходной системе.

Со вторым случаем дело обстоит несколько сложнее

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2 y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}.$$

Теперь нам предстоит провести отбор корней. Из исходной системы следует, что $\sin x$ и $\sin y$, а так же $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ должны быть одного знака. Так как максимальный период у всех функций равен 2π, то мы отберем все решения на отрезке $[0; 2\pi]$, а затем добавим этот максимальный период.

Итак, имеем:

1. $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin y > 0 \\ \operatorname{tg} y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{6}$.

2. $x = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin y > 0 \\ \operatorname{tg} y < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{5\pi}{6}$.

3. $x = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin y < 0 \\ \operatorname{tg} y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{7\pi}{6}$.

4. $x = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin y < 0 \\ \operatorname{tg} y < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{11\pi}{6}$.

Ответ: $(\pi n; \pi k), \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),$

$$\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k\right),$$

$$n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Как видим, в тригонометрических системах наибольшую сложность представляет не столько решение самой системы, сколько отбор решений и правильность их записи.

6.4. Тригонометрические неравенства

Сначала рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств.

Общее правило решения неравенств вида $f(x) > 0$, причем направление знака неравенства не важно и функция $f(x)$ является периодической с периодом T, заключается в следующем. Сначала решается неравенство на промежутке, длина которого равна T, а затем к найденным решениям добавляется Tn.

1. Неравенство $\sin x > 0$ имеет решение

$$2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Неравенство $\sin x < 0$ имеет решение

$$\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2. Неравенство $\cos x > 0$ имеет решение

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Неравенство $\cos x < 0$ имеет решение

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

3. Неравенство $\operatorname{tg} x > 0$ имеет решение

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ имеет решение

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

4. Неравенство $\operatorname{ctg} x > 0$ имеет решение

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Неравенство $\operatorname{ctg} x < 0$ имеет решение

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Рассмотрим вопрос о решении неравенств вида $\sin x < a, |a| \le 1$.
I способ. Запишем неравенство в виде:

$$\sin x < \sin(\arcsin a) \Leftrightarrow \sin\frac{x - \arcsin a}{2} \cdot \cos\frac{x + \arcsin a}{2} < 0 .$$

В левой части получившегося неравенства находится функция с периодом 2π, поэтому рисуем две оси, на которых отмечаем промежуток от 0 до 2π, и отмечаем на этих промежутках участки знакопостоянства функций, стоящих в левой части неравенства, соответственно на первой оси - первой функции, на второй оси - второй функции. Далее находим промежутки, на которых функции имеют разные знаки и добавляем к границам этих промежутков $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Этот способ решения неравенств соответствует способам решения рациональных и иррациональных неравенств, рассмотренных в лекциях I.6 и 2.

II способ. Нарисуем график функций, находящихся в левой и правой частях исходного неравенства рис. 6.3. Нас интересуют промежутки, где график функции $y = \sin x$ находится ниже графика функции $y = a$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения $\sin x = a$ и аккуратному указанию промежутков.

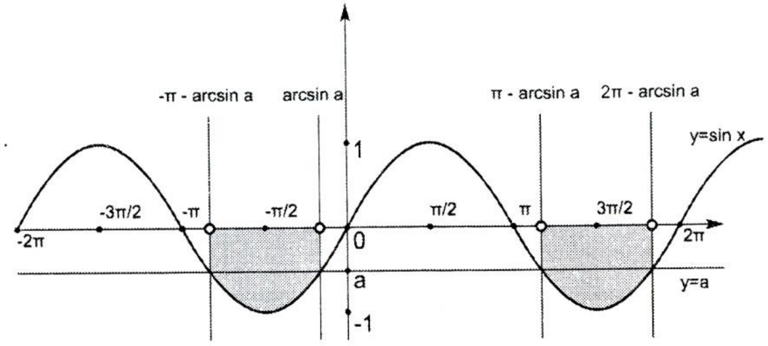

Рис.6.3

Абсолютно аналогично решаются неравенства с другими тригонометрическими функциями и другими знаками неравенств.

Заметим, что второй способ применим для довольно простых неравенств, в то время как первый способ – универсален.

Пример 6.53. $2\sin x \sin 3x > 1$.

Преобразуем произведение синусов в сумму

$$\cos 2x - \cos 4x > 1 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) < 0 .$$

Функция $y = \cos t\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)$, где $2x = t$ имеет период, равный 2π, поэтому решим неравенство на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Заметим, что выбор границ интервала определяется исключительно соображениями удобства.

Для решения неравенства $\cos t\left(\cos t - \frac{1}{2}\right) < 0$ на рис 6.4. на первой прямой нанесены участки знакопостоянства функции $y = \cos t$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Интервал выбирается в силу того, что $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ и границы отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ не являются решениями неравенства. На вторую прямую нанесены участки знакопостоянства функции $y = \cos t - \frac{1}{2}$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, для нахождения которых мы использовали графический метод. На рис. 6.5 нарисованы графики функций $y = \cos t$ и $y = \frac{1}{2}$.

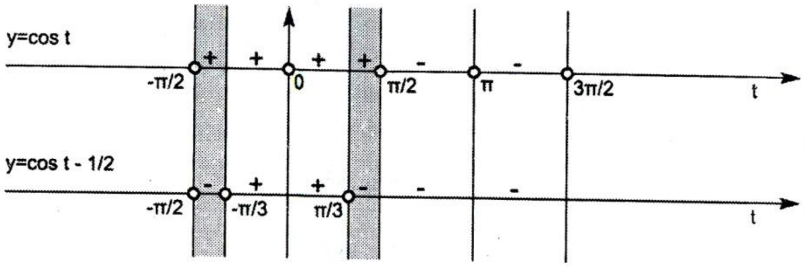

Рис. 6.4.

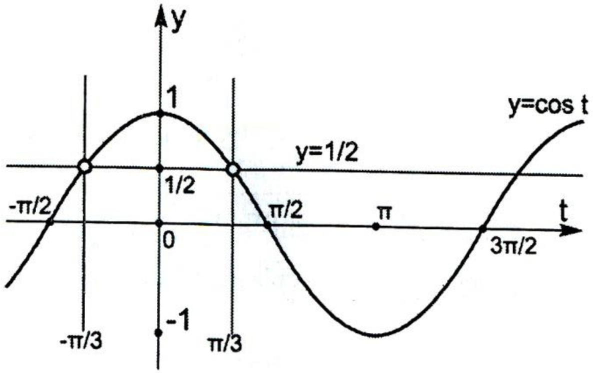

Рис.6.5.

Таким образом

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример 6.54. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$.

Этот пример очень похож на предыдущий.

Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} < 0.$$

В левой части получившегося неравенства находится функция с периодом 2π, поэтому будем искать решения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, учитывая ОДЗ.

Рисуем три прямые и наносим участки знакопостоянства функций $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ рис. 6.6.

Справедливости ради надо заметить, что этот пример можно решить и по другому.

Преобразовав в знаменателе произведение косинусов, получим неравенство

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x + \cos 4x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{2\cos^2 2x + \cos 2x - 1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{(\cos 2x + 1)\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos 2x}{\cos 2x - \frac{1}{2}} < 0 \\ \cos 2x \neq -1 \end{cases}.$$

Это неравенство практически совпадает с неравенством из примера 6.53. Однако, далеко не всегда удается провести подобное преобразование, поэтому всегда надо иметь надежный способ решения.

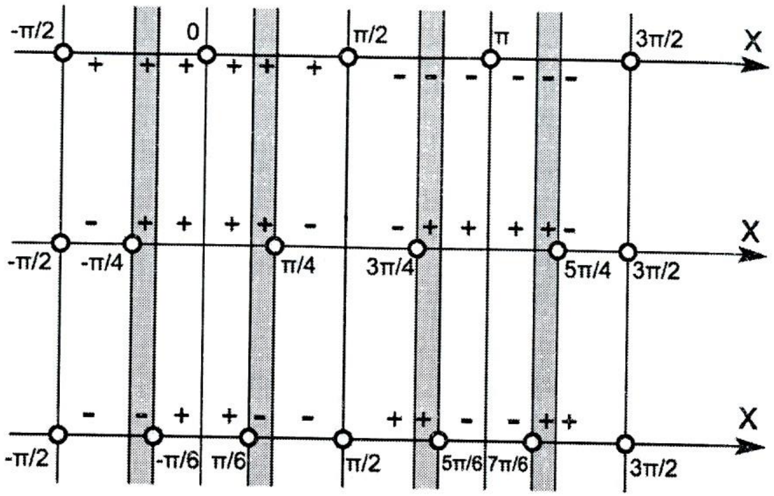

Рис. 6.6

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\,,-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\,,\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n\,,\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n\,,\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Пример 6.55. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4(x+1)}>1$.

На первый взгляд кажется, что ничего сложного нас не ожидает. Однако, посмотрим.

Обозначим $\frac{\pi x}{4(x+1)}=t$ и решим неравенство: $\operatorname{tg} t>1$, которое удобнее всего решать графически. Получим: $\frac{\pi}{4}+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Теперь объектом нашего исследования будет неравенство

$$1+4n<\frac{x}{x+1}<2+4n \Leftrightarrow 4n<-\frac{1}{x+1}<1+4n.$$

Рассмотрим случай $n=0 \Rightarrow 0<-\frac{1}{x+1}<1 \Leftrightarrow x<-2$.

Пусть теперь $n\neq0$. Так как $4n+1\neq0$, то получается следующая система

$$\begin{cases}\dfrac{4n\left(x+\dfrac{4n+1}{4n}\right)}{x+1}<0\\[2ex]\dfrac{(4n+1)\left(x+\dfrac{4n+2}{4n+1}\right)}{x+1}>0\end{cases}.$$

1. $n>0$. Тогда $-2<-\frac{4n+1}{4n}<-\frac{4n+2}{4n+1}<-1$ и система имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{x+\dfrac{4n+1}{4n}}{x+1}<0\\[2ex]\dfrac{x+\dfrac{4n+2}{4n+1}}{x+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4n+1}{4n},-\frac{4n+2}{4n+1}\right).$$

2. $n<0$. Тогда $-1<-\frac{4n+1}{4n}<-\frac{4n+2}{4n+1}<0$ и имеем систему

$$\begin{cases}\dfrac{x+\dfrac{4n+1}{4n}}{x+1}>0\\[2ex]\dfrac{x+\dfrac{4n+2}{4n+1}}{x+1}<0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4n+1}{4n};-\frac{4n+2}{4n+1}\right).$$

Ответ: $(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{4n+1}{4n},-\frac{4n+2}{4n+1}\right)$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$.

Все оказалось не так просто, как видилось вначале.

Задачи для разбора с преподавателем

Доказать тождество:

6.1. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

6.2. $\operatorname{tg}55°\cdot\operatorname{tg}65°\cdot\operatorname{tg}75°=\operatorname{tg}85°$.

6.3. $\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}80°-\operatorname{tg}60°=8\sin 40°$.

6.4. $\operatorname{tg}^6 20°-33\operatorname{tg}^4 20°+27\operatorname{tg}^2 20°-3=0$.

6.5. $\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$.

6.6. Доказать, что если $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $A+B+C=\pi$, то

$$\sin^3\alpha=\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha).$$

6.7. Доказать, что если $\sin z+\cos z=x$ и $\sin^3 z+\cos^3 z=y$, то

$$y=\frac{3x-x^3}{2}.$$

6.8. Доказать, что если

$$a\sin x+b\cos x=(2a+b)\sin^2\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2},$$

где $b\neq 0, 2a+b\neq 0$, то либо $\operatorname{tg}x=0$, либо $\operatorname{tg}x=\frac{2a(a+b)}{b(b+2a)}$.

Доказать равенства:

6.9. $\sin 6\alpha=2\sin\alpha\left(16\cos^5\alpha-16\cos^3\alpha+3\cos\alpha\right)$.

6.10. $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=8\sin^4\alpha-8\sin^2\alpha+1$.

6.11. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

6.12. $2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)+1=0$.

6.13. $8\cos 10°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70°=\sqrt{3}$.

6.14. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

6.15. Доказать, что , если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

6.16. Доказать, что , если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma.$$

6.17. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

6.18. Доказать, что , если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

6.19. Найти сумму $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx$.

6.20. Найти сумму $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}$.

6.21. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

6.22. Вычислить $\cos 36°$.

6.23. Доказать, что $4\cos^2\frac{\pi}{7}, 4\cos^2\frac{2\pi}{7}, 4\cos^2\frac{3\pi}{7}$ корни уравнения

$$x^3-5x^2+6x-1=0.$$

Решить уравнения:

6.24. $\sin x-\sin 3x=\sin 4x-\sin 2x$.

6.25. $\cos 5x+\sin x\sin 4x=0$.

6.26. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

6.27. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$.

6.28. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\frac{5}{8}$.

6.29. $\sin^3 3x+\cos^3 3x+\sin 3x\cos 3x=1$.

6.30. $\sin x+\cos x=1+\sin x\cos x$.

6.31. $16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$.

6.32. $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$.

6.33. $2+4\cos 4x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

6.34. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

6.35. $(\cos x-1)\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-1\right)=\sin^2 x$.

6.36. $2+\cos x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

6.37. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$.

6.38. $\sqrt{8\sin x+\frac{13}{3}}=2\cos x+2\operatorname{tg} x$.

6.39. $1+2(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)=0$.

6.40. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x$.

6.41. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 4x=0$.

6.42. $2\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x$.

6.43. $\sin^{2n} x+\cos^{2n} x=1$.

6.44. $\sin 3x+\sin^3 x=\sin 2x$.

6.45. $\log_4\left(\cos 2x-\frac{1}{10}\right)+1=\log_2 \operatorname{tg} x$.

6.46. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5}\cdot\log_5\left(\frac{25}{4x^2-x}\right)=1,$$

удовлетворяющие условию $\sin x<\operatorname{ctg} 2x$.

Решить уравнения:

6.47. $\log_3(\sin 3x-\sin x)=2\log_9(17\sin 2x)-1$.

6.48. $\log_3(5\sin x+6)\cdot\log_7(5\sin x+6)=$

$$=\log_3(5\sin x+6)+\log_7(5\sin x+6).$$

6.49. $\sqrt{\frac{7}{2}-3\sin^2 x}=\sin x+\cos x$.

6.50. $\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 3x+\sin 5x}{|\sin x|}=\sqrt{3}$.

6.51. $\frac{\cos x}{\cos 3x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$.

6.52. $2+\sqrt{3}\cos x+|\sin x|=4\sin^2 x$.

6.53. $\sin^2 2x+\sin^2 4x=1-\frac{\cos 2x}{\cos 3x}$.

6.54. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x-\cos x}=\frac{\cos 6x}{\sin x+\cos x},$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Решить уравнения:

6.55. $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3$.

6.56. $\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$.

6.57. $\sqrt{1-\sin 2x}+\sin x=\frac{1}{2}+\cos x$.

6.58. $\frac{\sin 3x\cos 5x+|\sin 5x\cos 3x|}{\sin 2x}=2\cos 2x$.

6.59. $\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(1-\sin^2 x\cos 2x-2\sin^2 x\right)=1$.

6.60. $\sin x+|\cos x|+\sin 4x=\cos 2x$.

6.61. $\sin 7x+\sin 5x=4\sin 3x$.

6.62. $\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sqrt{3x^2-17x-6}=0$.

6.63. $\sin^2 x+3x^2\cos x+3x^2=0$.

6.64. $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

6.65. $\sin x=2+\sin x\cos 6x$.

6.66. $2-(7+\sin 2x)\sin^2 x+(7+\sin 2x)\sin^4 x=0$.

6.67. $(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5$.

6.68. Найти корни уравнения $\cos 8x=\frac{\operatorname{ctg}^2 2x-1}{\operatorname{ctg}^2 2x+1}$, принадлежащие отрезку $[0,2\pi]$.

Решить уравнения:

6.69. $\operatorname{ctg}^2 x=8\cos^2 2x\operatorname{ctg} x+1$.

6.70. $\operatorname{ctg}^4 x+9=\operatorname{ctg}^2 x(5-\sin 3x)$.

6.71. $(\cos 3x+1)(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=4$.

6.72. $\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin 5x}$.

6.73. $\cos x(\cos 4x+\cos 8x)+\sin^2 x=2$.

6.74. $5\cos 3x+3\cos x=3\sin 4x$.

6.75. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7x}{2}\right)-\sin\left(4x-\frac{\pi}{14}\right)=-1$.

6.76. $\sin x+\sin 2x+2\sin x\sin 2x=2\cos x+\cos 2x$.

6.77. $1+\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x$.

6.78. $|5x-19-\cos 2\pi x|+6|x-20|=100-x$.

Решить системы уравнений:

6.79. $\begin{cases} 10\cos 2x-2=7\cos x\cos 2y \\ \sin x=\sqrt{\cos x}\sin y \end{cases}$.

6.80. $\begin{cases} |\sin 3x|=-\sqrt{2}\sin y \\ \cos 2y+2\cos 2x\sin^2 2x=\frac{3}{4} \end{cases}$.

6.81. $\begin{cases} 6\sin x\cos y+2\cos x\sin y=-3 \\ 5\sin x\cos y-3\cos x\sin y=1 \end{cases}$.

Решить неравенство:

6.82. $\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}}>-\sin x$.

Решить уравнения:

6.83. $\frac{\sin^5 x-\cos^5 x}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\sin^5 x+\cos^5 x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{7}{8}-\frac{3}{2}\cos 2x$.

6.84. $(8\sin x+15\cos x)(53+32\sin x+17\cos 2x)=1318$.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать тождество:

6.1д. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

6.2д. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\beta}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0$.

6.3д. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

6.4д. $\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{4\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}$.

6.5д. $\cos^4\alpha=\frac{1}{8}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{3}{8}$.

6.6д. $\cos^5\alpha=\frac{1}{16}\cos 5\alpha+\frac{5}{16}\cos 3\alpha+\frac{5}{8}\cos\alpha$.

6.7д. $\operatorname{tg} 20^\circ\cdot\operatorname{tg} 40^\circ\cdot\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\operatorname{tg} 80^\circ=3$.

6.8д. $\operatorname{tg} 10^\circ\cdot\operatorname{tg} 50^\circ\cdot\operatorname{tg} 70^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.9д. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

6.10д. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right).$$

6.11д. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

6.12д. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

6.13д. Доказать, что, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma.$$

6.14д. Доказать, что если $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$, то

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

6.15д. Вычислить $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$.

6.16д. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-3$.

6.17д. Найти $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}$, если известно, что $\cos\alpha=\dfrac{a}{b+c}, \cos\beta=\dfrac{b}{c+a}, \cos\gamma=\dfrac{c}{b+a}$.

6.18д. Найти сумму $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx$.

6.19д. Найти сумму $\cos\dfrac{2\pi}{21}+\cos\dfrac{4\pi}{21}+\ldots+\cos\dfrac{20\pi}{21}$.

6.20д. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 20°, \operatorname{tg}^2 40°, \operatorname{tg}^2 80°$ корни уравнения $x^3-33x^2+27x-3=0$.

6.21д. Вычислить

$$\operatorname{tg}^3\alpha-8\operatorname{ctg}^3\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha-8\operatorname{ctg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha+6\operatorname{ctg}\alpha+3,$$

если $\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha=2$.

6.22д. Найти $\cos(\alpha-\beta)$, если известно, что $\sin\alpha+\sin\beta=-\sqrt{2}$, и $\cos\alpha+\cos\beta=-1$.

6.23д. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

6.24д. Найти сумму $\cos^4\dfrac{\pi}{12}+\cos^4\dfrac{5\pi}{12}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{9\pi}{8}$.

6.25д. Доказать, что если $\operatorname{tg}a_1, \operatorname{tg}a_2, \operatorname{tg}a_3$ корни уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

а $\operatorname{tg}b_1, \operatorname{tg}b_2, \operatorname{tg}b_3$ корни уравнения

$$x^3+cx^2+bx+a=0,$$

то $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=\pi k$.

Решить уравнения:

6.26д. $\sin 2x+\sin 3x+\cos 5x=1$.

6.27д. $\sin x+\cos x=\sin 2x+\cos 2x$.

6.28д. $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\sin 15x$.

6.29д. $4\sin 2x+3\cos 2x=5{,}1$.

6.30д. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\dfrac{3}{2}$.

6.31д. $\sin^4 3x-\cos^4 3x=\dfrac{1}{2}$.

6.32д. $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$.

6.33д. $\sin^6 2x+\cos^6 2x=\cos 4x$.

6.34д. $\sin^6 2x+\cos^6 2x=-2\cos^2 4x$.

6.35д. $4\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\sin 12x$.

6.36д. $\sin^8 2x+\cos^7 2x=1$.

6.37д. $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$.

6.38д. $\dfrac{\cos 6x}{\cos 2x}+6\sin 2x+1=0$.

6.39д. $3\sin^2 x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$.

6.40д. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\operatorname{ctg}^2 x$.

6.41д. $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$.

6.42д. $2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0$.

6.43д. $\dfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)=\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$.

6.44д. $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$.

6.45д. $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

6.46д. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x+\cos x-2}=4\cdot\dfrac{\sin x+\cos x}{9-3\sin 2x}$.

6.47д. $\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}4x=0$.

6.48д. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0$.

6.49д. $2\operatorname{ctg}3x-3\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}2x$.

6.50д. $6\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}3x=\operatorname{tg}2x$.

6.51д. $2\operatorname{tg}6x+4\operatorname{tg}12x+8\operatorname{ctg}24x+\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}2x$.

6.52д. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=0$.

6.53д. $4\operatorname{tg}4x-4\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}4x$.

6.54д. $\log_{125}(\sin 2x-\sin x)+\dfrac{1}{3}=\log_5(-2\sin x)$.

6.55д. $\log_6(\cos x+\cos 3x)=2\log_{36}(\sin 2x)-1$.

6.56д. $\sqrt{5\operatorname{tg} x+10}=\frac{5}{2}\sin x+\frac{1}{\cos x}$.

6.57д. Найти решения $\sqrt{\log_2\left(8x^2+8x\right)}=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+x\right)$, удовлетворяющие условию $\cos x<\operatorname{tg} 3x$.

3

6.58д. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos 6x}{-\sin x+\cos x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решить уравнения:

6.59д. $\sqrt{\frac{13}{3}+\cos 2x}+\operatorname{ctg} x=0$.

6.60д. $\frac{2\sin 3x+\sin 5x}{|\sin x|}=1$.

6.61д. $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$.

6.62д. $\sin^2 x+\sin^2 2x=1-\frac{\cos 3x}{\cos 2x}$.

6.63д. $2+\sqrt{3}\sin 2x-|\cos 2x|=4\sin^2\frac{x}{2}$.

6.64д. $4\cos 3x\cos^3 x+9\cos^2 20x=13+4\sin 3x\sin^3 x$.

6.65д. $6\operatorname{ctg} x+27\operatorname{tg} 2x+21\operatorname{ctg} 3x=2\sin 4x+9\sin 2x$.

6.66д. Сколько корней на отрезке $[0,1]$ имеет уравнение:

$$8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1.$$

Решить уравнения:

6.67д. $\sin^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}$.

6.68д. $32\cos^6 x-\cos 6x=1$.

6.69д. $\sin 5x=16\sin^5 x$.

6.70д. $\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=0$.

6.71д. Доказать, что уравнение $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x=2$ не имеет решений.

Доказать:

6.72д. $\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)\left(1-3\operatorname{tg}^2 x\right)\left(1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x\right)>0$.

6.73д. $\left(\operatorname{ctg}^2 x-1\right)\left(3\operatorname{ctg}^2 x-1\right)\left(\operatorname{tg} 2x\operatorname{ctg} 3x-1\right)\le -1$.

Решить уравнения:

6.74д. $\sin x\left(1+\cos x\right)=1+\cos x+\cos^2 x$.

6.75д. $\left(3-2\cos^4 6x\right)\left(1-\operatorname{ctg}^2 x\right)\left(1-3\operatorname{ctg}^2 x\right)\left(1-\operatorname{tg} 2x\operatorname{ctg} 3x\right)=1$.

6.76д. $\cos^2 2x+\frac{1}{4}\sin^2 4x+1=\sin 4x\cos 2x+\sin^2 x$.

6.77д. $4\sin 3x+\sqrt{2}\sin^4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=4\cos 3x-4\sqrt{2}$.

6.78д. $2\cos 2x=\sin x\sin 3x-\sin^2 3x$.

6.79д. $3\cos x=\sin x+2\sin 3x$.

6.80д. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$.

6.81д. $\sin x\left(1-\cos x\right)^2+\cos x\left(1-\sin x\right)^2=2$

6.82д. $5\sin 2x+4\cos^3 x-8\cos x=0$.

6.83д. $\sin^2 x+\cos^2 2x=2\sin^3 x\cos^3 2x$.

6.84д. $\cos 4x+5\cos 2x+3=\sin 3x$.

6.85д. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$.

6.86д. $|\sin x|=\sin x+2\cos x$.

6.87д. $\cos^2 x+\cos^2 2x=1+\operatorname{ctg} 3x$.

6.88д. $\cos^7 x\cos 7x-\sin^7 x\sin 7x=-\frac{5}{16}$.

6.89д. $\cos x+|\sin x|+\cos 2x=\sin 4x$.

6.90д. $\frac{\cos 5x}{\cos x}\left(-1-\sin^2 x\cos 2x+2\cos^2 x\right)=1$.

6.91д. $2\cos 2x=\sin 3x\cdot\sin x-\sin^2 3x$.

6.92д. Найти корни уравнения $\frac{1}{2}\sin 6x=\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, принадлежащие отрезку $[0,2\pi]$.

Решить уравнения:

6.93д. $\operatorname{tg}^4 2x+9=\operatorname{tg}^2 2x\left(4+2\sin 3x\right)$.

6.94д. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x=\sqrt{3}-8\cos^2 2x\operatorname{tg} x$.

6.95д. $(1-\sin 3x)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=4.$

6.96д. $\sin x(\cos 4x+\cos 8x)+\cos^2 x=2.$

6.97д. $\cos^2 3x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x.$

6.98д. $2\sin x+3\cos x+2\cos x\sin 2x=2+\cos 2x+3\sin 2x.$

6.99д. $\operatorname{ctg} 2x+3\operatorname{tg} 3x=2\operatorname{tg} x+\frac{2}{\sin 4x}.$

6.100д. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x.$

6.101д. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 2x+\cos^4 2x.$

6.102д. $\sqrt{2}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\sin 2x.$

6.103д. $\sin 4x\sin x-\sin 3x\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 3x+\sqrt{1+\cos x}.$

6.104д. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right)=\sqrt{3}.$

6.105д. $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}.$

6.106д. $2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}+3x\right)+\sin 5x=-1.$

6.107д. $\left|x^3-9x^2-2x+60\right|+\left|\cos 2\pi x+2x+1\right|=$

$$=x^3-9x^2+60.$$

6.108д. $(5\sin x+12\cos x)(100+48\cos x-13\cos 2x)=1757.$

Решить системы уравнений:

6.109д. $\begin{cases}\sqrt{\operatorname{tg} x-6\operatorname{ctg} x}=3\operatorname{tg} y\\ \frac{4}{3}\sin x\cos y=\sqrt{2\sin 2x}\end{cases}.$

6.110д. $\begin{cases}\left|\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sin y+\cos y\\ \sin 2y+2\sin 2x=-\frac{3}{4}+2\sin^3 2x\end{cases}.$

6.111д. $\begin{cases}3\cos x\cos y+7\sin x\sin y=4\\ 5\cos x\cos y-3\sin x\sin y=3\end{cases}.$

6.112д. $\begin{cases}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \left(\sqrt{3}-2\cos\frac{\pi x}{3}\right)\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{15}{2}-x\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}\le 0\end{cases}.$

6.113д. $\begin{cases}\sin(x+y)+\sin(x-y)=\operatorname{ctg} x+\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}\\ \sin(x+y)-\sin(x-y)=\operatorname{ctg} y+\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}\\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\le y<0\end{cases}.$

6.114д. $\begin{cases}1+2\operatorname{ctg} x\cdot\sin y=0\\ \sqrt{1+\sin x\cdot\sin y}=\cos y\\ |x|\le\pi,\ |y|\le\pi\end{cases}.$

Решить неравенство:

6.115д. $\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}}>-2\cos x.$

Решить уравнения:

6.116д. $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sqrt{8}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sqrt{8}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-2\cos^4 2x}{\sin 2x}.$

6.117д. $\cos 3x+\cos 2x=3|\cos x|-\cos 4x.$

6.118д. $\cos x\sqrt{1+\sin x-2\cos x}=\cos x-\sin x.$

6.119д. $\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|}=\frac{\cos 3x}{\cos x}.$

6.120д. Найти ООФ функции:

$$f(x)=\frac{\sqrt{4\cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{11\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}-2\sin\frac{\pi x}{6}-3}}{\sqrt{9+8x-x^2}}.$$

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

6.19. 0, при $x=\pi n$, $S=\frac{n}{2}-\frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x}$, $x\neq\pi n$. **6.20**. $\frac{1}{2}$. **6.21**. $\frac{4}{5}$.
6.22. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{\pi}{5}(2n+1)$. **6.24**. πn; $\frac{\pi}{5}(2n+1)$. **6.25**. $\frac{\pi}{8}(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}(2n+1)$.
6.26. $\frac{\pi}{14}(2n+1)$; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.27**. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{84}(12n+7)$. **6.28**. $\frac{\pi}{12}(6n\pm 1)$.
6.29. $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}(4n+1)$. **6.30**. $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.31**. $\frac{2\pi n}{15}$, $n\neq 15k$; $\frac{\pi}{17}(2n+1)$, $n\neq 17k+8$. **6.32**. $\frac{\pi}{8}(4n-1)$. **6.33**. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $\frac{\pi}{12}(12n+1)$; $\frac{\pi}{12}(12n+5)$. **6.34**. $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$. **6.35**. $2\pi n$; $\frac{\pi}{4}(4n-1)$.
6.36. $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.37**. πn; $\frac{\pi}{4}(4n-1)$. **6.38**. $\frac{\pi}{6}(12n\pm 1)$. **6.39**. $\frac{\pi n}{7}$, $n\neq 7k$.
6.40. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **6.41**. $\frac{\pi}{8}(2n+1)$; $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\neq 3k+1$. **6.42**. πn. **6.43**. $\frac{\pi n}{2}$.
6.44. $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$. **6.45**. $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}+\pi n$. **6.46**. -1.
6.47. $\pi+\arccos\frac{1}{6}+2\pi n$. **6.48**. $\frac{\pi}{2}(4n-1)$. **6.49**. $\frac{\pi}{4}(8n+1)$; $\arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}+2\pi n$.
6.50. $\frac{\pi}{4}(8n+1)$; $\frac{\pi}{4}(8n+3)$; $\frac{\pi}{2}(2n-1)$; $\frac{\pi}{12}(24n-5)$; $\frac{\pi}{12}(24n-7)$. **6.51**. πn; $\frac{\pi}{8}(2n+1)$. **6.52**. $\frac{\pi}{18}(36n\pm 7)$; $\frac{\pi}{6}(12n\pm 5)$. **6.53**. $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.54**. $-\frac{\pi}{20}$; $-\frac{9\pi}{20}$. **6.55**. $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi n}{2}$. **6.56**. $\frac{\pi}{5}(10n+3)$; $\frac{2\pi}{15}(15n+7)$; $\frac{2\pi}{15}(15n+2)$.
6.57. $\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{8}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{8}+2\pi n$. **6.58**. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{3}(3n-1)$; $\frac{\pi}{12}(6n+1)$. **6.59**. πn. **6.60**. πn; $\frac{\pi}{2}(4n-1)$; $\frac{\pi}{4}(8n-1)$; $\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}(8n+5)$. **6.61**. $\frac{\pi n}{3}$. **6.62**. 6. **6.63**. 0; $\pi(2n+1)$. **6.64**. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$.
6.65. $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.66**. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$. **6.67**. $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.68**. $\frac{\pi n}{6}$, $n=1,2,4,5,7,8,10,11$.
6.69. $\frac{\pi}{24}(12n+1)$; $\frac{\pi}{24}(12n+5)$; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.70**. $\frac{\pi}{6}(12n+7)$; $\frac{\pi}{6}(12n-1)$.
6.71. $\frac{2\pi}{3}(3n+1)$. **6.72**. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$ $\frac{\pi}{9}(2n+1)$, $n\neq 9k+4$. **6.73**. $2\pi n$. **6.74**. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n$; $\pi+\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{6}(12n+1)$; $\frac{\pi}{6}(12n+5)$. **6.75**. $\frac{\pi}{14}(28n-5)$.
6.76. $\frac{\pi}{6}(4n+1)$; $-\frac{\pi}{2}(4n-1)$; $\frac{2\pi}{3}(3n\pm 1)$. **6.77**. $2\pi n$; $\frac{\pi}{8}(4n-1)$; $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.78**. $4,5,\ldots,20$. **6.79**. $\left(\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}+\pi n\right)$; $\left(\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $\left(-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}+\pi n\right)$; $\left(-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. **6.80**. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$.
6.81. $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);-\frac{2\pi}{3}+\pi(n-k)\right)$.
6.82. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$. **6.83**. $\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)$. **6.84**. $\arcsin\frac{8}{17}+2\pi n$.

Задачи для самостоятельного решения

6.18д. n, при $x=\pi n$, $S=\frac{n}{2}+\frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x}$, $x\neq\pi n$. **6.19д**. $-\frac{1}{2}$. **6.21д**. 1.
6.23д. $\frac{1}{2}$. **6.24д**. $\frac{1}{2}$. **6.26д**. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{6}(4n+1)$; $\frac{2\pi n}{5}$. **6.27д**. $\frac{\pi}{6}(4n+1)$; $2\pi n$.
6.28д. $\frac{\pi}{20}(4n+1)$; $\frac{\pi}{100}(8n+3)$. **6.29д**. $\varnothing$. **6.30д**. $\frac{\pi}{16}(2n+1)$; $\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)$. **6.31д**. $\frac{\pi}{9}(3n\pm 1)$. **6.32д**. $\frac{\pi}{4}(8n+1)$. **6.33д**. $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$. **6.34д**. $\varnothing$. **6.35д**. $\frac{\pi n}{8}$.
6.36д. πn; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.37д**. πn. **6.38д**. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3-\sqrt{17}}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3-\sqrt{17}}{4}+\pi n$. **6.39д**. $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; $2\operatorname{arctg}2+2\pi n$; $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$.
6.40д. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{2}(2n-1)$. **6.41д**. $\pi(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.42д**. $\frac{\pi}{66}(6n-1)$; $\frac{\pi}{18}(3n-1)$. **6.43д**. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\pi n$. **6.44д**. $\frac{\pi}{12}(12n+1)$; $\frac{\pi}{24}(4n+1)$. **6.45д**. $\cos\frac{3\pi}{10}$. **6.46д**. $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}+2\pi n$. **6.47д**. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\neq 3k+1$.
6.48д. $\frac{\pi n}{3}$. **6.49д**. $\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$. **6.50д**. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$.
6.51д. $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $n\neq 5k+2$. **6.52д**. πn. **6.53д**. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n$; πn.

6.54д. $\pi+\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$. **6.55д.** $\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n$; $\pi+\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$.

6.56д. $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}+2\pi n$; $\pi-\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}+2\pi n$. **6.57д.** -2. **6.58д.** $\frac{\pi}{20};\frac{9\pi}{20}$.

6.59д. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{10}+\pi n$. **6.60д.** $\frac{\pi}{4}(8n+1)$; $\frac{\pi}{4}(8n+3)$; $\frac{2\pi}{3}(3n+2)$; $\frac{\pi}{3}(6n-1)$; $\frac{\pi}{2}(4n+3)$. **6.61д.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.62д.** $2\pi n$; $\frac{\pi}{6}(2n+1)$. **6.63д.** $\frac{\pi}{9}(18n-7)$; $\frac{\pi}{9}(18n-1)$; $\frac{2\pi}{9}(9n+2)$; $\frac{2\pi}{3}(6n-1)$. **6.64д.** $\frac{\pi n}{2}$. **6.65д.** $\frac{\pi n}{2}$. **6.66д.** 4.

6.67д. $\frac{\pi}{4}(4n+1)$. **6.68д.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$. **6.69д.** $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$.

6.70д. $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **6.71д.** $\varnothing$. **6.74д.** $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.75д.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **6.76д.** $\varnothing$.

6.77д. $\frac{\pi}{12}(24n-1)$. **6.78д.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **6.79д.** $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\operatorname{arctg}\left(-2\pm\sqrt{7}\right)+\pi n$. **6.80д.** $\frac{\pi}{8}(4n\pm1)$. **6.81д.** $2\pi n$; $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$.

6.82д. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\frac{\pi}{6}(12n+1)$; $\frac{\pi}{6}(12n+5)$. **6.83д.** $\frac{\pi}{2}(4n-1)$. **6.84д.** $\frac{\pi}{3}(3n\pm1)$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.85д.** $\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$. **6.86д.** $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; $\frac{\pi}{4}(8n-1)$. **6.87д.** $\frac{\pi}{6}(2n+1)$.

6.88д. $\frac{\pi}{6}(3n\pm1)$; $\pm\frac{1}{4}\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\pi n}{2}$. **6.89д.** $\frac{\pi}{4}(2n\pm3)$; $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\pi(2n+1)$; $\frac{5\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+2\pi n$. **6.90д.** πn. **6.91д.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$.

6.92д. $0;\pi;\ 2\pi;\ \frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{7\pi}{8};\ \frac{9\pi}{8};\ \frac{11\pi}{8};\ \frac{13\pi}{8};\ \frac{15\pi}{8}$. **6.93д.** $\frac{\pi}{6}(12n+1)$; $\frac{\pi}{6}(12n+5)$. **6.94д.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $\frac{\pi}{12}(6n+1)$; $\frac{\pi}{6}(3n+1)$. **6.95д.** $\frac{\pi}{6}(12n-1)$.

6.96д. $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.97д.** $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.98д.** $2\pi n$; $\frac{\pi}{6}(12n+1)$; $\frac{\pi}{6}(12n+5)$; $\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$. **6.99д.** πn; $\frac{\pi}{2}\pm\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$. **6.100д.** $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **6.101д.** $\frac{\pi n}{6}$.

6.102д. $\frac{\pi}{4}(8n+1)$; $-\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+2\pi n$; $\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+2\pi n$.

6.103д. $\pi\pm\arccos\left(2\sqrt{2}-2\right)+2\pi n$. **6.104д.** $\pm\frac{1}{6}+n$. **6.105д.** $-2;-\frac{1}{2};1;\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

6.106д. $\frac{\pi}{10}(20n+7)$. **6.107д.** $\frac{1}{2}+n$, $n=0,1,2,8,9,10,11\ldots$. **6.108д.** $\arccos\frac{12}{13}+2\pi n$.

6.109д. $\left(\operatorname{arctg}3+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$; $\left(\pi+\operatorname{arctg}3+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$; $\left(\operatorname{arctg}6+2\pi n;\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k\right)$; $\left(\pi+\operatorname{arctg}6+2\pi n;\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k\right)$.

6.110д. $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;2\pi k\right)$.

6.111д. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$. **6.112д.** $3;7;\frac{15}{2}$.

6.113д. $\left(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$. **6.114д.** $\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

6.115д. $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$. **6.116д.** $\frac{\pi}{12}(6n\pm1)$. **6.117д.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $2\pi n$; $\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{13}+1}{4}+2\pi n$. **6.118д.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$; $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$.

6.119д. $\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$. **6.120д.** $(-1,1]\cup[2,3)\cup[8,9)$.

Лекция №7

Обратные тригонометрические функции

7.1. Определение и основные свойства

Сначала дадим определение обратных тригонометрических функций.

Определение 7.1. Функция $y = f(x)$, определенная для любого $x : -1 \le x \le 1$, принимающая все значения из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и такая, что $\sin y = x$, является обратной к функции $y = \sin x$, определенной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Записывается такая функция: $y = \arcsin x$.

На рис. 7.1. представлен график функции $y = \arcsin x$.

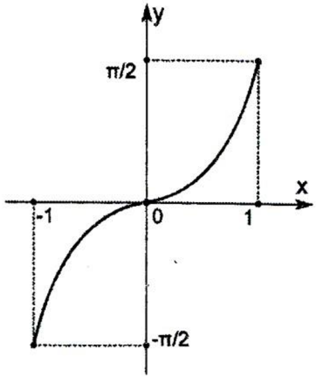

Рис. 7.1.

Функция $y = \arcsin x$ является непрерывной и возрастающей на области определения.

Определение 7.2. Функция $y = f(x)$, определенная для любого $x : -1 \le x \le 1$, принимающая все значения из отрезка $[0, \pi]$ и такая, что $\cos y = x$, является обратной к функции $y = \cos x$, определенной на отрезке $[0, \pi]$. Записывается такая функция: $y = \arccos x$.

На рис. 7.2. представлен график функции $y = \arccos x$.

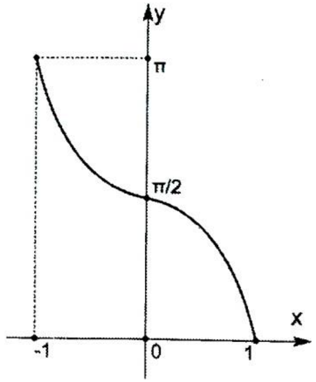

Рис. 7.2.

Функция $y = \arccos x$ является непрерывной и убывающей на области определения.

В отличие от соответствующих тригонометрических функций, обратные функции определены не для любых значений аргумента. Это создает дополнительные трудности, при решении уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями.

Определение 7.3. Функция $y = f(x)$, определенная для любого x, принимающая все значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и такая, что $\operatorname{tg} y = x$, является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, определенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Записывается такая функция: $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

На рис. 7.3. представлен график функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

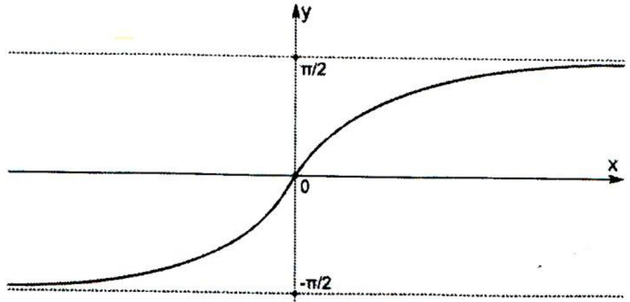

Рис. 7.3.

Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ является непрерывной и возрастающей.

Определение 7.4. Функция $y = f(x)$, определенная для любого x, принимающая все значения из интервала $(0,\pi)$ и такая, что $\operatorname{ctg} y = x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, определенной на интервале $(0,\pi)$. Записывается такая функция: $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

На рис. 7.4. представлен график функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

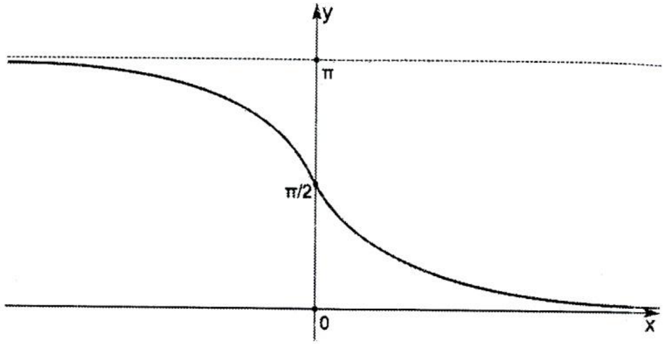

Рис.7.4.

Функция $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ является непрерывной и убывающей.

Пример 7.1. Вычислить $\sin(\arccos x)$.

Обозначим $\alpha = \arccos x$, $0 \le \alpha \le \pi$. Задача теперь может быть сформулирована следующим образом: известно, что $\cos\alpha = x$, $0 \le \alpha \le \pi$. Найти $\sin\alpha$.

Из основного тригонометрического тождества следует, что $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так как $0 \le \alpha \le \pi$, где $\sin\alpha$ неотрицательный, то

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Похожим образом получаются формулы:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ \cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad (7.1)$$

Для получения формулы $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ выпишем следующую цепочку

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (7.2)$$

Докажем теперь важное соотношение, связывающее между собой обратные тригонометрические функции (основное тождество).

Пример 7.2. Доказать, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \le 1. \qquad (7.3)$$

Перепишем доказываемое равенство $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ и будем его доказывать для двух промежутков $-1 \le x \le 0$ и $0 \le x \le 1$. Предварительно обозначим $\arcsin x = \alpha$ и $\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

1. $-1 \le x \le 0$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le 0$ и $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le 0$. Это означает, что из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ будет следовать $\alpha = \beta$. Заметим, что если бы мы не показали, что углы находятся в одной четверти, то последний вывод был бы, вообще говоря, неверным.

Имеем $\sin\alpha = \sin(\arcsin x) = x$ и

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$$

и мы доказали требуемое равенство.

2. $0 \le x \le 1$. Почти такие же рассуждения показывают, что оба угла находятся в первой четверти, а далее – аналогично п.1.

Можно доказать равенство и другим способом.

Имеем $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x + \arccos x \le \frac{3\pi}{2}$. Теперь применим к сумме двух обратных тригонометрических функций синус

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) =$$

$$= \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cdot\cos(\arcsin x) =$$

$$= x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = 1 .$$

Единственным углом из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, синус которого равен единице, является угол $\frac{\pi}{2}$.

Отметим, что проведя такие же рассуждения, можно показать, что для любых x справедливо

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} . \qquad (7.4)$$

Аналогично доказываются следующие формулы:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x , \qquad (7.5)$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x . \qquad (7.6)$$

Для доказательства формулы

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x . \qquad (7.7)$$

выпишем следующую цепочку

$$\arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos x .$$

Таким же образом доказывается формула

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x . \qquad (7.8)$$

Исследуем теперь несколько важных функций, которые помимо самостоятельного значения, объясняют вид решений простейших тригонометрических уравнений.

1. $y = \arcsin(\sin x)$, где x – любое действительное число.

Рассмотрим свойства этой функции.

Во-первых, эта функция – нечетная, так как для любого x

$$\arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x).$$

Во-вторых – периодическая с периодом 2π

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x) .$$

Рассмотрим поведение функции на двух промежутках $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, т.е. на полном периоде.

1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. В этом случае $y = \arcsin(\sin x) = x$;

2) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$. На этом промежутке уже такого "счастья" нет, так как по определению 7.1 значения функции $y = \arcsin(\sin x)$ не больше $\frac{\pi}{2}$. Воспользуемся формулами приведения

$$y = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x .$$

Последний переход возможен, так как для рассматриваемого промежутка верно $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$.

На рис 7.5 показан график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

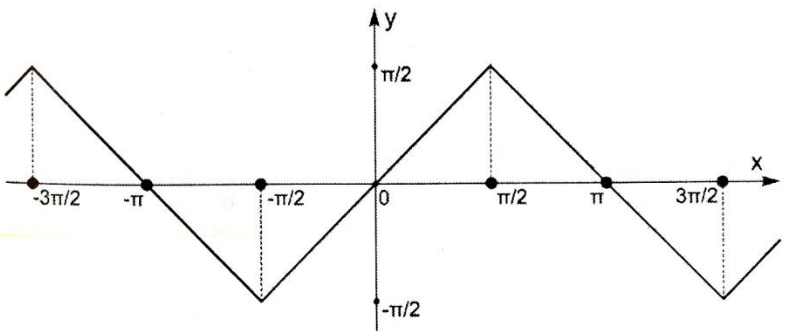

Рис 7.5.

Из полученных результатов понятно почему решение уравнения $\sin x = a$ записывалось в виде двух серий ($x = \arcsin a + 2\pi n$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

2. $y = \arccos(\cos x)$, где x – любое действительное число.

Рассмотрим свойства этой функции.

Во-первых, функция четная

$$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x).$$

Во-вторых, период функции – 2π

$$\arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x).$$

Рассмотрим поведение функции на двух промежутках $-\pi \le x \le 0$ и $0 \le x \le \pi$, т.е. на полном периоде.

1) $0 \le x \le \pi$. В этом случае $y = \arccos(\cos x) = x$;

2) $-\pi \le x \le 0$. На этом промежутке воспользуемся свойством четности и получим

$$y = \arccos(\cos x) = -x.$$

На рис 7.6. Показан график функции $y = \arccos(\cos x)$.

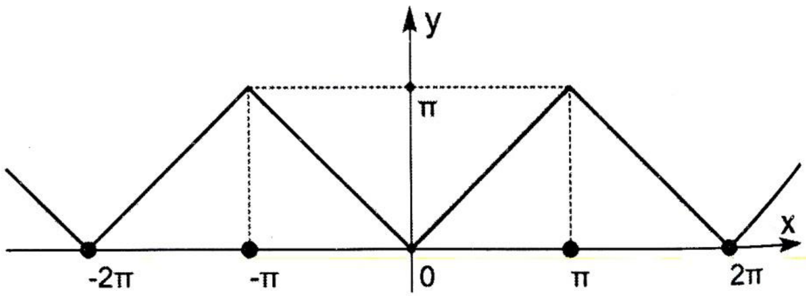

Рис 7.6.

Мы не будем столь подробно останавливаться на функциях $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$. На рис. 7.7 и 7.8 приведены графики этих функций.

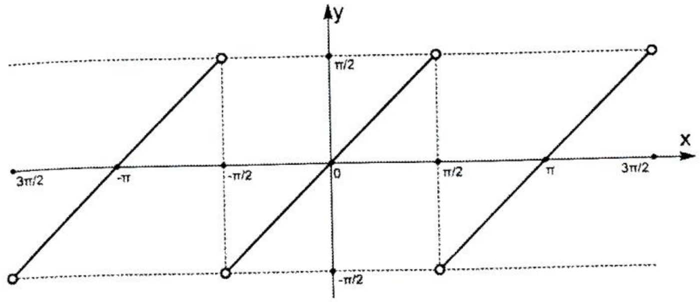

Рис 7.7. График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

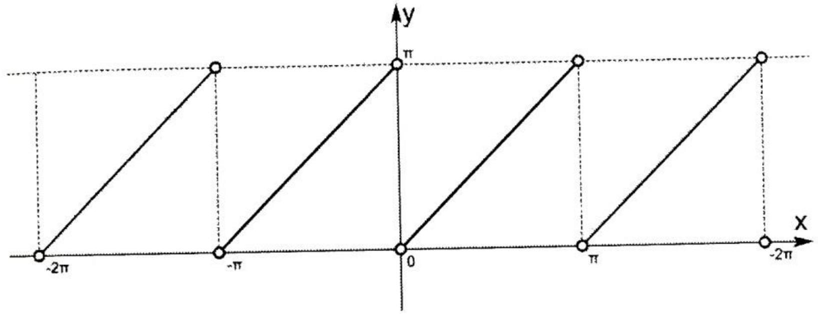

Рис 7.8. График функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

7.2. Преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Одним из основных приемов решения примеров с обратными тригонометрическими функциями является применение какой-нибудь тригонометрической функции к обеим частям равенства или неравенства. К неравенствам мы обратимся несколько позднее, а с равенствами дело обстоит следующим образом.

Если $\alpha = \beta$, то из этого равенства следует, что $f(\alpha) = f(\beta)$, где $f(t)$ - тригонометрическая функция, а вот наоборот, вообще говоря, неверно. Если в уравнениях избавиться от посторонних корней можно проверкой, то при доказательстве равенств надо исследовать взаимное расположение углов. Если окажется, что положение углов таково, что из равенства $f(\alpha)=f(\beta)$ однозначно следует $\alpha=\beta$, то применение тригонометрической функции оправдано. Если же из равенства $f(\alpha)=f(\beta)$ однозначно не следует, что $\alpha=\beta$, то от применение тригонометрической функции надо отказаться или рассматривать несколько случаев.

Все сказанное в предыдущем абзаце означает следующее. Если в левой и правой частях расположены углы, принадлежащие одному и тому же интервалу монотонности тригонометрической функции, то при применении этой тригонометрической функции получается равносильный переход. Если же углы принадлежат разным интервалам монотонности, то применение тригонометрической функции приводит к неравносильному переходу.

Пример 7.3. Доказать равенство

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1-xy}{x+y},\ x>0,\ y>0,\ x\neq -y.$$

Удобно применить к левой и правой частям доказываемого равенства либо функцию $\operatorname{tg} x$, либо $\operatorname{ctg} x$. Для определения того, какую из этих функций применить, определим какому промежутку принадлежат углы в обеих частях этого равенства.

Из условия $x>0$ следует $0<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$, а из того, что $y>0$ следует $0<\operatorname{arc\,tg} y<\frac{\pi}{2}$, поэтому $0<\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y<\pi$, а правая часть доказываемого равенства по определению принадлежит интервалу $(0;\pi)$. Так как на промежутке $(0;\pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ монотонна,то доказательство равенства

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{1-xy}{x+y}\right),\ x>0,\ y>0,\ x\neq -y$$

равносильно доказательству равенства из условия задачи.

Рассмотрим отдельно левую часть

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y\right)}=\frac{1}{\dfrac{x+y}{1-xy}}=\frac{1-xy}{x+y}.$$

Правая часть, по определению, равна этому же выражению.

Пример 7.4. Упростить выражение $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}$.

Покажем, что данное выражение можно записать в виде

$$\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}=\arcsin\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}\right)\right).$$

Для этого нам требуется показать, что $0\le\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}\le\frac{\pi}{2}$.

Если нам это удастся, то в силу свойств функции $y=\arcsin(\sin t)$ равенство будет верно. Для доказательства воспользуемся возрастанием функции $\arcsin x$ и двумя неравенствами: $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ и $0<\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда

$$\begin{cases}0<\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\\ 0<\arcsin\frac{2}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow 0<\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}<\frac{\pi}{2}.$$

Теперь раскроем синус суммы двух углов

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}.$$

Окончательно получаем

$$\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}=\arcsin\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}.$$

7.3. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

7.3.1. Применение тригонометрических функций

Если при решении уравнений будут применяться тригонометрические функции, то проблемы, связанные с появлением дополнительных решений, мы будем решать с помощью проверки.

Пример 7.5. $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.

Перепишем уравнение $\arcsin(1-x)=\frac{\pi}{2}+2\arcsin x$ и применим синус к обеим частям

$$1-x=\cos(2\arcsin x)\Leftrightarrow 1-x=1-2\sin^2(\arcsin x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x=1-2x^2 .$$

Получаем два решения $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$. Делаем проверку.

1. Пусть $x=0$. Тогда $\arcsin 1-2\arcsin 0=\frac{\pi}{2}$.

2. Пусть $x=\frac{1}{2}$. Тогда $\arcsin\frac{1}{2}-2\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, проверка показала, что подходит только первое решение.

Ответ: $x=0$.

Пример 7.6. $\arcsin\frac{3x}{5}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x$.

Этот пример, с точки зрения метода решения, мало чем отличается от предыдущего. Однако, получившееся уравнение и, главное, проверка будут существенно сложнее.

Применим синус к левой и правой частям уравнения

$$\frac{3x}{5}\sqrt{1-\frac{16x^2}{25}}+\frac{4x}{5}\sqrt{1-\frac{9x^2}{25}}=x .$$

Первое решение $x=0$, а уравнение $\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{16x^2}{25}}+\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{9x^2}{25}}=1$ мы уже решали (пример 1.21) и получили корни $x=\pm 1$.

Проверка.

1. Пусть $x=0$. Тогда $\arcsin 0+\arcsin 0=\arcsin 0\Rightarrow 0=0$.

2. Пусть $x=1$. Тогда $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}\vee\arcsin 1$.

Заменим $\arcsin\frac{4}{5}$ на $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}$. Покажем, что $\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$. Действительно, углы $\arcsin\frac{3}{5}$ и $\arccos\frac{4}{5}$ расположены в первой четверти и $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}=\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\frac{16}{25}}$.

3. $x=-1$. Аналогично предыдущему пункту показывается, что это решение подходит.

Ответ: $x=0$, $x=\pm 1$.

7.3.2. Использование соотношений между обратными тригонометрическими функциями

Пример 7.7. $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=\frac{7\pi^3}{24}$.

Это стандартный пример на использование тождества $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

Обозначим $\arcsin x=t$, $|t|\le\frac{\pi}{2}$, применим формулу суммы кубов и наше уравнение, с учетом указанного выше соотношения, примет вид

$$\frac{\pi}{2}\left(t^2-t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2\right)=\frac{7\pi^3}{24}\Leftrightarrow 3t^2-\frac{3\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{3}=0 .$$

Получаем $t=-\frac{\pi}{6}$ и $t=\frac{2\pi}{3}$, причем второе значение в силу того, что $|t|\le\frac{\pi}{2}$ не подходит. Имеем

$$\arcsin x=-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

Отметим, что при таком методе решения проверку можно и не делать, так как мы не могли получить дополнительных решений.

Мы рассмотрели общие методы решения уравнений с обратными тригонометрическими функциями. Теперь рассмотрим приемы, которые принято называть нестандартными.

7.3.3. Тригонометрическая подстановка

Пример 7.8. $\arccos\sqrt{1-x^2}+\arcsin\left(3x-4x^3\right)=\frac{\pi}{2}$.

Перепишем уравнение $\arccos\sqrt{1-x^2}=-\arcsin\left(3x-4x^3\right)+\frac{\pi}{2}$ и применим функцию косинус к левой и правой частям. Попутно заметим, что значения углов в обеих частях принадлежат промежутку $\left[0,\pi\right]$, поэтому применение косинуса не приведет к появлению дополнительных корней.

$$\sqrt{1-x^2}=3x-4x^3.$$

Для решения этого уравнения применим тригонометрическую подстановку $x=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$. Мы уже решали подобные уравнения, поэтому не будем останавливаться на обоснованности подобной замены. Получим

$$\cos t=\sin 3t\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin 3t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\\ t=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.$$

Отбирая значения, попадающие на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, получим три значения: $t=\frac{\pi}{8}$, $t=-\frac{3\pi}{8}$, $t=\frac{\pi}{4}$ или $x=\sin\frac{\pi}{8}$, $x=-\sin\frac{3\pi}{8}$, $x=\sin\frac{\pi}{4}$. Теперь необходимо сделать проверку.

1. $x=\sin\frac{\pi}{8}\Rightarrow\arccos\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)+\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$.

2. $x=-\sin\frac{3\pi}{8}\Rightarrow\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)+\arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{8}\right)=$

$$=\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\ne\frac{\pi}{2}.$$

2. $x=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x=\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Заметим, что тригонометрическую подстановку можно было сделать с самого начала и после этого применить косинус.

Пример 7.9. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Это уравнение мы будем решать двумя способами. Отметим, что $x\ne\pm1$.

I способ. Переносим третье слагаемое в правую часть и применим синус к левой и правой частям получившегося уравнения

$$\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}+\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}}.$$

Довольно неприятное на вид уравнение. Однако, сделав необходимые преобразования подкоренных выражений и домножив обе части уравнения на $\left(1+x^2\right)^2 \neq 0$, получим уравнение

$$2x\left(1-x^2\right)+2\left|1-x^2\right|\cdot|x|=\left|1-x^2\right|\left(1+x^2\right),$$

которое уже не выглядит столь ужасно. Раскрываем модуль

1. $x<-1$.

$$2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1-x^2\right)=-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right).$$

Так как $1-x^2 \neq 0$, то получаем квадратное уравнение $x^2+4x+1=0$, с корнями $x=-2-\sqrt{3}$ и $x=-2+\sqrt{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию раскрытия модуля и остается $x=-2-\sqrt{3}$, который, естественно, требует проверки.

2. $-1 \leq x<0$.

$$2x\left(1-x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)=\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right).$$

Это уравнение с учетом того, что $x \neq \pm 1$ решений не имеет.

3. $0 \leq x<1$.

$$2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1-x^2\right)=\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right).$$

Получаем квадратное уравнение $x^2-4x+1=0$, с корнями $x=2-\sqrt{3}$ и $x=2+\sqrt{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию раскрытия модуля и остается $x=2-\sqrt{3}$, которое будет проверено.

4. $x \geq 1$.

$$2x\left(1-x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)=-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right).$$

Это уравнение с учетом условий $x \neq \pm 1$ решений не имеет.

Итак мы получили два довольно неприятных корня $x=2-\sqrt{3}$ и $x=-2-\sqrt{3}$, которые требуют проверки.

1. $x=2-\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4-2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Подставляем полученные результаты в исходное уравнение

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $x=2-\sqrt{3}$ является решением исходного уравнения.

2. $x=-2-\sqrt{3}$. Абсолютно аналогично показывается, что это решение не подходит.

II способ. Посмотрим внимательно на аргументы обратных тригонометрических функций и заметим, что они напоминают формулы универсальной тригонометрической подстановки Поэтому, естественно сделать замену $x=\operatorname{tg} t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, $t \neq \pm\dfrac{\pi}{4}$.

$$\arccos(\cos 2t)+\arcsin(\sin 2t)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2t)=\frac{\pi}{2}.$$

На вид – выглядит гораздо приятнее, нежели уравнение с модулем.

Заменим $u=2t$, $-\pi<u<\pi$, $u \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Теперь на координатной плоскости yOu (рис. 7.9) нарисуем все три графика функций $y=\arccos(\cos u)$, $y=\arcsin(\sin u)$ и $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} u)$.

Из рисунка понятно, что надо рассмотреть четыре промежутка: $\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, так как поведение наших функций на этих участках различно.

1. Пусть $u \in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда уравнение приобретает вид

$$-u-u-\pi+u+\pi=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}.$$

и решение не подходит.

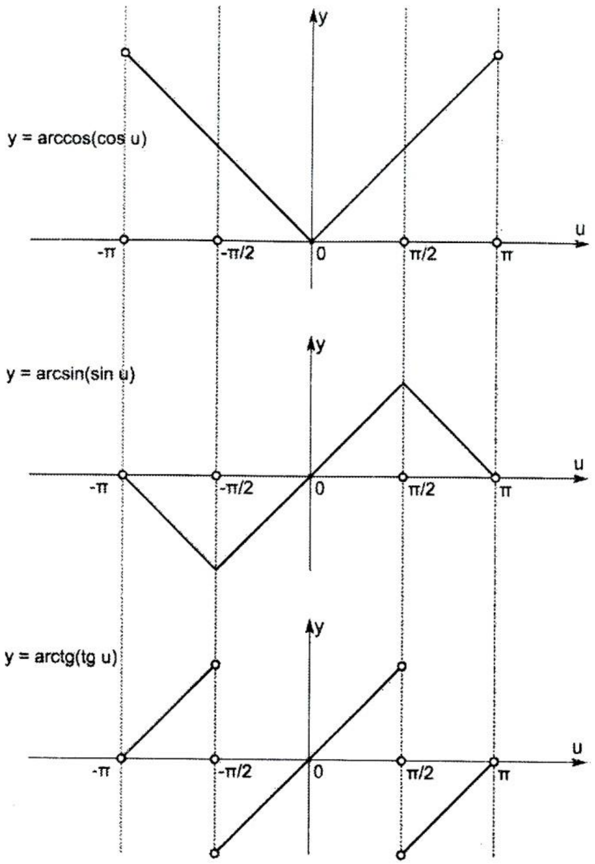

Рис. 7.9.

2. Пусть $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Тогда $-u+u+u=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}$ и решение снова не подходит.

3. Пусть $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $u+u+u=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\pi}{12}$.

4. Пусть $u \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Тогда $u+\pi-u+u-\pi=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}$ и решение не подходит.

Таким образом, получаем $x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

Как видим второй способ значительно приятнее, но догадаться о тригонометрической подстановке довольно непросто, особенно для школьников.

Ответ: $x=2-\sqrt{3}$.

7.3.4. Использование свойств обратных тригонометрических функций

Пример 7.10. $6x=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}6x+\cos 7x\right)$.

Здесь естественно применить тангенс к обеим частям уравнения

$$\cos 7x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}n,\ n=0, \pm 1, \pm 2\ldots \ .$$

Все кажется совсем простым. Однако, если вспомнить, что $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}x<\frac{\pi}{2}$, то из исходного уравнения получим, что $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$. Теперь остается только $x=\pm\frac{\pi}{14}$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{14}$.

Сделаем одно общее замечание. Проблема заключается в том, что традиционно в школах учат выписывать ОДЗ уравнений, которое далеко не всегда помогает. Гораздо полезнее уметь выписывать условия существования решений, знание которых позволяет существенно упростить анализ получаемых решений, а в некоторых случаях и просто решить уравнение. Область существования решений – это ОДЗ (область существования функций и их суперпозиций, входящих в уравнение или неравенство, независимо друг от друга) и еще условия, накладываемые на функции, которые определяются уже их взаимным положением в уравнении или неравенстве. Довольно часто в ситуации, когда не проглядывается ясный путь решения уравнения, надо выписать область существования решения и, либо ее вид подскажет путь решения, либо область будет состоять из конечного числа точек.

Пример 7.11. $\arcsin\dfrac{6x-7}{2x-1}=2\pi-\pi x$.

Внимательный взгляд на пример подсказывает, что надо сделать. Действительно, если применить синус к обеим частям, то получится тригонометрическое уравнение, которое мы решать не умеем. Другие способы не очень просматриваются, поэтому надо выписать условия существования решения уравнения и посмотреть, что получится

$$\begin{cases} -1\le\dfrac{6x-7}{2x-1}\le 1 \\ -\dfrac{\pi}{2}\le 2\pi-\pi x\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Простая система, решением которой оказалась одна точка $x=\dfrac{3}{2}$. Мы нашли необходимое условие, которому должно удовлетворять решение уравнения, а для проверки достаточности, надо подставить найденное значение в исходное уравнение. Подставляем и убеждаемся в том, что $x=\dfrac{3}{2}$ является решением нашего уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{3}{2}$.

7.4. Неравенства

Неравенства, в отличие от уравнений, таят в себе немало опасностей, но всегда существует спасительный вариант – решить уравнение, а затем использовать монотонность функций или метод интервалов.

Начнем с простого примера.

Пример 7.12. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{x}\le \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Преобразуем правую часть

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Наше неравенство приобрело вполне нормальный вид $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{x}\le\dfrac{\pi}{3}$.

Теперь возможны два способа.

I способ. Решаем уравнение $\arcsin t=\dfrac{\pi}{3}$, где $t=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$, которое, в силу монотонного возрастания функции в левой части и константы в правой части уравнения, имеет не более одного решения. Если решение уравнения существует, то решением неравенства будет промежуток от левой границы ОДЗ до найденного решения. Если же решение уравнения не существует, то решением неравества будет либо ОДЗ, либо решений нет вообще.

В нашем примере $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а ОДЗ: $-1\le t\le 1$. Значит наше решение неравенства $\arcsin t\le\dfrac{\pi}{3}$ будет $-1\le t\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Далее возвращаемся к исходной неизвестной и получаем ответ.

II способ. Применим функцию синус к обеим частям неравенства. Покажем, что это можно делать. Левая часть неравенства изменяется в промежутке $-\dfrac{\pi}{2}\le\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{x}\le\dfrac{\pi}{2}$, где синус является возрастающей функцией. В правой части – константа. Таким образом, мы применяем возрастающую функцию к обеим частям неравенства, что дает нам сохранение знака неравенства

$$\begin{cases} -1\le\dfrac{\sqrt{3}}{x}\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{x}\le\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

Пример 7.13. $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{5}}\ge\operatorname{arc\,tg}2x$.

В этом неравенстве уже нельзя применить ни косинус, ни тангенс к обеим частям. Функция, стоящая в левой части неравенства, принимает значения на отрезке $[0,\pi]$, где косинус является монотонной функцией, а вот в области значений функции, стоящей в правой части $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ косинус уже не монотонен. Аналогичная ситуация и с другими тригонометрическими функциями.

Здесь надо воспользоваться тем, что $\arccos\frac{x}{\sqrt{5}}$ монотонно убывающая, а $\operatorname{arc\,tg} 2x$ монотонно возрастающая функции. Значит их графики могут пересечься не более чем в одной точке. Если эта точка существует, то решением будет промежуток от левой границы ОДЗ до абсциссы этой точки, а если точки пересечения нет, то решением будет либо все ОДЗ, либо неравенство решений не имеет.

Решаем уравнение $\arccos\frac{x}{\sqrt{5}}=\operatorname{arc\,tg} 2x$ применив косинус к обеим частям

$$\frac{x}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\Leftrightarrow x=1.$$

С учетом ОДЗ нашего неравенства $\left(\frac{|x|}{\sqrt{5}}\le 1\right)$ получаем ответ.

Ответ: $\left[-\sqrt{5},1\right]$.

Пример 7.14. $4(\arccos 4x)^2+2(\arcsin 4x)^2-3\pi\arccos 4x\ge\frac{\pi^2}{2}$.

Здесь все довольно просто. Обозначим $\arccos 4x=t,0\le t\le\pi$. Тогда $\arcsin 4x=\frac{\pi}{2}-t$ и наше неравенство приобретает вид

$$4t^2+2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2-3\pi t-\frac{\pi^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow t\left(t-\frac{5\pi}{6}\right)\ge 0.$$

Добавляем ограничения $0\le t\le\pi$ и получаем, что $t\in\{0\}\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$. Возвращаемся к исходной неизвестной

$$\left[\begin{array}{l}\arccos 4x=0\\ \frac{5\pi}{6}\le\arccos 4x\le\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\ge x\ge-\frac{1}{4}\end{array}\right..$$

Заметим, что при решении второго неравенства совокупности был применен косинус к обеим частям, а так как он является монотонно убывающим на промежутке существования неравенства, то мы поменяли направление знака неравенства.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{8}\right]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Пример 7.15. $3\arcsin(\sin x)-x\ge\pi$.

И, напоследок, неравенство, которое удобнее всего решать графически. Заметим, что графическое решение подразумевает только получение схемы решения и, ни в коем случае, не является полноценным решением. Обозначим $\pi+x=t$. Тогда

$$3\arcsin(\sin(t-\pi))\ge t\Leftrightarrow\arcsin(\sin t)\le-\frac{t}{3}.$$

На рис. 7.10 представлены графики $y_1=\arcsin(\sin t)$ и $y_2=-\frac{t}{3}$.

Нам надо определить точки на отрезках $[-2\pi,-\pi]$ и $[\pi,2\pi]$, в которых эти графики пересекаются. Для этого решаем совокупности следующих систем

$$1.\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-2\pi\le t\le-\frac{3\pi}{2}\\ -\frac{t}{3}=t+2\pi\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-\frac{3\pi}{2}\le t\le-\pi\\ -\frac{t}{3}=-t-\pi\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow t=-\frac{3\pi}{2},$$

т.е. точка пересечения находится в вершине ломаной.

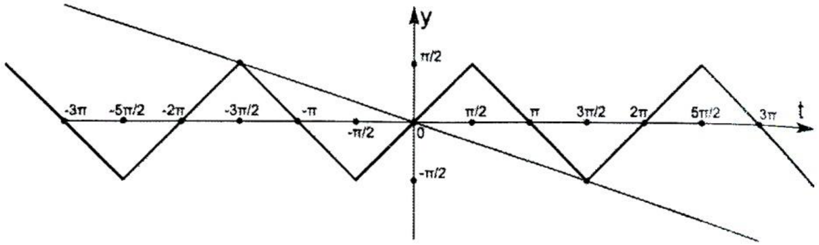

Рис. 7.10.

$$2.\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \pi \le t \le 2\pi \\ -\dfrac{t}{3} = -t + \pi \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi \\ -\dfrac{t}{3} = t - 2\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\ t = \frac{3\pi}{2}$$

и снова точка пересечения оказалась в вершине ломаной.

Поскольку нас интересуют области, где $y_1 \le y_2$, то получаем $t \in (-\infty\,; 0] \cup \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Ответ: $(-\infty\,, -\pi] \cup \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Задачи для разбора с преподавателем

Доказать равенство:

7.1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

7.2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

7.3. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

7.4. $\mathrm{arc\,tg}\, x + \mathrm{arc\,ctg}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

Выразить:

7.5. $\sin(\arccos x)$.

7.6. $\cos(\arcsin x)$.

7.7. $\mathrm{tg}(\arcsin x)$.

7.8. Доказать, что $\mathrm{arc\,tg}\, x + \mathrm{arc\,tg}\, y = \mathrm{arc\,ctg}\dfrac{1-xy}{x+y}, x>0, y>0$.

Вычислить

7.9. $\mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{3}\right)$.

7.10. $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$.

Упростить:

7.11. $\arcsin\dfrac{1}{3} + \arcsin\dfrac{2}{3}$.

7.12. $\mathrm{arc\,tg}\dfrac{1}{2} - \mathrm{arc\,tg}\dfrac{1}{3}$.

7.13. Доказать: $\mathrm{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{arc\,tg}\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Решить уравнения:

7.14. $\arcsin(x^4 + 2x) = \arcsin(2 - x^2 + 2x)$.

7.15. $\arcsin(2x + \cos 3x) = \arcsin(\cos 3x - x^2)$.

7.16. $\arcsin(x - 1 + 3\cos x) + \arccos(\cos 2x + x) = \dfrac{\pi}{2}$.

7.17. $\sin(3\arcsin x) = 3 - 4x$.

7.18. $\arcsin(1-x) - 2\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

7.19. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \dfrac{\pi}{2}$.

7.20. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$.

7.21. $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right) = 0$.

7.22. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x+1) = \frac{\pi}{4}$.

7.23. $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \frac{7\pi^3}{24}$.

7.24. $(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \arccos x = 3(\arccos x)^2$.

7.25. $\sin(4x - \arccos x) + \cos 4x \cdot \sqrt{1-x^2} = \sin 4x \cdot \sqrt{3x-2}$.

7.26. $\arcsin(1-2x^2) + 3\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) = \pi$.

7.27. $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + 20\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = 3\pi$.

7.28. $\arccos\left(3x - \frac{1}{x}\right) = \pi + 2\arcsin x$.

7.29. $12\arccos\left(\frac{x+\sqrt{3-3x^2}}{2}\right) = 7\pi + 3\arcsin x$.

7.30. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.

7.31. $\frac{6}{\pi} \cdot \arccos x = 1 + 2x$.

7.32. $\frac{1}{\pi^2} \cdot (\arccos x)^2 = 2x^2 - 4x + 3$.

7.33. $\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin x = 1 + 3\sin^2(\pi x)$.

7.34. $\arcsin\left(2^x - \sin(\pi x)\right) = 2^{x^2 - 1 + \log_2 \pi}$.

7.35. $(\arcsin x)^2 = (\pi - x) \cdot \arcsin x + 2x(\pi + x)$.

7.36. $\operatorname{arc\,tg}(x+1) + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x = 0$.

7.37. $\sin\left[\pi(\operatorname{arc\,tg} x)^2\right] = \frac{1}{2}$.

7.38. $x = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x)$.

7.39. $\arcsin\frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x$.

Решить неравенства:

7.40. $\arcsin x > \arccos x$.

7.41. $\arcsin x > \arcsin(1-x)$.

7.42. $3\arcsin(\sin x) - x \geq \pi$.

7.43. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x} \leq \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}\right)$.

7.44. $\arccos\frac{x}{\sqrt{5}} \geq \operatorname{arc\,tg} 2x$

Задачи для самостоятельного решения

Доказать равенство:

7.1д. $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$.

7.2д. $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$.

7.3д. $\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x$.

7.4д. $2\arcsin x = \arccos(1-2x^2)$.

7.5д. $2\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1-x^2}{2x}$, $x > 0$.

7.6д. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} = \operatorname{arc\,tg} 5$.

7.7д. $\cos\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$.

Выразить:

7.8д. $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)$.

7.9д. $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$.

Вычислить:

7.10д. $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

7.11д. $\arcsin(\sin 5)$.

Решить уравнения:

7.12д. $\arcsin(3x+5)+\arcsin(1-x)=\frac{\pi}{4}$.

7.13д. $2\operatorname{arc\,tg} x+3\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}$.

7.14д. $\operatorname{arc\,tg} 3x=\arccos 8x$.

7.15д. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{x}+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.

7.16д. $\arcsin\frac{3x}{5}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x$.

7.17д. $\arcsin\left(\frac{4-\sin x}{3}\right)=2x+\frac{3\pi}{2}$.

7.18д. $\sin(2\arccos x)=x^2+\frac{1}{2}$.

7.19д. $\sin(2\arccos x)=x^2-\frac{3}{2}$.

7.20д. $\arcsin x\cdot\arccos x=a^2$.

7.21д. $\arccos(1-x)+2\arcsin x=0$.

7.22д. $\arccos(2x-\cos 4x)=\arccos(2x+1)$.

7.23д. $\arcsin(1+x)+\arccos(2x^2)=\frac{\pi}{2}$.

7.24д. $\arcsin(3-3\sin x)+\arccos(\cos 2x+1)=\frac{\pi}{2}$.

7.25д. $\sin(3\arccos x)=\frac{16x}{3}\sqrt{1-x^2}$.

7.26д. $\arcsin(3\sin x+2)=2x+\frac{\pi}{2}$.

7.27д. $(\arccos x)^3+(\arccos(-x))^3=\frac{\pi^3}{3}$.

7.28д. $36(\arccos(-x))^4+\frac{\pi^4}{4}=\pi^2(\arcsin x)^2+\pi^3\arccos x$.

7.29д. $18(\arccos(-x))^3+5\pi^3=30\pi(\arccos x)^2+42\pi^2\arcsin x$.

7.30д. $\arccos(1-2x^2)-\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)=\pi+2\arcsin x$.

7.31д. $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\arccos\left(\frac{x+\sqrt{2-x^2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

7.32д. $11\arccos(1-2x^2)=12\pi+14\arcsin x$.

7.33д. $\frac{6}{\pi}\cdot\arcsin x=3-4x$.

7.34д. $\frac{9}{\pi^2}\cdot\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2-x=3+\frac{3x+6}{\pi}\cdot\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

7.35д. Доказать, что уравнение $\sin\left(\frac{1}{7}\arccos x\right)=1$ не имеет решений.

Решить уравнения:

7.36д. $(\arccos(-x))^2+(\arcsin x)^2=\frac{17\pi^2}{36}$.

7.37д. $(\operatorname{arc\,tg} x)^2+(\operatorname{arc\,ctg} x)^2=\pi^2$.

7.38д. $\operatorname{arc\,tg}(x^2+x)+\operatorname{arc\,tg}(x^2-x)=\frac{\pi}{4}$.

7.39д. $\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{1}{x}\right)=2\operatorname{arc\,tg}(x-1)$.

7.40д. $\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{ctg} x)=x$.

7.41д. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$.

7.42д. $\arccos x=\operatorname{arc\,tg} x$.

7.43д. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{7}=0$.

7.44д. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2-x}}+\operatorname{arc\,tg}(1-x\sqrt{2})=\operatorname{arc\,tg} x^2$.

7.45д. $2\operatorname{arc\,tg}(\cos x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sin x}\right)$.

7.46д. $\operatorname{tg}(3\operatorname{arc\,tg} x)=\operatorname{ctg}(3\operatorname{arc\,tg} x)$.

7.47д. $\operatorname{arc\,tg}(2+\cos x)-\operatorname{arc\,tg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

7.48д. $\sin(\pi\operatorname{arc\,tg} x)=\cos(\pi\operatorname{arc\,tg} x)$.

7.49д. $\operatorname{arc\,tg} 3^x - \operatorname{arc\,tg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}$.

7.50д. $x + \frac{1}{6}\arccos\left(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x\right) = \frac{\pi}{12}$.

7.51д. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2 + x} + \arcsin\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{2}$.

7.52д. $\arccos\left[\frac{1}{2} + \cos\left(\pi\frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 + 4x + 7}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}$.

Решить неравенства:

7.53д. $\arcsin x - 2\arccos x > \frac{\pi}{3}$.

7.54д. $4(\arccos 4x)^2 + 2(\arcsin 4x)^2 - 3\pi\arccos 4x \geq \frac{\pi^2}{2}$.

7.55д. $\operatorname{arc\,tg} x > \operatorname{arc\,ctg} x$.

7.56д. $2\arcsin x > \operatorname{arc\,tg} x$.

Решить системы уравнений:

7.57д. $\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \frac{\pi}{4} \\ xy = -2 \end{cases}$.

7.58д. $\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(x \operatorname{tg} y) = 2y \\ x^2 \operatorname{tg}^2 y(\operatorname{tg}^2 y - 2) = 1 - 2x \end{cases}$.

7.59д. $\begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{2} + \sin y\right) = y - \frac{\pi}{3} \\ x^2 + 2x\sin y + 3\cos y = 0 \end{cases}$.

Решить уравнения:

7.60д. $\arccos\sqrt{1 - x^2} + \arcsin\left(3x - 4x^3\right) = \frac{\pi}{2}$.

7.61д. $2\arcsin 2x = \arccos 7x$.

7.62д. Доказать, что уравнение

$$2\operatorname{arc\,tg} x + 3\operatorname{arc\,ctg} x = \pi$$

не имеет решений.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

7.9. $\frac{\pi}{3}$. **7.10.** $\frac{\pi}{5}$. **7.11.** $\arcsin\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$. **7.12.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **7.14.** -1. **7.15.** 0. **7.16.** $\frac{\pi}{2}$. **7.17.** $1; \frac{1}{2}$. **7.18.** 0. **7.19.** 1. **7.20.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **7.21.** 1. **7.22.** 0. **7.23.** $-\frac{1}{2}$. **7.24.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.25.** $\frac{\pi}{4}; 1$. **7.26.** $\pm\sin\frac{\pi}{5}$. **7.27.** $\sqrt{3}$. **7.28.** $\frac{1}{2}$. **7.29.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.30.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. **7.31.** $\frac{1}{2}$. **7.32.** 1. **7.33.** 1. **7.34.** 0. **7.35.** 0. **7.36.** 0. **7.37.** $\pm\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1}{6}}$; $\pm\operatorname{tg}\sqrt{\frac{13}{6}}$; $\pm\operatorname{tg}\sqrt{\frac{5}{6}}$. **7.38.** $\pm\frac{\pi}{14}$. **7.39.** $\frac{3}{2}$. **7.40.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. **7.41.** $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. **7.42.** $(-\infty, -\pi] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. **7.43.** $\left(-\infty, \sqrt{3}\right] \cup [2, +\infty)$. **7.44.** $\left[-\sqrt{5}, 1\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

7.8д. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **7.9д.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **7.10д.** $\frac{\pi}{4}$. **7.11д.** $5 - 2\pi$. **7.12д.** $\varnothing$. **7.13д.** $\varnothing$. **7.14д.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **7.15д.** $\frac{4}{5}$. **7.16д.** $0; \pm 1$. **7.17д.** $\varnothing$. **7.18д.** $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{10}$. **7.19д.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **7.20д.** $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - a^2}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - a^2}\right)$, при $a \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\varnothing$, при $a \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$. **1.21д.** 0. **7.22д.** $-\frac{\pi}{4}$. **7.23д.** $-\frac{1}{2}$. **7.24д.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **7.25д.** $\pm 1; -\frac{1}{6}$. **7.26д.** $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}$. **7.27д.** $\pm\frac{1}{2}$. **7.28д.** $-\frac{1}{2}$. **7.29д.** $\frac{1}{2}$. **7.30д.** $-\sin\frac{\pi}{10}$. **7.31д.** $\left[-\sqrt{2}, 1\right]$. **7.32д.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.33д.** $\frac{1}{2}$. **7.34д.** -1. **7.35д.** $\varnothing$. **7.36д.** $\frac{1}{2}$. **7.37д.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\left(1 - \sqrt{7}\right)\right)$. **7.38д.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. **7.39д.** 1. **7.40д.** $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **7.41д.** $\frac{75}{11}$. **7.42д.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. **7.43д.** 0. **7.44д.** ± 1. **7.45д.** $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **7.46д.** $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. **7.47д.** $\pi + 2\pi n$. **7.48д.** $\operatorname{tg}\frac{1}{4}$; $\operatorname{tg}\frac{5}{4}$; $-\operatorname{tg}\frac{3}{4}$. **7.49д.** $\frac{1}{2}$. **7.50д.** $\frac{\pi}{34}; -\frac{\pi}{26}$. **7.51д.** $0; -1$. **7.52д.** $-\frac{3}{2}; \frac{-7 \pm \sqrt{3}}{2}$.

7.53д. $\left(\sin\frac{4\pi}{9},1\right]$. **7.54д.** $\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\{1\}$. **7.55д.** $(1,+\infty)$.

7.56д. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. **7.57д.** $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

7.58д. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{6};3\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6};3\right)$. **7.59д.** $\left(-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4};\arccos\frac{1}{4}\right)$.

7.60д. $-\sin\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.61д.** $\frac{1}{8}$.

СОДЕРЖАНИЕ