С. А. БОГОМОЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

систематический курс

УЧПЕДГИЗ · 1949

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ
(СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС)

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Книга проф. С. А. Богомолова «Геометрия» (систематический курс) значительно отличается от других книг того же названия. Наиболее важные особенности этого курса следующие:

1) Автор излагает полностью весь курс на основе аксиоматического метода.

2) В изложении материала выдержан принцип фузионизма, позволивший автору объединить доказательства многих теорем планиметрии и стереометрии.

3) Автор широко пользуется аксиомой непрерывности, в частности заменяя ею обычную в некоторых отделах геометрии теорию пределов.

4) Автор в своем изложении элементарной геометрии не опирается на идею движения, положенную в основу других подобных курсов, но в особом приложении намечает обоснование геометрического равенства на идее движения.

Книга предназначается для повышения квалификации учителей математики, но может служить пособием и для студентов физико-математических факультетов педвузов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя курс геометрии является плодом многолетней работы; окончательную обработку он получил в связи с моими лекциями по основаниям геометрии, читанными в Ленинградском государственном педагогическом институте им. Герцена.

Настоящий курс может служить пособием для учителей средней школы, а также и для студентов физико-математического факультета педвуза.

При его составлении я старался использовать все указания, имеющиеся как в русской, так и в иностранной научно-учебной литературе; в работе я ставил задачу подойти к курсу элементарной геометрии с точки зрения современных научных теорий. В частности, в книге проводятся идеи фузионизма. Как известно, наш великий геометр Н. И. Лобачевский в своем своеобразном построении геометрии начинал с изучения пространственных фигур. В таком же направлении построена система аксиом у Гильберта. С методической точки зрения пользу фузионизма можно видеть в том, что такое изложение больше способствует развитию пространственного воображения.

В наших школьных учебниках продолжается разделение курса геометрии на планиметрию и стереометрию; но это не мешает тому, чтобы учитель математики и студент физмата познакомились с другим построением курса. Во всяком случае такое изложение способствует более глубокому проникновению в строение нашей науки.

Решению поставленной задачи служит выделение вопросов положения в особую часть курса; обычно этим весьма важным вопросам уделяется мало внимания, и они теряются в геометрии меры.

Книга снабжена приложениями, которые имеют цель разобрать некоторые дополнительные вопросы. В частности, в своем курсе я старался обосновать геометрию, не прибегая к помощи движения; но понятие это играет видную роль в других изложениях основ геометрии. Поэтому я решил добавить особое приложение, посвященное обоснованию учения о геометрическом равенстве на понятии движения и выяснению связи между обоими методами.

Ряд теорем, доказательство которых не представляет особого интереса с точки зрения обоснования геометрии, напечатаны мелким шрифтом; автор считал неправильным совсем выбросить их, лишая тем самым курс необходимой полноты.

В заключение считаю своим долгом принести глубокую благодарность редактору издательства Б. И. Крельштейну, оказавшему мне большую помощь при редактировании книги.

27 марта 1948 г. *С. Богомолов*

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия — слово греческое и обозначает „землемерие"; это название указывает на те жизненные потребности, которые заставили людей заниматься геометрией. Начатки геометрических знаний существовали уже несколько тысячелетий тому назад в древнем Египте; но египтяне не пошли дальше удовлетворения самых острых жизненных требований: геометрия у них заключалась в собрании практических предписаний, ничем не обоснованных и не всегда даже правильных; говорить о науке здесь не приходится. Примерно за шесть столетий до начала нашей эры эти начатки геометрии проникли из Египта в Грецию; здесь мы находим уже иной подход к изучению геометрии. Выражаясь современным языком, можно сказать, что древнегреческие ученые покинули путь „ползучего эмпиризма", которым шли египтяне, а стали первые разрабатывать геометрию, как систему научных истин; в их руках геометрия превратилась в науку о свойствах пространства, сделавшись важнейшим отделом математики того времени. Такой подход к геометрии оказался чрезвычайно плодотворным: в несколько столетий геометрия была доведена до высокой степени совершенства и при дальнейшем развитии оказалась в состоянии разрешить ряд практических задач; так, например, в ней нашли твердую опору геодезия и астрономия.

Перед глазами древних геометров было собрание геометрических истин, установленных их предшественниками; разбираясь в этом материале, они очень скоро пришли к заключению, что достаточно принять несколько наиболее простых предложений в качестве основных, а остальные уже можно вывести из них по правилам логики. Таким образом, уже в глубокой древности геометрия превратилась в науку, доказывающую свои утверждения единственно при помощи рассуждений. Но всякое рассуждение должно на чем-нибудь основываться; так, при доказательстве последующих предложений можно ссылаться на ранее доказанные. А на что мы можем опереться при доказательстве самых первых теорем нашей науки? Очевидно, только на те простейшие предложения, о которых упоминалось выше и которые принимаются без доказательств и в последующем служат основой всех доказательств.

Итак, общий план построения геометрии будет таков: вначале высказывают несколько основных утверждений, принимая их без доказательства; эти утверждения называются аксиомами или постулатами. Все же остальные предложения геометрии доказываются на основании аксиом и называются теоремами. Такой план мы уже находим у „отца геометрии“ Евклида в его знаменитых „Началах“, написанных более 2000 лет тому назад.

Из сказанного вытекает, что вся геометрия покоится на аксиомах, как на своем фундаменте. Возникает вопрос о том, откуда мы берем аксиомы и как убеждаемся в их истинности; эти вопросы, конечно, выводят нас за пределы геометрии.

Для ответа на эти вопросы руководящими могут служить следующие слова Энгельса: „Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал... Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне, как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины...“[1]

В течение многих поколений человек накапливал опытным путем геометрические знания; постепенно он уточнял их и замечал, что одни из них необходимым образом вытекают из других. Таким образом, постепенно выяснялись основные положения, которые только и надо заимствовать из опыта или из пространственного представления. Следовательно, можно сказать, что аксиомы явились в результате логической переработки исторически накопленных знаний.

Точно так же постепенно выяснялось, что все самые сложные геометрические фигуры можно построить из небольшого числа простейших, которые принимаются за основные элементы при построении геометрии (об этом подробно будет сказано ниже).

В связи со сказанным об аксиомах возникает вопрос: являются ли аксиомы заключением геометрического исследования или его началом? Правильный ответ будет гласить диалектически: и то и другое. В самом деле, понадобился долгий, более чем 2000-летний путь для того, чтобы в конце XIX столетия выяснить полный список аксиом геометрии. С другой стороны, всякий, кто пожелает построить систематический курс геометрии, должен в начале указать ту систему аксиом, которую он кладет в основу. Указанные два момента находятся в тесном взаимодействии: развитие геометрии способствует уяснению ее основных предпосылок (в этом вопросе огромное значение имело построение неевклидовых систем), а более совершенная система аксиом способствует дальнейшему развитию геометрии.

Читатель не должен смущаться, если заметит в настоящем курсе, что иногда доказываются предложения, казалось бы, вполне очевидные; он должен помнить, что такие теоремы до-

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. Госполитиздат, 1945. 37.

казываются для того, чтобы установить их связь с аксиомами и показать, как вся геометрия вытекает из небольшого числа предпосылок. Если мы примем без доказательства какую-нибудь очевидную для нас теорему, то это будет значить только, что мы поместили ее в число аксиом; а без настоятельной необходимости не следует увеличивать число предложений, принимаемых без доказательства.

Наряду с аксиомами и теоремами, в геометрии встречаются еще другие предложения вспомогательного характера, а именно — определения. Определение имеет цель закрепить оказавшееся почему-либо важным новое сочетание уже известных понятий и для этого обозначает указанное сочетание особым именем (или „термином"); поэтому определения очень полезны для удобства и сокращения речи. Поясним сказанное примером: исследуя вопрос о пересечении прямых, приходим к заключению, что прямые могут лежать в одной плоскости и в то же время не иметь общих точек; этот случай оказывается весьма важным по многим причинам, так что в дальнейшем придется часто о нем говорить; и вот вводится определение: „две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются параллельными". Теперь уже можно говорить просто о „параллельных прямых", не повторяя каждый раз этой длинной фразы, что представляет несомненное удобство.

Указанное сочетание уже известных понятий, которое закрепляется некоторым термином и дает нам новое понятие, не есть простое механическое сочетание; к нему приводит нас творческий акт мысли, имеющий корни в практике в широком смысле этого слова. Возьмем еще для примера понятие о подобных треугольниках. Можно как угодно расчленять и сопоставлять исходные предпосылки, там мы не найдем этого понятия; но повседневный опыт людей показывал им предметы и существа, которые при одной и той же форме имели различные размеры. Это и натолкнуло нашу мысль на создание нового понятия, прежде всего — о подобии треугольников; а создали мы это понятие путем сочетания и объединения уже известных понятий о равенстве углов и пропорциональности отрезков.

Таким образом, благодаря определениям, более сложные понятия сводятся к более простым, уже нам известным. Здесь дело обстоит подобно тому, что мы видели при доказательстве теорем: с помощью доказательств одни теоремы сводятся к другим, ранее доказанным; эти последние основаны на теоремах, доказанных еще раньше, и т. д., пока не дойдем до аксиом, которые уже не доказываются и которые в качестве исходных положений служат основой для всех доказательств. Точно так же одни понятия при помощи определений сводятся к другим, которые были введены раньше; эти последние, в свою очередь, сводятся к таким, которые были введены еще раньше, и т. д., пока не дойдем до таких понятий, которые сами уже не определяются и в качестве простейших служат основой для всех последующих определений. Таковы, например, понятие „точки“ и другие понятия, с которыми мы познакомимся в своем месте. Указанные простейшие понятия называются основными; остальные же, определяемые с их помощью, — производными.

Таким образом, основным понятиям не дается формальных определений, а все, что нам нужно знать о них, вкладывается в аксиомы.

Поэтому под основными понятиями можно понимать любые объекты, при непременном соблюдении условия, чтобы при таком понимании выполнялись утверждения всех аксиом.

Отсюда вытекает важное следствие о возможности различных конкретных истолкований отвлеченной геометрической системы.

Одним из таких истолкований и притом самым естественным является соединение с понятиями точка, прямая, плоскость и т. д. обычных наглядных представлений.

Собирая все, что было сказано о доказательствах и определениях, получаем следующее правило, которому должно удовлетворять всякое научное построение геометрии.

Каждое предложение геометрии должно быть или открыто помещено в число аксиом, или строго доказано на основании аксиом; каждое геометрическое понятие должно быть или открыто помещено в число основных, или отчетливо определено с помощью основных.

После общей характеристики построения геометрии мы войдем в некоторые подробности относительно состава геометрических теорем и относительно наиболее употребительных приемов их доказательства.

Из сказанного выше явствует, что аксиомы являются общей предпосылкой для всех теорем геометрии; кроме того, в каждой теореме имеется своя особая предпосылка. Так, например, изучая свойства равнобедренного треугольника, мы опираемся не только на аксиомы и ранее доказанные теоремы, но и на допущение, что данный треугольник—равнобедренный. Что же касается до того нового утверждения, которое делается в теореме, то оно называется ее заключением.

Так, в теореме: „если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны“, —это последнее утверждение и будет заключением.

Следовательно, если предпосылку обозначить буквой p, а заключение — буквой q, то теорема приводится к такому виду:

если имеет место p, то имеет место и q,

или, короче:

если p, то q,

или наконец, так:

p влечет за собой q.

К такому виду можно привести и теоремы, которые, на первый взгляд, как будто под него не подходят. Так, предложение: „сумма углов треугольника равна двум прямым углам" можно высказать так: „если данная фигура есть треугольник, то сумма углов этой фигуры равна двум прямым".

Общие приемы всяких доказательств изучаются в логике; приведем в виде примера один из них.

Пусть буквы p, q, r обозначают некоторые предложения, и пусть нам дано, что

p влечет за собой q,
q влечет за собой r.

Тогда мы с необходимостью заключаем:

p влечет за собой r.

Такими умозаключениями мы часто пользуемся и в геометрии и в других областях знания; иногда они нанизываются одно на другое, и получается довольно длинная цепь предложений, которая приводит к выводу, что из первого необходимо вытекает последнее.

Довольно часто в геометрии применяется так называемое „доказательство от противного" или „приведение к нелепости".

Пусть нам надо доказать теорему: „если p, то q". Попробуем допустить, что это утверждение неверно, т. е. что при наличии p не имеет места q. Затем это новое допущение сочетаем с другими предложениями, истинность которых уже была установлена, и если таким путем получится противоречие, то цель достигнута. В самом деле, единственный сомнительный пункт в наших рассуждениях—это новое допущение, что q может не иметь места при наличии p; и если оно привело к нелепости, то его следует отвергнуть, а потому p всегда влечет за собой q, что и требовалось доказать.

В последующем курсе читатель найдет достаточное количество подобных рассуждений; здесь же докажем для примера одно общее правило, которое заключается в следующем утверждении:

если p влечет за собою q, то отрицание q влечет за собою отрицание p.

Попробуем допустить, что отрицание q может оказаться совместным с утверждением p. Но нам дано, что p влечет за собой q. Отсюда вытекает, что отрицание q совместно с утверждением q, что невозможно.

Так, например, мы знаем, что в равнобедренном треугольнике имеется пара равных углов. Следовательно, если в треугольнике нет равных углов, то он не может быть равнобедренным.

Весьма важно для геометрии понятие об обратных теоремах. Если схема прямой теоремы будет: „p влечет за собой q“, то в простейшем случае переход к обратной теореме состоит в перестановке предпосылки и заключения, так что ее схема будет: „q влечет за собой p“. Таково соотношение между теоремами 132 и 133; теорема 158 сама заключает в себе два взаимно обратных предложения.

Но не всегда дело обстоит так просто. Всякий признает, что теоремы 161 и 162, 168 и 169 являются взаимно обратными, между тем, часть предпосылки является для них общей. Поэтому надо сказать, что при переходе к обратной теореме вообще часть предпосылки меняется местами с заключением. Отсюда далее вытекает, что иногда бывает необходимо разложить предпосылку теоремы на составные части, чтобы придти к правильной формулировке обратной теоремы.

Возьмем для примера теорему 148: „сумма двух смежных углов равна $2d$“. Простая перестановка предпосылки („два данных угла—смежные“) с заключением („сумма данных углов равна $2d$“) приводит к очевидно неверному утверждению. Тогда, опираясь на определение 13, можно нашу предпосылку разложить на два утверждения: 1) „данные углы имеют общую сторону“ (это уже влечет за собою и общую вершину) и 2) „две другие стороны суть противоположные лучи“; заключение остается прежним. Попробуем теперь переставить заключение [обозначая его через (*)] с той или другой частью предпосылки; (1) и (*) не влекут за собою (2), ибо такие углы могут налегать друг на друга, а (2) и (*) не влекут за собой (1), ибо углы могут лежать по разные стороны от данной прямой.

Следовательно, и здесь мы обратной теоремы не получим; а потому нужно продолжать разложение предпосылки на части, именно мы подвергнем дальнейшему анализу вторую из них, после чего строение рассматриваемой теоремы будет таково:

Предпосылка:
- (1) „данные углы имеют общую сторону“;
- (2) „они лежат в различных полуплоскостях, ребром которых служит общая сторона“;
- (3) „две другие стороны лежат на одной прямой“;

(*) заключение (как и раньше).

Теперь заключение можно переставить с утверждением (3) и получается верная теорема (см. теорему 149, которая отличается лишь по форме от высказанного здесь обратного предложения). Вообще говоря, здесь были бы возможны еще две другие обратные теоремы: но (1), (3) и (*) не влекут за собой (2), как показывает пример двух совпадающих прямых углов, а (2), (3) и (*) не имеет смысла, так как (2) предполагает уже (1). Подобный же анализ приведет нас от теоремы 135 к теореме 151.

Изложенные соображения позволяют для многих теорем подыскать правильные обратные теоремы; но не всегда это представляется интересным.

Так, предложение: „все прямые углы равны между собой" после представления в таком виде:

Предпосылка	(1)	„один данный угол — прямой",
	(2)	„другой данный угол — прямой",
Заключение	(*)	„данные углы равны",

приводит к правильной обратной теореме по схеме: (1) и (*) влекут за собой (2). Однако едва ли необходимо помещать в курсах геометрии такое предложение.

Иногда теоремы высказываются в таком виде, что на первый взгляд не видно, что там заключаются два взаимно обратных предложения. Таковы, например, теоремы 178 и 179, где идет речь о геометрических местах. Однако если мы прочтем замечание, сделанное после определения 55, то дело становится совершенно ясным.

Таким же характером обладают и те теоремы, в которых идет речь об условии необходимом и достаточном (например, теорема 175).

В самом деле, утверждение „для p необходимо и достаточно q" приводит к двум взаимно обратным теоремам: прежде всего, надо будет доказать, что „p влечет за собою q", и тогда будет установлена необходимость q, а затем — „q влечет за собою p", что убеждает нас в достаточности q. Наоборот, две взаимно обратных теоремы можно соединить в одну при помощи указанных терминов. Так, теоремы 132 и 133 можно объединить в такое предложение: „для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно наличие у него двух равных углов".

Переходим к рассмотрению некоторых общих приемов, с помощью которых доказываются обратные теоремы. Один из них применяется к теоремам, которым можно придать форму: „если фигура T обладает свойством A, то она обладает и свойством B" — при условии, что каждое из свойств A и B в отдельности вполне определяет данную фигуру. Тогда мы можем непосредственно утверждать справедливость обратной теоремы: „если фигура T обладает свойством B, то она обладает и свойством A".

В самом деле, прямая теорема говорит, что фигура, определяемая свойством A, тождественна с фигурой, определяемой свойством B; а если X тождественно с Y, то и Y тождественно с X.

Это правило условимся называть „обращением по тождеству“.

Пусть, например, речь идет о прямой (фигура T) и свойство A заключается в том, что на этой прямой лежит высота равнобедренного треугольника, а свойство B — в том, что прямая содержит медиану основания этого треугольника; каждое из этих свойств в отдельности вполне определяет прямую. Если далее будет доказано, что „прямая, содержащая высоту равнобедренного треугольника, содержит и медиану его основания“, то можно сейчас же утверждать и обратную теорему: „прямая, содержащая медиану основания в равнобедренном треугольнике, содержит и его высоту“. Короче, эти предложения можно высказать так: „высота равнобедренного треугольника есть медиана его основания“ и „медиана основания равнобедренного треугольника есть его высота“. Теорема 170 дает несколько примеров для обратимости по тождеству; другим примером могут служить теоремы о средней линии трапеции (342 и 343).

Одним из примеров на другое правило может служить пара теорем 171 и 172. В подобных случаях мы имеем собственно ряд теорем:

$$\begin{gathered} p_1 \text{ влечет за собою } q_1, \\ p_2 \text{ влечет за собою } q_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_n \text{ влечет за собою } q_n; \end{gathered}$$

причем предпосылки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ единственно возможны в рассматриваемом вопросе, а заключения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ несовместны друг с другом.

При наличии этих условий можно сейчас же утверждать обратные теоремы:

$$\begin{gathered} q_1 \text{ влечет за собою } p_1, \\ q_2 \text{ влечет за собою } p_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_n \text{ влечет за собою } p_n. \end{gathered}$$

Действительно, пусть нам дано некоторое q_k (где k — одно из чисел ряда $1, 2, 3, \ldots, n$). Попробуем допустить, что оно не влечет за собою p_k; но тогда должно иметь место какое-нибудь другое p_i, так как допущения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ единственно возможны в данном случае. В силу прямой теоремы это p_i влечет за собой q_i, так что q_k и q_i оказываются сосуществующими, что противоречит их несовместности.

Следовательно, q_k влечет за собой p_k, что и требовалось доказать.

Изложенное здесь правило условимся называть „обращением по разделению“; другими примерами его применения могут служить теоремы 265 и 266, 415 и 416 и др.

Покончив с вопросом об обратных теоремах, упомянем еще об одном общем приеме доказательства — о так называемой „математической индукции“ (примерами могут служить доказательства теорем 65 и 176). В подобных случаях определение рассматриваемой фигуры зависит от целого положительного числа n (например, дело идет об n-угольнике). Чтобы доказать какое-нибудь свойство фигуры, сначала доказываем его для наименьшего возможного n (например, для $n=3$ в случае многоугольника), а потом устанавливаем, что если оно верно для $(n-1)$, то будет верным и для n. Таким образом, теорема будет доказана для всякого конечного n.

Такой вид рассуждений в арифметике и алгебре встречается чаще, чем в геометрии.

Доказательства геометрических теорем обычно снабжаются чертежами (если чертежа нет, то читатель приглашается выполнить его самостоятельно), и эти чертежи являются прекрасным вспомогательным средством. Однако нельзя основываться исключительно на чертеже и считать доказанным то, что удалось усмотреть на чертеже; нельзя этого делать потому, что чертеж может быть неверным или же соответствовать какому-нибудь частному случаю теоремы, так что из него нельзя извлекать общих заключений. Поэтому, если на чертеже мы подмечаем интересное соотношение, то, прежде чем воспользоваться им при доказательстве, необходимо убедиться, что оно вытекает из существа дела, а не является случайным или даже неверным. Только при соблюдении этого правила пользование чертежом становится вполне законным.

Приступая к построению геометрии, мы не поместим в начале полного списка аксиом и основных понятий; аксиомы будут вводиться по мере надобности и притом небольшими группами, выражающими однородные свойства геометрических образов.

Разбираясь в этих свойствах, можно всю геометрию разбить на две главные части: одна из них занимается исключительно вопросами положения, а в другой преобладают вопросы меры.

Мы начнем с геометрии положения, а потом перейдем к геометрии меры.

ГЕОМЕТРИЯ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Сочетание основных образов

Мы принимаем в качестве основных три следующих понятия: *точка*, *прямая*, *плоскость*.

Согласно сказанному выше, под этими понятиями можно понимать любые объекты при соблюдении указанных ниже аксиом.

В частности, в настоящем параграфе вводятся так называемые *аксиомы сочетания*, которые устанавливают основные соотношения между названными понятиями.

Так как до сих пор об этих понятиях еще ничего не было сказано, то в аксиомах надо указать и те логические категории (*элемент*, *класс*, *отношение*), к которым эти понятия относятся.

Определение 1. *Любая совокупность точек называется фигурой* или геометрическим образом. *Совокупность всевозможных точек,* для которой выполняются указанные ниже аксиомы, называется *пространством*. Наука о свойствах пространства называется геометрией. Геометрия может подходить к решению своей задачи с различных точек зрения и с помощью различных методов; та отрасль геометрии, которая излагается в настоящей книге, носит название „элементарной геометрии".

Аксиома I. *Прямая и плоскость суть геометрические образы.*

Таким образом, термин *точка* служит названием для тех простейших элементов, из которых геометрия строит свои фигуры, а *прямая и плоскость* являются *классами*, или *множествами* точек.

Если такая-то точка принадлежит совокупности точек, образующих такую-то прямую, то говорят, что эта точка лежит на данной прямой или данная прямая проходит через эту точку; *если одна и та же точка принадлежит двум различным прямым*, то говорят, что эти *прямые пересекаются в данной точке*. Подобные выражения употребляются и для плоскостей.

Точки обыкновенно обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, $C, \ldots$; прямые — малыми буквами того же алфавита: a, b, $c, \ldots$; плоскости обозначаются греческими буквами: α, β, $\gamma, \ldots$

Аксиома II. *Существует одна и только одна прямая, проходящая через две различные точки.*

Иначе говоря, две различные точки определяют прямую. Прямая, определяемая точками A и B, обозначается символом AB или BA (порядок точек здесь безразличен).

Аксиома III. *На прямой всегда имеются, по крайней мере, две различные точки; имеется точка, не лежащая на данной прямой.*

Существование дальнейших точек вытекает из последующих аксиом.

Аксиома IV. *Существует одна и только одна плоскость, проходящая через три данные точки, не лежащие на одной прямой.*

Иначе говоря: такие три точки определяют плоскость. Плоскость, определяемая точками A, B, C, обозначается символами: ABC, BCA и т. д., независимо от порядка букв.

Аксиома V. *В плоскости всегда имеются, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиома VI. *Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то эта прямая всеми своими точками принадлежит указанной плоскости.*

Аксиома VII. *Если две плоскости имеют общую точку, то у них имеется, по крайней мере, еще одна общая точка, отличная от данной.*

Аксиома VIII. *В пространстве имеются, по крайней мере, четыре различные точки, не лежащие в одной плоскости.*

Исходя из перечисленных аксиом, можно уже доказать другие предложения того же рода, которые можно назвать *теоремами сочетания*. При доказательстве теорем мы будем в скобках указывать номер того предложения, которое является основанием делаемого утверждения.

Теорема 1. *Две различные прямые не могут иметь более одной общей точки.*

Действительно, если бы эти прямые имели хотя бы две общие точки, то они совпали бы друг с другом (аксиома II), а это противоречит заданию.

Теорема 2. *Если прямая не лежит целиком в данной плоскости, то она не может пересекать этой плоскости более чем в одной точке.*

В противном случае, прямая всеми своими точками лежала бы в плоскости (аксиома VI), что противоречит заданию.

Теорема 3. *Две различные плоскости или совсем не имеют общих точек, или пересекаются по некоторой прямой и только по этой прямой.*

В самом деле, пусть нам даны две различные плоскости α

и β; если у них нет общих точек, то теорема доказана. Допустим теперь, что у них имеется общая точка A; тогда существует еще другая общая точка B, отличная от A (аксиома VII), и мы можем говорить о прямой AB (аксиома II), которая лежит в обеих данных плоскостях (аксиома VI). Другими словами, плоскости α и β пересекаются по этой прямой. Попробуем допустить, что у них имеется еще общая точка C, не лежащая на прямой AB; тогда плоскости α и β должны совпасть (аксиома IV), что противоречит заданию.

Читатель должен обратить внимание на то, что доказательства трех изложенных теорем не были снабжены чертежами; да в них и не было никакой нужды: искомое получалось из аксиом с помощью весьма простых рассуждений, не требовавших каких-либо наглядных пояснений. Подобное же будет иметь место и в других столь же простых случаях; но в более сложных нам было бы трудно обойтись без чертежа. Отметим еще, что в этих трех теоремах был применен метод доказательства от противного.

Теорема 4. *Существует одна и только одна плоскость, проходящая через данную прямую и точку вне ее.*

Пусть дана прямая a и точка A, не лежащая на ней; отметим на данной прямой две какие-нибудь различные точки B и C (аксиома III). Тогда три точки A, B, C определяют плоскость (аксиома IV), которая пройдет и через точку A, что очевидно, и через прямую a (аксиома VI). Если же допустить, что существует еще другая плоскость, удовлетворяющая условиям теоремы и отличная от первой, то получится противоречие с теоремой 3.

Построенная таким образом плоскость обозначается через aA или Aa.

Теорема 5. *Существует одна и только одна плоскость, проходящая через две различные пересекающиеся прямые.*

Доказательство, основанное на аксиоме III, теореме I, аксиоме IV и VI, теореме 3, предоставляется читателю.

Предыдущую теорему можно высказать и так:

Если две прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

Вспоминая одно общее правило, указанное во введении, отсюда выводим:

Если две прямые не лежат в одной плоскости, то они не пересекаются.

Теорема 6. *В пространстве существует, по крайней мере, шесть различных прямых и, по крайней мере, четыре различных плоскости.*

Возьмем 4 точки, упоминаемые в аксиоме VIII; все эти точки не могут лежать на одной прямой, так как в этом случае они лежали бы и в одной плоскости (аксиомы III, IV и VI); подобным же образом докажем, что никакие 3 из них не могут лежать на одной прямой. Тогда из аксиомы II и только что доказанного вытекает существование 6 различных прямых. Сочетая взятые точки по 3, получим 4 плоскости (аксиома IV); эти плоскости будут различными, так как совпадение двух из них привело бы к противоречию с заданием.

Определение 2. *Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися.*

Существование таких прямых вытекает из аксиомы VIII: если упоминаемые там точки обозначить через A,B,C,D, то прямые AB и CD, находясь в различных плоскостях, будут скрещивающимися.

Теорема 7. *Для всякой прямой существует скрещивающаяся с ней прямая.*

Действительно, отметим на данной прямой две различные точки A и B (аксиома III); тогда данная прямая будет прямой AB (аксиома II). Возьмем точку C вне прямой AB (аксиома III) и точку D вне плоскости ABC (аксиома VIII); прямые AB и CD будут скрещивающимися, так как иначе точки A, B, C, D лежали бы в одной плоскости.

Введем определение некоторых часто встречающихся образов.

Определение 3. *Связкой* называется *совокупность всевозможных прямых и плоскостей*, проходящих через данную точку; последняя называется *центром связки*. Если имеют в виду только прямые или только плоскости, то говорят о связке прямых или о связке плоскостей.

Определение 4. *Пучком прямых* называется *совокупность всевозможных прямых*, лежащих в одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку; эта последняя называется *центром пучка*.

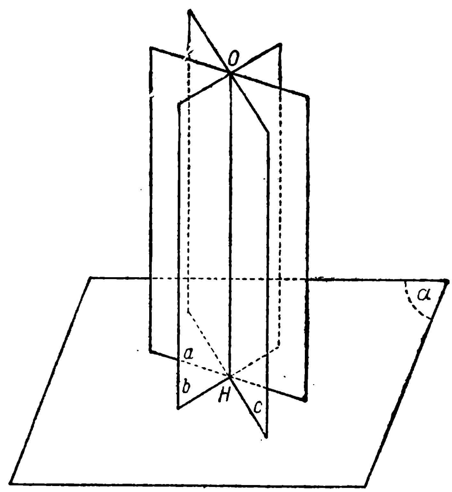
Определение 5. *Пучком плоскостей* называется *совокупность всевозможных плоскостей*, проходящих через данную прямую; эта последняя называется его *осью*.

Теорема 8. *Если дана плоскость α и точка O вне ее, то каждой фигуре на плоскости α соответствует вполне определенная фигура в связке O, причем: точкам плоскости соответствуют прямые связки, прямым плоскости — плоскости связки, точкам на одной прямой — прямые одного пучка, прямым пучка — плоскости пучка.*

Для доказательства, каждому основному образу в плоскости приведем в соответствие ту фигуру в связке, которая определяется данным основным образом и точкой O. Тогда становится ясным, что точкам плоскости A, B, $C, \ldots$ соответствуют в связке прямые OA, OB, $OC, \ldots$; а прямым плоскости a, b, $c, \ldots$ соответствуют плоскости Oa, Ob, $Oc, \ldots$ (аксиома II, теорема 4). Далее, если точки $A, B, C, \ldots$ лежат на одной и той же прямой h, то прямые OA, OB, $OC \ldots$ принадлежат одной и той же плоскости Oh, так что образуют пучок (аксиома VI, теорема 4, определение 4). Точно так же, если прямые $a, b, c, \ldots$ проходят через одну и ту же точку H, то плоскости $Oa, Ob, Oc, \ldots$ все проходят через прямую OH, так что образуют пучок плоскостей (аксиома VI), что и требовалось доказать.

Последнее соотношение изображено на черт. 1. Пусть читатель ответит на вопрос, почему нельзя утверждать обратного соответствия, т. е., что каждому основному образу в связке всегда соответствует определенный образ в плоскости.

Если каждому элементу одной фигуры соответствует определенный элемент другой фигуры, то говорят также, что первая фигура определенным образом *преобразуется* во вторую.



Черт. 1

Таким образом, мы приходим к понятию о геометрических преобразованиях, которые в геометрии не менее важны, чем преобразования формул в алгебре.

Преобразование, посредством которого плоская фигура переходит в определенный образ связки (см. теорему 8), называется *проектированием* плоской фигуры из точки; обратный же переход носит название *сечения* связки плоскостью. Эти преобразования имеют основное значение для проективной геометрии.

Теорема 9. *Если пучок плоскостей пересечь плоскостью, ему не принадлежащей, но проходящей через какую-нибудь точку его оси, то в сечении получается пучок прямых, причем каждой его прямой соответствует одна и только одна плоскость пучка плоскостей, а каждой плоскости этого пучка — одна и только одна прямая пучка прямых.*

Действительно, пусть дан пучок плоскостей с осью OH (черт. 1). Проведем плоскость через точку H, произвольно взятую на оси, и через какую-нибудь прямую, скрещивающуюся с OH (теоремы 7 и 4). Эта плоскость α не может принадлежать данному пучку (см. определение 2). Так как плоскость α с каждой из плоскостей данного пучка имеет общую точку H, то она пересекает ее по прямой (теорема 3); все эти прямые лежат в плоскости α и проходят через точку H, так что образуют пучок прямых.

Дальнейшие рассуждения предоставляются читателю.

Если между элементами двух фигур установлено такое соответствие, что каждому элементу одной фигуры соответствует один и только один элемент другой, то такое *соответствие* называется *одно-однозначным*. Говорят также об одно-однозначном преобразовании одной фигуры в другую.

§ 2. Расположение точек на прямой

В этом параграфе нам придется иметь дело большей частью с предложениями, которые представляются непосредственно очевидными; между тем, мы будем их доказывать, исходя из нескольких простейших, принятых за аксиомы. Этим путем мы желаем установить логическую связь между различными свойствами расположения и показать, как все это учение вытекает из небольшого числа предпосылок.

Здесь вводится новое основное понятие: *предшествовать в данном направлении*. Все, что нам нужно знать об этом понятии для построения геометрии, вложено в следующие *аксиомы расположения*.

Аксиома IX. *„Предшествовать в данном направлении" есть отношение между точками одной и той же прямой.*

Аксиома X. *Если A предшествует B, то B не предшествует A.*

Аксиома XI. *Если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C.*

Аксиома XII. *Если A и B — различные точки, то либо A предшествует B, либо B предшествует A.*

Для дальнейшего введем понятие об *обратном отношении*. Если какой-нибудь предмет A стоит в известном отношении к предмету B, то говорят, что B стоит к A в обратном отношении. Так, если A больше B, то B меньше A, так что отношение „меньше" будет обратным для отношения „больше". Легко видеть, что отношение, обратное для обратного отношения, тождественно с данным; поэтому говорят о *взаимно обратных* отношениях.

Определение 6. *„Следовать" есть отношение, обратное для „предшествовать".*

Другими словами, предложения „B следует A" и „A предшествует B" будут равносильными.

Аксиома XIII. *Если A предшествует B, то существует точка, следующая за A и предшествующая B.*

Аксиома XIV. *Нет точки, которая предшествовала бы всем остальным, и нет точки, которая следовала бы за всеми остальными.*

Теорема 10. *Если A предшествует B, то A и B — различные точки.*

В самом деле, если допустить, что B совпадает с A, то аксиома X дает:

если A предшествует A, то A не предшествует A,

что невозможно.

Теорема 11. *Отношение „следовать" обладает свойствами отношения „предшествовать",* выраженными в аксиомах X — XII и теореме 10.

Докажем для примера то свойство, о котором говорится в аксиоме XI.

Пусть нам дано, что

A следует B и B следует C.

На основании определения 6 отсюда имеем:

B предшествует A и C предшествует B,

или

C предшествует B и B предшествует A,

ибо от перестановки двух одновременно данных предложений истинность их не нарушается.

Теперь аксиома XI дает:

C предшествует A,

что равносильно утверждению:

A следует C,

и цель наша достигнута.

Приступая к расположению точек на прямой, отметим на прямой a точку O и еще какую-нибудь точку M (аксиома III).

На основании аксиомы XII можно утверждать, что

либо M предшествует O, либо O предшествует M.

Но в силу определения 6 это утверждение перепишется так:

либо M предшествует O, либо M следует O.

Приняв это во внимание, вводим следующее определение.

Определение 7. *Совокупность всех точек прямой, предшествующих точке O, в соединении с этой точкой называется лучом или полупрямой с вершиной в точке O.*

Точно так же точки нашей прямой, следующие за точкой O, образуют другой луч с той же вершиной. Оба названных луча (или полупрямые) друг по отношению к другу называются *противоположными*. Таким образом, прямая a любой своей точкой O разбивается на два взаимно противоположных луча.

Теорема 12. *Луч вполне определяется заданием вершины и одной из его точек.*

Действительно, прежде всего эти две точки определяют соответствующую прямую (аксиома II). Пусть вершиной будет точка O, и, кроме того, на луче дана точка M.

Подобно предыдущему имеем:

либо M предшествует O, либо M следует O.

Так как обе точки даны, то имеет место один вполне определенный случай (аксиома X). Но все точки луча стоят в одном и том же отношении к его вершине, и раз это отношение известно, то и луч вполне определен (определение 7).

Иногда лучи обозначаются (как и прямые) малыми буквами латинского алфавита.

Теорема 13. *Луч и прямая содержат бесконечное множество различных точек.*

В самом деле, возьмем полупрямую OM, и пусть для определенности

M предшествует O.

В силу аксиомы XIV существует такая точка M_1, что

M_1 предшествует M.

Тогда на основании аксиомы XI имеем:

M_1 предшествует O,

откуда видно, что M_1 принадлежит нашему лучу (определение 7) и отлична от O и M (теорема 10).

Точно так же на основании аксиомы XIV существует такая точка M_2, что

M_2 предшествует M_1.

Тогда имеем:

M_2 предшествует M, и M_2 предшествует O (аксиома XI).

Следовательно, M_2 принадлежит данному лучу и отлична от всех предыдущих точек (теорема 10).

Совершенно ясно, что, продолжая эти рассуждения, получаем бесконечный ряд различных точек: $M, M_1, M_2, M_3, \ldots$, принадлежащих данному лучу.

Для прямой теорема очевидна, ибо луч составляет ее часть.

Теперь уже нетрудно доказать подобные же теоремы для плоскости и пространства.

Определение 8. *Если точки A, B, C лежат на одной прямой, причем точки A и B принадлежат ее различным лучам с общей вершиной в C, то говорят, что точка C лежит между точками A и B, или: точки A и B лежат по разные стороны от C. Если же точки A и B принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в C, то гово-*

рят, что эти точки лежат по одну сторону от C (тогда C не лежит между A и B).

Теорема 14. *Существует точка, лежащая между двумя данными различными точками.*

Утверждение вытекает из аксиом XII, XIII, определений 7 и 8.

Теорема 15. 1) *Если A и B, A и E лежат по разные стороны от C, то B и E лежат по одну сторону от C.*

2) *Если A и B лежат по разные стороны, а A и D — по одну сторону от C, то B и D лежат по разные стороны от C.*

3) *Если A и D, A и F лежат по одну сторону от C, то D и F лежат по одну сторону от C.*

Доказательство непосредственно вытекает из того обстоятельства, что на данной прямой имеется всего два луча с общей вершиной в точке C.

Теорема 16. *Если C лежит между A и B, то A не лежит между B и C и B не лежит между A и C.*

Из наших данных и определения 8 вытекает, что точки A и B имеют различные отношения к C. Пусть, для определенности дано:

A предшествует C и B следует C.

Первое утверждение равносильно тому, что C следует A. Тогда аксиома XI и теорема 11 убеждают нас в том, что

B следует A.

Если же имеют место формулы:

B следует A и C следует A,

то B и C принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в A, что и требовалось доказать. Так же рассматривается и вторая половина теоремы.

Теорема 17. *Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Действительно, пусть на прямой даны точки A, B, C. Если A лежит между B и C, то наша ближайшая цель достигнута.

Пусть A не лежит между B и C. Если B лежит между A и C, то ближайшая цель также достигнута.

Следовательно, остается рассмотреть тот случай, когда точки B и C принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в A, а точки A и C — одному и тому же лучу с вершиной в B. Точки A и B стоят в определенном отношении друг к другу (аксиома XII). Допустим для определенности, существование отношения:

A предшествует B;

тогда и

$$A \text{ предшествует } C,$$

так как точки B и C принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в A.

Далее должно быть:

$$C \text{ предшествует } B,$$

так как A и C принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в B.

Отсюда выводим:

$$A \text{ предшествует } C \text{ и } B \text{ следует } C,$$

т. е. C лежит между A и B (определение 8). Наконец из трех указанных случаев возможен только один в силу теоремы 16.

Теорема 18. *Если C лежит между A и B, а D — между A и C, то C лежит между D и B, а D — между A и B.*

Действительно, нам дано, что A и B лежат по разные стороны от C (определение 8), а точки A и D — по одну сторону от C (теорема 16, определение 8).

Отсюда следует, что B и D лежат по разные стороны от C (теорема 15, п. 2), т. е.

$$C \text{ лежит между } B \text{ и } D.$$

Далее, из последнего утверждения вытекает, что B и C лежат по одну сторону от D (теорема 16, определение 8). А так как, по данному, точки A и C лежат по разные стороны от D, то A и B лежат по разные стороны от D (теорема 15, п. 2), т. е.

$$D \text{ лежит между } A \text{ и } B.$$

Теорема 19. *Если две различные точки C и D обе лежат между A и B, то либо D лежит между A и C, либо D лежит между C и B.*

Действительно, точки B и C, B и D лежат по одну сторону от A (теорема 16, определение 8), откуда C и D лежат также по одну сторону от A (теорема 15, п. 3).

Поэтому, применяя теорему 17 к точкам A, C, D, получаем только два случая:

либо D лежит между A и C, либо C лежит между A и D.

В первом случае теорема доказана, а во втором (на основании теоремы 18) имеем:

$$D \text{ лежит между } C \text{ и } B.$$

Предыдущие теоремы уже достаточно выяснили метод доказательства при помощи аксиом расположения; поэтому мы приведем дальше несколько теорем без доказательств, предоставляя их читателю.

Теорема 20. *Если A предшествует B, то утверждение: „C лежит между A и B“ равносильно такому: „C следует A и C предшествует B“.*

Теорема 21. *Если C лежит между A и B, а B — между A и D, то B лежит между C и D.*

Теорема 22. *Для точек A и B всегда найдется такая точка H, что B лежит между A и H, и такая точка F, что A лежит между F и B.*

Теорема 23. *В плоскости существует бесконечное множество различных прямых; в пространстве существует бесконечное множество различных плоскостей.*

Определение 9. *Если A и B — различные точки, то совокупность точек, лежащих между A и B, в соединении с этими последними называется отрезком AB и обозначается (AB).*

Точки A и B называются его *концами*, а остальные точки — *внутренними*.

Легко видеть, что свойства отрезка вытекают из доказанных выше свойств отношения *между*. Так, отрезки (AB) и (BA), как совокупности точек, *тождественны*. В силу сделанного замечания мы не будем долго останавливаться на доказательстве соответствующих теорем.

Теорема 24. *Если C есть внутренняя точка отрезка (AB), то этот последний разбивается на два отрезка (AC) и (CB), не имеющих других общих точек, за исключением общего конца C.*

Действительно, теорема 19 и определение 9 сразу дают нам деление отрезка на две части. Попробуем допустить, что внутренняя точка D данного отрезка (отличная от C) принадлежит обеим частям. Тогда A и C, C и B лежат по разные стороны от D (определения 9 и 8), так что A и B лежат по одну сторону от D (теорема 15, п. 1), что противоречит заданию этой точки внутри (AB).

Теорема 25. *Если точки C и D обе лежат внутри (AB), то отрезок (CD) целиком лежит внутри отрезка (AB).*

Доказывается с помощью теорем 19 и 24.

Теорема 26. *Отрезок содержит бесконечное множество различных точек.*

Теорема 27. *Если точка M лежит между O и N, то:*

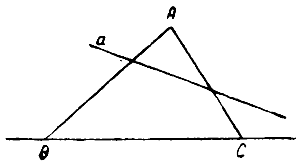
1) *полупрямая OM тождественна с полупрямой ON;*

2) *полупрямая OM состоит из отрезка (OM) и полупрямой MN.*

Доказательство двух последних теорем предоставляется читателю.

§ 3. Деление плоскости прямой

В предыдущем параграфе мы рассмотрели расположение точек на прямой; для того чтобы коснуться вопросов расположения элементов на плоскости, необходимо ввести следующую аксиому, носящую имя „постулата Паша“ (Паш — известный ученый, впервые указавший эту аксиому в 1882 г.).



Черт. 2

Аксиома XV. *Пусть A, B, C суть три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая плоскости ABC, не проходящая ни через одну из данных точек; если прямая a пересекает один из отрезков (AB), (BC), (CA), то она пересечет также один и только один из двух остальных.*

Пояснением служит черт. 2.

Примечание. Слова „и только один“ не являются необходимыми, так как соответствующее утверждение может быть доказано; они введены для упрощения.

Для дальнейшего интересно отметить, что утверждение постулата Паша остается в силе и тогда, когда *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой.

Теорема 28. *Если различные точки A, B, C лежат на одной прямой и если некоторая прямая a, не проходящая ни через одну из данных точек, пересекает один из трех отрезков (AB), (BC), (CA), то она пересечет также один и только один из двух остальных.*

В самом деле, одна из точек *A*, *B*, *C* должна лежать между двумя другими (теорема 17). Пусть для определенности *C* лежит между *A* и *B*. Тогда согласно теореме 24 отрезок (*AB*) разбивается на отрезки (*AC*) и (*CB*), так что каждая точка отрезка (*AB*) является также точкой одного и только одного из этих двух отрезков, откуда и следует теорема.

Определение 10. Проведем в плоскости α прямую *a* и рассмотрим те точки плоскости α, которые не лежат на прямой *a*. Мы будем говорить, что точки *A* и *B* *лежат по одну сторону от прямой a*, если отрезок (*AB*) *не пересекается с этой прямой*, и данные точки лежат по *разные стороны от прямой a*, если отрезок (*AB*) *пересекается с прямой a*.

Теорема 29. 1) *Если A и B, A и C лежат по одну сторону от прямой a, то B и C также лежат по одну сторону от нее.*

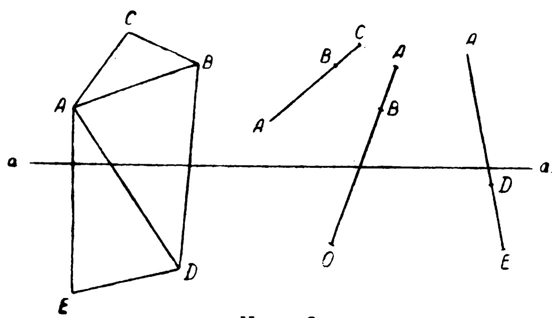
2) *Если A и B лежат по одну сторону, а A и D — по разные стороны от прямой a, то B и D лежат по разные стороны от этой прямой.*

3) *Если A и D, A и E лежат по разные стороны от прямой a, то D и E лежат по одну сторону от этой прямой* (черт. 3).

Для каждого утверждения доказательство без труда вытекает либо из аксиомы XV и определения 10, либо из теоремы 28 и того же определения 10.

Определение 11. Совокупность точек плоскости, лежащих по одну и ту же сторону от ее прямой a, в соединении с точками этой прямой называется *полуплоскостью с ребром a*.

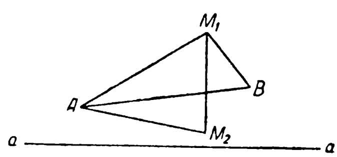
Когда говорят о точках полуплоскости, то обыкновенно имеют в виду точки, не лежащие на ее ребре.



Черт. 3

Теорема 30. *При данной плоскости и при данном ребре полуплоскость вполне определяется заданием одной из своих точек.*

Действительно, пусть дана плоскость α и в ней прямая a. Отметим в плоскости точку A, не лежащую на прямой a (теорема 23 и аксиома III), и в дальнейшем остановимся на полуплоскости, содержащей эту точку. В силу определения 11 эта полуплоскость будет совокупностью точек, лежащих с точкой A по одну сторону от прямой a, т. е. совокупностью таких точек M, для которых отрезок (AM) не пересекает прямой a. Взяв две таких точки M_1 и M_2 (черт. 4), убедимся, что и между собой они лежат по одну сторону от a. Эта прямая, не пересекая отрезков (AM_1) и (AM_2), не может пересечь и отрезка $(M_1\ M_2)$ (аксиома XV или теорема 28).



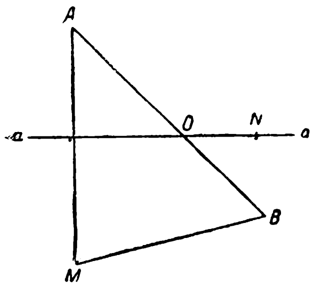
Черт. 4

Таким образом, наша полуплоскость вполне определена. В основу ее определения можно положить вместо точки A любую другую ее точку B. В самом деле, так как отрезок (AB) не пересекается с прямой a, то отрезки (AM) и (BM) будут одновременно пересекаться или не пересекаться с прямой a (аксиома XV или теорема 28), так что оба определения дадут одни и те же точки M.

На основании изложенного полуплоскость с ребром KL и содержащая точку A обозначается $KL.A$.

Теорема 31. *Всякая прямая a плоскости α делит ее* *на две полуплоскости, не имеющие общих точек, за исключением точек общего ребра а.*

Действительно, отметим точку A на плоскости α, но вне прямой a, и на этой прямой отметим две какие-нибудь точки O и N (черт. 5). Далее, отметим на прямой AO такую точку B, чтобы O лежала между A и B (теорема 22). Легко видеть, что точка B принадлежит данной плоскости (аксиома VI).



Черт. 5

Теперь нетрудно доказать, что эта плоскость разбивается на две части:

полуплоскость $ON.A$ и полуплоскость $ON.B$.

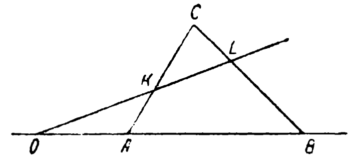
В самом деле, возьмем в плоскости α любую точку M, не лежащую на прямой a. Аксиома XV (или теорема 28) в применении к точкам A, B, M дает, что прямая a пересечет один и только один из отрезков (AM) и (BM). Другими словами, точка M попадет в одну и только в одну из вышеуказанных полуплоскостей.

После изложенного не представит большого труда доказать следующие предложения

Теорема 32. *Если оба конца данного отрезка лежат внутри одной и той же полуплоскости* (один из них может находиться и на ее ребре), *то все его внутренние точки принадлежат этой же полуплоскости.*

Теорема 33. *Если вершина луча лежит на прямой a, но он не лежит на ней целиком, то все его остальные точки лежат внутри одной и той же полуплоскости с ребром a.*

Теорема 34. *Если прямая b пересекает прямую a в точке O, то этой точкой она делится на два луча, принадлежащие двум различным полуплоскостям с ребром a.*



Черт. 6

Для следующего параграфа понадобится одно предложение, которое мы сейчас докажем.

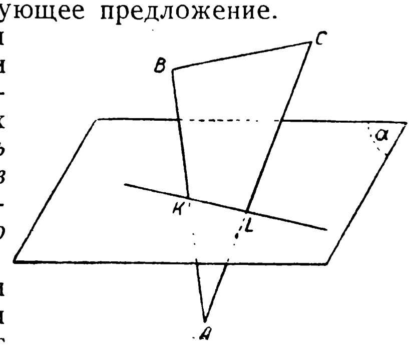
Теорема 35. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. *Если вершина некоторого луча находится на прямой AB, но вне отрезка (AB), и если этот луч пересекает один из отрезков (AC) и (BC) во внутренней точке, то он пересечет и другой отрезок также во внутренней точке.*

Пусть вершиной луча служит точка O (черт. 6), и пусть данный луч пересекает отрезок (AC) во внутренней точке K. На основании аксиомы XV прямая OK пересечет отрезок (BC) в некоторой внутренней точке L. Далее, все внутренние точки отрезков (AC) и (BC) принадлежат полуплоскости $AB.C$ (теорема 32), и все точки полупрямой OK должны принадлежать этой же полуплоскости (теорема 33), а точки противоположного луча — другой полуплоскости с ребром AB (теорема 34).

Отсюда следует, что точка L лежит на первом луче, т. е. на том, который был дан сначала.

Подобно тому, как прямая делит плоскость на две части, точно так же плоскость делит пространство. Основанием для рассуждения здесь служит следующее предложение.

Теорема 36. Пусть даны три различные точки A, B, C и еще дана плоскость, не проходящая ни через одну из этих точек; *если данная плоскость пересекает один из отрезков* (AB), (BC), (CA), *то она пересечет также один и только один из двух остальных.*



Черт. 7

Пусть сначала данные точки не лежат на одной прямой, и пусть плоскость α пересекает отрезок (AB) в точке K (черт. 7).

Применяя к плоскостям α и ABC теорему 3, а затем к прямой их пересечения — аксиому XV, находим другую точку пересечения L.

Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то вспоминаем доказательство теоремы 28.

Исходя из теоремы 36, можно развить учение о делении пространства. Ввиду полного сходства с предыдущим, ограничимся высказыванием следующей теоремы.

Теорема 37. Определения 10, 11 и теоремы 29—33 *переносятся в пространство* при следующей *замене* терминов:

прямая (ребро) — плоскость,
плоскость — пространство,
полуплоскость — полупространство.

При доказательстве теорема 36 заменит собой аксиому XV и теорему 28. Что касается теоремы 34, то там понадобятся несколько иные изменения, которые предоставляем читателю.

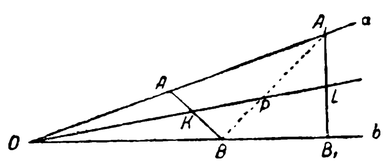
§ 4. Угол

Пусть даны два луча a и b с общей вершиной в точке O, но принадлежащие различным прямым (черт. 8). Отметим внутри этих лучей соответственно точки A и B и соединим их отрезком (AB).

Определение 12. *Углом AOB или (ab) называется совокупность лучей, исходящих из точки O и пересекающих отрезок (AB)*. Данные лучи — *стороны* угла, точка O — его *вершина* (остальную часть пучка лучей с центром в O иногда называют входящим углом AOB).

Построенный по указанному способу отрезок (AB) называется *секущим отрезком* данного угла.

Теорема 38. *Угол как совокупность лучей не зависит от выбора секущего отрезка*.



Черт. 8

Действительно, построим для нашего угла другой секущий отрезок $(A_1 B_1)$ (черт. 8). Достаточно будет доказать, что всякий луч с вершиной в точке O, пересекающий один из отрезков (AB) и (A_1B_1), пересечет и другой. Заметим, что точка O не может лежать ни внутри отрезка (AA_1), ни внутри (BB_1), так как точки A и A_1, B и B_1 взяты на одних и тех же лучах с вершиной в точке O. Возьмем для определенности какой-нибудь луч, пересекающий (AB) в точке K. Проведя вспомогательный отрезок (A_1B) и применяя теорему 35 к точкам A, A_1, B и лучу OK, найдем, что этот луч пересечет отрезок (A_1B) в некоторой внутренней точке P. Снова применяем ту же теорему к точкам A_1, B, B_1 и находим, что луч OK пересечет отрезок (A_1B_1) во внутренней точке L. Отсюда вытекает, что отрезки (AB) и (A_1B_1) определяют одну и ту же совокупность лучей.

Теорема 39. *Между лучами угла и точками секущего отрезка существует одно-однозначное соответствие*.

Достаточно будет считать соответственными два элемента, которые совмещены друг с другом.

Теорема 40. *Свойства отрезка*, выраженные в теоремах 24, 25 и 26, *переносятся на углы* при следующей *замене* терминов:

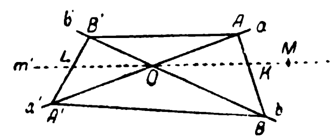
отрезок — угол,
точка — луч.

Доказательство вытекает из теоремы 39.

Определение 13. Если обе стороны угла заменить на *противоположные лучи*, то получим угол *вертикальный* для данного; если же этой замене подвергнуть только одну сторону, то получим угол *смежный* с данным. (Такие углы имеются на черт. 9.)

Теорема 41. *Если m есть внутренний луч угла (ab), то противоположный луч m' будет внутренним для вертикального угла $(a'\ b')$.*

В самом деле, пусть луч m пересекает отрезок (AB) во внутренней точке K. Построим также секущие отрезки (AB'), $(A'B')$, $(A'B)$ для вертикального и смежных углов и отметим, что точка O лежит внутри отрезков (AA') и (BB'), так как точки A и A', B и B' принадлежат противоположным лучам с общей вершиной O. Тогда прямая OK не может пересечь отрезка (AB') (аксиома XV в применении к точкам A, B, B'), а потому пересекает $(A'B')$ в некоторой внутренней точке L (аксиома XV в применении к точкам A, A', B'). С другой стороны, точки K и L принадлежат различным полуплоскостям с ребром BB', а именно: точка K принадлежит полуплоскости $BB'.A$, а точка L — полуплоскости $BB'.A'$ (теоремы 34, 32). Точно так же лучи m и m', на которые делится прямая OK точкой пересечения ее с прямой BB', принадлежат различным полуплоскостям с этим ребром (теорема 34).



Черт. 9

Следовательно, если точка K лежит на луче m, то точка L должна лежать на луче m', откуда следует, что луч m', пересекая отрезок $(A'\ B')$, лежит внутри угла $(a'\ b')$.

До сих пор мы рассматривали угол как совокупность лучей; но угол можно рассматривать и как совокупность точек, ибо каждый луч есть совокупность точек.

Теорема 42. *Каждая точка плоскости AOB, не лежащая на прямых OA и OB, лежит внутри одного и только одного из четырех углов $\angle AOB$, $\angle AOB'$, $\angle A'OB'$, $\angle A'OB$* (имеем в виду построения теоремы 41, закрепленные на черт. 9).

Действительно, пусть дана нам точка M. Возьмем точки A, B, B' и прямую OM, и применим к ним аксиому XV. Тогда прямая OM должна пересечь один и только один из отрезков (AB) и (AB') во внутренней точке. Допустим, для определенности первое. Прямая OM точкой O делится на два луча, и если точка M принадлежит лучу OK, то она лежит внутри $\angle AOB$; если же она находится на противоположном луче, то попадает внутрь вертикального $\angle A'OB'$ (теорема 41). Подобным же образом исследуется и вторая возможность, когда прямая OM пересекает отрезок (AB').

Теорема 43. *Совокупность точек, образующую $\angle AOB$, можно определить как совокупность точек, общих полуплоскостям $OA.B$ и $OB.A$.*

В самом деле, пусть точка M лежит внутри $\angle AOB$ (черт. 9). По определению она принадлежит некоторому лучу OK, пересекающему отрезок (AB) во внутренней точке K. Так как отрезок (AB) принадлежит обеим названным полуплоскостям (теорема 32), то точка K и весь луч OK лежат в обеих этих полуплоскостях (теорема 33).

Таким образом, каждая внутренняя точка $\angle AOB$ лежит внутри полуплоскости $OA.B$ и полуплоскости $OB.A$.

Подобное же имеет место для вертикального и смежных углов.

Пусть теперь обратно, точка M лежит внутри полуплоскости $OA.B$ и полуплоскости $OB.A$. Во всяком случае, она должна лежать внутри одного из указанных четырех углов (теорема 42); если это не $\angle AOB$, то сейчас же получается противоречие.

Пусть, например, точка M лежит внутри $\angle AOB'$. Тогда по только что доказанному она принадлежит полуплоскости $OA.B'$ и полуплоскости $OB'.A$. Но принадлежать одновременно полуплоскости $OA.B$ и полуплоскости $OA.B'$ она не может (теорема 31).

Следовательно, наша теорема доказана полностью.

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

Теорема 44. *Если точки A и B обе лежат внутри угла, то отрезок (AB) не пересекает его сторон*, и обратно: *если точка A — внутренняя для некоторого угла и отрезок (AB) не пересекает его сторон, то и точка B — внутренняя для данного угла.*

Теорема 45. *Если точка A — внутренняя, а B — внешняя для некоторого угла, то отрезок (AB) пересекает одну и только одну из сторон данного угла или проходит через его вершину*; и обратно: *если отрезок (AB) пересекает только одну из сторон угла во внутренней точке или проходит через его вершину и если одна из точек A и B будет внутренней, то другая будет внешней для данного угла.*

В определении 12 мы исходили из двух различных лучей, принадлежащих, кроме того, различным прямым. Распространим теперь понятие угла на случай двух противоположных лучей. Так как такие лучи образуют полную прямую, которая делит плоскость на две полуплоскости, то полагаем:

Определение 14. *Выпрямленным или развернутым углом называется полуплоскость. Полным углом называется весь пучок лучей с данным центром.*

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

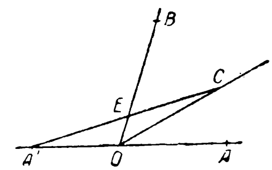
Теорема 46. *Если дан выпрямленный угол со сторонами OA и OA' и OB есть луч, лежащий внутри данного выпрямленного угла, то этот угол слагается из двух обыкновенных углов: $\angle AOB$ и $\angle A'OB$.*

Теорема 47. *Если в точке O пересекаются две прямые AOA' и BOB', то полный угол O слагается из четырех обыкновенных углов:* $\angle AOB$, $\angle A'OB$, $\angle A'OB'$, $\angle AOB'$ (черт. 9).

Теорема 48. *Если различные лучи OB и OC принадлежат одной и той же полуплоскости с ребром OA, то либо луч OB лежит внутри $\angle COA$, либо луч OC лежит внутри $\angle BOA$, причем эти случаи несовместны.*

Действительно, будем иметь в виду черт. 10, где точка A' отмечена на луче, противоположном для OA. Если полупрямая OB лежит внутри $\angle COA$, то первое утверждение теоремы доказано; в противном случае, этот луч должен лежать внутри $\angle A'OC$, смежного с $\angle COA$ (теорема 46).

Следовательно, отрезок $(A'C)$, секущий для указанного угла, пересечет полупрямую OB в некоторой точке E. Поэтому



Черт. 10

полуплоскость $OB\,.\,A'$ и полуплоскость $OB.\,C$ различны.

(Определения 10, 11; теорема 31.)

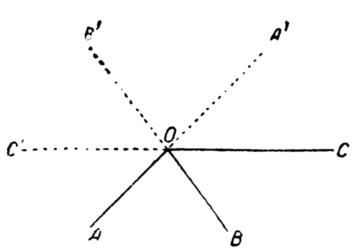
То же самое можно, очевидно, сказать о полуплоскости $OB\,.\,A'$ и полуплоскости $OB\,.\,A$. Отсюда вытекает, что

полуплоскость $OB\,.\,A$ и полуплоскость $OB\,.\,C$ тождественны.

Так как точка C принадлежит последней из них, то эта точка C должна лежать и в полуплоскости $OB\,.\,A$; с другой стороны, точка C лежит в полуплоскости $OA\,.\,B$, ибо последняя в силу наших данных тождественна с полуплоскостью $OA \cdot C$ (теорема 30).

Следовательно, точка C лежит внутри $\angle BOA$ (теорема 43), а потому и полупрямая OC лежит внутри этого угла.

Если, наконец, допустить, что оба случая имеют место одновременно, то луч OC окажется внутри $\angle COA$ (теорема 24 и 40), что невозможно.



Черт. 11

Теорема 49. *Если даны три луча, исходящие из одной и той же точки и лежащие в одной и той же плоскости, то либо один из лучей лежит внутри угла, образованного двумя остальными, либо это имеет место для противоположного луча.*

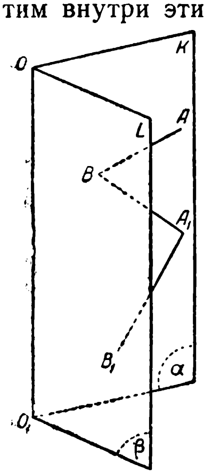
Будем иметь в виду черт. 11 и остановимся на углах, образованных прямыми AOA' и BOB'; третий луч OC попадает в один из получающихся здесь четырех углов (теорема 47). Если он попадет в $\angle AOB$, теорема доказана; если он попадет в вертикальный $\angle A'OB'$, то теорема 41 покажет, что наше утверждение и в этом случае оправдано.

Допустим, что полупрямая OC лежит внутри $\angle A'OB$. Так как полупрямая OB и полупрямая OC принадлежат одной и той же полуплоскости с ребром AOA' (теорема 43), то можно применить теорему 48, которая покажет, что луч OB лежит внутри $\angle AOC$. Так же рассматривается и случай, когда луч OC лежит внутри $\angle AOB'$.

В такой форме теорема будет достаточна для одного применения в дальнейшем. Более подробный анализ взаимного положения трех лучей предоставляется читателю.

Подобно тому, как угол в определении 12 представился нам в виде совокупности полупрямых, точно так же *двугранный угол* определяется как *совокупность полуплоскостей.*

Пусть даны две полуплоскости α и β с общим ребром OO_1, но принадлежащие различным плоскостям (см. черт. 12). Отметим внутри этих полуплоскостей точки A и B соответственно и соединим их отрезком (AB).



Черт. 12

Определение 15. *Двугранным углом* $K\,.\,OO_1\,.\,L$ [или $(\alpha\beta)$, *или просто двугранным* OO_1] *называется совокупность полуплоскостей,* исходящих из прямой OO_1 и пересекающих отрезок (AB). Данные полуплоскости—*грани* двугранного угла, прямая OO_1—его *ребро.* Построенный по указанному способу отрезок (AB) называется *секущим отрезком* двугранного угла.

Теорема 50. *Двугранный угол как совокупность полуплоскостей не зависит от выбора секущего отрезка.*

Действительно, построим для нашего двугранного угла другой секущий отрезок (A_1B_1) (см. черт. 12). Достаточно будет доказать, что всякая полуплоскость OO_1, пересекающая один из отрезков (AB) и (A_1B_1), пересечет и другой. Заметим, что ни одна внутренняя полуплоскость OO_1 не может иметь с плоскостями α и β других общих точек, кроме прямой OO_1 (теорема 3).

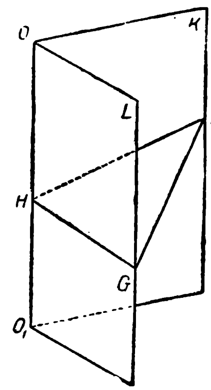
Возьмем, для определенности, какую-нибудь полуплоскость, пересекающую (AB) (на чертеже она не обозначена); проведя вспомогательный отрезок (A_1B) и применяя теорему 36 к точкам A, A_1, B и к той плоскости, часть которой составляет взятая полуплоскость OO_1, найдем, что эта плоскость пересечет отрезок (A_1B) в некоторой внутренней точке.

Вторичное применение той же теоремы к точкам A_1, B, B_1 приведет к выводу, что указанная плоскость пересечет и отрезок (A_1B_1) в некоторой внутренней точке. Более того, можно утверждать, что эта точка пересечения принадлежит именно взятой нами полуплоскости, ибо последняя расположена в тех же самых полупространствах по отношению к плоскостям α и β, что и найденная выше точка пересечения (о полупространствах см. теорему 37).

Таким образом, отрезки (AB) и (A_1B_1) определяют одну и ту же совокупность полуплоскостей.

В отличие от двугранных, те углы, с которыми мы имели дело в начале настоящего параграфа, называются *линейными*.

Теорема 51. *Если двугранный угол пересечь плоскостью, не проходящей через его ребро, но имеющей с ним общую точку, то в сечении получается линейный угол, причем между полуплоскостями двугранного и полупрямыми линейного угла существует одно-однозначное соответствие.*



Черт. 13

Действительно, пересечем наш двугранный угол плоскостью, проходящей через точку H на его ребре (черт. 13); эта плоскость пересечет его грани, а равно и внутренние полуплоскости по лучам, исходящим из точки H (теоремы 3, 34). Пусть данная плоскость пересекает грани двугранного угла по лучам HF и HG. Всякая внутренняя полуплоскость данного двугранного угла пересекает отрезок (FG) во внутренней точке (теорема 50, определение 15), и эта точка должна лежать на луче, который является пересечением плоскости FHG с указанной полуплоскостью. Следовательно, в сечении действительно получается линейный угол FHG.

Так как и для двугранного угла $K \cdot OO_1 \cdot L$ и для линейного угла FHG в качестве секущего отрезка можно взять отрезок (FG), то установить упомянутое одно-однозначное соответствие не представит никаких затруднений.

Определение 16. *Линейный угол, который находится к двугранному углу в отношении,* указанном в теореме 51, *называется его сечением.*

Теорема 52. Теоремы 39—49 и определения 13, 14 переносятся на двугранные углы при следующей *замене* терминов:

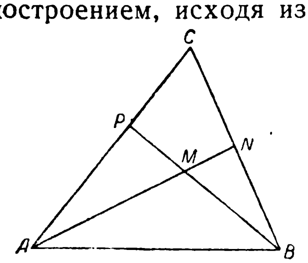
угол — двугранный угол,
сторона — грань,
вершина — ребро,
луч — полуплоскость,
прямая — плоскость,
полуплоскость — полупространство,
плоскость — пространство.

Доказательство основано на одно-однозначном соответствии, о котором шла речь в теореме 51.

§ 5. Треугольник

Теорема 53. Даны три точки A, B, C, *не лежащие на одной прямой; всевозможные отрезки, соединяющие* A *с точками отрезка* (BC) или B с точками отрезка (CA), или C с точками отрезка (AB), дают *одну* и ту же *совокупность* точек.

Для доказательства возьмем произвольную точку M внутри отрезка (AN), где N—любая точка отрезка (BC) (см. черт. 14), и докажем, что ту же точку M можно получить подобным же построением, исходя из точки B и отрезка (CA). Если N совпадет с B или C, то вопрос трудностей не представит, так как точки отрезков (AB) и (AC) мы можем получить на отрезках, исходящих из B.



Черт. 14

Пусть N есть внутренняя точка отрезка (BC). Возьмем точки A, N, C, прямую BM, применим сюда аксиому XV и убедимся, что эта прямая пересекает отрезок (AC) во внутренней точке P. Если же применить ту же аксиому к точкам B, P, C и прямой AN, то увидим, что точка M лежит внутри отрезка (BP).

Таким образом, точку M можно получить, исходя из точки B и отрезка (AC).

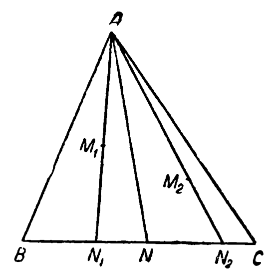
Определение 17. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой; *совокупность точек, лежащих на всевозможных отрезках, соединяющих одну из данных точек с точками отрезка, образованного двумя остальными, называется треугольником* ABC (обозначение: $\triangle\ ABC$, причем порядок букв безразличен). Вершины, стороны, углы, обвод треугольника определяются, как обычно; точки треугольника, не лежащие на его обводе, называются внутренними, а точки плоскости ABC, отличные от точек треугольника, называются по отношению к нему внешними. Угол A и сторона (BC) называются противолежащими, а угол A и одна из двух других сторон—прилежащими, и т. д.

Замечание. Теперь можно упростить формулировку аксиомы XV и теоремы 35, 36, говоря о $\triangle\ ABC$ и его сторонах.

Определение 18. *Отрезок, которого концами служат одна из вершин треугольника и внутренняя точка противолежащей стороны, называется трансверсалью треугольника.*

Теорема 54. *Трансверсаль делит треугольник на два частичные треугольника, не имеющие других общих точек, за исключением точек этой трансверсали.*

Действительно, проведем в $\triangle ABC$ трансверсаль (AN) (черт. 15) и наряду с данным треугольником рассмотрим $\triangle\triangle$ ABN и ACN; точка N делит сторону (BC) на две части: (BN) и (CN), не имеющие общих точек, за исключением точки N (теорема 24), и эти отрезки соответственно принадлежат двум названным выше треугольникам. Из этого обстоятельства, в связи с определением треугольника при помощи вершины A и противолежащей стороны, вытекает наше утверждение.



Черт. 15

Определение 19. Такое *разложение* треугольника на два частичных треугольника называется *трансвергсальным*. Вообще так называется всякое разложение треугольника на частичные треугольники, если его можно получить с помощью последовательного проведения конечного числа трансверсалей как в данном треугольнике, так и во вновь получаемых.

Теорема 55. *Совокупность точек треугольника можно определить как совокупность точек, общих для всех углов его.*

Действительно, всякая внутренняя точка M лежит внутри отрезка (AN) (черт. 14); а потому полупрямая AM тождественна с полупрямой AN, принадлежащей $\angle CAB$ (теорема 27). Подобным образом доказывается, что точка M лежит внутри других углов треугольника. Обратно, пусть нам дано, что точка M лежит внутри всех углов треугольника. Приняв во внимание углы A и B, мы скажем, что эта точка лежит на пересечении лучей AN и BP, соответственно принадлежащих указанным углам. Применим теорему 35 к точкам A, N, C и полупрямой BP; тогда окажется, что точка M лежит внутри отрезка (AN), т. е. внутри данного треугольника (определение 17).

Замечание. Из доказательства этой теоремы, между прочим, вытекает, что точки, общие двум углам треугольника, принадлежат и его третьему углу.

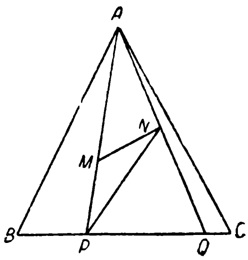
Теорема 56. *Совокупность точек $\triangle ABC$ можно определить как совокупность точек, общих трем полуплоскостям:*

$$AB\,.\,C,\quad BC\,.\,A,\quad CA\,.\,B.$$

Доказательство основано на теоремах 55 и 43.

Теорема 57. *Если две точки треугольника соединить отрезком, то его внутренние точки будут внутренними и для данного треугольника.*

Остановимся на общем случае, когда обе данные точки M и N лежат внутри треугольника (черт. 16). При помощи трансверсального разложения (определение 19, теорема 54) перейдем к $\triangle$ APN, который будет частью данного; а для $\triangle$ APN наше утверждение вытекает из определения 17.



Черт. 16

Далее можно доказать следующие предложения.

Теорема 58. *Если точка O лежит внутри $\triangle$ ABC, то этот последний слагается из трех частичных треугольников: $\triangle$ AOB, $\triangle$ BOC, $\triangle$ COA.*

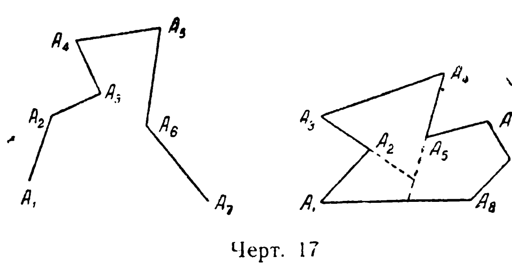
Теорема 59. *Прямая, лежащая в плоскости треугольника и проходящая через его внутреннюю точку, пересекает его обвод в двух и только в двух точках.*

Теорема 60. *Отрезок, соединяющий внутреннюю точку треугольника со внешней, пересекает его обвод в одной и только в одной точке.*

§ 6. Многоугольники

Определение 20. Пусть в некоторой плоскости даны n точек: A_1, A_2, A_3,..., A_{n-1}, A_n в определенном порядке, причем никакие три последовательные точки не лежат на одной прямой (точки A_{n-1}, A_n, A_1 и A_n, A_1, A_2 также считаются последовательными). Соединим каждые две рядом стоящие точки отрезками: (A_1A_2), (A_2A_3),..., $(A_{n-1}A_n)$.

Совокупность этих отрезков называется *ломаной линией*, данные точки — ее *вершинами*, указанные отрезки — *сторонами* или *отрезками* ломаной. Если точки A_n и A_1 — различны, то такая ломаная называется *незамкнутой*; если же A_n и A_1 совпадают или если при различии этих точек мы присоединим к вышеуказанным отрезкам еще (A_nA_1), то получим *замкнутую* ломаную (оба случая имеем на черт. 17). В дальнейшем мы остановимся на замкнутой ломаной, которую будем обозначать $A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

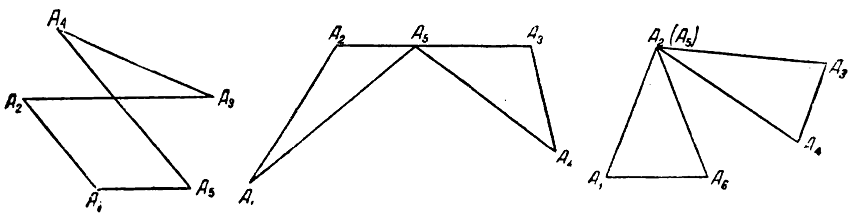


Черт. 17

Заметим, что в замкнутой ломаной точка A_1 считается непосредственно следующей за A_n.

Можно рассматривать и неплоские ломаные, но сейчас в это входить не будем.

Определение 21. *Ломаная называется простой, если любые два отрезка ее не имеют общих точек, за исключением общей вершины у двух смежных сторон;* в противном случае ломаная называется *звездчатой*.



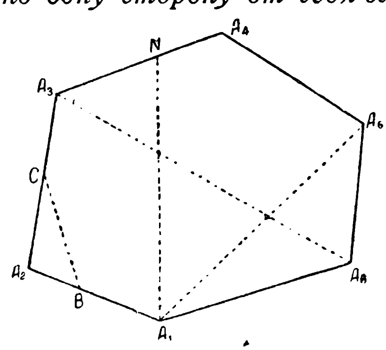
Черт. 18

На черт. 18 имеем различные случаи звездчатой ломаной; на черт. 17 (справа), равно как и на черт. 19, мы видим простые ломаные.

Определение 22. *Простая ломаная называется выпуклой, если всякая прямая, на которой лежит какой-нибудь отрезок ее, оставляет по одну сторону от себя все остальные точки ломаной;* в противном случае простая ломаная называется *вогнутой*.

На черт. 17 (справа) изображена вогнутая ломаная, а на черт. 19 — выпуклая.

В дальнейшем мы остановимся на случае выпуклой ломаной.



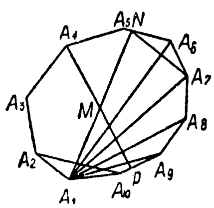
Черт. 19

Определение 23. В случае выпуклой ломаной введем еще следующие определения (см. черт. 19): $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4, \ldots$, $\angle A_{n-1}A_nA_1$, $\angle A_nA_1A_2$ называются *углами ломаной;* отрезки, соединяющие две какие-нибудь не соседние вершины, называются *диагоналями;* отрезок, соединяющий вершину с внутренней точкой какой-нибудь несмежной стороны [(например: отрезок (A_1N)], называется *трансверсалью* ломаной.

Замечание. Очень часто в дальнейших рассуждениях точка A_1 будет занимать как-будто бы особое положение; на самом деле это не так, ибо буквой A_1 можно обозначить любую вершину ломаной.

Теорема 61. *Прямая, не содержащая ни одной из сторон выпуклой ломаной, не может пересекать ее более чем в двух точках; прямая, содержащая какую-нибудь сторону ломаной, не может иметь с ней других общих точек.*

В противность утверждению допустим, что некоторая прямая пересекает ломаную в трех точках A, B, C, во всяком случае не принадлежащих одной и той же стороне, и пусть точка B лежит между A и C (теорема 17). Тогда точки A и C лежат по разные стороны от той прямой, которая содержит отрезок ломаной, проходящий через точку B (определение 10), а это противоречит свойству выпуклости (определение 22).



Черт. 20

Теорема 62. *Точки выпуклой ломаной принадлежат каждому из ее углов.*

Действительно, остановимся на $\angle A_2A_1A_n$ (черт. 20, где $n=10$). На основании определения 22 и теоремы 30 все точки данной ломаной принадлежат полуплоскости $A_1A_n.A_2$ и полуплоскости $A_1A_2.A_n$, откуда следует, что эти точки принадлежат $\angle A_2A_1A_n$ (теорема 43). Так же и для других углов.

Теорема 63. *Прямая, соединяющая две точки выпуклой ломаной* (не лежащие на одном и том же ее отрезке), *делит ее на две части, расположенные по разные стороны от данной прямой.*

Обратимся к черт. 20 и проведем прямую A_1A_6. Тогда данная ломаная делится на такие две части:

одна — состоит из отрезков (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_5), (A_5A_6);

другая — состоит из отрезков (A_6A_7), (A_7A_8), (A_8A_9), (A_9A_{10}), $(A_{10}A_1)$.

Если же провести прямую A_1N, где N лежит внутри (A_5A_6), то:

одна часть состоит из (A_1A_2), (A_2A_3),..., (A_4A_5), (A_5N);

другая часть состоит из: (NA_6), (A_6A_7),...,$(A_{10}A_1)$.

Возможен еще случай, когда прямая соединяет две внутренние точки сторон ломаной, но он ничего существенно нового не представляет.

В только что изложенном (на примере черт. 20) дано правило, как надо делить ломаную на две части. Переходим к дальнейшим утверждениям теоремы.

Вершины каждой части все лежат по одну сторону от прямой A_1A_6 или A_1N, так как иначе одна из сторон ломаной пересекала бы данную прямую в точке, отличной от ее концов, что невозможно (теорема 61); но в таком случае и все остальные точки указанных частей лежат по одну сторону от прямой A_1A_6 или A_1N (теорема 32). Далее, точки различных частей лежат по разные стороны от данной прямой: в первом случае точки A_2 и A_{10} лежат по разные стороны от A_1A_6, ибо полупрямая A_1A_6 пересекает секущий отрезок (A_2A_{10}) угла при точке A_1 (теорема 62); во втором случае точки A_5 и A_6, очевидно, лежат по разные стороны от прямой A_1N. Теперь остается только сослаться на теорему 29, п. 2.

Теорема 64. *Внутренние точки трансверсалей и диагоналей выпуклой ломаной, исходящих из двух различных вершин ее, дают одну и ту же совокупность точек.*

Имея в виду черт. 20, докажем теорему для вершин A_1 и A_4.

Пусть для определенности, точка M лежит на трансверсали, исходящей из вершины A_1, и пусть она лежит внутри отрезка (A_1N), где N — внутренняя точка отрезка A_5A_6. Проведем прямую A_4M и применим аксиому XV к $\triangle A_1NA_6$, где A_6—та вершина отрезка, содержащего N, которая лежит с A_4 по разные стороны от прямой A_1N (теорема 63). Тогда получим, что прямая A_4M либо пересекает диагональ (A_1A_6) (случай чертежа), либо пересекает отрезок (A_6N). В последнем случае мы уже получили бы другую точку пересечения прямой A_4M с данной ломаной; а в первом — переходим к $\triangle A_1A_6A_7$, и т. д. Продолжая эти рассуждения, мы или еще раньше найдем вторую точку пересечения прямой A_4M с данной ломаной или дойдем до последнего $\triangle A_1A_9A_{10}$, и прямая A_4M должна будет пересечь одну из его сторон (A_9A_{10}) или $(A_{10}A_1)$.

Итак, прямая A_4M пересекает данную ломаную еще в точке P, которая, как это видно из построения, лежит с точкой A_4 по разные стороны от прямой A_1N. Следовательно, эта прямая пересекает отрезок (A_4P). Но раньше мы видели, что прямые A_4P и A_1N пересекаются в точке M, а потому (теорема 1) точка M должна лежать внутри отрезка (A_4P).

Таким образом, всякая точка M, лежащая на трансверсали или диагонали, исходящей из вершины A_1, оказывается внутри трансверсали или диагонали, исходящей из вершины A_4.

Определение 24. *Совокупность внутренних точек всевозможных диагоналей и трансверсалей выпуклой ломаной* $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, исходящих из какой-нибудь ее вершины, в соединении с точками самой ломаной, называется *выпуклым многоугольником* (или n-угольником) $A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

Данная ломаная называется *обводом* многоугольника; остальные точки будут *внутренними* для него; точки плоскости многоугольника, отличные от его точек, называются по отношению к нему *внешними*. Вершины, стороны, углы, диагонали, трансверсали многоугольника суть соответственные элементы ломаной, служащей его обводом.

При $n=3$ получаем снова треугольник.

Теорема 65. *Для всякого целого положительного числа* n *существует выпуклый* n*-угольник.*

Положим, что существование $(n-1)$-угольника уже доказано, и пусть таковым будет многоугольник $A_1A_2A_3A_4...$ на черт. 19. Отметим внутри его сторон (A_1A_2) и (A_2A_3) по точке B и C, а затем рассмотрим фигуру $A_1BCA_3A_4\ldots$. Читателю не представит труда доказать, что здесь мы имеем дело с выпуклой ломаной (в частности, для прямой BC придется воспользоваться теоремой 63), а следовательно, и с выпуклым многоугольником, у которого число сторон на единицу больше данного.

Итак, если существует $(n-1)$-угольник, то существует и n-угольник; но треугольник существует, а потому существуют четыреугольник, пятиугольник и т. д.

Такой способ доказательства, как указано выше, носит название *математической индукции.*

Дальше можно доказать следующие предложения.

Теорема 66. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многоугольника и лежащая в его плоскости, пересекает его обвод в двух и только в двух точках.*

(Доказательство подобно приведенному в теореме 64.)

Теорема 67. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку стороны выпуклого многоугольника (но не содержащая этой стороны) и лежащая в его плоскости, пересекает его обвод еще в одной и только в одной точке.*

Теорема 68. *Отрезок, соединяющий две точки обвода выпуклого многоугольника (не принадлежащие одной и той же стороне), разлагает данный многоугольник на два частичных многоугольника.*

Теорема 69. *Всякий выпуклый n-угольник с помощью диагоналей, исходящих из одной и той же вершины, разлагается на $(n-2)$-треугольника.*

Теорема 70. *Точки многоугольника суть точки, общие всем углам его.*

Теорема 71. *Отрезок, соединяющий две точки выпуклого многоугольника, принадлежит ему всеми своими точками.*

Теорема 72. *Отрезок, соединяющий внутреннюю и внешнюю точки многоугольника, пересекает его обвод в одной и только в одной точке.*

Теорема 73. *Если в выпуклом n-угольнике $A_1A_2A_3,\ldots A_n$ прямые A_1A_2 и A_3A_4 пересекаются в точке B, лежащей по другую сторону от A_2A_3 по сравнению с остальными вершинами, то получается выпуклый $(n-1)$-угольник $A_1BA_4\ldots A_n$.*

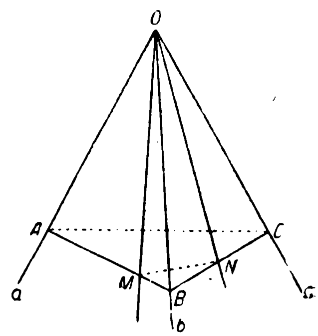
Читатель приглашается сделать чертеж для последней теоремы; она понадобится впоследствии для многогранных углов.

Замечание. До сих пор мы рассматривали выпуклые многоугольники; учение о вогнутых многоугольниках мы излагать не будем. Последние связаны с вогнутыми ломаными, которые тоже делят плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю (см. черт. 17, справа); первая приводит нас к понятию о вогнутом многоугольнике (например, многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_8$ на черт. 17).

Продолжая некоторые стороны вогнутого многоугольника, можно разложить его на известное число выпуклых. Так, на черт. 17, продолжая стороны (A_4A_5) и (A_2A_3), мы разлагаем вогнутый многоугольник на 3 выпуклых: четыреугольник, треугольник и пятиугольник.

§ 7. Телесные углы

Учение о телесных углах представляет большое сходство с учением о многоугольниках; поэтому мы воспользуемся рассуждениями § 5 и 6, чтобы перенести их с помощью указанного ниже „словаря“ на телесные углы. Этот прием, который применялся нами и раньше (см. теоремы 40, 52), значительно сокращает рассуждение и является обычным в геометрических исследованиях.



Черт. 21

В указанных параграфах мы имели дело с точками и прямыми некоторой плоскости; здесь же будут рассматриваться лучи и плоскости некоторой связки, т. е. совокупность всевозможных лучей, исходящих из данной точки, и совокупность всевозможных плоскостей, проходящих через данную точку. Вообще, все рассматриваемые здесь фигуры будут так или иначе связаны со связкой.

Предварительно докажем следующее предложение, которое в настоящем параграфе заменит нам аксиому XV.

Теорема 74. Пусть a, b, c суть три луча связки, не лежащие в одной плоскости, а α — плоскость связки, не проходящая ни через один из данных лучей. *Если плоскость α пересекает один из углов (ab), (bc), (ca) по внутреннему лучу, то она пересечет один и только один из двух остальных также по внутреннему лучу.*

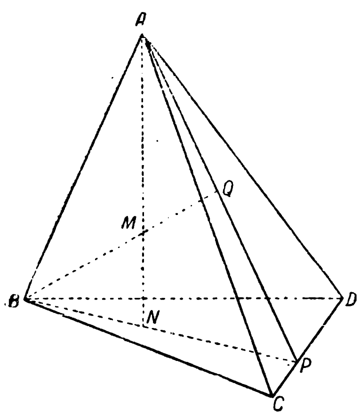
Пусть плоскость α имеет с углом (ab) общий луч OM (черт. 21). Отметив на данных лучах соответственно точки A, B, C, получим $\triangle ABC$, и луч OM пересечет отрезок (AB) в некоторой внутренней точке M, ибо (AB) есть секущий отрезок угла (ab). Данная плоскость α и плоскость ABC пересекутся по прямой, проходящей через точку M. На основании аксиомы XV эта прямая пересекает обвод $\triangle ABC$ еще в одной и только в одной точке N. Луч ON будет искомым.

Теорема 75. Определения 17, 18, 20—24, теоремы 53—73 остаются в силе (и дают учение о телесных углах) при следующей *замене* терминов:

плоскость—связка,
точка—луч (связки),
прямая—плоскость (связки),

луч—полуплоскость,
полуплоскость—полупространство,
отрезок (сторона)—угол (линейный),
угол—двугранный угол,
треугольник—трехгранный угол,
вершина—ребро,
трансверсаль—трансверсальный угол (см. опред. 18),
обвод (ломаная)—поверхность трехгранного или многогранного угла,
диагональ—диагональный угол (см. опред. 23),
многоугольник—многогранный (телесный) угол
(многогранный угол, образованный лучами $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ обозначается символом $OA_1A_2\ldots A_n$, и точка O называется его *вершиной*).

Доказательство заключается в том, что с указанным „словарем“ под рукой надо просмотреть § 5 и 6, убеждаясь шаг за шагом, что при таком переводе все утверждения их остаются верными. (Читателю рекомендуется тщательно проделать эту работу.)



Черт. 22

Относительно некоторых теорем надо сделать кое-какие замечания. Прежде всего аксиому XV во всех рассуждениях заменит теперь теорема 74; затем, при доказательстве теоремы 55, вместо ссылки на теорему 27 можно удовольствоваться понятием о секущем отрезке двугранного угла, а вместо теоремы 35 — сослаться на теорему 74 и на свойства полупространства и полуплоскостей; при доказательстве теоремы 61 ссылку на теорему 17 заменить ссылкой на теорему 49.

Имеющимися в § 5 и 6 чертежами можно пользоваться следующим образом: вообразим над чертежом некоторую точку O и проведем из этой точки лучи ко всем точкам чертежа (проектирование с помощью лучей); тогда получим фигуру, соответствующую учению о телесных углах. Такие углы мы определили как совокупности лучей; легко видеть, что их можно определить и как совокупности точек.

В заключение докажем для трехгранных углов следующее предложение.

Теорема 76. *Луч, исходящий из вершины трехгранного угла, принадлежит ему тогда и только тогда, когда он пересекает треугольник, вершинами которого служат точки, взятые на ребрах трехгранного угла.*

Примем во внимание трехгранный угол A на черт. 22 и построим $\triangle BCD$. Пусть полупрямая AM есть внутренний луч данного трехгранного угла. На основании определения 17 и теорем 75, 38 можно утверждать, что полупрямая AM лежит внутри $\angle BAP$, где P—точка на отрезке (CD). В таком случае полупрямая AM пересекает секущий отрезок (BP) этого угла в некоторой точке N, и эта точка принадлежит $\triangle BCD$ (определение 17).

Обратное утверждение доказывается подобными же рассуждениями.

§ 8. Тетраэдр

Теорема 77. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. *Совокупность всевозможных отрезков, соединяющих одну из данных точек с точками треугольника, образованного тремя остальными, дает одно и то же множество, независимо от выбора исходной точки.*

Пусть данные точки будут A, B, C, D (черт. 22). Заметим, что в силу задания, никакие три из них не могут лежать на одной прямой. Пусть точка M принадлежит отрезку, соединяющему точку A с какой-нибудь точкой $\triangle BCD$; обозначим эту последнюю точку буквой N.

Надо доказать, что та же точка M принадлежит известному отрезку, соединяющему B с некоторой точкой $\triangle ACD$.

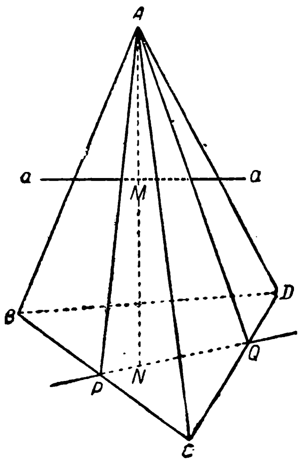
В частных случаях, когда M совпадает с N или когда N совпадает с B или когда N принадлежит отрезку (CD),— теорема становится очевидной. При другом расположении точек в $\triangle BCD$ проводим из точки B трансверсаль, на которой лежит точка N и которая пересекает сторону (CD) в некоторой точке P (эта точка может совпадать с C или с D); проведем также отрезок (AP), который будет трансверсалью $\triangle ACD$. Точка M будет внутренней для $\triangle ABP$ (определение 17); поэтому она будет лежать внутри некоторого отрезка (BQ), где Q есть точка отрезка (AP) (теорема 53), откуда и следует теорема.

Определение 25. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. *Совокупность точек, лежащих на всевозможных отрезках, соединяющих одну из данных точек с точками треугольника, образованного тремя остальными, называется тетраэдром* $ABCD$ (порядок букв здесь безразличен).

Вершины, ребра, грани, поверхность, внутренние и внешние точки, трехгранные, двугранные и плоские углы тетраэдра — определяются по обычному способу. Легко убедиться, что двугранный угол тетраэдра при ребре, соединяющем две данные вершины, является общим для трехгранных углов при этих вершинах, ибо в обоих случаях он опирается на один и тот же секущий отрезок. Далее, три пары противоположных ребер тетраэдра, а именно, пары (AB) и (CD), (AC) и (BD), (AD) и (BC) принадлежат скрещивающимся прямым.

Определение 26. *Треугольник, определяемый ребром тетраэдра и внутренней точкой противоположного ребра, называется трансверсальным сечением* (например, $\triangle ABP$ на черт. 22).

Легко видеть, что внутренние точки трансверсального сечения будут внутренними и для тетраэдра.



Черт. 23

Теорема 78. *Трансверсальное сечение делит тетраэдр на два других, не имеющих общих точек, за исключением точек данного трансверсального сечения.*

Доказательство предоставляется читателю.

Понятие о „трансверсальном разложении" можно обобщить по аналогии с определением 19.

Теорема 79. *Точки, принадлежащие двум трехгранным углам тетраэдра, принадлежат самому тетраэдру.*

Остановимся на общем случае, когда точка M лежит внутри трехгранных углов A и B тетраэдра $ABCD$ (черт. 22). Тогда полупрямая AM пересекает $\triangle BCD$ в некоторой внутренней точке N, а полупрямая BM пересекает $\triangle ACD$ в точке Q (теорема 76); а так как точки N и Q лежат в плоскости ABM, то прямые BN и AQ пересекаются в точке P, которая служит пересечением указанной плоскости с отрезком (CD). Надо помнить, что точка M лежит внутри двугранного угла при (AB) (теоремы 55 и 75), для которого (CD) является секущим отрезком. Теперь легко видеть, что точка M будет внутренней для $\triangle ABP$ (теорема 55 и замечание к ней); но тогда, находясь на отрезке (AN), она будет принадлежать данному тетраэдру (определение 25).

Теорема 80. *Точки тетраэдра суть точки, общие всем трехгранным углам его.*

Доказательство вытекает из теорем 76, 79 и определения 25.

Теорема 81. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку тетраэдра, пересекает его поверхность в двух и только в двух точках.*

Действительно, пусть внутренняя точка M тетраэдра $ABCD$ лежит внутри отрезка (AN), где N—внутренняя точка грани BCD (черт. 23), и пусть через точку M проведена прямая a. Если эта прямая a проходит через вершину A, то теорема становится непосредственно ясной, так как две точки пересечения уже налицо, и других быть не может, так как иначе точка M

не была бы внутренней. Если же прямая a не проходит через точку A, то проводим плоскость aA, которая пересекает плоскость BCD по прямой, проходящей через точку N; эта прямая пересекает обвод $\triangle BCD$ в двух и только в двух точках P и Q (теорема 59). Полученный таким образом $\triangle APQ$ (собственно его обвод) и будет пересечением плоскости aA с поверхностью тетраэдра, и никаких других общих точек у них не может быть, так как иначе получилось бы противоречие с теоремой 59.

Следовательно, данная прямая a может пересекать поверхность тетраэдра только по точкам обвода $\triangle APQ$. Далее, точка M будет внутренней для этого треугольника, так как точка N, находясь на прямой PQ и внутри $\angle BCD$ (теорема 55), должна лежать внутри его секущего отрезка (PQ).

Отсюда вытекает, что прямая a имеет две и только две точки пересечения с обводом $\triangle APQ$ (теорема 59), а следовательно, и с поверхностью тетраэдра.

Далее можно доказать следующие предложения.

Теорема 82. *Если внутри тетраэдра $ABCD$ дана точка O, то этот тетраэдр разлагается на четыре тетраэдра: $OABC$, $OACD$, $OADB$, $OBCD$.*

Теорема 83. *Точки тетраэдра $ABCD$ суть точки, общие для полупространств: $BCD \cdot A$; $ACD \cdot B$; $ADB \cdot C$; $ABC \cdot D$.*

Теорема 84. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку грани тетраэдра, но не лежащая в этой грани, пересекает его поверхность еще в одной и только в одной точке.*

Теорема 85. *Отрезок, соединяющий две точки тетраэдра, целиком принадлежит ему.*

Теорема 86. *Отрезок, соединяющий внутреннюю точку тетраэдра с внешней, пересекает его поверхность в одной и только в одной точке.*

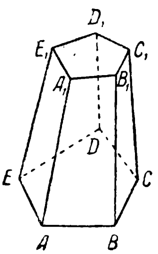
§ 9. Многогранники

Определение 27. Пусть дано n выпуклых многоугольников, расположенных таким образом, что каждая сторона каждого многоугольника является стороной еще одного и только одного другого многоугольника, и два многоугольника, имеющих общую сторону, лежат в разных плоскостях.

Тогда данная *совокупность многоугольников* называется *многогранной (точнее: n-гранной) поверхностью*; другие термины, как-то: вершины, ребра и т. д. многогранной поверхности понятны сами собой. Многогранная поверхность называется *выпуклой* если плоскость каждой ее грани оставляет все прочие ее грани по одну и ту же сторону от себя.

Мы ограничимся здесь рассмотрением выпуклых многогранных поверхностей. Примером могут служить: поверхность тетраэдра и поверхность, изображенная на черт. 24; последняя составлена из двух пятиугольников и из пяти четыреугольников.

Теорема 87. *Прямая, не лежащая целиком в плоскости одной из граней, не может пересекать выпуклую многогранную поверхность более чем в двух точках.*



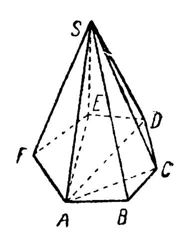
Черт. 24

Попробуем допустить, что имеются три точки пересечения A, B, C и пусть точка B лежит между A и C. Тогда точки A и C должны лежать по разные стороны от плоскости той грани, которая содержит точку B, а это противоречит свойству выпуклости.

Теорема 88. *При каждой вершине выпуклой многогранной поверхности имеется телесный угол, образованный лучами, содержащими те ребра поверхности, которые сходятся в данной вершине.*

Возьмем для определенности многогранную поверхность, изображенную на черт. 25 (оставляя пока без внимания диагонали многоугольника $ABCDEF$), и остановимся на вершине S. Из этой вершины исходят лучи SA, SB и т. д., содержащие одноименные ребра. Для того, чтобы грани телесного угла совпали с гранями поверхности, между указанными лучами устанавливается определенная последовательность следующим образом.

Берем луч SA и одну из граней (например $\triangle ASB$), проходящих через ребро (SA); на второе место ставим тот луч из точки S, который содержит другое ребро грани ASB, проходящее через точку S, а именно—луч SB; на третье место ставим луч, который содержит исходящее из точки S ребро грани BSC, смежной с предыдущей по ребру (SB), а именно — луч SC, и т. д. Так поступаем до тех пор, пока не переберем всех ребер, сходящихся в точке S. Так как данная многогранная поверхность выпукла, то плоскость двух соседних лучей оставляет все остальные лучи по одну сторону от себя. Теперь на основании определений 20, 22, 24 и теоремы 75 можно утверждать, что таким образом получается многогранный $\angle SABCDEF$.

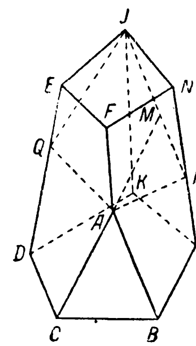


Черт. 25

Теорема 89. *Точки выпуклой многогранной поверхности принадлежат всем телесным углам при ее вершинах.*

Для определенности остановимся на телесном угле при точке A_1 на черт. 24. Точки граней $A_1B_1C_1D_1E$, AA_1B_1B

и AA_1E_1E, сходящихся в этой вершине, очевидно, принадлежат поверхности телесного угла $A_1AB_1E_1$; остальные же точки многогранной поверхности $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ будут внутренними для этого угла. Действительно, остановимся на какой-нибудь такой ее точке M (на чертеже не обозначенной); так как данная поверхность выпукла, то точка M принадлежит полупространству $AA_1B_1E_1$; точно так же точка M лежит внутри полупространства $AA_1E_1 \cdot B$. Но в таком случае точка M лежит внутри двугранного угла AA_1 (теоремы 43 и 52), и совершенно так же докажем, что эта точка лежит внутри и других двугранных углов телесного угла A_1. Следовательно, точка M принадлежит этому телесному углу (теорема 75).



Черт. 26

Определение 28. *Отрезок, соединяющий вершину выпуклой многогранной поверхности с какой-нибудь точкой ее, не лежащей на гранях, сходящихся в этой вершине, называется трансверсалью данной поверхности.*

Теорема 90. *Всякая плоскость, проходящая через трансверсаль выпуклой многогранной поверхности, пересекает ее по выпуклой ломаной.*

Проведем рассуждение на черт. 26, где дана трансверсаль, соединяющая вершину A с точкой M, не лежащей на гранях, имеющих точку A общей вершиной. В таком случае точка M лежит внутри телесного угла при точке A (теорема 89), и луч AM будет внутренним лучом этого угла. Через прямую AM проведем какую-нибудь плоскость, которую обозначим через α. В силу теорем 66 и 75 плоскость α пересекает поверхность телесного угла A по двум лучам, а именно: AP AQ. Остановимся на одном из них, и пусть он принадлежит к плоскости грани $ABGNF$. Эта полупрямая AP либо пойдет по одному из ребер (AB) и (AF) указанной грани, либо будет внутренней для ее угла BAF; во всяком случае луч AP, а следовательно, и содержащая его плоскость α, будут иметь с плоскостью грани $ABGNF$ общий отрезок (AP) (теорема 27, п. 2), который может быть или ребром, или диагональю, или трансверсалью. В точке P мы достигнем другой грани (на чертеже грани $GNJK$), и плоскость α пересекает плоскость этой грани по прямой, проходящей через точку P. Если точка P лежит внутри ребра, то ссылаемся на теорему 67 и получаем следующий отрезок (PJ), служащий пересечением плоскостей α и $GNJK$. Если же P совпадает с вершиной (на чертеже этот случай имеет место в точке J), то либо одна из точек A и M будет внутренней для телесного угла при этой вершине, либо (в случае если обе точки лежат на поверхности угла) отрезок

(AM) в качестве секущего отрезка одного из двугранных углов даст внутренние точки. В этом случае можно повторить рассуждения, приведенные по поводу вершины A и той же плоскости α, и т. д.

Продолжая эти построения, мы шаг за шагом получаем отрезки, служащие пересечением плоскости α с гранями данной поверхности, причем начало каждого нового отрезка лежит в конце предыдущего. Так как число граней конечное и мы не выходим из плоскости α, то рано или поздно мы вернемся к одной из уже пройденных точек; но таковой может быть лишь точка A, ибо при каждой из остальных построены уже оба отрезка, лежащие в плоскости α, а третьего не может быть (для точки на ребре двугранного угла это очевидно, а для вершины ссылаемся на теоремы 61 и 75); к точке же A можно подойти еще с помощью отрезка (AQ), который пока был оставлен в стороне.

Итак, в сечении получается замкнутая ломаная; если бы она не была выпуклой, то ее точки лежали бы по разные стороны от прямой, содержащей один из ее отрезков; но тогда эти же точки, принадлежащие также многогранной поверхности, лежали бы по разные стороны от плоскости грани, которая проходит через указанный отрезок ломаной, а это противоречит выпуклости многогранной поверхности.

Теорема 91. *Внутренние точки трансверсалей, исходящих из любой вершины выпуклой многогранной поверхности, дают всегда одну и ту же совокупность точек.*

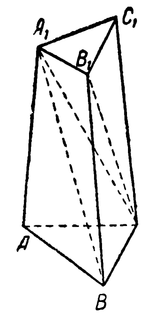
Докажем, что вершины A и J поверхности, изображенной на черт. 26, приводят к одной и той же совокупности точек.

Пусть некоторая точка H лежит внутри трансверсали (AM). Надо доказать, что эта же точка H будет находиться также внутри некоторой трансверсали, исходящей из вершины J. Если H лежит внутри (AJ) (т. е. M совпадает с J), то наше утверждение очевидно; в противном случае проведем плоскость AMJ, которая пересечет данную многогранную поверхность по выпуклой ломаной $APJQ$ (теорема 90). Точка H будет внутренней для ее трансверсали (AM); а потому она будет внутренней и для некоторой трансверсали, исходящей из вершины J (теорема 64). Но легко видеть, что эта последняя трансверсаль будет трансверсалью и для данной многогранной поверхности.

Определение 29. *Совокупность внутренних точек всевозможных трансверсалей,* исходящих из какой-либо вершины выпуклой многогранной поверхности, в соединении с точками самой поверхности, называется *многогранником,* определяемым данной поверхностью; если у многогранника имеется m граней, то его называют m-гранником. Другие термины, как, например, вершины, ребра и т. д. многогранника, понятны сами собой. Многогранник обозначают, называя его вершины.

Примером многогранника может служить тетраэдр. Сейчас укажем еще один простой случай.

Определение 30. Дан какой-либо выпуклый n-угольник $A_1A_2 \dots A_n$ и вне его точка S. Соединяя точку S отрезками с вершинами этого многоугольника, получим выпуклую многогранную поверхность (легко убедиться, что все требуемые условия выполнены); определяемый ею многогранник называется *n-угольной пирамидой* (при $n=3$ снова получается тетраэдр). Точка S называется ее *вершиной*; данный n-угольник — *основанием*, $\triangle\triangle$ SA_1A_2, $SA_2A_3 \dots$ — *боковыми гранями*. На черт. 25 изображена шестиугольная пирамида $SABCDEF$; на черт. 24 изображен многогранник, который получен из пятиугольной пирамиды при помощи одной секущей плоскости $A_1B_1C_1D_1E_1$; такие многогранники называются усеченными пирамидами (впоследствии этот термин будет уточнен).



Черт. 27

Теорема 92. *Всякий многогранник можно разложить на частичные тетраэдры с общей вершиной, но не имеющие других общих точек, за исключением общей грани у двух смежных тетраэдров.*

Начнем с пирамиды (черт. 25). Разложив ее основание на треугольники с помощью диагоналей, исходящих из одной вершины, и вспомнив определения 29 и 30, сейчас же убеждаемся в справедливости теоремы для этого случая. Так, шестиугольная пирамида на черт. 25 разлагается на такие тетраэдры: $SABC$, $SACD$, $SADE$ и $SAEF$. Возьмем теперь какой-нибудь выпуклый многогранник и выберем его вершину Y; оставляя в стороне грани, сходящиеся в этой вершине, будем остальные проектировать из точки Y с помощью отрезков. Легко видеть, что данный многогранник разобьется на пирамиды по числу указанных граней (определение 29); а пирамиды в свою очередь разлагаются на тетраэдры (см. выше), что и требовалось доказать. У этих тетраэдров не может быть общей внутренней точки, так как, проектируя ее из точки Y, получили бы противоречие с теоремой 87.

Для простого примера возьмем многогранник, изображенный на черт. 27: прежде всего он разбивается на тетраэдр A_1ABC и четыреугольную пирамиду $A_1BB_1C_1C$, которая в свою очередь разбивается на два тетраэдра A_1BB_1C и $A_1CB_1C_1$.

Теорема 93. Теоремы 80 (с заменой „трехгранный“ на „многогранный“), 81, 84, 85, 86, доказанные для тетраэдра, переносятся на всякий многогранник.

Как на общий прием доказательства можно указать на следующее: берем сечение многогранника соответствующей плоскостью, и дело сводится к известным свойствам выпуклых многоугольников.

Теорема 94. Если перебирать грани (выпуклого) многогранника, переходя каждый раз к новой грани, имеющей общее ребро с одной из уже отмеченных, то таким образом будут перебраны все грани данного многогранника.

Попробуем допустить противное, т. е. предположим, что, перебирая по указанному способу грани, мы не сможем добраться до некоторых из них. Это будет значить, что уже известная часть граней данного многогранника образует сама по себе выпуклую многогранную поверхность (определение 27); если тогда соединить внутреннюю точку определяемого ею многогранника (определение 29) с какой-нибудь точкой одной из оставшихся в стороне граней, то получим, по крайней мере, три точки пересечения этой прямой с данной многогранной поверхностью (две из них на основании теорем 81 и 93), что невозможно (теорема 87).

В заключение параграфа мы укажем одно замечательное соотношение между числами, характеризующими многогранник. Обозначим через

m — число граней,
v — „ вершин,
r — „ ребер.

Для многогранников, изображенных на предыдущих чертежах, имеем:

черт. 24:	$m=7$,	$v=10$,	$r=15$;
„ 25:	$m=7$,	$v=7$,	$r=12$;
„ 26:	$m=7$,	$v=10$,	$r=15$;
„ 27:	$m=5$,	$v=6$,	$r=9$.

Для всех случаев оправдывается соотношение:

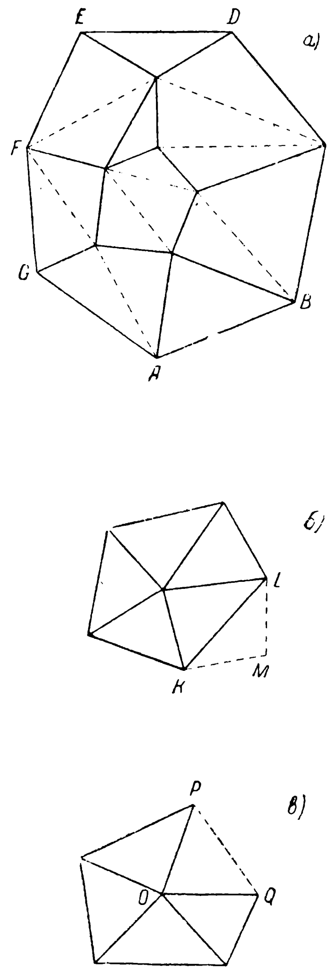
$$m+v=r+2,$$

которое выражает знаменитую теорему Эйлера:

Теорема 95. *Во всяком выпуклом многограннике имеем:*

$$m+v=r+2.$$

Возьмем какой-нибудь выпуклый многогранник и остановимся на его грани $ABCDE\ldots$; по ребру AB она будет смежной с гранью, лежащей в плоскости α, по ребру BC—с гранью, лежащей в плоскости β, и т. д. В силу выпуклости все точки взятого многогранника лежат в одном и том же полупространстве, определяемом каждой из этих плоскостей. Возьмем далее внутри многогранника какую-нибудь точку N, а внутри грани $ABCDE\ldots$ точку H и проведем прямую NH. Эта прямая пересечет плоскости α, β,... во всяком случае в конечном числе точек. Поэтому на прямой NH, по другую сторону от плоскости $ABCDE\ldots$, можно найти такую точку S, что отрезок (HS), а следовательно, и отрезок (NS) не будет содержать ни одной из этих точек пересечения.



Черт. 28

В самом деле, если какая-нибудь точка пересечения J попадет в отрезок (HS), то вместо прежней точки S возьмем новую внутри отрезка (HJ), и т. д. Выбранная таким образом точка S будет лежать в тех же полупространствах, что и точки многогранника (теоремы 32 и 37), но по разные стороны с ними по отношению к плоскости $ABCDE\ldots$ (определение 10, теорема 37).

Проведем теперь из точки S луч в какую-нибудь точку U многогранника; отрезок (SU) должен пересечь плоскость $ABCDE\ldots$; но все внутренние точки этого отрезка лежат в указанных выше полупространствах, так что то же самое надо сказать и о его пересечении с плоскостью $ABCDE\ldots$

Отсюда вытекает, что эта точка должна лежать внутри грани $ABCDE\ldots$ взятого многогранника.

Из сказанного следует, что все точки многогранника проектируются на грань $ABCDE\ldots$, и получается так называемая сетка многогранника [(черт. 28, a); на пунктирные линии пока не будем обращать внимания]; на этом чертеже мы имеем проекции всех граней многогранника на грань $ABCDE\ldots$, но самую эту грань мы не считаем принадлежащей к полученной сетке. Произведенное выше проектирование сохраняет отношения совмещенности между точками и прямыми; поэтому каждая грань проектируется одноименным с ней многоугольником и вершина n-гранного телесного угла проектируется точкой, из которой исходят n отрезков. Легко видеть, что на черт. 28, a имеется $(m-1)$-многоугольников ($ABCDE\ldots$ в счет не идет), ν вершин и r отрезков.

Для рассматриваемых здесь фигур будем составлять число e по правилу:

$e =$ (число многоугольников) $+$ (число вершин) — (число ребер).

Для черт. 28, *а* имеем:

$$e = m + v - r - 1. \qquad (1)$$

Разобьем многоугольники черт. 28, *а* диагоналями на треугольники (пунктирные линии) и докажем, что при этом разбиении число e не меняется.

В самом деле, при проведении каждой диагонали число вершин не меняется, а числа многоугольников и ребер каждое увеличивается на единицу, откуда и следует справедливость сказанного.

Теперь мы имеем фигуру, составленную исключительно из треугольников, но с тем же значением числа e. Для его вычисления возьмем один из треугольников и будем постепенно воссоздавать нашу фигуру, присоединяя к нему постепенно остальные треугольники. Для исходного треугольника имеем:

$$e = 1 + 3 - 3 = 1. \qquad (2)$$

При присоединении нового треугольника к фигуре, уже состоящей из одних треугольников, могут быть два случая: или он присоединяется к стороне одного из имеющихся треугольников (черт. 28, *б*), или заполняет входящий угол между двумя треугольниками (черт. 28, *в*) (другими словами, присоединяемый треугольник имеет с уже существующей фигурой или одну общую сторону, или две). В первом случае число треугольников увеличивается на единицу, число вершин — на единицу, а число отрезков на две единицы, так что число e не меняется; во втором случае число треугольников и отрезков каждое увеличивается на единицу, а число вершин не меняется, так что и здесь число e сохраняет свое значение.

Сопоставляя все изложенное, приходим к заключению, что для фигуры 28, *а* число e имеет то же значение, как и для исходного треугольника; тогда равенства (1) и (2) дают:

$$m + v = r + 2.$$

Теорема 96. *Для многогранника с одноименными гранями и с одноименными телесными углами* имеем:

$$m \cdot n = 2r \quad \text{и} \quad v \cdot k = 2r,$$

где n — наименование граней, а k — телесных углов.

Действительно, грани в общем дают $m \cdot n$ ребер; но при таком счете каждое ребро считается дважды, так как оно принадлежит двум различным граням, и получается первая формула, а вторая доказывается подобным же образом.

Теорема 97. *Имеется только пять различных случаев многогранников с одноименными гранями и с одноименными телесными углами.*

Действительно, числа, характеризующие такие многогранники, связаны соотношениями:

$$m+v=r+2, \tag{1}$$

$$m\cdot n=2r, \tag{2}$$

$$v\cdot k=2r. \tag{3}$$

Получается неопределенная система трех уравнений с пятью неизвестными, но так как эти неизвестные должны быть числами целыми и положительными, и, кроме того, очевидно:

$$n\geqslant 3 \quad \text{и} \quad k\geqslant 3, \tag{4}$$

то число решений ограничено. Находя из уравнений (2) и (3) числа m и v и подставляя их в (1), имеем:

$$\frac{2r}{n}+\frac{2r}{k}=r+2,$$

или

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Из последнего равенства выводим неравенство:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}>\frac{1}{2}, \tag{6}$$

откуда

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{k}.$$

Но так как из (4) находим

$$\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{3},$$

то

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

откуда

$$n<6.$$

Точно так же найдем, что и $k<6$.

Следовательно, значения неизвестных n и k надо искать среди чисел: 3, 4, 5, Кроме того, легко видеть, что, по крайней мере, одно из этих неизвестных должно равняться 3, так как, в противном случае, имеем:

$$n \geqslant 4 \quad \text{и} \quad k \geqslant 4,$$

откуда

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2},$$

что противоречит неравенству (6).

Таким образом, приходим только к следующим пяти случаям:

1) $n=3$, $k=3$; тогда равенство (5) дает:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2},$$

откуда

$$r=6.$$

Из уравнений (2) и (3) имеем:

$$m=4 \quad \text{и} \quad v=4.$$

2) $n=3$, $k=4$; равенство (5) дает:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2},$$

откуда

$$r=12.$$

Из уравнений (2) и (3) имеем:

$$m=8 \quad \text{и} \quad v=6.$$

3) $n=4$, $k=3$; легко видеть, что r получает то же самое значение, как и в предыдущем случае, а m и v меняются местами:

$$r=12, \quad m=6, \quad v=8.$$

4) $n=3$, $k=5$; формула (5) дает:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2},$$

откуда

$$r=30.$$

Наконец, из уравнений (2) и (3) имеем:

$$m=20, \quad v=12.$$

5) $n=5$, $k=3$; здесь число ребер то же самое, что и в предыдущем случае, а m и v меняются местами:

$$r=30, \quad m=12, \qquad v=20.$$

Примером первого случая служит тетраэдр; второй можно получить, построив на одном и том же четыреугольном основании две пирамиды, по разные стороны от этого основания; примером третьего служит куб. Два последних случая как более сложные пока оставим в стороне. Вообще, к затронутому сейчас вопросу мы вернемся впоследствии, в главе о правильных многогранниках.

ГЕОМЕТРИЯ МЕРЫ

§ 10. Исчисление отрезков

Приступая к учению о геометрическом равенстве, мы вводим в качестве основных понятий два простейших случая этого равенства, относящихся к отрезкам и углам. Таким образом здесь появляются два новых (и последних) основных понятия: *равенство отрезков и равенство углов.*

Все, что нам нужно знать об этих основных понятиях, вкладывается в следующие аксиомы равенства (здесь можно повторить в основном замечание, которое было сделано в начале первого параграфа).

Аксиома XVI. *„Равенство отрезков“ и „равенство углов“ суть отношения между указанными геометрическими образами.*

Эти отношения обозначаются с помощью обычного знака равенства.

Аксиома XVII. *Каждый отрезок (угол) равен самому себе.*

Обозначая какой-нибудь отрезок AB через a, можно пользоваться знаком равенства и писать:

$$a = AB.$$

Действительно, символы a и AB относятся к одному и тому же образу, а этот образ равен самому себе. Впоследствии этот прием распространяется и на другие фигуры.

Аксиома XVIII. *Если один отрезок (угол) равен другому, то этот последний равен первому.*

Поэтому, в случае равенства двух отрезков или двух углов, говорят, что они „равны между собой“.

Аксиома XIX. *Если один отрезок (угол) равен второму, а второй равен третьему, то и первый равен третьему.*

Указанные здесь три свойства равенства существенны для него, т. е. они имеют место во всех тех случаях, когда только можно говорить о равенстве; по порядку они называются: *возвратность, взаимность, переносимость*[1].

---

[1] Некоторые авторы называют эти свойства соответственно рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Небольшим видоизменением последней аксиомы является предложение:

Теорема 98. *Два отрезка (угла), равные третьему, равны между собой.*

Обозначая отрезки малыми буквами латинского алфавита, допустим, что нам дано:

$$a=b \quad \text{и} \quad c=b.$$

На основании аксиомы XVIII из второго равенства выводим:

$$b=c.$$

Далее, одновременное существование равенств

$$a=b \quad \text{и} \quad b=c$$

в силу аксиомы XIX влечет за собой

$$a=c.$$

Указанные до сих пор три аксиомы равенства относились одинаково и к отрезкам, и к углам; в двух следующих идет речь только о равенстве отрезков

Аксиома XX. *На каждом луче существует одна и только одна такая точка, которая вместе с вершиной луча определяет отрезок, равный данному.*

Утверждение этой аксиомы иногда выражают короче: на каждом луче от его вершины можно одним единственным способом отложить отрезок, равный данному.

Аксиома XXI. Если точка C лежит *между* A и B, а C' — *между* A' и B', и если притом $(AC)=(A'C')$, $(CB)=(C'B')$, то и $(AB)=(A'B')$.

Равенство двух отрезков мы приняли за основное понятие (без определения); но мы уже должны определить, какой из двух неравных отрезков считается *больше* другого и какой *меньше*. Предварительно докажем следующие предложения:

Теорема 99. *Если на каком-нибудь луче с вершиной в точке O отложим отрезки (OA) и (OB), соответственно равные данным отрезкам a и b, то точки A и B совпадают в том и только в том случае, когда $a=b$.*

Действительно, пусть точки A и B совпадают. Тогда

$$(OA)=(OB) \qquad \text{(аксиома XVII).}$$

Далее, имеем:

$$a=(OA) \qquad \text{(аксиома XVIII).}$$

$a=(OA)$ и $(OA)=(OB)$ влекут за собой $a=(OB)$ (аксиома XIX),
$a=(OB)$ и $(OB)=b$ влекут за собой $a=b$ (аксиома XIX).

Обратно, пусть нам дано последнее равенство. Тогда

$$(OB)=b \text{ и } b=a \text{ дают } (OB)=a \text{ (аксиомы XVIII, XIX).}$$

Теперь мы имеем равенства:

$$(OA)=a \quad \text{и} \quad (OB)=a,$$

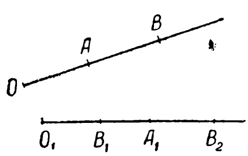
и в силу аксиомы XX точки A и B должны совпасть.

Теорема 100. *Если на двух каких-либо лучах с вершинами в O и O_1 отложим отрезки (OA) и (OB), (O_1A_1) и (O_1B_1), соответственно равные данным отрезкам a и b, то расположение точек O_1, A_1, B_1 будет таким же, как и расположение точек O, A, B.*

В самом деле, если точки A и B совпадают, то

$$a=b \text{ (теорема 99).}$$

Но тогда точки A_1 и B_1 также должны совпасть (теорема 99). Если же точки A и B различны, то точки A_1 и B_1 также будут различными (доказывается от противного). Дальше мы остановимся на этом допущении.



Черт. 29

Совершенно ясно, что точка O не может лежать между A и B (определение 8); следовательно, либо A лежит между O и B, либо B лежит между O и A (теорема 17); подобное же можно утверждать и относительно точек O_1, A_1, B_1.

Допустим, для определенности, что A лежит между O и B, и докажем, что тогда A_1 лежит между O_1 и B_1. В противность сказанному попробуем допустить, что B_1 лежит между O_1 и A_1 (черт. 29). В таком случае A_1 не лежит между O_1 и B_1 (теорема 17), так что эти точки принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в A_1. Тогда на противоположном луче отметим точку B_2 так, чтобы $(A_1B_2)=(AB)$ (аксиома XX).

Теперь у нас имеются такие соотношения: A лежит между O и B и A_1 лежит между O_1 и B_2 (определение 8). Далее: $(OA)=(O_1A_1)$ (теорема 98) и $(AB)=(A_1B_2)$ (по построению).

На основании аксиомы XXI отсюда выводим, что

$$(OB)=(O_1B_2),$$

откуда

$$(O_1B_2)=b \qquad \text{(аксиомы XVIII, XIX).}$$

Кроме того, по данному:

$$(O_1B_1)=b,$$

так что точки B_1 и B_2 должны совпасть (аксиома XX), а совпасть они не могут, ибо принадлежат противоположным лучам с вершиной в A_1.

Следовательно, наша теорема доказана от противного, точка A_1 лежит между O_1 и B_1.

Определение 31. Пусть даны два *неравные* отрезка a и b. Берем произвольный луч с вершиной в O и откладываем на нем отрезки $(OA)=a$ и $(OB)=b$. Если точка A окажется между O и B, то мы говорим, что *отрезок a меньше отрезка b*, или что *отрезок b больше отрезка a*, и пишем:

$$a<b \text{ или } b>a.$$

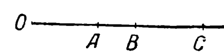
Если же B окажется между O и A, то подобным же образом утверждаем, что

$$b<a \text{ или } a>b.$$

Теорема 100 показывает, что выбор вспомогательного луча не повлияет на сравнение отрезков.

Исходя из определения 31, можно доказать для отрезков все свойства отношений *равно*, *больше* или *меньше*, которые нам известны из алгебры и которые имеют место по отношению к любой величине. Остановимся, для примера, на нескольких предложениях этого рода.

Теорема 101. *Для любых двух отрезков a и b имеет место одно и только одно* из отношений:



Черт. 30

$$a=b, \quad a<b, \quad a>b.$$

Доказательство вытекает из определения 31 и теорем 99, 17.

Теорема 102. *Отношения „больше“ и „меньше“ обладают свойством переносимости.*

Положим, нам дано: $a<b$ и $b<c$. Надо доказать, что $a<c$.

Возьмем какой-нибудь луч с вершиной в O и построим отрезки (OA), (OB), (OC), соответственно равные данным a, b, c (черт. 30). Так как $b<c$, то точка B лежит между O и C (определение 31), а так как $a<b$, то A лежит между O и B. Но в таком случае A лежит между O и C (теорема 18), т. е.

$$a<c \text{ (определение 31).}$$

Так же доказывается и переносимость отношения „больше“.

Теорема 103. Если $a<b$ и $b=c$, то $a<c$.

Теорема 104. Если $a>b$ и $b=c$, то $a>c$.

Доказательство предоставляется читателю.

Определение 32. Пусть даны два отрезка: a и b. Берем произвольную прямую и на ней отмечаем произвольную точку O; на противоположных лучах этой прямой, исходящих из точки O, откладываем отрезки $(OA)=a$ и $(OB)=b$. Отрезок (AB) называется *суммой* двух данных, а эти последние называются *слагаемыми;* сумма отрезков a и b обозначается с помощью символа $a+b$, и мы можем написать (аксиома XVII):

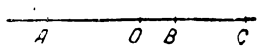
$$(AB)=a+b.$$

Если дано несколько отрезков (больше двух), то их сумма строится так, что сначала находим сумму двух первых, полученный отрезок складываем с третьим, и т. д.

Так как построение суммы связано с выбором вспомогательной прямой, то надо доказать, что всегда получается один и тот же результат.

Теорема 105. *Если сумму двух отрезков построим двумя различными способами, то получим равные отрезки.*

Действительно, сделаем указанное в определении 32 построение на двух различных прямых (или даже на одной и той же прямой).



Черт. 31

В силу определения 8 точка O лежит между A и B, и точно так же точка O_1 лежит между A_1 и B_1. Далее:

$$(OA)=(O_1A_1) \quad \text{и} \quad (OB)=(O_1B_1) \quad \text{(теорема 98).}$$

Но в таком случае аксиома XXI непосредственно дает:

$$(AB)=(A_1B_1).$$

Теорема 106. Если C лежит между A и B, то

$$(AB)=(AC)+(CB).$$

Утверждение вытекает из определений 8 и 32.

Теорема 107. $a+b=b+a$ (*переместительный* закон сложения).

В самом деле, построим сумму отрезков a и b по указанию определения 32 (черт. 31). Получим:

$$(AB)=a+b.$$

Построим теперь сумму $b+a$, причем можем воспользоваться тем же чертежом (теорема 105) и найдем:

$$(BA)=b+a.$$

Но отрезки (AB) и (BA) тождественны по определению отрезка (см. определение 9 и замечание к нему); а потому при помощи аксиомы XVII и теоремы 98 из предыдущих равенств выведем:

$$a+b=b+a.$$

Теорема 108. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*сочетательный* закон сложения).

Действительно, строим сумму a и b в виде отрезка AB (черт. 31) и на луче, исходящем из B, но противоположном тому, который содержит точки A и O, отмечаем такую точку C, чтобы $(BC)=c$ (аксиома XX). Тогда имеем:

$$(a+b)+c=(AC). \qquad (*)$$

Так как по построению точки O и C принадлежат различным лучам с вершиной B, то

$$b+c=(OC) \qquad \text{(определение 32).}$$

Далее имеем: B лежит между A и C и O лежит между A и B (все это по построению). На основании теоремы 18 отсюда следует, что O лежит между A и C.

Следовательно, по определению 32 имеем:

$$a+(b+c)=(AC). \qquad (**)$$

Наконец, из равенств (*) и (**) с помощью теоремы 98 получаем:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Основываясь на двух последних теоремах, можно доказать, что сумма любого числа отрезков не зависит от их порядка, что слагаемые можно соединять в различные группы, и т. п. Это доказывается совершенно так же, как соответствующие теоремы в алгебре.

Докажем теперь некоторые из предложений, где понятие суммы сочетается с понятиями, касающимися сравнения отрезков; здесь опять-таки получается полная аналогия с алгебраическими действиями.

Теорема 109. Если $a>b$ и c есть какой-нибудь третий отрезок, то

$$a+c>b+c, \text{ и обратно.}$$

Действительно, построим на некотором луче отрезок $OC=c$, и на луче той же прямой, исходящем из C, но не содержащем точки O, отложим отрезки (CA) и (CB), соответственно равные данным a и b.

Так как $a>b$, то B лежит между C и A.

В силу сделанных построений имеем:

$$(OB)=c+b \quad \text{и} \quad (OA)=c+a$$

или

$$(OB)=b+c \quad \text{и} \quad (OA)=a+c \qquad \text{(теорема 107, аксиома XIX).}$$

Далее, точка C лежит между O и A, а B лежит между C и A, откуда следует, что B лежит между O и A (теорема 18); а потому

$$(OA)>(OB).$$

Наконец, с помощью теоремы 104 переходим к неравенству:

$$a+c>b+c.$$

Обратное утверждение доказывается от противного..

Теорема 110. Если $a>b$ и $c\geqslant d$, то $a+c>b+d$.

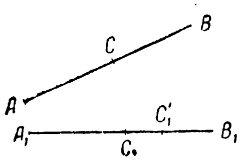
Доказывается на основании двукратного применения теорем 109 и 102.

Теорема 111. Если $a+b=c+d$ и $a=c$, то $b=d$.

Доказывается от противного на основании предыдущих теорем.

Теорема 112. Если $a>b$, то $a=b+c$, где c — некоторый вполне определенный отрезок, и обратно.

В самом деле, если $a>b$, то, отложив известным образом отрезки (OA) и (OB), соответственно равные a и b, найдем, что B лежит между O и A (определение 31).



Черт. 32

Тогда:

$$(OA)=(OB)+(BA) \qquad \text{(теорема 106)},$$

или, обозначая отрезок (BA) через c,

$$a=b+c \qquad \text{(теоремы 98, 105)}.$$

Обратно, если дано последнее равенство, то строим отрезки $(OB)=b$ и $(BA)=c$ на противоположных лучах из точки B. Тогда их сумма a получается в виде отрезка (OA).

Так как точка B лежит между O и A, то

$$a>b \qquad \text{(определение 31)}.$$

Теорема 113. Если отрезки $(AB)=(A_1B_1)$ и если *внутри первого отрезка* задана какая-нибудь *точка* C, тогда *внутри второго существует одна* и *только одна такая точка* C_1, что:

$$(A_1C_1)=(AC) \text{ и } (C_1B_1)=(CB).$$

Действительно, из наших данных следует, что $(AC)<(AB)$, а потому и $(AC)<(A_1B_1)$ (теорема 103).

Следовательно, если на полупрямой A_1B_1 отложим отрезок $(A_1C_1)=(AC)$, то точка C_1 будет лежать между A_1 и B_1 (черт. 32).

Далее имеем:

$$(AB)=(AC)+(CB);\ (A_1B_1)=(A_1C_1)+(C_1B_1) \qquad \text{(теорема 106)},$$

а так как

$$(AC)=(A_1C_1), \text{ то } (CB)=(C_1B_1) \qquad \text{(теорема 111)}$$

Таким образом, существование искомой точки C_1 установлено. Если же допустить еще другую такую же точку C_1', то получим противоречие с аксиомой XX.

Замечание. Таким же точно способом можно построить единственную точку D_1, для которой:

$$(B_1D_1) = (AC) \text{ и } (D_1A_1) = (CB).$$

Определение 33. Если $a > b$, то $a = b + c$ (теорема 112); этот вполне определенный отрезок c называется *разностью* отрезков a и b и обозначается через $a - b$.

Теорема 114. $b + (a - b) = a$. Утверждение непосредственно вытекает из определения 33. В последующих теоремах предполагается, что вычитание возможно; последнее же всегда возможно, если из большего отрезка вычитаем меньший.

Теорема 115. Если $a = b$ и $c = d$, то $a - c = b - d$.

Обозначим наши разности:

$$a - c = l \quad \text{и} \quad b - d = m;$$

тогда

$$a = c + l \quad \text{и} \quad b = d + m \qquad \text{(теорема 114)}.$$

Отсюда на основании теоремы 111 заключаем:

$$l = m.$$

Теорема 116. Если $a > b$, $c = d$ и $b > c$, то $a - c > b - d$.

Подобно предыдущей теореме, имеем:

$$a = c + l \quad \text{и} \quad b = d + m.$$

Попробуем допустить, что $m \geqslant l$. Тогда по теореме 110 или аксиоме XXI получаем:

$$m + d \geqslant l + c,$$

т. е.

$$b \geqslant a,$$

что противоречит заданию.

Следовательно, должно быть:

$$m < l.$$

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

Теорема 117. Если $a > b$, $c = d$ и $c > a$, то $c - a < d - b$.

Теорема 118. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$ (вычитания предполагаются возможными).

Определение 34. *Сумма m отрезков* (m — целое положительное число), *равных a, называется m-кратным a* и обозначается через ma (или am).

Теорема 119. Если $a \geqslant b$, то $ma \geqslant mb$, и обратно.

Остановимся на случае $a > b$; из двух неравенств:

$$a > b,$$

$$a > b,$$

на основании теоремы 110 выводим:

$$a + a > b + b \text{ или: } 2a > 2b \qquad \text{(опред. 34).}$$

Присоединяя сюда снова неравенство $a > b$, найдем:

$$3a > 3b, \text{ и т. д.}$$

Если же $a = b$, то вместо теоремы 110 ссылаемся на аксиому XXI.

Обратное утверждение доказывается от противного.

Теорема 120. $m(a + b) = ma + mb$.

Действительно:

$$m(a + b) = (a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)$$

(всего m слагаемых).

На основании свойств суммы (см. замеч. после теоремы 108):

$$m(a + b) = (a + a + \ldots + a) + (b + b + \ldots + b),$$

$$m(a + b) = ma + mb \qquad \text{(определение 34).}$$

Замечание. Теорема обобщается без труда на случай какого угодно числа слагаемых.

Теорема 121. $m(a - b) = ma - mb$.

Обозначив разность $a - b$ через c, имеем:

$$a = b + c \qquad \text{(определение 33).}$$

Далее

$$ma = m(b + c) \qquad \text{(теорема 119);}$$

$$m(b + c) = mb + mc \qquad \text{(теорема 120);}$$

$$ma = mb + mc \qquad \text{(аксиома XIX).}$$

Отсюда, по определению разности:

$$ma - mb = mc,$$

или, подставляя значение c:

$$ma - mb = m(a - b). \quad \text{(теорема 119, аксиома XIX).}$$

Подобным же образом доказывают следующие предложения.

Теорема 122. $(m \pm n)a = ma \pm na$ (разность при $m > n$).

Теорема 123. Если $ma \geqslant na$, то $m \geqslant n$, и обратно.

Теорема 124. $m(na) = mn \cdot a$.

Определение 35. Если $a = mg$, то g называется m-ой частью a и обозначается через $\frac{a}{m}$ или $\frac{1}{m}a$.

Замечание. Иначе это g называется аликвотной частью отрезка a. Мы не можем еще сейчас доказать, что для каждого отрезка существует m-ая часть; в следующих теоремах это существование допускается как общая предпосылка.

Теорема 125. $m\left(\frac{1}{m}a\right) = a$ и $\frac{1}{m}(ma) = a$.

Утверждение непосредственно вытекает из определений 35 и 34.

Теорема 126. $\frac{a}{m} < a$ при $m > 1$.

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 127. Если $a \geqslant b$, то $\frac{1}{m}a \geqslant \frac{1}{m}b$, и обратно.

Обозначим $\frac{1}{m} \cdot a$ через g и $\frac{1}{m} \cdot b$ через h и допустим, что $h > g$.

Тогда по теореме 119 имеем:

$$mh > mg,$$

или

$$m\left(\frac{1}{m}b\right) > m\left(\frac{1}{m}a\right), \quad b > a,$$

что противоречит заданию. Следовательно, должно быть:

$$\frac{1}{m}a \geqslant \frac{1}{m}b,$$

и легко убедиться, что знак отношения будет таким же, как для a и b.

Обратное утверждение доказывается от противного.

Далее можно доказать следующие предложения.

Теорема 128. $\frac{a+b+c+\ldots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \ldots.$

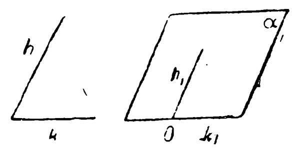
Теорема 129. $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}a\right) = \frac{1}{mn} \cdot a.$

Замечание. В настоящем параграфе мы установили некоторые основные правила исчисления отрезков; можно указать еще ряд следствий из них, которые доказываются подобным же образом и сами по себе читателю известны.

§ 11. Равенство углов и треугольников

Для исчисления углов и изучения свойств треугольников введем следующие аксиомы.

Аксиома XXII. *Даны $\angle(hk)$ и произвольная полуплоскость α, причем на ее ребре задана определенная точка O и исходящий из нее луч k_1* (черт. 33). *Тогда в данной полуплоскости с вершиной в заданной точке существует один и только один такой луч h_1,* что



Черт. 33

$$\angle(h_1k_1) = \angle(hk).$$

Замечание. Это утверждение иногда выражают словами, что при указанных условиях можно отложить данный угол и притом одним единственным способом.

Аксиома XXIII. Если для $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ имеем равенства:

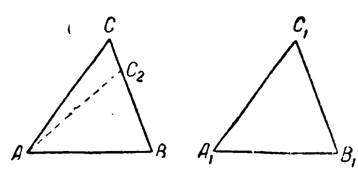
$$(AB) = (A_1B_1),\ (AC) = (A_1C_1),\ \angle BAC = \angle B_1A_1C_1,$$

то всегда выполняются и такие равенства:

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1,\ \angle ACB = \angle A_1C_1B_1.$$

В этой аксиоме сочетаются оба основных понятия о равенстве отрезков и углов, которые доселе рассматривались отдельно.

Определение 36. *Два треугольника называются равными, если между их вершинами можно установить такое одно-однозначное соответствие, что углы при соответственных вершинах равны, а также равны и стороны, соединяющие соответственные вершины.*



Черт. 34

Теорема 130. *Два треугольника равны, если они имеют по равному углу, заключенному между соответственно равными сторонами.*

Пусть в $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 34) имеем:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (AC) = (A_1C_1),\ \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

На основании аксиомы XXIII сейчас же получаем:

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \text{ и } \angle ACB = \angle A_1C_1B_1,$$

и нам остается доказать равенство третьих сторон.

Попробуем допустить, что эти отрезки неравны, и пусть для определенности

$$(BC) > (B_1C_1).$$

Тогда (определение 31) внутри (BC) существует такая точка C_2, что

$$(BC_2) = (B_1C_1).$$

Рассмотрим $\triangle\triangle$ ABC_2 и $A_1B_1C_1$. Для них имеем:

$$(BA) = (B_1A_1), \quad (C_2B) = (C_1B_1), \quad \angle C_2BA = \angle C_1B_1A_1$$

(последнее—потому, что $\angle C_2BA$ тождествен с $\angle CBA$).

Применяя сюда аксиому XXIII, найдем:

$$\angle C_2AB = \angle C_1A_1B_1;$$

а так как, кроме того, по данному

$$\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$$

и оба луча AC_2 и AC лежат в одной и той же полуплоскости $AB.C$ (определения 32, 33), то получается противоречие с аксиомой XXII.

Итак, должно быть:

$$(BC) = (B_1C_1).$$

Замечание Легко видеть, что в течение доказательства между вершинами данных треугольников было установлено требуемое определением 36 одно-однозначное соответствие путем обозначения соответственных вершин одними и теми же буквами.

Теорема 131. *Два треугольника равны, если они имеют по равной стороне, заключенной между соответственно равными углами.*

Пусть в $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ имеем:

$$(AB) = (A_1B_1), \quad \angle CAB = \angle C_1A_1B_1, \quad \angle CBA = \angle C_1B_1A_1.$$

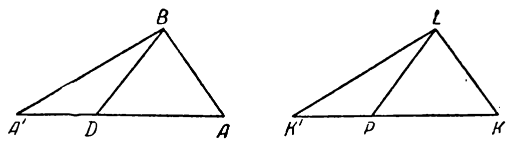
Равенство сторон (BC) и (B_1C_1) докажем по методу предыдущей теоремы, и тогда дело сведется к предыдущему случаю равенства.

Определение 37. Если в треугольнике две стороны равны между собой, то он называется *равнобедренным*; его третья сторона называется *основанием*, противолежащая ей вершина — вершиной треугольника.

Существование таких треугольников доказывается без труда. Проведем из точки A два каких-нибудь не противоположных луча и отложим на них отрезки (AB) и (AC), равные любому данному отрезку; полученный $\triangle ABC$ будет равнобедренным.

Теорема 132. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что каждый треугольник будет равен самому себе, ибо каждый его элемент равен самому себе (аксиома XVII); равнобедренный же треугольник будет равен самому себе еще и при другом соответствии между его элементами. Указанным обстоятельством мы и воспользуемся для доказательства. Будем рассматривать равнобедренный $\triangle ABC$, в котором $(AB)=(AC)$, с двух различных точек зрения (как бы два различных треугольника), а именно: как $\triangle BAC$ и как $\triangle CAB$.



Черт. 35

В этих треугольниках имеем:

$$(BA)=(CA) \text{ и } (CA)=(BA) \qquad \text{(по данному)};$$

$$\angle BAC=\angle CAB \qquad \text{(аксиома XVII)};$$

Отсюда на основании аксиомы XXIII

$$\angle ABC=\angle ACB.$$

Теорема 133. *Если в треугольнике два угла равны между собой, то треугольник — равнобедренный.*

Доказывается подобно предыдущей теореме, но вместо аксиомы XXIII придется сослаться на теорему 131.

Замечание. Последние две теоремы можно высказать и так: в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов — равные стороны.

Теорема 134. *Если два угла равны, то и смежные с ними равны между собой.*

Действительно, пусть $\angle ADB=\angle KPL$ (черт. 35); смежными для них соответственно будут:

$$\angle A'DB \text{ и } \angle K'PL.$$

Отложим на сторонах наших углов отрезки:

$$(DA)=(PK), \quad (DB)=(PL), \quad (DA')=(PK').$$

Тогда, по теореме 130

$$\triangle ADB = \triangle KPL,$$

откуда

$$(AB) = (KL) \text{ и } \angle BAD = \angle LKP.$$

Переходим к $\triangle\triangle$ ABA' и KLK', у которых, кроме равенства $(AB) = (KL)$, имеем:

$$(AA') = (KK') \qquad \text{(аксиома XXI)}$$

$$\angle BAA' = \angle LKK',$$

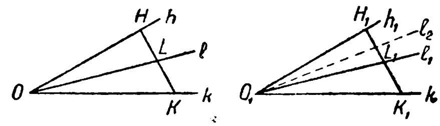
ибо эти углы тождественны с углами BAD и LKP.

Следовательно, по теореме 130

$$\triangle ABA' = \triangle KLK',$$

откуда

$$(A'B) = (K'L) \text{ и } \angle BA'A = \angle LK'K.$$



Черт. 36

Наконец, в силу той же теоремы 130:

$$\triangle BA'D = \triangle LK'P,$$

откуда

$$\angle BDA' = \angle LPK'.$$

Теорема 135. *Вертикальные углы равны.*

Пусть прямые ADA' и BDB', пересекаясь в точке D, образуют вертикальные углы ADB и $A'DB'$. Для $\angle A'DB$ смежным будет $\angle ADB$, и для того же $\angle A'DB$ смежным будет также $\angle A'DB'$.

Но так как

$$\angle A'DB = \angle A'DB \qquad \text{(аксиома XVII)},$$

то

$$\angle ADB = \angle A'DB' \qquad \text{(теорема 134)}.$$

Теорема 136. *Если два угла* (hk) *и* (h_1k_1) *равны и внутри первого из них указан некоторый луч* l, *тогда внутри другого существует один и только один такой луч* l_1, *что*:

$$\angle(hl) = \angle(h_1l_1) \text{ и } \angle(lk) = \angle(l_1k_1).$$

Действительно, взяв на лучах h и k соответственно по точке H и K, получим отрезок (HK), секущий первый угол (черт. 36); луч l пересекает его в некоторой точке L (определение 12, теорема 38). Отложим на лучах h_1 и k_1 соответственно равные отрезки:

$$(O_1H_1) = (OH) \text{ и } (O_1K_1) = (OK).$$

Из равенства $\triangle\triangle$ HOK и $H_1O_1K_1$ (теорема 130) вытекает, что

$$(HK)=(H_1K_1), \quad \angle HKO=\angle H_1K_1O_1, \quad \angle KHO=\angle K_1H_1O_1.$$

Основываясь на теореме 113, отметим внутри отрезка (H_1K_1) такую точку L_1 чтобы

$$(K_1L_1)=(KL) \text{ и } (L_1H_1)=(LH).$$

Тогда луч O_1L_1 будет искомым.

В самом деле, на основании вышеуказанных равенств имеем:

$$\triangle OKL=\triangle O_1K_1L_1 \qquad \text{(теорема 130)},$$

так что

$$\angle LOK=\angle L_1O_1K_1 \text{ или } \angle(lk)=\angle(l_1k_1).$$

Далее

$$\triangle OHL=\triangle O_1H_1L_1 \qquad \text{(теорема 130)},$$

откуда

$$\angle(hl)=\angle(h_1l_1).$$

Попробуем допустить, что внутри $\angle(h_1k_1)$ имеется еще другой луч l_2, обладающий теми же свойствами. Но тогда имеем:

$$\angle(l_2k_1)=\angle(lk),$$
$$\angle(l_1k_1)=\angle(lk),$$

причем оба луча l_1 и l_2 принадлежат полуплоскости $O_1K_1\cdot H_1$ (теорема 43), а потому получается противоречие с аксиомой XXII.

Следовательно, луч l_1 — единственный.

З а м е ч а н и е. Во избежание недоразумений заметим, что рассматриваемые в этом параграфе углы и треугольники могут лежать в разных плоскостях.

Т е о р е м а 137. Если l есть внутренний луч в $\angle(hk)$, а l_1 — внутренний луч в $\angle(h_1k_1)$, и если из трех углов (hk), (hl), (lk) какие-нибудь два равны соответственно двум углам из числа (h_1k_1), (h_1l_1), (l_1k_1), то и третьи углы равны между собой.

При доказательстве придется разобрать различные случаи в зависимости от того, какие именно углы оказываются равными.

1. Пусть нам дано:

$$\angle(hk)=\angle(h_1k_1) \text{ и } \angle(lk)=\angle(l_1k_1) \quad \text{(черт. 36)}.$$

На основании теоремы 136 внутри $\angle(h_1k_1)$ существует такой луч l_2, что

$$\angle(h_1l_2)=\angle(hl) \text{ и } \angle(l_2k_1)=\angle(lk).$$

Кроме того, имеем:

$$\angle(l_1k_1) = \angle(lk),$$

а это возможно лишь в том случае, когда l_2 совпадает с l_1 (аксиома XXII), ибо лучи l_1 и l_2 принадлежат одной и той же полуплоскости с ребром k_1 (теорема 43).

Но тогда имеем:

$$\angle(h_1l_1) = \angle(hl).$$

2. Пусть теперь дано:

$$\angle(hk) = \angle(h_1k_1) \text{ и } \angle(hl) = \angle(h_1l_1).$$

Подобно предыдущему (переставляя h и k) докажем равенство третьих углов:

$$\angle(lk) = \angle(l_1k_1).$$

3. Пусть, наконец, дано:

$$\angle(hl) = \angle(h_1l_1) \text{ и } \angle(lk) = \angle(l_1k_1).$$

Рассмотрим $\angle(lk')$ смежный с (lk) и выясним, что луч h лежит внутри этого угла (на черт. 36 надо мысленно провести лучи k' и k_1', противоположные для k и k_1).

В самом деле, оба луча l и h лежат в одной и той же полуплоскости с ребром k (теорема 43), и луч l делит ее на два угла (lk) и (lk') (теорема 46). Первому из них луч h принадлежать не может (теоремы 24 и 40), а потому он лежит внутри $\angle(lk')$. Точно так же луч h_1 лежит внутри $\angle(l_1k_1')$.

Далее, имеем:

$$\angle(lk') = \angle(l_1k_1') \qquad \text{(теорема 134)},$$

$$\angle(hl) = \angle(h_1l_1) \qquad \text{(по данному)}.$$

По случаю первому отсюда выводим:

$$\angle(hk') = \angle(h_1k_1'),$$

и теорема 134 дает искомое:

$$\angle(hk) = \angle(h_1k_1).$$

Теорема 138. *Два треугольника равны, если все три стороны одного соответственно равны сторонам другого.*

Пусть для $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ дано:

$$(AB) = (A_1B_1), \quad (BC) = (B_1C_1), \quad (CA) = (C_1A_1).$$

Построим $\angle C_2AB = \angle C_1A_1B_1$ так, чтобы его вершина была в точке A, одной из сторон служила полупрямая AB, а другая сторона расположилась в плоскости ABC, но в полуплоскости, отличной от той, которая содержит точку C (аксиома XXII; см. черт. 37, на котором не изображен $\triangle A_1B_1C_1$). На этой последней стороне отметим точку C_2 так, чтобы $(AC_2) = (A_1C_1)$.

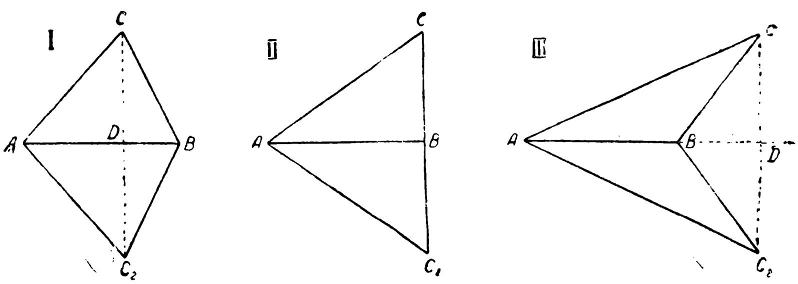
На основании теоремы 130 имеем:

$$\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1,$$

откуда

$$(BC_2) = (B_1C_1) = (BC),$$

$$\angle AC_2B = \angle A_1C_1B_1.$$



Черт. 37

Так как точки C и C_2 принадлежат различным полуплоскостям с ребром AB, то отрезок (CC_2) должен пересекать прямую AB. Легко видеть, что возможны три случая, указанные на черт. 37. Остановимся на первом, когда точка пересечения лежит внутри отрезка (AB). Тогда полупрямая CC_2 лежит внутри угла ACB, а полупрямая C_2C — внутри угла AC_2B.

Так как в $\triangle ACC_2$ стороны $(AC_2) = (AC)$, то

$$\angle ACC_2 = \angle AC_2C \qquad \text{(теорема 132)};$$

точно так же и $\triangle BCC_2$ будет равнобедренным, откуда

$$\angle BCC_2 = \angle BC_2C.$$

Применяя теорему 137, находим:

$$\angle ACB = \angle AC_2B = \angle A_1C_1B_1,$$

и дело сводится к теореме 130.

Рассмотрение случаев второго и третьего предоставляется читателю; в случае третьем либо B лежит между A и D, либо A лежит между B и D, и достаточно рассмотреть только одно предположение.

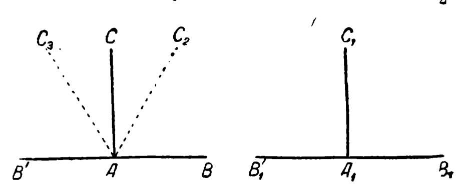
Теорема 139. *В двух равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов — равные стороны.*

Предложение вытекает из того обстоятельства, что равные углы в двух равных треугольниках лежат между соответственно равными сторонами (определение 36), а потому противолежат третьей паре равных сторон.

Определение 38. *Угол называется прямым* (и обозначается буквой d), *если он равен смежному с ним углу.*

Теорема 140. *Существуют прямые углы.*

Действительно, возьмем какой-нибудь $\angle BAC$ и построим $\angle BAC_2$, равный первому, но расположенный в другой полуплоскости (черт. 37); на сторонах этих углов отложим равные отрезки $(AC) = (AC_2)$ и соединим отрезком точки C и C_2. Этот отрезок пересечет прямую AB в точке D.



Черт. 38

На основании теоремы 130 имеем:

$$\triangle ACD = \triangle AC_2D_1,$$

и на основании теоремы 139

$$\angle ADC = \angle ADC_2 = d.$$

Теорема 141. *Все прямые углы равны между собой.*

В самом деле, пусть нам даны два каких-нибудь прямых угла BAC и $B_1A_1C_1$. Это значит, что (черт. 38)

$$\angle BAC = \angle B'AC \text{ и } \angle B_1A_1C_1 = \angle B_1'A_1C_1.$$

Построим угол, равный $\angle B_1A_1C_1$ так, чтобы его вершиной служила точка A, одной из сторон — полупрямая AB, а другая сторона AC_2 лежала в полуплоскости $AB.C$ (аксиома XXII). Если полупрямая AC_2 совпадет с полупрямой AC, то легко убедиться, что

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC \text{ (аксиомы XVII, XIX).}$$

Попробуем допустить, что полупрямая AC_2 будет отлична от полупрямой AC.

У нас имеются равенства:

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2 \quad \text{(по построению)},$$

$$\angle B'AC_2 = \angle B_1'A_1C_1 \quad \text{(теорема 134)}.$$

А так как

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1'A_1C_1 \quad \text{(определение 38)},$$

то

$$\angle B'AC_2 = \angle BAC_2 \quad \text{(аксиомы XVIII и XIX)}.$$

Полупрямая AC_2 должна лежать внутри одного из углов BAC и $B'AC$ (теорема 46).

Положим, что имеет место первый случай. Тогда внутри угла $B'AC$ найдется такая полупрямая AC_3, что

$$\angle B'AC_3 = \angle BAC_2 \qquad \text{(теорема 136);}$$

а так как, кроме того, имеем:

$$\angle B'AC_2 = \angle BAC_2,$$

то получается противоречие с аксиомой XXII.

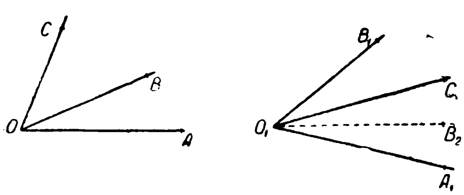
Итак, полупрямая AC_2 и полупрямая AC совпадут, и

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC.$$

§ 12. Исчисление углов

Теорема 142. *Если в данной полуплоскости с ребром OA отложим углы AOB и AOC, соответственно равные двум данным углам, то лучи OB и OC совпадут в том и только в том случае, когда данные углы равны.*

Доказательство подобно доказательству теоремы 99. В качестве чертежа можно использовать левую часть черт. 39.



Черт. 39

Теорема 143. Если в двух полуплоскостях с ребрами OA и O_1A_1 отложим углы:

$$\angle AOB \text{ и } \angle A_1O_1B_1,$$

$$\angle AOC \text{ и } \angle A_1O_1C_1,$$

соответственно равные данным углам:

$$\angle(kl) \text{ и } \angle(mn),$$

то расположение лучей O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 будет одинаковым с расположением лучей OA, OB, OC.

Действительно, из теоремы 142 следует, что лучи O_1B_1 и O_1C_1 могут совпасть лишь тогда, когда это имеет место для лучей OB и OC. Если же указанные лучи различны, то теорема 48 дает нам две возможности.

Для определенности допустим, что полупрямая OB лежит внутри $\angle AOC$, и докажем, что полупрямая O_1B_1 лежит внутри $\angle A_1O_1C_1$. Попробуем допустить, что это неверно, т. е. пусть полупрямая O_1C_1 пойдет внутри $\angle A_1O_1B_1$ (черт. 39).

На основании теоремы 98 имеем:

$$\angle A_1O_1C_1 = \angle AOC.$$

Тогда внутри первого угла имеется такой луч O_1B_2, что

$$\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB \qquad \text{(теорема 136);}$$

кроме того:

$$\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB \qquad \text{(теорема 98)},$$

и получается противоречие с аксиомой XXII, так как лучи O_1B_2 и O_1B_1 лежат в одной и той же полуплоскости $O_1A_1 . B_1$ (теорема 43) и различны (теоремы 24 и 40).

Определение 39. Даны два угла: $\angle(kl)$ и $\angle(mn)$, неравные между собой.

В произвольной полуплоскости с ребром OA отложим:

$$\angle AOB = \angle(kl) \text{ и } \angle AOC = \angle(mn).$$

Если луч OB лежит внутри $\angle AOC$, то мы говорим:

$$\angle(kl) < \angle(mn) \text{ или } \angle(mn) > \angle(kl);$$

если же луч OC лежит внутри $\angle AOB$, то

$$\angle(kl) > \angle(mn), \text{ или } \angle(mn) < \angle(kl).$$

Предыдущая теорема показывает, что результат сравнения двух углов не зависит от выбора вспомогательных образов.

Теорема 144. Теоремы 101, 102, 103, 104 имеют место и для углов.

Действительно, доказательства, по существу, остаются прежними; только теперь будем опираться на теоремы 40, 48, 142.

Определение 40. *Всякий угол, меньший прямого угла, называется острым, больший прямого — тупым.*

(Пусть читатель ответит на вопрос, почему было бы неправильно поместить определение 40 перед теоремой 144).

Теорема 145. *Из двух неравных смежных углов один будет острым, а другой — тупым.*

Пусть даны два неравных смежных угла: $\angle BOA$ и $\angle BOA'$.

Возьмем какой-нибудь прямой угол (теорема 140) и отложим $\angle COA$, равный ему, в той же полуплоскости, в которой лежит полупрямая OB. На основании теоремы 48 или полупрямая OB будет внутри $\angle COA$, или полупрямая OC — внутри $\angle BOA$.

Допустим первое. Но тогда $\angle BOA < \angle COA$, так что $\angle BOA$ — острый. Далее, при таком допущении теорема 46 говорит, что полупрямая OC попадет внутрь $\angle BOA'$, откуда вытекает неравенство:

$$\angle BOA' > \angle COA', \text{ т. е. } \angle BOA' \text{ тупой.}$$

Допущение, что полупрямая OC лежит внутри $\angle BOA$ — предоставляется разобрать читателю.

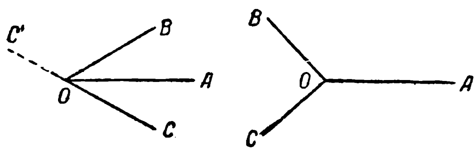
Определение 41. Пусть даны два угла. В произвольной плоскости при ребре OA построим углы: $\angle AOB$ и $\angle AOC$, равные данным, но расположенные в различных полуплоскостях с ребром OA.

О положении полупрямой OA по отношению к $\angle BOC$ можно сделать два допущения: или она лежит внутри $\angle BOC$, или — вне его (т. е. внутри входящего угла, определяемого теми же лучами OB и OC); (оба случая указаны на черт. 40). В первом случае мы говорим, что данные углы имеют сумму и таковой является $\angle BOC$ (обозначение обычное). Подобное же определение имеет место и в случае нескольких слагаемых.

Замечание. Здесь мы видим существенное различие между отрезками и углами: отрезки всегда имеют сумму, а углы — не всегда, если только мы не произведем соответственного расширения этого понятия (см. ниже). Пока же надо постоянно иметь в виду указанное ограничение.

Теорема 146. *Два острых угла всегда имеют сумму.*

Пусть мы ищем сумму двух острых углов. Левая часть черт. 40 дает соответствующее построение. Согласно определению 41 (луч OC' противоположен лучу OC).



Черт. 40

Так как $\angle AOC$ — острый, то $\angle AOC'$ — тупой (теорема 145). Тогда

$$\angle AOB < \angle AOC' \qquad \text{(теоремы 102 и 144).}$$

Кроме того, так как лучи OB и OC, OC' и OC лежат по разные стороны от OA, то полупрямые OB и OC' лежат по одну сторону от OA (теоремы 29, 33). Все это убеждает нас в том, что полупрямая OB пойдет внутри $\angle AOC'$ (определение 39); в таком случае полупрямая OA не может лежать внутри $\angle BOC'$ (теоремы 24 и 40), и она попадет внутрь $\angle BOC$ (теорема 46), а в этом случае данные углы имеют сумму (определение 41).

Теорема 147. Определения 33—35 (с ограничением: „если имеют сумму“) и теоремы 105—112, 114—129 (с тем же ограничением) переносятся на углы.

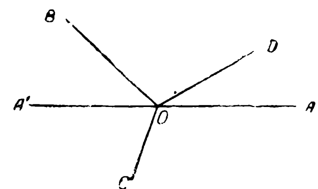
(Теорема 113 была уже перенесена под № 136.)

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что рассуждения § 10 переносятся в исчисление углов с очевидными изменениями.

Так, мы откладывали отрезки от данной точки на одном и том же луче или на противоположных лучах, а здесь придется откладывать углы при данном луче в одной и той же полуплоскости или в различных полуплоскостях, образующих данную плоскость. Утверждению: „точка лежит между двумя другими“ здесь соответствует такое: „луч лежит внутри угла, образованного двумя другими лучами“ и т. д. Ссылки на аксиомы XX и XXI здесь заменяются ссылками на аксиому XXII и теорему 137; теорему 18 можно заменить повторным применением теоремы 24, которая имеет место и для углов (теорема 40).

Советуем читателю в виде примера доказать некоторые предложения, упомянутые в теореме 147.

Из определения 41 вытекает, что два угла не всегда имеют сумму, если оставаться при первоначальном понятии угла. Но если расширить понятие об угле (определения 12 и 14), то два угла всегда имеют сумму. Так, в случае, который изображен в правой части черт. 40, суммой будет входящий угол, образованный лучами OB и OC. Но уже в случае трех углов этих средств окажется недостаточно.



Черт. 41

Например, если пожелаем подобным же способом сложить углы AOB, BOC и COD (черт. 41), то не только завершим полный угол, но начнем описывать его во второй раз: в этом случае все лучи $\angle AOD$ будет целесообразно считать дважды.

Переход к новому расширенному понятию угла можно пояснить прежде всего следующим наглядным способом.

Пусть луч OD (черт. 41), исходя из начального положения OA, вращается вокруг точки O против движения часовой стрелки. Придя в положение OB, он опишет $\angle AOB$. Но вместо того, чтобы остановиться в положении OB, вращающийся луч OD может сколько угодно раз описать полный $\angle O$ и уже потом занять положение OB.

Таким образом, мы приходим к представлению о совокупности лучей, в которой каждый луч пучка O считается n раз и, кроме того, еще по разу считаются все лучи угла AOB. Вращая луч OD в противоположном направлении, мы могли бы придти к понятию об отрицательном угле. Теперь мы придадим этим соображениям определенную форму.

Определение 42. Углом в расширенном смысле этого слова называется совокупность лучей, состоящая из n раз сосчитанного полного угла (n — целое положительное число или 0), к которому может присоединиться угол в предыдущем смысле (т. е. обыкновенный, выпрямленный или входящий); лучи, пограничные между двумя частями, считаются лишь при одной из них.

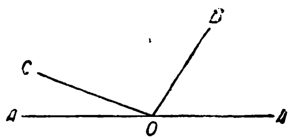
Теперь надо условиться о равенстве таких углов и, прежде всего, о равенстве выпрямленных и входящих углов, так как об этом еще не было речи.

Определение 43. *Все выпрямленные углы считаются равными между собой.* Два входящих угла равны, если равны обыкновенные углы, определяемые теми же лучами; два угла в расширенном смысле этого слова называются равными, если они состоят из одинакового числа полных углов в соединении с равными углами (обыкновенными, выпрямленными или входящими).

Исходя из двух последних определений, можно распространить исчисление углов на произвольные углы, причем отпадает ограничительное условие о существовании суммы. Входить в дальнейшие подробности мы не будем, так как расширенное понятие об угле получает все свое значение лишь в систематическом курсе тригонометрии. В дальнейшем же, если не сделано никакой оговорки, всегда под углом понимается угол в его первоначальном узком смысле.

В заключение параграфа мы воспользуемся вышеизложенным для доказательства некоторых теорем.

Теорема 148. *Сумма двух смежных углов равна двум прямым углам.*



Черт. 42

Пусть даны два смежных угла: $\angle AOB$ и $\angle A'OB$. На основании теоремы 140 и аксиомы XXII отложим прямой $\angle AOC$ так, чтобы полупрямая OC лежала в полуплоскости $OA.B$. Имея в виду теорему 48, допустим, что полупрямая OB лежит внутри $\angle AOC$; тогда полупрямая OC должна лежать внутри $\angle A'OB$ (теорема 46). Далее, имеем:

$$\angle AOB + \angle A'OB = \angle AOB + \angle BOC + \angle COA' \quad \text{(теоремы 106 и 147)}.$$

$$\angle AOB + \angle A'OB = (\angle AOB + \angle BOC) + \angle COA' \quad \text{(теоремы 108 и 147)},$$

$$\angle AOB + \angle A'OB = \angle AOC + \angle COA',$$

$$\angle AOB + \angle A'OB = 2d \quad \text{(определение 34 и теорема 147)}.$$

Определение 44. Вообще два угла, сумма которых равна $2d$, называются *пополнительными*; а если сумма равна d, то — *дополнительными.*

Теорема 149. *Если два угла, имея общую сторону, расположены по отношению к ней в различных полуплоскостях и если их сумма равна 2 d, то две другие их стороны являются противоположными лучами.*

Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ расположены, как указано в теореме (черт. 42). Допустим, что полупрямая OC отлична от полупрямой OA', противоположной для OA.

В силу теоремы 148 и условия настоящей теоремы имеем:

$$\angle AOB + \angle A'OB = \angle AOB + \angle COB.$$

На основании теорем 111 и 147 отсюда вытекает, что

$$\angle A'OB = \angle COB,$$

а это противоречит аксиоме XXII.

Теорема 150. *Полный угол равен $4d$.*

Действительно, его можно рассматривать, как сумму двух выпрямленных углов, из которых каждый можно рассматривать как сумму двух смежных углов.

Теорема 151. *Если две стороны двух равных углов суть противоположные лучи, причем две другие стороны расположены в различных полуплоскостях по отношению к этой прямой, то данные углы вертикальные.*

Пусть углы AOB и $A'OC$ расположены, как требуется теоремой. На основании теоремы 148, имеем:

$$\angle AOB + \angle A'OB = 2d,$$

но

$$\angle AOB = \angle A'OC,$$

так что

$$\angle A'OB + \angle A'OC = 2d.$$

Отсюда на основании теоремы 149 следует, что полупрямая OC должна быть противоположной для полупрямой OB.

§ 13. Некоторые свойства треугольников

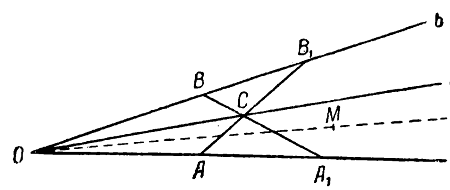
Определение 45. Полупрямая, исходящая из вершины угла и делящая его на две равные части, называется его *равноделящей* или биссектрисой.

Теорема 152. *Для любого данного угла имеется одна и только одна равноделящая.*

Действительно, пусть дан угол (ab) (черт. 43). Отложим на его сторонах равные отрезки:

$$(OA)=(OB) \text{ и } (OA_1)=(OB_1) > (OA),$$

так что A будет лежать между O и A_1, а B — между O и B_1 (определение 31); затем проведем отрезки (AB_1) и (A_1B). На основании аксиомы XV нетрудно убедиться, что эти отрезки пересекаются в некоторой точке C; луч OC или c будет лежать внутри данного угла, так как он пересекает его секущие отрезки.



Черт. 43

Докажем, что это и будет искомая равноделящая.

По теореме 130 имеем:

$$\triangle OB_1A = \triangle OA_1B,$$

так как

$(OA)=(OB)$; $\angle AOB_1 = \angle BOA_1$ (аксиома XVIII); $(OB_1)=(OA_1)$.

Из равенства треугольников вытекает:

$$\angle OB_1A = \angle OA_1B \text{ и } \angle OAB_1 = \angle OBA_1,$$

а последнее равенство дает:

$$\angle A_1AC = \angle B_1BC \qquad \text{(теорема 134).}$$

Далее, при помощи теорем 106 и 111 докажем, что

$$(AA_1)=(BB_1),$$

а потому

$$\triangle CAA_1 = \triangle CBB_1 \qquad \text{(теорема 131),}$$

откуда

$$(CB) = (CA).$$

Наконец, в силу теоремы 138

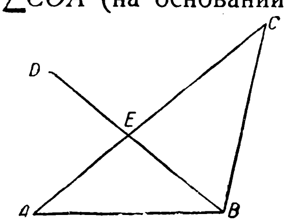
$$\triangle OBC = \triangle OAC,$$

откуда

$$\angle BOC = \angle AOC,$$

т. е. полупрямая OC есть равноделящая данного угла.

Попробуем теперь допустить, что имеется еще другая биссектриса m (или полупрямая OM), и пусть она лежит внутри $\angle COA$ (на основании теорем 24 и 40 луч c делит данный угол на две части).



Черт. 44

Исчисление углов приводит тогда к следующим заключениям:

$$\angle MOA < \angle COA \qquad \text{(определение 39),}$$

$$\angle COA = \angle COB,$$

$$\angle MOA < \angle COB \qquad \text{(теорема 103 и 144).}$$

Но луч m в свою очередь делит данный угол на две части, а луч c должен лежать внутри $\angle MOB$, так как он не может быть внутренним для $\angle MOA$, составляющего часть $\angle COA$.

Следовательно

$$\angle COB < \angle MOB,$$

$$\angle MOB = \angle MOA \qquad \text{(по допущению)}$$

$$\angle COB < \angle MOA,$$

а выше было получено неравенство противоположного смысла между этими же углами, т. е. получается противоречие с теоремами 101 и 144.

Итак, биссектриса — единственна.

Теорема 153. *На данном отрезке, как на основании, можно построить равнобедренный треугольник.*

Пусть дан отрезок (AB) (черт. 44). Возьмем вне прямой AB какую-нибудь точку C и соединим ее отрезками с точками A и B. Если окажется, что $\angle CAB = \angle CBA$, то теорема доказана (теорема 133). В противном случае пусть будет:

$$\angle CBA > \angle CAB.$$

На основании аксиомы XXII отложим в полуплоскости $AB.C$

$$\angle DBA = \angle CAB.$$

Так как

$$\angle DBA < \angle CBA \quad \text{(теорема 103 и 144)},$$

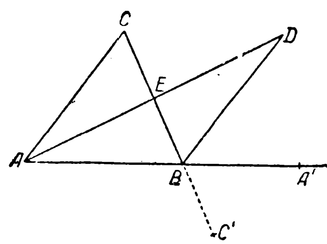
то полупрямая BD пойдет внутри $\angle CBA$ (определение 39) и пересечет его секущий отрезок (AC) в некоторой внутренней точке E.

$\triangle EAB$ будет искомым, как в этом легко убедиться.

Определение 46. *Серединой отрезка называется точка, делящая его на две равные части.*

Теорема 154. *Для данного отрезка существует одна и только одна середина.*

Действительно, построим на данном отрезке (AB) равнобедренный $\triangle ABC$ (теорема 153) и проведем равноделящую $\angle ACB$ (теорема 152); эта последняя, находясь внутри угла, пересечет его секущий отрезок (AB) в некоторой точке D.



Черт. 45

Из равенства $\triangle\triangle$ ACD и BCD имеем:

$$(AD) = (BD);$$

т. е. точка D есть середина; ее единственность доказывается с помощью рассуждения, подобного приведенному в теореме 152.

Определение 47. Дан $\triangle ABC$ (черт. 45). На прямой AB отметим такую точку A', чтобы B лежала между A и A' (теорема 22); тогда $\angle CBA'$ называется внешним углом треугольника. Легко видеть, что в общем у треугольника имеется шесть внешних углов. Говорят также, что *внешний угол образуется какой-нибудь стороной треугольника и продолжением другой стороны за общую вершину.*

Теорема 155. *Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.*

Имея в виду черт. 45, докажем сначала, что: $\angle CBA' > \angle ACB$.

Для этого отметим середину E отрезка (AC) (теорема 154), проведем прямую AE и отложим $(ED) = (EA)$ на луче этой прямой, противоположном лучу EA; точку D соединим с B.

Точки A и A', A и D лежат по разные стороны от прямой BC (определение 10), так что A' и D лежат в одной и той же полуплоскости с ребром BC (теорема 29 п. 3; определение 11); следовательно, точка D принадлежит полуплоскости $BC.A'$. Далее, точка E лежит в полуплоскости $BA'.C$ (теорема 32), так что и вся полупрямая AE принадлежит этой полуплоскости (теорема 33); но точка D лежит на этом луче, ибо точка A не может лежать между E и D (определение 8).

Итак, точка D одновременно принадлежит полуплоскости $BC.A'$ и полуплоскости $BA'C$; а в таком случае она принадлежит углу CBA' (теорема 43), но не может лежать на его сторонах. Поэтому полупрямая BD лежит внутри указанного угла, откуда:

$$\angle CBA' > \angle CBD \qquad \text{(определение 39).}$$

В силу нашего построения и теоремы 135 $\triangle AEC = \triangle DEB$ и

$$\angle ACE = \angle DBE, \text{ или } \angle ACB = \angle DBC.$$

Соединяя это с полученным выше неравенством, имеем:

$$\angle CBA' > \angle ACB \qquad \text{(теоремы 104 и 144).}$$

Точно так же, разделив (AB) пополам, докажем:

$$\angle ABC' > \angle CAB,$$

но

$$\angle ABC' = \angle CBA' \qquad \text{(теорема 135),}$$

так что

$$\angle CBA' > \angle CAB.$$

Теорема 156. *Сумма двух углов треугольника всегда меньше $2d$.*
Действительно (см. черт. 45), имеем:

$$\angle CBA' > \angle CAB \qquad \text{(теорема 155),}$$

$$\angle CBA' + \angle CBA > \angle CAB + \angle CBA \qquad \text{(теоремы 109 и 147),}$$

$$\angle CBA' + \angle CBA = 2d \qquad \text{(теорема 148).}$$

Так что

$$2d > \angle CAB + \angle CBA \qquad \text{(теоремы 104 и 144).}$$

Теорема 157. *Если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то остальные два острые.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 158. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно.*

Пусть в $\triangle ABC$ дано, что

$$(AB) > (AC);$$

тогда внутри (AB) существует такая точка D, что (AD) равно (AC).

Соединив точки C и D, получим равнобедренный $\triangle ADC$, так что

$$\angle ACD = \angle ADC.$$

Полупрямая CD, пересекая (AB) во внутренней точке D, лежит внутри угла ACB, а потому

$$\angle ACB > \angle ACD,$$

или

$$\angle ACB > \angle ADC \qquad \text{(теоремы 104 и 144).}$$

Но этот последний угол будет внешним для $\triangle DBC$, так что

$$\angle ADC > \angle ABC \qquad \text{(теорема 155),}$$

и окончательно находим:

$$\angle ACB > \angle ABC \qquad \text{(теоремы 102 и 144).}$$

Обратная теорема доказывается от противного.

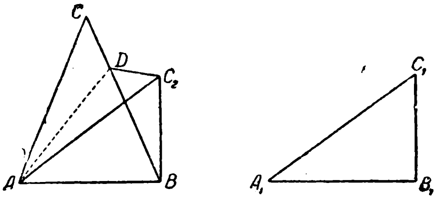
Теорема 159. *Сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.*

Возьмем $\triangle ABC$ и на луче, противоположном полупрямой CA, отложим $(CD)=(CB)$ и соединим D с B. Так как точка C лежит между A и D, то полупрямая BC лежит внутри угла ABD и $\angle ABD > \angle CBD$. Но $\triangle BCD$ равнобедренный, так что $\angle CBD = \angle CDB$ и, следовательно,

$$\angle ABD > \angle ADB$$

[углы ADB и CDB — тождественны, ибо A и C лежат по одну сторону от D (теорема 16)]. Теперь теорема 158 дает:

$$(AD) > (AB);$$



Черт. 46

но

$$(AD) = (AC) + (CD) \qquad \text{(теорема 106),}$$
$$(AD) = (AC) + (CB) \qquad \text{(теорема 105).}$$

И окончательно получаем:

$$(AB) < (AC) + (CB) \qquad \text{(теорема 103)}$$

Теорема 160. Если в $\triangle ABC$ имеем $(AB) > (AC)$, то

$$(BC) > (AB) - (AC).$$

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 161. *Если в двух треугольниках две стороны одного соответственно равны двум сторонам другого, а заключенные между ними углы неравны, то против большего угла лежит и бо́льшая сторона.*

Действительно, пусть в $\triangle ABC$ и $A_1B_1C_1$ (черт. 46) дано:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (AC) = (A_1C_1),\ \angle CAB > \angle C_1A_1B_1.$$

Проведем внутри первого угла такой луч AC_2, чтобы

$$\angle C_2AB = \angle C_1A_1B_1,$$

и отложим отрезок $(AC_2) = (A_1C_1)$;

Легко видеть, что

$$\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1, \text{ откуда } (BC_2) = (B_1C_1).$$

Если точка C_2 лежит на стороне (BC) треугольника, то очевидно $(BC_2) < (BC)$ и теорема доказана.

Допустим, что (согласно чертежу) точка C_2 лежит вне треугольника (последующее доказательство одинаково пригодно и для случая, когда точка C_2 лежит внутри треугольника). Построим равноделящую угла CAC_2 (теорема 152), которая пересечет сторону (BC) в некоторой точке D.

Легко видеть, что

$$\triangle ACD = \triangle AC_2D \qquad \text{(теорема 130),}$$

откуда

$$(CD) = (C_2D).$$

Применяя к $\triangle BC_2D$ теорему 159, получаем:

$$(BC_2) < (BD) + (C_2D),$$

$$(BC_2) < (BD) + (CD) \quad \text{(аксиома XXI и теорема 103)}$$

и окончательно:

$$(B_1C_1) < (BC).$$

Теорема 162. *Если в двух треугольниках две стороны одного соответственно равны двум сторонам другого, а третьи стороны неравны, то против большей стороны лежит больший угол.*

Доказывается от противного.

Теорема 163. *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и если, кроме того, равны углы, противолежащие бо́льшим сторонам (из числа равных), то такие треугольники равны.*

Пусть в $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 34) нам дано:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (AC) = (A_1C_1),\ \angle CBA = \angle C_1B_1A_1,\ (AC) > (AB).$$

Если, кроме того, $(BC) = (B_1C_1)$, то теорема доказана.

Допустим, что эти стороны неравны, и пусть

$$(BC) > (B_1C_1);$$

тогда внутри (BC) найдется такая точка C_2, что

$$(BC_2) = (B_1C_1) \text{ и } \triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1,$$

откуда

$$(AC_2) = (A_1C_1) = (AC).$$

На основании теоремы 158

$$\angle AC_2B < \angle C_2BA,$$

и потому $\angle AC_2B$ будет острым, так как иначе получится противоречие с теоремой 157. Следовательно, $\angle CC_2A$ тупой (теорема 145). Но этот угол будет равен $\angle C_2CA$ (теорема 132), и получается противоречие с теоремой 157.

Следовательно, приходится допустить равенство сторон (BC) и (B_1C_1), а тогда наши треугольники равны.

Теорема 164. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого и если, кроме того, равны стороны, противолежащие одной паре равных углов, то такие треугольники равны.*

Пусть в $\triangle\triangle ABC$ и $A_1B_1C_1$ (черт. 34) нам дано:

$$\angle CBA = \angle C_1B_1A_1,\ \angle ACB = \angle A_1C_1B_1,\ (AB) = (A_1B_1).$$

Допустим, что стороны (BC) и (B_1C_1) неравны; по предыдущему построим точку C_2. Тогда имеем:

$$\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1, \text{ так что } \angle AC_2B = \angle A_1C_1B_1 = \angle ACB,$$

а это противоречит теореме 155.

Определение 48. Треугольник называется *остроугольным*, если все его углы острые; *прямоугольным* — если один угол равен прямому; *тупоугольным* — если один угол тупой (гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника определяются обычным способом).

Доказательство существования всех трех видов треугольника предоставляется читателю.

В двух прямоугольных треугольниках всегда имеется по равному углу (теорема 141), так что условия их равенства упрощаются.

Теорема 165. *Два прямоугольных треугольника равны:*

1) *по двум катетам* (теорема 130);
2) *по катету и прилежащему острому углу* (теорема 131);
3) *по катету и гипотенузе* (теорема 163);
4) *по катету и противолежащему углу* (теорема 164);
5) *по гипотенузе и прилежащему углу* (теорема 164).

§ 14. Перпендикуляры и наклонные

На основании теоремы 47 две прямые при своем пересечении делят полный угол на четыре части. Если один из этих углов прямой, то и все остальные будут прямыми, так как это следует из определения 38.

Определение 49. Если две прямые, пересекаясь, образуют прямой угол, то они называются *взаимно перпендикулярными* (при этом употребляется знак $\perp$). Если же прямая, пересекая данную, не образует с ней прямого угла, то она называется наклонной. Точка пересечения перпендикуляра или наклонной с данной прямой называется их основанием.

Теорема 166. *В данной точке на прямой можно восставить к ней в данной плоскости один и только один перпендикуляр.*

Пусть дана прямая a и на ней точка D. На различных лучах данной прямой, исходящих из точки D, отложим отрезки:

$$(DA) = (DB);$$

затем, в данной плоскости, проходящей через прямую a, на отрезке (AB) построим равнобедренный $\triangle ABC$ (теорема 153). Тогда прямая CD будет искомой.

Действительно, по теореме 138 имеем равенство $\triangle\triangle$ ADC и BDC, откуда

$$\angle ADC = \angle BDC = d \qquad \text{(определение 38)},$$

$$CD \perp a \qquad \text{(определение 49)}.$$

Если допустить, что через точку D проходит еще другая прямая $DE \perp a$, причем DE есть тот ее луч, который лежит в полуплоскости $AB.C$ (теорема 34), то полупрямая DE расположится внутри одного из смежных углов ADC и BDC (теорема 46), и пусть имеет место последнее.

В силу определения 49 имеем:

$$\angle BDE = d,$$

а потому

$$\angle BDE = \angle BDC, \qquad \text{(теорема 141)},$$

и получается противоречие с аксиомой XXII.

Теорема 167. *Из точки вне прямой можно опустить на нее один и только один перпендикуляр* (в слове „опустить“ подразумевается, что перпендикуляр должен пересечь данную прямую).

Пусть дана прямая a и вне ее точка M. Отметим на данной прямой какую-нибудь точку B и соединим ее с M. Если $MB \perp a$, то MB и будет искомой; в противном случае пусть $\angle MBD$ будет острым (теорема 145).

Построим при луче BD в той же плоскости, но в полуплоскости, отличной от полуплоскости $BD.M$, угол, равный $\angle MBD$ (аксиома XXII) и на новой стороне его отложим отрезок:

$$(BN) = (BM).$$

Так как точки M и N лежат по разные стороны от прямой BD, то отрезок (MN) пересечет прямую BD в некоторой точке C, и полупрямая BC будет внутренней для $\angle MBN$. С другой стороны, наши равные острые углы имеют сумму (теорема 146), а потому полупрямая BD, о которой шла речь выше, должна лежать внутри $\angle MBN$ (определение 41).

Отсюда вытекает, что полупрямая BC и полупрямая BD тождественны. Таким образом, углы MBC и MBD, NBC и NBD будут также тождественными, и нетрудно придти к выводу, что

$$\triangle MBC = \triangle NBC,$$

откуда

$$\angle BCM = \angle BCN = d,$$

и прямая MN есть искомый перпендикуляр.

Если допустить существование еще другого перпендикуляра ME, где E — точка прямой a, то в $\triangle MCE$ было бы два прямых угла, что противоречит теореме 157.

Определение 50. Если из точки M проведены к данной прямой a перпендикуляр MC и наклонная MD, причем точки C и D служат их основаниями, то отрезки (MC) и (MD) соответственно называются отрезком перпендикуляра и отрезком наклонной; если нет оснований бояться недоразумений, то говорят сокращенно о „перпендикуляре“ и „наклонной“. Отрезок (CD) называется проекцией наклонной на данную прямую.

Теорема 168. *Если из одной и той же точки вне прямой проведены к ней перпендикуляр и наклонные, то:*

1) *перпендикуляр меньше всякой наклонной;*
2) *равным проекциям соответствуют равные наклонные;*
3) *большей проекции соответствует бо́льшая наклонная.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 169. *Если из точки вне прямой проведены к ней перпендикуляр и наклонные, то:*

1) *наименьший отрезок принадлежит перпендикуляру;*
2) *равные наклонные имеют равные проекции;*
3) *бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.*

Доказывается от противного, причем для пп. 2 и 3 можно применить правило „обращения по разделению“.

Определение 51. Если из вершины треугольника опустить перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону, то отрезок этого перпендикуляра (определение 50) называется *высотой* треугольника. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой.*

Теорема 170. *В равнобедренном треугольнике на одной и той же прямой лежат: высота, медиана основания, равноделящая угла при вершине, перпендикуляр в середине основания.*

Совершенно ясно, что каждый из четырех признаков, упомянутых в теореме, вполне определяет прямую; поэтому, если мы докажем, что один из них влечет за собой все остальные, то это же самое можно будет утверждать о каждом из четырех признаков („обращение по тождеству“). Само же доказательство труда не представляет.

Теорема 171. *Если основание высоты треугольника лежит внутри его стороны, то оба прилежащих к ней угла острые; если оно совпадает с одним из ее концов, то один угол прямой, а другой острый; если* *оно лежит вне этой стороны, то один из прилежащих к ней углов тупой, а другой острый.*

Доказательство предоставляется читателю (при помощи теорем 157 и 145).

Теорема 172. *Если углы, прилежащие к стороне треугольника, оба острые, то основание высоты, опущенной на эту сторону, лежит внутри ее; если один—острый, а другой—прямой, то основание высоты совпадает с одной из вершин; если же один угол острый, а другой тупой, то основание высоты упадет вне рассматриваемой стороны.*

Доказывается с помощью „обращения по разделению" предыдущей теоремы.

Свойства взаимно перпендикулярных прямых приводят к учению о симметрии относительно оси; мы наметим это учение, ограничиваясь здесь точками одной и той же плоскости.

Определение 52. Если точки A и A_1 лежат на перпендикуляре к прямой a по разные стороны от нее и притом так, что

$$(AN) = (A_1N),$$

где N — основание упомянутого перпендикуляра, то эти точки называются *симметричными* относительно оси a. Точки оси считаются симметричными сами себе. Две *фигуры* называются *симметричными* относительно оси a, если между их точками можно установить одно-однозначное соответствие таким образом, что соответственные точки симметричны относительно a.

Исходя из этого определения, можно доказать следующие предложения.

Теорема 173. Если точки A, B, C, ... соответственно симметричны с точками A_1, B_1, C_1, ... относительно некоторой прямой, то:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (BC) = (B_1C_1), \text{ и т. д.}$$

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1, \text{ и т. д.}$$

Теорема 174. *Фигура, симметричная треугольнику, есть треугольник, которого вершины симметричны с вершинами данного.*

Замечание. В силу теоремы 173 в двух симметричных треугольниках все элементы соответственно равны, но они расположены различным образом.

Учение о симметрии дает способы для доказательств и решения задач. Так, теорема 138 доказывалась посредством помещения второго треугольника в положение симметричное с первым. Далее, равнобедренный треугольник симметричен относительно своей высоты, откуда вытекают его основные свойства. Наконец, имеется особый „метод симметрии" для решения задач на построение.

§ 15. Некоторые свойства многоугольников

В этом параграфе речь будет идти о выпуклых многоугольниках; говоря о разложении такого многоугольника на треугольники, будем подразумевать разложение его с помощью диагоналей, исходящих из одной и той же вершины (см. теорему 69).

Определение 53. *Два многоугольника называются равными, если между их вершинами можно установить такое одно-однозначное соответствие, что углы при соответственных вершинах равны, а также равны и стороны, соединяющие соответственные вершины.*

Теорема 175. *Для равенства двух многоугольников необходимо и достаточно, чтобы их можно было разложить на одинаковое число попарно равных и одинаково расположенных треугольников.*

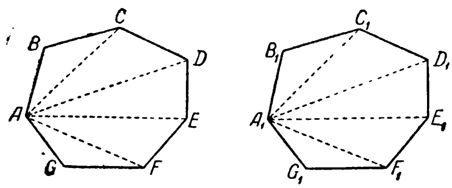
Под „одинаковым расположением треугольников" мы понимаем следующее: если в одном многоугольнике два каких-нибудь треугольника имеют общую сторону, то в другом многоугольнике соответственные треугольники также имеют общую сторону, которая будет соответственной с указанной выше; если в одном многоугольнике какой-нибудь треугольник имеет с его обводом две общие стороны, то это же самое будет справедливо и для соответственного треугольника в другом многоугольнике, и т. д.

Переходим к доказательству: пусть нам дано, что многоугольники

$$ABCDEFG = A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1 \text{ (черт. 47),}$$

причем одинаковые буквы обозначают соответственные вершины. Отсюда вытекают равенства:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (BC) = (B_1C_1),\ \angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \text{ (определение 53),}$$



Черт. 47

так что

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1,$$

откуда

$$(AC) = (A_1C_1),\ \angle BCA = \angle B_1C_1A_1.$$

Последнее равенство, в связи с тем, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ и полупрямые CA и C_1A_1 лежат внутри этих углов (теорема, 62), дает:

$$\angle ACD = \angle A_1C_1D_1 \qquad \text{(теорема 137);}$$

Теперь мы убеждаемся, что

$$\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1,$$

откуда

$$(AD) = (A_1D_1),\ \angle CDA = \angle C_1D_1A_1, \text{ и т. д.}$$

Указанным путем приходим к выводу, что данные многоугольники с помощью диагоналей из вершин A и A_1 разбиваются на одинаковое число попарно равных треугольников, причем эти треугольники одинаково расположены (в объясненном выше смысле).

Переходя к обратной теореме, допустим, что два данных многоугольника диагоналями из определенных вершин разлагаются на одинаковое число попарно равных и одинаково расположенных треугольников (отсюда уже следует, что у данных многоугольников имеется одинаковое число вершин).

Возьмем в первом многоугольнике $\triangle ABC$; во втором — имеется треугольник, ему равный и одинаково с ним расположенный, т. е. две его стороны и один угол являются также элементами второго многоугольника; пусть это будет $\triangle A_1B_1C_1$.

Из равенства этих треугольников выводим:

$$(AB) = (A_1B_1),\ (BC) = (B_1C_1),\ \angle ABC = \angle A_1B_1C_1,$$

и, кроме того,

$$\angle BCA = \angle B_1C_1A_1.$$

Берем далее $\triangle ACD$; ему должен соответствовать такой треугольник, у которого одной стороной служит диагональ (A_1C_1), а третья вершина лежит с вершиной B по разные стороны от прямой A_1C_1 (все это вытекает из

„одинакового расположения треугольников"). Ясно, что таким треугольником будет $\triangle A_1C_1D_1$. Так как, по данному, $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$, то

$$(CD) = (C_1D_1) \text{ и } \angle ACD = \angle A_1C_1D_1.$$

Последнее равенство, в связи с полученным выше, дает:

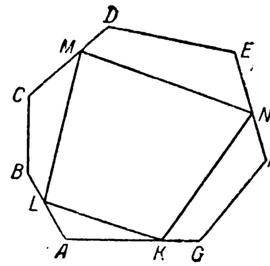
$$\angle BCD = \angle B_1C_1D_1 \qquad \text{(теорема 137), и т. д.}$$

Продолжая эти рассуждения, мы докажем равенство данных многоугольников; попутно устанавливается то соответствие между вершинами, о котором говорится в определении 53. Таким образом, установлена необходимость и достаточность рассматриваемого условия.

Теорема 176. *Сторона многоугольника меньше суммы остальных сторон его.*

Для треугольника теорема уже была доказана (теорема 159); допустим, что она верна и для $(n - 1)$-угольника; докажем ее для n-угольника.

Пусть нам дан n-угольник $ABCDEFG$ (черт. 47, левая часть); диагональю (AC) он разбивается на два многоугольника (теорема 68), каковыми будут $\triangle ABC$ и $(n-1)$-угольник $ACDEFG$. Для них имеем:



Черт. 48

$$(AB) < (BC) + (CA) \qquad \text{(теорема 159),}$$

$$(AC) < (CD) + (DE) + (EF) + (FG) + (GA)$$

(по допущению). Отсюда, по правилам исчисления отрезков (теорема 109 и 102), получаем:

$$(AB) < (BC) + (CD) + \ldots (GA).$$

Итак, если теорема верна для $(n-1)$-угольника, то она будет верной и для n-угольника. Но мы знаем, что она верна для треугольника; следовательно, она верна для четыреугольника. А если верна для четыреугольника, то верна и для пятиугольника, и т. д.

Таким образом мы убеждаемся, что теорема будет верной для многоугольника с любым числом сторон (способ „математической индукции").

Определение 54. *Периметром многоугольника называется сумма всех сторон его.*

Теорема 177. *Если вершины одного многоугольника лежат внутри другого или на его обводе, то периметр первого меньше периметра второго.*

При доказательстве могут представиться различные случаи; рассмотрим некоторые из них.

1. Все вершины одного многоугольника лежат на обводе другого (черт. 48). На основании теоремы 68 отрезок (KL) делит многоугольник $ABCDEFG$ на два многоугольника: $\triangle KAL$ и многоугольник $KLBCDEFG$; последний отрезком (LM) разлагается на многоугольники $LBCM$ и $KLMDEFG$, и т. д.

В силу теоремы 176 имеем:

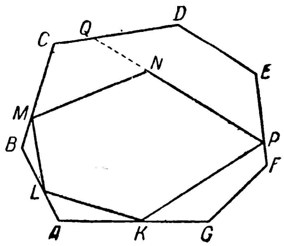
$$(KL) < (KA) + (AL),$$

$$(LM) < (LB) + (BC) + (CM), \text{ и т. д.}$$

Складывая, находим по правилам исчисления отрезков:

$$\text{периметр } KLMN < \text{периметра } ABCDEFG.$$

2. Одна из вершин (точка N на черт. 49) лежит внутри, а остальные — на обводе другого многоугольника. В силу теоремы 66 прямая PN пересекает обвод многоугольника $ABCDEFG$ еще в некоторой точке Q, а на основании теоремы 68 отрезок (PQ) делит данный многоугольник на два других: $PFGABCQ$ и $PQDE$. Пользуясь доказанным в п. 1, пишем:



Черт. 49

периметр $KLMNP <$ периметра $PFGABCQ$;

периметр $PFGABCQ <$ периметра $ABCDEFG$,

откуда

периметр $KLMNP <$ периметра $ABCDEFG$.

Остальные случаи рассматриваются по только что указанному способу.

§ 16. Геометрические места

В самом начале курса мы ввели понятие о фигуре или о геометрическом образе как об известной совокупности точек; если из всего пространства мы выбираем часть точек, образующих данную фигуру, то мы, очевидно, руководимся каким-нибудь признаком, позволяющим одни точки удержать, а другие отбросить. Обращая внимание на эту сторону дела, приходим к важному понятию.

Определение 55. *Геометрическим местом точек называется совокупность точек, обладающих определенным свойством.*

Отсюда вытекает следующее правило: если мы желаем доказать, что такая-то фигура есть геометрическое место точек, обладающих таким-то свойством, то мы должны установить два обстоятельства: 1) всякая точка нашей фигуры обладает требуемым свойством и 2) всякая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит данной фигуре.

В предыдущей части курса мы уже не раз встречались с различными геометрическими местами; для того чтобы обнаружить это, надо только иначе высказать некоторые определения. Так, луч (определение 7) есть геометрическое место точек данной прямой, предшествующих определенной ее точке (или следующих за ней). Отрезок (определение 9) есть геометрическое место точек, лежащих между двумя данными (в соединении с этими последними). Полуплоскость $AB.C$ (определение 11) есть геометрическое место таких точек M плоскости ABC, что отрезок (CM) не пересекает прямой AB. Точно так же определения угла (определение 12), треугольника (определение 17), многоугольника (определение 24), тетраэдра (определение 25), многогранника (определение 29) и другие можно высказать с помощью понятия о геометрическом месте точек.

Иногда говорят также о геометрическом месте прямых и плоскостей. Так, связка прямых есть геометрическое место прямых, проходящих через данную точку, и т. д.

Укажем теперь некоторые другие геометрические места.

Определение 56. Говорят, что точка M равно отстоит от точек A и B, если отрезки $(AM) = (BM)$. Если точка N есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a, то отрезок (MN) называется расстоянием точки M от прямой a.

Теорема 178. *Геометрическое место точек, лежащих в данной плоскости и равноотстоящих от точек A и B этой плоскости, есть перпендикуляр, восставленный в этой плоскости к прямой AB в середине отрезка (AB).*

Действительно, отметим точку N, середину отрезка (AB) (теорема 154); эта точка N принадлежит искомому геометрическому месту. Пусть M какая-нибудь другая точка нашего геометрического места. Так как

$$(AM)=(BM)$$

то $\triangle ABM$ будет равнобедренным и точка M лежит на перпендикуляре, восставленном из середины основания (теорема 170). Обратно, для всякой точки M этого перпендикуляра из равенства $\triangle\triangle$ ANM и BNM (теорема 165, п. I) получаем:

$$(AM) = (BM),$$

т. е. точка M принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек.

Далее читателю предоставляется доказать следующие теоремы.

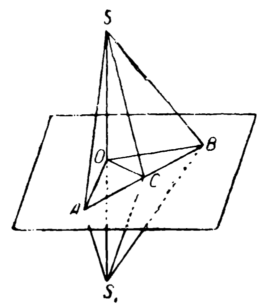
Теорема 179. *Геометрическое место внутренних точек угла, равноотстоящих от его сторон, есть его равноделящая.*

Теорема 180. *Равноделящие углов треугольника пересекаются в одной точке внутри треугольника.*

В заключение заметим, что знание геометрических мест необходимо при решении многих задач на построение.

§ 17. Перпендикулярные прямые и плоскости

Определение 57. Точка пересечения прямой с плоскостью называется *основанием* прямой в этой плоскости. Если прямая перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей в данной плоскости через ее основание, то прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*. Если же прямая пересекает плоскость, но не перпендикулярна к ней, то она называется *наклонной* к этой плоскости.



Черт. 50

Теорема 181. *Если прямая перпендикулярна к двум прямым некоторой плоскости, проходящим через ее основание в этой плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости*

Пусть прямая SO перпендикулярна к прямым OA и OB, лежащим в данной плоскости (черт.50). Достаточно будет доказать, что $SO \perp OC$, где OC произвольная прямая той же плоскости, проходящая через точку O (определение 57). Если мы остановимся на определенной полупрямой OC, то последняя должна лежать внутри одного из четырех углов, образуемых прямыми OA и OB (теорема 47). Пусть именно она лежит внутри $\angle AOB$ и пересекает его секущий отрезок (AB) в точке C. Откладываем $(OS_1) = (OS)$ на другом луче прямой SO, исходящем из точки O, а точки S и S_1 соединяем с точками A, B, C.

Далее, имеем:

$$\triangle SOA = \triangle S_1OA \text{ и } \triangle SOB = \triangle S_1OB \qquad \text{(теорема 165, п. I)},$$

$$(SA) = (S_1A) \text{ и } (SB) = (S_1B),$$

$$\triangle SAB = \triangle S_1AB \qquad \text{(теорема 138)},$$

$$\angle SAB = \angle S_1AB,$$

$$\triangle SAC = \triangle S_1AC \qquad \text{(теорема 130)},$$

$$(SC) = (S_1C),$$

$$\triangle SOC = \triangle S_1OC \qquad \text{(теорема 138)},$$

$$\angle SOC = \angle S_1OC = d,$$

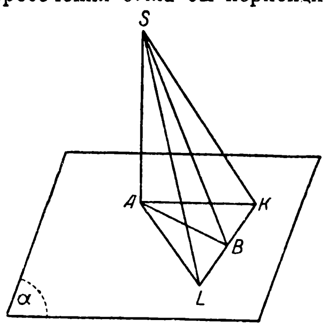
так что $SO \perp OC$, и теорема доказана.

Теорема 182. *Если в какой-нибудь точке прямой, во всех проходящих через эту прямую плоскостях, восставить к ней перпендикуляры, то все они будут лежать в плоскости, перпендикулярной к данной прямой в данной точке.*

Пусть дана прямая SS_1 и на ней точка O (черт. 50). Проведем через эту прямую две какие-нибудь плоскости и в них восставим перпендикуляры OA и OB к данной прямой (теорема 166). Прямые OA и OB определят некоторую плоскость α. На основании теоремы 181:

$$SS_1 \perp \alpha.$$

Проведем теперь через SS_1 произвольную плоскость и в ней восставим $OC \perp SS_1$. Если бы прямая OC не лежала в плоскости α, то плоскости SOC и α пересекались бы по прямой, отличной от OC; эта прямая пересечения была бы перпендикулярной к прямой SS_1 (теорема 181, определение 57) и тогда в плоскости SOC мы имели бы в точке O два различных перпендикуляра к прямой SS_1, что невозможно (теорема 166).



Черт. 51

Следовательно, прямая OC лежит в плоскости α.

Теорема 183. *Через данную точку проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной прямой.*

Доказательство разбивается на две части:

1. Дана прямая a и точка A на этой прямой; построение искомой плоскости и ее единственность получаются без труда на основании предыдущей теоремы.

2. Дана прямая a и точка S вне ее. Опустим из точки S перпендикуляр SA на прямую a [(теорема 167), A есть основание перпендикуляра] и в точке A в другой плоскости восставим перпендикуляр AM к прямой a. Плоскость SAM и будет искомой (теорема 181). Если допустить существование еще другой плоскости, проходящей через S и перпендикулярной к a, то в сечении двух этих плоскостей плоскостью Sa получили бы два перпендикуляра, опущенных из точки S на прямую a, что невозможно (теорема 167). Добавим, что допущенная нами вторая плоскость не может пройти через точку A, так как в этой точке, по случаю первому, имеется только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

Теорема 184. („Теорема о трех перпендикулярах".) *Если прямые SA и SB суть соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α (точки A и B—их основания), то всякая прямая плоскости α, проходящая через точку B и перпендикулярная к одной из двух прямых SB и AB, будет перпендикулярной и к другой (черт. 51).*

Действительно, возьмем в плоскости α какую-нибудь прямую KL, проходящую через точку B, и, отложив равные отрезки $(BK) = (BL)$, соединим точки K и L с точками A и S. Пусть теперь дано, что

$$KL \perp SB;$$

тогда

$$(SK) = (SL) \qquad \text{(теорема 178)},$$

$$\triangle SAK = \triangle SAL \qquad \text{(теорема 165, п. 3)},$$

$$(AK) = (AL),$$

$$KL \perp AB \qquad \text{(теорема 178)}.$$

Обратное утверждение доказывается с помощью того же рассуждения, проведенного в обратном порядке.

Теорема 185. *Через данную точку проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к данной плоскости.*

Доказательство разбивается на две части:

1. Дана плоскость α и в ней точка A (черт. 52). Проведем через A в плоскости α какую-нибудь прямую KL и в точке A к этой прямой построим перпендикулярную плоскость β (теорема 183). Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой AB. В плоскости β к прямой AB восставим перпендикуляр AN (теорема 166), который и будет искомым.

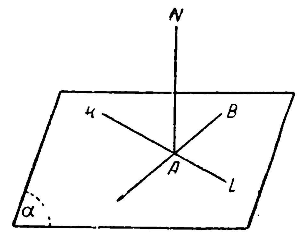
Действительно, имеем:

$$AN \perp KL, \text{ так как } KL \perp \beta,$$

$$AN \perp AB \text{ (по построению)},$$

откуда

$$AN \perp \alpha \qquad \text{(теорема 181)}.$$



Черт. 52

Если мы допустим, что еще имеется другая прямая $AP \perp \alpha$, то, пересекая плоскость α плоскостью PAN, получим противоречие с теоремой 166.

2. Дана плоскость α и точка S вне ее (черт. 51). Проведем в плоскости α какую-нибудь прямую KL и через точку S проведем плоскость β, перпендикулярную к этой прямой (теорема 183); пусть плоскости α и β пересекаются по прямой AB; опустим из точки S на прямую AB перпендикуляр SA (теорема 167), который и будет искомым.

Действительно, имеем:

$$BL \perp \beta \text{ (по построению)},$$

$$LA \text{ — наклонная к плоскости } \beta,$$

$$SA \perp AB \text{ (по построению)},$$

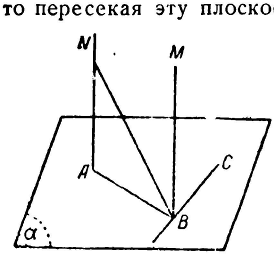
а потому

$$SA \perp AL \qquad \text{(теорема 184)},$$

откуда на основании теоремы 181 заключаем:

$$SA \perp \alpha.$$

Если допустить, что через точку S проходит еще другая прямая $SD \perp \alpha$, то пересекая эту плоскость плоскостью SAD, получим противоречие с теоремой 167.



Черт. 53

Теорема 186. *Два перпендикуляра к одной и той же плоскости лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

Пусть $NA \perp \alpha$ и $MB \perp \alpha$ (черт. 53). В плоскости α через точку B проведем прямую $BC \perp AB$. На основании теоремы 184 имеем:

$$BC \perp NB;$$

кроме того,

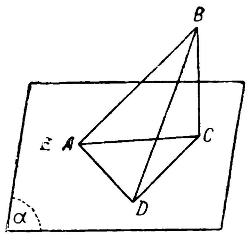
$$BC \perp BM, \text{ так как } BM \perp \alpha.$$

Итак, все три прямые AB, NB, MB, как перпендикуляры к BC в точке B, лежат в одной плоскости (теорема 182); в этой же плоскости лежит и прямая NA (аксиома VI). Если допустить, что прямые NA и MB пересекаются, то получается противоречие с теоремой 185.

Теорема 187. *Если из всех точек прямой, не перпендикулярной к данной плоскости, опустить перпендикуляры на эту плоскость, то все они будут лежать в одной плоскости.*

Пусть сначала дана какая-нибудь прямая AB, не лежащая в данной плоскости α, и из ее точек $M_1, M_2, M_3, M_4 \ldots$ опущены на эту плоскость перпендикуляры

$$M_1N_1,\ M_2N_2,\ M_3N_3,\ M_4N_4 \ldots$$



Черт. 54

Попарно эти перпендикуляры лежат в одной плоскости (теорема 186).

Рассмотрим две плоскости, которые определяются следующими парами:

$$M_1N_1 \text{ и } M_2N_2,\ M_2N_2 \text{ и } M_3N_3;$$

у этих плоскостей прямые M_2N_2 и AB будут общими, а потому эти плоскости совпадают (теорема 5). Точно так же докажем, что построенная сейчас плоскость тождественна с плоскостью, определяемой парою M_3N_3 и M_4N_4 и т. д. В случае прямой, лежащей в плоскости α, рассуждение остается, по существу, тем же самым.

Определение 58. *Проекцией* точки на плоскость называется *основание перпендикуляра*, опущенного из этой точки на плоскость. *Проекцией* какой-нибудь *фигуры* на плоскость называется *геометрическое место проекций* всех ее точек.

Теорема 188. *Проекция прямой на плоскость, ей не перпендикулярную, есть прямая* (доказывается на основании теоремы 187, определение 58).

Теорема 189. *Острый угол наклонной с ее проекцией на плоскость будет меньше всякого угла, образуемого данной наклонной с любой прямой, проходящей в данной плоскости через ее основание.*

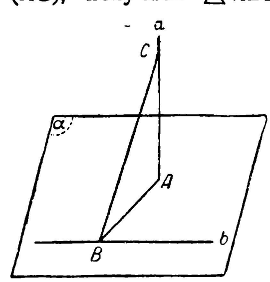
Пусть прямая AB будет наклонной к плоскости α, и AC — ее проекция (черт. 54). Остановимся на остром $\angle BAC$ и проведем $BC \perp \alpha$ (основание перпендикуляра C должно лежать на проекции данной прямой). Пусть дана еще какая-нибудь прямая AD. Отложив $(AD) = (AC)$, получаем $\triangle ABD$.

Из $\triangle BDC$ имеем:

$$(BD) > (BC) \qquad \text{(теорема 158)}$$

и, применяя теорему 162 к $\triangle\triangle\, ABC$ и ABD, получаем:

$$\angle BAD > \angle BAC.$$



Черт. 55

Определение 59. Под *углом между прямой и плоскостью* понимается острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость (если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее угол с плоскостью равен d).

Теорема 190. *Если прямая b лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой a, то a лежит в плоскости, перпендикулярной к b.*

Пусть прямая b лежит в плоскости α, перпендикулярной к прямой a (черт. 55); пусть A будет основанием для прямой a. Из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую b; эту точку B соединим с какой-нибудь точкой C, взятой на прямой a.

На основании теоремы 184 имеем:

$$b \perp BC,$$

$$b \perp \text{плоскости } ABC \qquad \text{(теорема 181)},$$

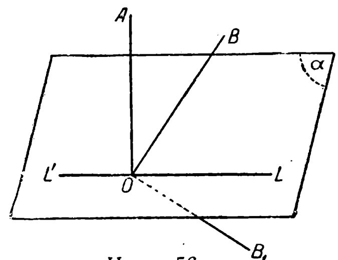
т. е. прямая a лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой b.

Определение 60. Две скрещивающиеся прямые называются взаимно-перпендикулярными, если одна из них лежит в плоскости, перпендикулярной к другой.

Замечание. Таким образом, в пространстве через данную точку можно провести бесчисленное множество прямых, перпендикулярных к данной; из них пересекает данную прямую только одна, именно та, о которой шла речь в теореме 167.

Легко видеть, что определение 50 и теоремы 168, 169 переносятся на перпендикуляры и наклонные к плоскости.

Предоставляя подробности читателю, мы докажем в заключение одно предложение, которое понадобится впоследствии.



Черт. 56

Теорема 191. *Если одна из сторон угла перпендикулярна к плоскости, то угол будет меньше d, равен d или больше d, смотря по тому, будет ли его другая сторона лежать по ту же сторону от данной плоскости, или будет лежать в самой плоскости, или будет лежать по другую сторону от этой плоскости.*

Пусть сторона OA угла AOB перпендикулярна к плоскости α, и пусть плоскость AOB пересекает α по прямой $L'OL$ (черт. 56).

Полупрямые OL и OL' принадлежат различным полуплоскостям плоскости AOB с ребром OA; пусть полупрямая OB принадлежит той же полуплоскости, что и полупрямая OL. Поскольку речь идет о точках плоскости AOB, то принадлежность их одному и тому же полупространству, ограниченному плоскостью α, равносильна принадлежности одной и той же полуплоскости с ребром $L'L$, ибо отрезок, соединяющий две точки плоскости AOB, может пересечь плоскость α лишь в точках прямой $L'L$. После этого допустим, что полупрямая OB лежит с той же стороны от плоскости α, как и полупрямая OA; другими словами, полупрямые OA и OB лежат в одной и той же полуплоскости с ребром $L'L$.

Применяя теорему 46 к полупрямой OA, приходим к выводу, что полупрямая OB в рассматриваемом случае принадлежит прямому углу AOL. Тогда по определению 39

$$\angle AOB < \angle AOL, \text{ или } \angle AOB < d.$$

Если же полупрямая OB совпадает с полупрямой OL, то, очевидно:

$$\angle AOB = d.$$

Пусть, наконец, полупрямые OB и OA лежат по разные стороны от плоскости α (на чертеже такое положение второй стороны угла дается полупрямой OB_1).

На основании теоремы 48 или полупрямая OL принадлежит $\angle AOB_1$, или полупрямая OB_1 принадлежит $\angle AOL$; но в последнем случае полупрямая OB_1 принадлежит полуплоскости $OL.A$ (теорема 43), что противоречит заданию.

Следовательно, имеет место первый случай, и тогда

$$\angle AOL < \angle AOB_1, \text{ или } \angle AOB > d.$$

Обратные утверждения доказываются с помощью „обращения по разделению".

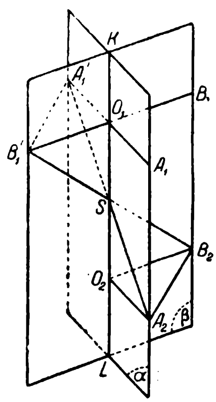
§ 18. Исчисление двугранных углов

Определение 61. Если плоскость сечения (см. определение 16) перпендикулярна к ребру двугранного угла, то оно называется *нормальным* сечением.

Теорема 192. *Все нормальные сечения данного двугранного угла равны между собой.*

Пусть дан двугранный $\angle(\alpha\beta)$ (черт. 57) и в двух различных точках его ребра построены нормальные сечения:

$$\angle A_1O_1B_1 \text{ и } \angle A_2O_2B_2.$$



Черт. 57

Отложим равные отрезки:

$$(O_2A_2)=(O_1A_1)=(O_1A_1') \text{ и}$$
$$(O_2B_2)=(O_1B_1)=(O_1B_1'),$$

причем отрезки (O_1A_1') и (O_1B_1') отложены на лучах, противоположных сторонам угла $A_1O_1B_1$. В силу этого построения точки A_1' и A_2 принадлежат различным полуплоскостям с ребром KL, а потому отрезок $(A_1'A_2)$ пересекает прямую KL в некоторой точке S. Точно так же отрезок $(B_1'B_2)$ пересекает ту же прямую в некоторой точке S' (совпадение S и S' будет доказано ниже). Легко видеть, что

$$\triangle SO_2A_2=\triangle SO_1A_1' \quad \text{(теорема 165, п. 4)},$$

откуда

$$(O_2S)=(O_1S).$$

Точно так же докажем, что

$$(O_2S')=(O_1S'),$$

а так как середина отрезка — единственна, то S' совпадает с S.

Из указанного равенства треугольников вытекает еще следующее:

$$(A_2S)=(A_1'S) \text{ и } (B_2S)=(B_1'S).$$

Но тогда

$$\triangle A_2SB_2=\triangle A_1'SB_1' \qquad \text{(теорема 130)},$$
$$(A_2B_2)=(A_1'B_1'),$$

$$\triangle A_2O_2B_2=\triangle A_1'O_1B_1' \qquad \text{(теорема 138)},$$
$$\angle A_2O_2B_2=\angle A_1'O_1B_1',$$

$$\angle A_1'O_1B_1'=\angle A_1O_1B_1 \text{ (как вертикальные)},$$
$$\angle A_2O_2B_2=\angle A_1O_1B_1.$$

Определение 62. Два двугранных угла называются равными, если равны их нормальные сечения.

Теорема 193. Аксиомы XVII—XIX и теорема 98 переносятся на двугранные углы.

Теорема 194. Дан двугранный угол $(\alpha\beta)$ и определенное полупространство, причем в определяющей его плоскости задана прямая k и исходящая из нее полуплоскость α_1. Тогда в данном полупространстве с ребром в заданной прямой существует одна и только одна такая полуплоскость β_1, что

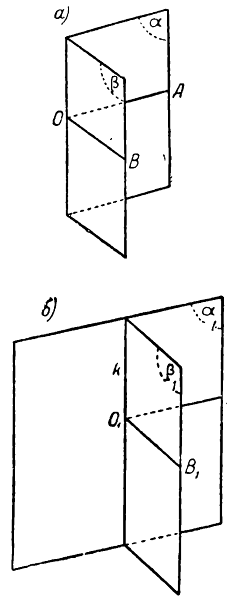
двугранный $\angle(\alpha\beta)$ = двугранному $\angle(\alpha_1\beta_1)$ (см. черт. 58).

В самом деле, проведем нормальное сечение $\angle AOB$ в данном двугранном угле и проведем далее плоскость, перпендикулярную к прямой k в некоторой ее точке O_1 (теорема 183); эта плоскость пересечет данную плоскость по прямой O_1A_1. В построенной плоскости остановимся на той полуплоскости с ребром O_1A_1, которая лежит в данном полупространстве (теорема 34 и замечание к теореме 37). На основании аксиомы XXII построим в ней такой луч O_1B_1 чтобы:

$$\angle B_1O_1A_1 = \angle BOA.$$

Наконец, полуплоскость kB_1 обозначим через β_1. Тогда получим:

двугранный $\angle(\alpha_1\beta_1)$ = двугранному $\angle(\alpha\beta)$ (опред. 62).



Черт. 58

Таким образом построен один двугранный угол, удовлетворяющий всем поставленным требованиям. Если допустить существование еще другого такого же двугранного угла, то, взяв его нормальное сечение плоскостью $B_1O_1A_1$, придем к противоречию с аксиомой XXII.

Теорема 195. Определения 38—45, теоремы 134—137, 140—152, 179 переносятся на двугранные углы при замене терминов:

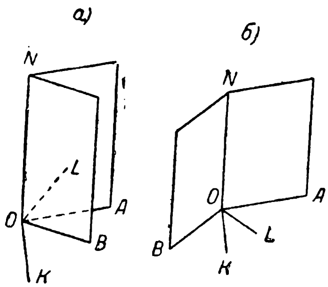
точка — прямая
вершина — ребро
луч — полуплоскость
прямая — плоскость
сторона угла — грань двугранного угла,

угол — двугранный угол,
полуплоскость — полупространство,
ребро полуплоскости — плоскость, определяющая полупространство.

Поверка этого утверждения предоставляется читателю.

Теорема 196. *Если в какой-нибудь точке ребра восставить к граням двугранного угла перпендикуляры, направив каждый из них в сторону другой грани, то угол, образованный этими перпендикулярами, в сумме с нормальным сечением двугранного угла даст $2d$.*

Действительно, пусть дан двугранный $\angle ON$ (черт. 59), где случай a) соответствует острому двугранному углу, а случай b) — тупому. В точке O его ребра восставим к его граням перпендикуляры OK и OL, направленные согласно условиям теоремы.



Черт. 59

Так как

$OK \perp ON$ и $OL \perp ON$ (определение 57), то

плоскость $KOL \perp ON$ (теорема 181),

а потому в сечении этой плоскости с гранями двугранного угла получится его нормальное сечение AOB.

В силу построения имеем также:

$$\angle KOA = \angle LOB = d.$$

Если данный двугранный угол прямой, то OK совпадает с OB и OL — с OA, а потому теорема становится очевидной. Если же данный двугранный угол острый, то полупрямые OB и OA будут лежать соответственно внутри прямых углов KOA и LOB, так что

$$\angle KOA = \angle KOB + \angle BOA; \ \angle LOB = \angle BOA + \angle AOL$$
(теор. 106 и 147),

$$\angle KOA + \angle LOB = \angle AOB + (\angle KOB + \angle BOA + \angle AOL)$$
(теор. 107, 108 и 147),

$2d = \angle AOB + \angle KOL$ (повторное применение теор. 106 и 147).

Если, наконец, данный двугранный угол тупой, то полупрямые OK и OL обе лежат внутри AOB; полупрямая OL делит этот угол на две части: $\angle AOL$ и $\angle LOB = d$, причем первый из них должен быть меньше d, так как весь $\angle AOB$ меньше выпрямленного. А потому полупрямая OK пойдет внутри $\angle LOB$ (мы здесь опираемся на теоремы исчисления углов).

Точно так же докажем, что полупрямая OL лежит внутри $\angle KOA$.

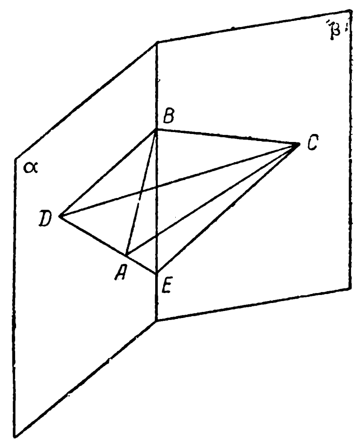
Далее имеем:

$$\angle LOB = \angle BOK + \angle KOL; \quad \angle KOA = \angle KOL + \angle LOA;$$

$$\angle LOB + \angle KOA = \angle KOL + (\angle BOK + \angle KOL + \angle LOA);$$

$$2d = \angle KOL + \angle BOA.$$

Определение 63. Два сечения одного и того же двугранного угла или двух различных двугранных углов называются *равнонаклоненными*, если их стороны образуют соответственно равные углы с определенными лучами ребра.



Черт. 60

Теорема 197. Если в двугранных углах $(\alpha\beta)$ и $(\alpha_1\beta_1)$ сечения $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$, $\angle DBC$ и $\angle D_1B_1C_1$ будут равнонаклоненными, и если $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то и $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$.

Будем иметь в виду черт. 60 (на котором изображен лишь один из двух данных двугранных углов); здесь полупрямые BA и BD принадлежат плоскости α, полупрямая BC — плоскости β, и точно так же полупрямые B_1A_1 и B_1D_1 — плоскости α_1, полупрямая B_1C_1 — плоскости β_1; кроме того, в силу равнонаклоненности сечений имеем:

$$\angle ABE = \angle A_1B_1E_1, \quad \angle CBE = \angle C_1B_1E_1, \quad \angle DBE = \angle D_1B_1E_1.$$

На основании теоремы 48 либо полупрямая BA лежит внутри $\angle DBE$, либо BD — внутри $\angle ABE$. Допустим для определенности первое. Вышеупомянутые точки D, E, C, D_1, E_1, C_1 выбираем так, что

$$(BD) = (B_1D_1), \ (BE) = (B_1E_1), \ (BC) = (B_1C_1).$$

На основании нашего допущения полупрямая BA пересекает отрезок (DE) в некоторой точке, и пусть этой точкой будет точка A. Так как $\angle ABE$ составляет часть $\angle DBE$, а углы $A_1B_1E_1$ и $D_1B_1E_1$ соответственно равны этим и расположены в одной и той же полуплоскости, то полупрямая B_1A_1 должна лежать внутри $\angle D_1B_1E_1$, а потому она пересечет (D_1E_1) в некоторой точке A_1. Наконец, чтобы закончить построение, соединим точку C с точками D, A, E и точку C_1 — с D_1, A_1, E_1.

Для доказательства равенства $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$ придется рассмотреть несколько пар равных треугольников.

Легко видеть, что

1) $\triangle DBE = \triangle D_1B_1E_1$ (теорема 130),

$(DE) = (D_1E_1)$ и $\angle BED = \angle B_1E_1D_1$;

2) $\triangle ABE = \triangle A_1B_1E_1$ (теорема 131),

$(BA) = (B_1A_1)$ и $(AE) = (A_1E_1)$;

3) $\triangle CBE = \triangle C_1B_1E_1$ (теорема 130),

$(CE) = (C_1E_1)$;

4) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (теорема 130),

$(AC) = (A_1C_1)$;

5) $\triangle AEC = \triangle A_1E_1C_1$ (теорема 138),

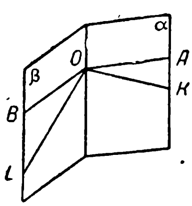
$\angle AEC = \angle A_1E_1C_1$;

6) $\triangle DEC = \triangle D_1E_1C_1$ (теорема 130),

$(DC) = (D_1C_1)$;

7) $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$ (теорема 138),

$\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.



Черт. 61

Теорема 198. *В равных двугранных углах равнонаклоненные сечения равны, и обратно: если в двух данных двугранных углах два какие-нибудь равнонаклоненные сечения равны, то эти двугранные углы равны между собой.*

Пусть нам даны два двугранных угла $(\alpha\beta)$ и $(\alpha_1\beta_1)$, в которых построены их нормальные сечения $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ (на черт. 61 изображен только один из этих углов); кроме того, даны еще два равнонаклоненных сечения: $\angle KOL$ и $\angle K_1O_1L_1$.

Если теперь нам дано, что

$$(\alpha\beta) = (\alpha_1\beta_1), \text{ то } \angle AOB = \angle A_1O_1B_1 \quad \text{(определение 62)};$$

тогда на основании теоремы 197 заключаем:

$$\angle LOA = \angle L_1O_1A_1,$$

ибо нормальные сечения будут всегда и равнонаклоненными; а так как эти последние углы являются также равнонаклоненными сечениями, то теорема 197 снова дает:

$$\angle LOK = \angle L_1O_1K_1.$$

Обратно, пусть нам дано это последнее равенство; применяя два раза теорему 197, получаем сначала:

$$\angle BOK = \angle B_1O_1K_1,$$

а потом:

$$\angle BOA = \angle B_1O_1A_1;$$

но тогда (определение 62):

$$(\alpha\beta) = (\alpha_1\beta_1).$$

§ 19. Перпендикулярные плоскости

Определение 64. Если один из четырех двугранных углов, образуемых двумя пересекающимися плоскостями (теоремы 47 и 52), будет прямым, то, как легко видеть, и все остальные будут прямыми. Такие две *плоскости* называются *взаимно перпендикулярными*.

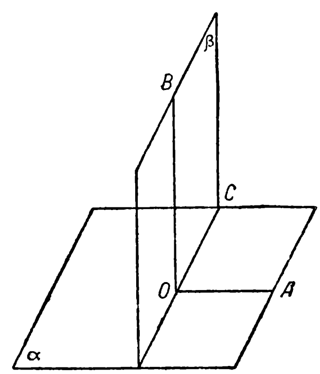
Теорема 199. *Плоскость, проходящая через перпендикуляр к другой плоскости, сама к ней перпендикулярна.*

Пусть прямая $OB\perp$ плоскости α, а плоскость β проходит через прямую OB (черт. 62); пусть далее плоскости α и β пересекаются по прямой OC. В плоскости α проведем $OA\perp OC$. Тогда

$$OB\perp OA \qquad \text{(определение 57)},$$

$$\angle BOA = d.$$

Но этот угол будет нормальным сечением для двугранного угла $(\alpha\beta)$, ибо $OB\perp OC$ и $OA\perp OC$. Поэтому плоскости взаимно перпендикулярны.



Черт. 62

Теорема 200. *Если две плоскости взаимно перпендикулярны и в одной из них проведем прямую, перпендикулярную к линии их пересечения, то эта прямая будет перпендикулярной к другой плоскости.*

Пусть плоскость $\beta\perp\alpha$ (черт. 62) и OC есть линия их пересечения. В плоскости β проведем прямую $OB\perp OC$. Построим далее нормальное сечение $\angle BOA$—двугранного угла между данными плоскостями.

По данному

$$\angle BOA = d, \text{ так что } OB\perp OA,$$

на основании теоремы 181 теперь заключаем:

$$OB\perp\alpha.$$

Теорема 201. *Если две плоскости взаимно перпендикулярны и перпендикуляр к одной из них имеет общую точку с другой плоскостью, то он целиком лежит в этой последней.*

Пусть плоскость $\alpha\perp\beta$ и $OB\perp\alpha$, где O—основание перпендикуляра в плоскости α; общую точку прямой OB с плоскостью β обозначим через E. Если прямая OB не лежит в плоскости β, то проведем в этой плоскости через точку E прямую, перпендикулярную к линии пересечения плоскостей α и β (теорема 166 или 167); на основании теоремы 200 эта прямая будет перпендикулярна плоскости α.

Следовательно, мы получим два перпендикуляра к плоскости α, проходящие через точку E, что невозможно (теорема 185); а потому прямая OB лежит в плоскости β.

Теорема 202. *Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны к третьей, то прямая их пересечения будет перпендикуляром к этой плоскости.*

Действительно, возьмем на прямой пересечения какую-нибудь точку и опустим из нее перпендикуляр на эту третью плоскость; на основании теоремы 201 этот перпендикуляр должен совпасть с прямой пересечения данных плоскостей.

Теорема 203. *Если прямая a не перпендикулярна плоскости α, то через прямую a проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к плоскости α.*

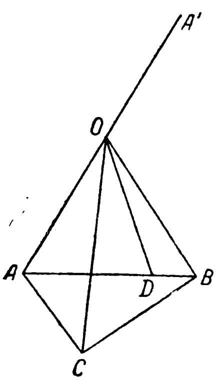
Теоремы 187 и 199 дают искомую плоскость; если бы таких плоскостей было две, то прямая a была бы перпендикулярна α (теорема 202), что противоречит заданию.

§ 20. Некоторые свойства трехгранных углов

Теорема 204. *В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.*

Достаточно будет доказать теорему для наибольшего плоского угла, и пусть в трехгранном угле $OABC$ таковым будет $\angle AOB$ (черт. 63). Так как по данному $\angle AOC < \angle AOB$, то внутри последнего угла существует такой луч OD, что

$$\angle AOD = \angle AOC.$$



Черт. 63

Проведем секущий отрезок (AB) угла AOB, и пусть луч OD пересекает его в точке D; отложим $(OC) = (OD)$ и соединим отрезками точки A и C, C и B. На основании теоремы 130 имеем:

$$\triangle AOD = \triangle AOC,$$

откуда

$$(AD) = (AC).$$

Применяя теорему 159 к $\triangle ABC$, находим:

$$(AB) < (AC) + (CB),$$

$$(AD) + (DB) < (AC) + (CB);$$

но равенство отрезков (AD) и (AC), в связи с теоремой 116, приводит к заключению

$$(DB) < (CB).$$

Если теперь возьмем $\triangle\triangle$ BOD и BOC и применим к ним теорему 162, то получим

$$\angle BOD < \angle BOC.$$

Далее, принимая во внимание равенство $\angle AOD = \angle AOC$, а также теоремы 110 и 147, имеем

$$\angle AOD + \angle BOD < \angle AOC + \angle BOC,$$

$$\angle AOB < \angle AOC + \angle BOC.$$

Замечание. Подобно тому, как с помощью теоремы 159 были доказаны теоремы 160 и 176, можно и здесь доказать соответственные предложения для телесных углов.

Теорема 205. *Сумма плоских углов трехгранного угла меньше $4d$.*

Пусть дан трехгранный $\angle OABC$. Рассмотрим трехгранный $\angle OA'BC$, где OA'—луч, противоположный для OA (черт. 63). Применяя к последнему теорему 204, имеем:

$$\angle BOC < \angle A'OB + \angle A'OC;$$

или

$$\angle BOC < (2d - \angle AOB) + (2d - \angle AOC) \quad \text{(теорема 148)},$$

откуда по правилам исчисления углов

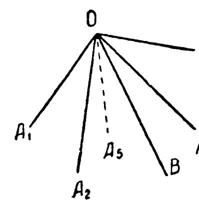
$$\angle AOB + \angle AOC + \angle BOC < 4d.$$

Теорема 206. *Сумма плоских углов многогранного угла всегда меньше 4d.*

Для доказательства применим метод математической индукции: для трехгранного угла теорема уже доказана, а теперь докажем, что если она верна для $(n-1)$-гранного угла, то будет верна и для n-гранного.

Пусть дан n-гранный угол $OA_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ (черт. 64, где положено $n = 5$).

Так как плоскости A_1OA_2 и A_3OA_4 имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Пусть полупрямая OB будет тем лучом этой прямой, который по отношению к плоскости A_2OA_3 лежит с другой стороны, чем остальные ребра данного телесного угла (в силу определений 22, 24 и теоремы 75 все они лежат по одну сторону от плоскости A_2OA_3). Теперь на основании теорем 73 и 75 получаем $(n-1)$-гранный угол $OA_1BA_4A_5\ldots$, для которого, согласно допущению, имеем:



Черт. 64

$$\angle A_1OB + \angle BOA_4 + \angle A_4OA_5 + \ldots < 4d.$$

С другой стороны, теорема 204 для трехгранного $\angle OA_2BA_3$ дает:

$$\angle A_2OA_3 < \angle A_2OB + \angle BOA_3.$$

Отсюда по правилам исчисления углов находим:

$$\angle A_1OB + \angle BOA_4 + \angle A_2OA_3 + \angle A_4OA_5 + \ldots < 4d + \angle A_2OB + \angle BOA_3.$$

$$(\angle A_1OB - \angle A_2OB) + (\angle BOA_4 - \angle BOA_3) + \angle A_2OA_3 + \angle A_4OA_5 + \ldots < 4d.$$

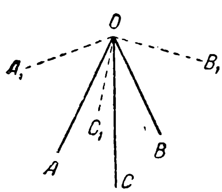
В силу свойства выпуклости лучи OA_1 и OA_2 лежат по одну сторону от плоскости A_3OA_4, или, что то же самое, от плоскости BOA_3. Следовательно, в плоскости A_1OB лучи OA_1 и OA_2 лежат по одну сторону от прямой OB; но в таком случае получим (теорема 48): либо OA_2 лежит внутри $\angle A_1OB$, либо OA_1 — внутри $\angle A_2OB$. В последнем случае лучи OA_1 и OB находились бы по одну сторону от прямой OA_2, что противоречит выбору луча OB.

Итак, полупрямая OA_2 является внутренней для $\angle A_1OB$, а поэтому:

$$\angle A_1OB - \angle A_2OB = \angle A_1OA_2;$$

и совершенно также докажем, что

$$\angle BOA_4 - \angle BOA_3 = \angle A_3OA_4.$$



Черт. 65

Подставляя в указанное выше неравенство, находим:

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \angle A_4OA_5 + \ldots < 4d.$$

Определение 65. Пусть дан трехгранный $\angle OABC$ (черт. 65). Восставим к плоскости BOC в точке O перпендикуляр и через OA_1 назовем тот его луч, который лежит с той же стороны от плоскости BOC, что и ребро OA; точно так же восставим к плоскостям COA и AOB перпендикуляры OB_1 и OC_1, направив их в сторону третьего ребра. Полученный таким образом трехгранный угол $OA_1\ B_1\ C_1$ называется дополнительным для данного $\angle OABC$.

Замечание. Читателю предоставляется доказать, что если бы три перпендикуляра OA_1, OB_1, OC_1 лежали в одной плоскости, то плоскости BOC, COA, AOB проходили бы через одну прямую, а это невозможно.

Теорема 207. *Если трехгранный угол $OA_1\ B_1\ C_1$ является дополнительным для $\angle OABC$, то этот последний будет дополнительным для $\angle OA_1\ B_1\ C_1$.*

Действительно, вспоминая построение дополнительного угла, можем написать

$$OA_1 \perp BOC \text{ и } OB_1 \perp COA \qquad \text{(см. черт. 65)},$$

откуда

$$OA_1 \perp OC \text{ и } OB_1 \perp OC \qquad \text{(определение 57)},$$

$$OC \perp A_1OB_1 \qquad \text{(теорема 181)}.$$

Далее, рассмотрим $\angle COC_1$. Так как $OC_1 \perp AOB$, а OC и OC_1 лежат по одну сторону от этой плоскости, то

$$\angle COC_1 < d \qquad \text{(теорема 191)};$$

но сторона OC этого угла перпендикулярна к плоскости A_1OB_1, а потому:

полупрямые OC и OC_1 лежат по одну сторону от плоскости A_1OB_1 (теорема 191).

Точно так же докажем, что и ребра OA и OB выполняют все условия для того, чтобы трехгранный $\angle\ OABC$ был дополнительным для $OA_1B_1C_1$.

Замечание. На основании теоремы 207 трехгранные углы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ называются взаимно дополнительными.

Теорема 208. *В двух взаимно дополнительных трехгранных углах плоские углы одного пополняют нормальные сечения соответственных двугранных углов другого до $2d$.*

Возьмем два взаимно дополнительных трехгранных угла $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ (черт. 65); условимся, что двугранному углу при OA первого трехгранного угла соответствует $\angle B_1OC_1$ второго, плоскому углу BOC первого — двугранный угол при OA_1 во втором и т. д. Остановимся на двугранном $\angle OA$ и плоском $\angle B_1OC_1$. Определение 65 говорит, что

полупрямая $OB_1 \perp$ грани AOC и направлена в сторону другой грани AOB;

„ $OC_1 \perp$ „ AOB „ „ в сторону другой грани AOC.

При таких условиях теорема 196 решает вопрос.

Замечание. Понятие о взаимно дополнительных углах можно распространить и на телесные углы вообще.

Теорема 209. *Сумма двугранных углов трехгранного угла больше двух прямых.*

В самом деле, обозначим через α, β, γ нормальные сечения двугранных углов данного трехгранного угла и перейдем к дополнительному углу; его плоские углы по теореме 208 будут: $2d-\alpha$, $2d-\beta$, $2d-\gamma$.

Применяя к ним теорему 205, имеем:

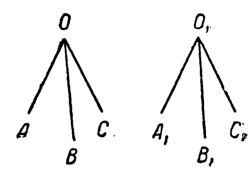
$$6d-(\alpha+\beta+\gamma)<4d,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma>2d.$$

Но если сумма нормальных сечений больше двух прямых углов, то, как легко видеть, тому же условию будет удовлетворять и сумма самих двугранных углов.

Определение 66. *Два трехгранных угла называются равными, если их плоские и двугранные углы соответственно равны.* Соответствие здесь понимается в том же смысле, как и в определении 36.



Черт. 66

Теорема 210. *Если два трехгранных угла равны, то и дополнительные с ними — равны между собой* (определение 66, теорема 208).

Теорема 211. *Если у двух трехгранных углов соответственно равны два плоских угла и заключенные между ними двугранные углы, то такие трехгранные углы равны между собой.*

Пусть у трехгранных углов $OABC$ и $O_1A_1B_1C_1$ (черт. 66) дано:

$$\angle BOA=\angle B_1O_1A_1,\ \angle COA=\angle C_1O_1A_1,$$
$$\text{двугранный } \angle OA=\text{двугранному } \angle O_1A_1.$$

Легко видеть, что плоские $\angle\angle\ BOC$ и $B_1O_1C_1$ будут равнонаклоненными сечениями двугранных углов при OA и O_1A_1 (определение 63). А так как эти двугранные углы равны то

$$\angle BOC=\angle B_1O_1C_1 \qquad \text{(теорема 198).}$$

Далее, плоские $\angle\angle\ COA$ и $C_1O_1A_1$ будут равнонаклоненными сечениями двугранных углов при OB и O_1B_1, а так как эти плоские углы равны между собою, то

$$\text{двугранный } \angle OB=\text{двугранному } \angle O_1B_1 \text{ (теорема 198).}$$

Точно так же докажем, что и

$$\text{двугранный } \angle OC=\text{двугранному } \angle O_1C_1.$$

Теорема 212. *Если у двух трехгранных углов соответственно равны два двугранных угла и заключенные между ними плоские углы, то такие трехгранные углы равны между собой.*

Для доказательства переходим к дополнительным углам и основываемся на теоремах 208, 211, 210.

Теорема 213. *Если у двух трехгранных углов все три плоских угла соответственно равны, то такие трехгранные углы равны между собой.*

Действительно, $\angle\angle$ BOC и $B_1O_1C_1$ (черт. 66) являются равнонаклоненными и притом равными сечениями двугранных углов при OA и O_1A_1. На основании теоремы 198 названные двугранные углы будут равны. Совершенно также докажем и равенство двух остальных пар двугранных углов.

Теорема 214. *Если у двух трехгранных углов все три двугранных угла соответственно равны, то такие трехгранные углы равны между собой.*

Доказывается переходом к дополнительным углам и ссылкой на теоремы 208, 213, 210.

Замечание. Бросается в глаза сходство между теоремами 211—213 и соответственными случаями равенства треугольников; но теорема 214 не имеет подобной среди теорем о равенстве треугольников. Существует еще два случая равенства трехгранных углов, соответствующие теоремам 163 и 164, но на этом останавливаться не будем.

Точно так же, аналогично с определением 53 и теоремой 175, можно было бы ввести понятие о равенстве многогранных углов.

§ 21. Круг и шар

Определение 67. Геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называется *шаровой поверхностью*; если ограничиться точками определенной плоскости, то получается окружность. Данная точка называется центром; отрезок, соединяющий центр с любой точкой геометрического места, называется *радиусом*. Окружность с центром в точке O и с радиусом, равным r, обозначается с помощью символа O (r). Существование указанных геометрических мест непосредственно вытекает из аксиомы XX. Практически окружность строится с помощью циркуля. *Внутренними* точками окружности $O(r)$ называются такие точки M ее плоскости, для которых $(OM) < r$; а *внешними* — такие точки M ее плоскости, для которых $(OM) > r$.

Подобные же определения имеют место и для шаровой поверхности. *Круг* есть *совокупность внутренних точек окружности* в соединении с точками самой окружности; подобным же образом из шаровой поверхности получается *шар*.

Теорема 215. *Между точками окружности и лучами пучка, имеющего центр в центре окружности и лежащего в ее плоскости, существует одно-однозначное соответствие; такое же соответствие имеет место между точками шаровой поверхности и лучами связки с центром в центре этой поверхности.*

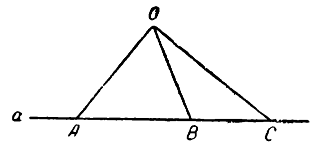
Доказательство предоставляется читателю; соответственными считаются совмещенные элементы.

Теорема 216. *Прямая не может пересекать окружность или шаровую поверхность более чем в двух точках.*

В противность теореме допустим, что прямая a пересекает одно из названных геометрических мест в точках A, B, C, причем B лежит между A и C (теорема 17), и пусть точка O есть центр (черт. 67). Тогда:

$$(OA) = (OB) = (OC) \qquad \text{(определение 67),}$$

так что $\triangle\triangle$ OAB и OBC равнобедренные, но в таком случае углы OBA и OBC оба острые (теоремы 156 и 132), что невозможно, так как эти углы смежные (теорема 145).



Черт. 67

Теорема 217. *Прямая, проходящая через центр шаровой поверхности, пересекает ее в двух и только в двух точках. То же самое имеет место для окружности — при условии, что прямая лежит в ее плоскости.*

Данная прямая центром делится на две полупрямых; дальнейшее вытекает из определения 67, аксиомы XX и теоремы 216.

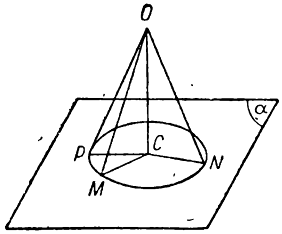
Теорема 218. *Плоскость, проходящая через центр шаровой поверхности, пересекает ее по окружности, у которой центр находится в центре шаровой поверхности, а радиус равен ее радиусу.*

Действительно, точками пересечения будут служить те точки шаровой поверхности, которые лежат в данной плоскости; дальнейшее вытекает из определения 67.

Определение 68. *Окружность с центром в центре шаровой поверхности и с радиусом, равным ее радиусу, называется окружностью большого круга.*

Теорема 219. *Через две точки шаровой поверхности, не лежащие на одной прямой с центром, проходит одна и только одна окружность большого круга.*

Действительно, данные две точки вместе с центром вполне определяют плоскость, которая в сечении с шаровой поверхностью дает искомую окружность (теорема 218). Легко видеть, что через две точки, лежащие на одной прямой с центром, можно провести бесконечное множество окружностей больших кругов.



Черт. 68

Теорема 220. *Если плоскость не проходит через центр шаровой поверхности, но имеет с ней общие точки, то она пересекает эту поверхность по окружности, у которой центром служит основание перпендикуляра, опущенного из центра поверхности на данную плоскость, а радиус — меньше радиуса поверхности.*

Действительно, пусть точка C есть основание указанного перпендикуляра (черт. 68), а точка M—одна из точек, общих для шаровой поверхности и данной плоскости α. Легко видеть, что точка M не может совпасть с точкой C, так как в этом случае на основании теоремы 168 и определения 67 все остальные точки плоскости α были бы внешними для шаровой поверхности, а в условии теоремы говорится об „общих точках".

Возьмем в плоскости α окружность $C(r)$, где $r = (CM)$; пусть N есть какая-нибудь ее точка. Из равенства $\triangle\triangle$ OCM и OCN (теорема 165, п. I) вытекает, что

$$(ON) = (OM),$$

так что точка N лежит на данной шаровой поверхности.

Обратно, пусть P есть какая-нибудь точка этой поверхности, лежащая в плоскости α. Тогда из равенства $\triangle\triangle$ OCP и OCM (теорема 165, п. 3) получаем:

$$(CP) = (CM),$$

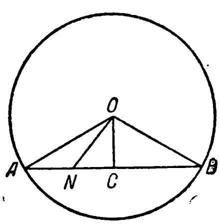
так что точка P лежит на окружности $C(r)$. Наконец, из прямоугольного $\triangle\, OCM$ имеем:

$$r = (CM) < (OM).$$

Определение 69. Если окружность лежит на шаровой поверхности, но ее плоскость не проходит через центр, то она называется *окружностью малого круга.*

Замечание. Благодаря теоремам 218 и 220, изучение некоторых свойств шаровой поверхности сводится к изучению соответствующих свойств окружности; поэтому в дальнейшем мы преимущественно будем иметь дело с последней.

Определение 70. Отрезок, определяемый двумя точками окружности или шаровой поверхности, называется *хордой*; если же эти точки лежат на одной прямой с центром, то хорда называется *диаметром,* а ее концы — *диаметрально-противоположными точками.*



Черт. 69

Доказательство следующих трех теорем предоставляется читателю.

Теорема 221. *Диаметр есть наибольшая из хорд и равен удвоенному радиусу.*

Теорема 222. *Перпендикуляр, опущенный из центра на хорду, делит ее пополам.*

Теорема 223. 1. *Перпендикуляр, восставленный к хорде в ее середине и лежащий в плоскости окружности, проходит через центр окружности.*

2. *Прямая, соединяющая центр с серединой хорды, к ней перпендикулярна.* (Последняя теорема получается из предыдущей в силу обращения по тождеству.)

Теорема 224. *Две различные окружности не могут иметь более двух общих точек.*

В самом деле, если бы рассматриваемые окружности имели три общие точки A, B, C, то центр каждой из них определялся бы пересечением перпендикуляров, восставленных в серединах отрезков (AB) и (BC) и лежащих в плоскости ABC (теорема 223; данные точки не могут лежать на одной прямой в силу теоремы 216). Таким образом, их центры совпали бы, а так как имеются общие точки, то и окружности совпали бы, что противоречит заданию.

Замечание. Подобным же образом можно доказать, что две различные шаровые поверхности не могут иметь других общих точек, за исключением точек некоторой окружности.

Теорема 225. *Внутренние точки хорды являются внутренними для окружности* (и для шаровой поверхности).

Действительно, если хорда служит диаметром, то, как легко убедиться, расстояние центра от любой внутренней точки ее будет меньше радиуса, откуда и следует теорема. В противном случае, пусть дана хорда (AB), и точка C есть основание перпендикуляра, опущенного на нее из центра (черт. 69). Тогда имеем:

$$(OC) < (OA) \quad \text{(теорема 168, п. I),} \quad \text{или } (OC) < r,$$

так что C есть внутренняя точка окружности. Возьмем теперь какую-нибудь точку N, отличную от C и лежащую внутри хорды, и пусть N лежит внутри ее части (AC), тогда:

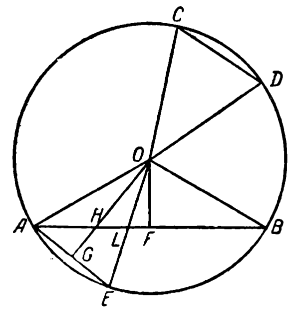
$$(CN) < (CA), \text{ так что } (ON) < (OA) \text{ (теорема 168, п. 3)},$$

т. е. точка N лежит внутри окружности.

Теорема 226. *В одной и той же окружности, или в двух окружностях с равными радиусами имеем:*

1) *равные хорды равно удалены от центра;*
2) *бóльшая хорда ближе к центру*
3) *и обратно.*

Остановимся для определенности на хордах одной и той же окружности. Если две хорды равны, то, соединив их концы с центром, получим равные равнобедренные треугольники и без труда докажем, что их высоты равны, откуда и следует п. 1 теоремы. Пусть теперь даны две хорды (AB) и (CD), причем $(AB) > (CD)$ (черт. 70).



Черт. 70

На основании теоремы 162, примененной к $\triangle\triangle$ AOB и COD, получаем:

$$\angle AOB > \angle COD,$$

так что можно отложить $\angle AOE = \angle COD$, составляющий часть угла AOB; полупрямая OE пересекает окружность в некоторой точке E (на основании определения окружности и аксиомы XX). Легко видеть, что хорда $(AE) = (CD)$, а потому расстояние (OG) первой хорды от центра равно расстоянию второй (по п. 1). Полупрямая OE, будучи внутренней для $\angle AOB$, пересекает его секущий отрезок (AB) в некоторой точке L; эта точка L будет лежать внутри радиуса (OE), так как по теореме 225 имеем, что $(OL) < r$. Применяя постулат Паша к $\triangle OEG$ и прямой AB, заключаем, что эта прямая пересекает (OG) во внутренней точке H. Таким образом, (OH) есть часть (OG). Опустив из центра перпендикуляр OF на хорду (AB), из $\triangle OHF$ находим:

$$(OF) < (OH).$$

Далее:

$$(OH) < (OG).$$

$$(OF) < (OG).$$

Последний п. 3 вытекает из предыдущих в силу обращения по разделению.

Определение 71. Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется *центральным.* В силу теоремы 215 лучам этого угла соответствует вполне определенная совокупность точек окружности, которую мы называем дугой; о хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что она стягивает дугу; выпрямленному углу соответствует полуокружность. Если из окружности выделена какая-нибудь дуга, то остальная часть ее называется *дополнительной* дугой. Если обратимся к кругу, то угол вообще выделяет из него *сектор*, а выпрямленный угол делит его на два полукруга. Точно так же плоскость, проходящая через центр шара, делит его на два полушара.

Теорема 227. *Свойства взаимной принадлежности центральных углов переносятся на дуги окружности.*

Утверждение непосредственно вытекает из только что установленного одно-однозначного соответствия между лучами угла и точками дуги (здесь имеются в виду свойства угла, указанные в теореме 40).

Теорема 228. 1) *Если точки C и D обе принадлежат $\smile AB$, или обе—дополнительной $\smile AB$, то хорды (AB) и (CD) не пересекаются*;

2) *если C принадлежит $\smile AB$, а D — дополнительной $\smile AB$, то хорды (AB) и (CD) пересекаются*

3) *и обратно*.

Основанием для доказательства служит постулат Паша, примененный к $\triangle OCD$ и прямой AB.

Теорема 229. *Если A и B не являются диаметрально-противоположными точками, то точки A' и B', им диаметрально-противоположные, принадлежат дополнительной $\smile AB$.*

Основанием для доказательства служит тот факт, что полупрямая OA' не лежит в $\angle AOB$.

Определение 72. Для одной и той же окружности или для двух окружностей с равными радиусами понятия *„равно", „больше", „меньше", „сумма" переносятся с центральных углов на соответствующие им дуги.*

Теорема 230. 1) *Равные хорды стягивают равные дуги*;

2) *бóльшая хорда стягивает бóльшую дугу*;

3) *и обратно.*

Доказательство предоставляется читателю.

§ 22. Аксиома непрерывности и ее ближайшие следствия

Мы все имеем представление о прямой и об окружности как о линиях непрерывных и на основании этой непрерывности усматриваем некоторые их свойства. Совершенно ясно, что в системе аксиом геометрии должна быть такая аксиома, которая выражает геометрическую сущность этого понятия, хотя бы для простейшего случая прямолинейного отрезка. Ниже и приводится эта аксиома непрерывности.

Аксиома XXIV. *Пусть точки данного отрезка (AB) разделены на два класса, так что*:

1) *каждая точка отрезка попадает в один из этих классов, причем A принадлежит I классу, а B — II классу*;

2) *если M — любая точка I класса, а N — любая точка II класса, то M принадлежит отрезку (AN) и отлична от N. Тогда на данном отрезке существует такая точка C, что всякая точка его, принадлежащая отрезку (AC), кроме, быть может, самой точки C, попадает в I класс, а всякая точка, принадлежащая отрезку (CB), кроме, быть может, самой точки C, попадает во II класс.*

Замечание. Об этой точке C говорят, что она „производит данное деление" точек отрезка (AB) на два класса; сама точка C может принадлежать тому или другому классу.

Теорема 231. *Каждая точка отрезка (AB) может принадлежать лишь одному из двух указанных классов.*

Действительно, если бы точка M принадлежала обоим классам, то прежде всего она была бы отлична от A, которая входит в состав лишь I класса, а затем по условию аксиомы

XXIV мы имели бы, что точка M была бы внутренней точкой отрезка (AM), а это — невозможно.

Теорема 232. *Если отрезок* (AB) *делится на два класса точкой* C, *то все точки I класса принадлежат отрезку* (AC), *а все точки II класса — отрезку* (CB).

Пусть точка M принадлежит I классу; кроме того, она должна принадлежать либо отрезку (AC), либо (CB). Но если бы здесь имел место второй случай, то точка M вошла бы в состав и II класса (аксиома XXIV), что невозможно (теорема 231).

Теорема 233. *Точка отрезка, существование которой устанавливается в аксиоме XXIV,— единственна.*

Пусть, в противность теореме, две различные точки C и C_1 отрезка (AB) производят одно и то же деление его на два класса, и пусть для определенности точка C_1 принадлежит отрезку (AC); тогда точка C принадлежит отрезку (C_1B) (теорема 18), и отрезок (C_1C) входит в состав как отрезка (AC), так и отрезка (C_1B) (теорема 24). Возьмем точку M внутри отрезка (CC_1); эта точка будет принадлежать как отрезку (AC), так и отрезку (C_1B). Следовательно, точка M сразу входит в оба наши класса (аксиома XXIV), что невозможно (теорема 231).

Предложение, подобное аксиоме XXIV и имеющее место для лучей угла, можно уже доказать.

Теорема 234. *Аксиома XXIV, теоремы 231—233 остаются в силе при следующей замене терминов*:

точка — луч,
отрезок — угол.

Действительно, введя секущий отрезок данного угла и вспомнив теоремы 39, 40, можно получить из деления лучей на два класса соответствующее деление точек отрезка, удовлетворяющее всем требованиям аксиомы XXIV, так что существует точка, производящая деление. Очевидно, что совмещенный с ней луч будет искомым, и т. д.

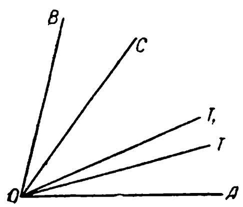
Теорема 235. *Аксиома XXIV, теоремы 231—233* (с соответствующими изменениями) *имеют место для полуплоскостей двугранного угла и для точек дуги окружности.*

В самом деле, первое утверждение легко обосновать с помощью теоремы 51, а второе — с помощью определения 71.

Теперь мы применим аксиому непрерывности к доказательству некоторых весьма важных предложений (другие ее приложения будут даны ниже). Начнем с деления отрезка и угла на n равных частей. Выше (теоремы 152 и 154) было доказано, что каждую из этих фигур можно разделить на две равные части. Применяя повторно это построение, можно разделить отрезок или угол на 2^k равных частей, где k — целое положительное число. Теперь надо доказать это предложение для любого целого положительного числа n. Мы докажем его лишь для углов, ибо для отрезков оно доказывается совершенно подобным же образом, тем более что ниже (с помощью теории параллелей) будет дано более простое построение для деления отрезка.

Теорема 236. *Угол (или отрезок) можно разделить на n равных частей.*

Пусть нам даны $\angle AOB$ и целое положительное число n. Разделим все лучи данного угла на два класса следующим образом: в I класс отнесем луч OA и все такие лучи OM, для которых



Черт. 71

$$n\cdot\angle AOM<\angle AOB;$$

а во II класс—такие лучи ON, для которых

$$n\cdot\angle AON\geqslant\angle AOB.$$

Ясно, что каждый луч данного угла попадает в один из классов, причем OA входит в I класс, а OB— во II класс. Затем, взяв из I класса какой-нибудь луч OM, а из II класса луч ON, из приведенных выше неравенств получим:

$$n\cdot\angle AOM<n.\angle AON,$$

откуда

$$\angle AOM<\angle AON \quad \text{(теоремы 119 и 147)},$$

а так как оба луча являются внутренними для $\angle AOB$, то из последнего неравенства и теоремы 48 нетрудно заключить, что полупрямая OM будет принадлежать $\angle AON$ и отлична от ON. Следовательно, условия аксиомы XXIV, которая имеет место и для углов (теорема 234), здесь выполняются, а потому внутри $\angle AOB$ существует луч OT, производящий рассматриваемое деление.

Остается доказать, что этот луч и будет искомым, т. е. имеет место равенство:

$$n\cdot\angle AOT=\angle AOB.$$

Положим, что это неверно, и пусть:

$$n\cdot\angle AOT=\angle AOC<\angle AOB \text{ (черт. 71)}.$$

Отметим во II классе такую полупрямую OT_1 чтобы

$$n\cdot\angle TOT_1<\angle COB.$$

В возможности этого убеждаемся следующим образом. Подберем целое положительное число k так, чтобы $2^k > n$, а потом разделим $\angle BOC$ на 2^k равных частей (теорема 152) и проведем внутри $\angle TOB$ такой луч OT_1, чтобы $\angle TOT_1$ был меньше этой части, что всегда возможно. Тогда и получим:

$$n \cdot \angle TOT_1 < \angle BOC.$$

Сопоставим с этим неравенством следующее равенство:

$$n \cdot \angle AOT = \angle AOC;$$

отсюда по теореме 110 и 147 выводим:

$$n \cdot \angle AOT_1 < \angle AOB,$$

так что луч OT_1 должен принадлежать I классу, что противоречит заданию.

Подобным же образом доказывается невозможность допущения $n \cdot \angle AOT > \angle AOB$.

Остается, следовательно, принять, что:

$$n \cdot \angle AOT = \angle AOB.$$

Теорема 237. *Двугранный угол и дугу можно разделить на n равных частей.*

На основании определения 62 достаточно разделить на n равных частей нормальное сечение данного двугранного угла; а для дуги дело сводится к делению центрального угла (определение 72).

Теорема 238. (Начало Архимеда.) *Если даны два отрезка (или угла), то всегда найдется такое кратное одного, которое будет больше другого.*

Докажем эту теорему для отрезков; доказательство остается, по существу, тем же самым и для углов.

Пусть даны два отрезка: a и b, причем $a > b$.

Достаточно доказать, что существует такое целое положительное число n, что

$$n \cdot b > a.$$

Попробуем допустить, что это неверно, т. е., что при всяком n имеем $nb < a$ [если бы при некотором n оказалось, что $nb = a$, то теорема была бы доказана для $(n+1) \cdot a$].

Возьмем произвольный луч и на нем отложим отрезки:

$$(OA)=a \text{ и } (OB)=b \qquad \text{(черт. 72).}$$

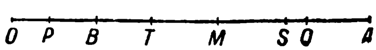
Теперь разделим все точки отрезка (OA) на два класса следующим образом: в I класс отнесем точку O и такие точки P, для которых при всяком n имеем:

$$n\cdot(OP)<(OA)$$

(примером такой точки является точка B, согласно сделанному допущению); а во II класс отнесем такие точки Q, для которых при некотором n имеем:

$$n\cdot(OQ)\geqslant(OA)$$

[примером такой точки может служить середина отрезка, так как имеем: $3\cdot\frac{(OA)}{2}>(OA)$]. Очевидно, что первое условие аксиомы XXIV здесь выполняется. Далее, если точка P, отличная от O, принадлежит I классу, а Q — II классу, то при некотором значении n будет иметь место неравенство:



Черт. 72

$$n\cdot(OP)<n\cdot(OQ),$$

откуда

$$(OP)<(OQ) \qquad \text{(теорема 119),}$$

а потому точка P лежит внутри (OQ).

На основании аксиомы XXIV на отрезке (OA) существует точка M, производящая указанное деление.

Возьмем во II классе [т. е. внутри отрезка (MA)] такую точку S, чтобы

$$(MS)<(OM).$$

Тогда

$$(OS)=(OM)+(MS)<2(OM),$$

$$\frac{(OS)}{2}<(OM);$$

так что середина T отрезка (OS) лежит внутри (OM), а потому попадает в I класс. С другой стороны, для точки S II класса существует такое число n, при котором:

$$n\cdot(OS)\geqslant(OA),$$

или

$$2n\cdot(OT)\geqslant(OA),$$

т. е. точка T принадлежит и II классу, что невозможно (теорема 231).

Таким образом начало Архимеда доказано от противного.

Теорема 239. *Если дан отрезок (или угол) a и другой произвольно малый отрезок (или угол) ε, то всегда найдется такое целое положительное число n, что*

$$\frac{a}{n} < \varepsilon.$$

Действительно, на основании теоремы 238 найдем n, при котором

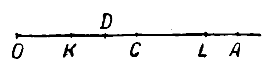
$$n \cdot \varepsilon > a;$$

а теорема 236 показывает, что существует n-ая часть отрезка a; для этой части $\frac{a}{n}$ по определению имеем:

$$a = n \cdot \frac{a}{n},$$

следовательно,

$$n\varepsilon > n \frac{a}{n},$$



Черт. 73

откуда

$$\varepsilon > \frac{a}{n}. \qquad \text{(теорема 119).}$$

Теорема 240. *Теоремы* 238 и 239 *имеют место для двугранных углов и дуг.*

Предложение вытекает из теорем 194, 195 и определения 72.

Теорема 241. (Начало Кантора.) *Даны две группы отрезков, причем:*

1) *любой отрезок первой группы меньше любого отрезка второй;*

2) *какой бы малый отрезок ε нам ни задали, всегда найдется по такому отрезку во второй и первой группе, что их разность будет меньше ε; тогда существует один и только один отрезок, который не меньше всех отрезков первой группы и не больше всех отрезков второй.*

Для доказательства возьмем какой-нибудь луч с вершиной в точке O (черт. 73) и будем на нем откладывать данные отрезки. Пусть (OA) будет некоторый отрезок второй группы; ограничимся рассмотрением только таких отрезков второй группы, которые меньше (OA). Такое ограничение действительно можно ввести, так как отрезок, найденный в этом случае, очевидно, будет не больше всех остальных отрезков второй группы; если же в последней совсем нет отрезков меньших (OA), то отрезок (OA) и будет искомым.

Внутри отрезка (OA) мы получаем две группы точек, а именно: концы отрезков той и другой данной группы отрезков. Легко видеть, что всякая точка первой группы предшествует всякой точке второй, если допустить, что O предшествует A (теорема 20). Возьмем теперь все точки отрезка (OA) и разделим их на два класса: в I класс отнесем все точки первой группы, а также всякую такую точку отрезка (OA), которая предшествует хотя бы одной из точек первой группы; а во II класс поместим все остальные точки отрезка (OA) (сюда, значит, попадают точки, следующие за всеми точками первой группы). Легко видеть, что условия аксиомы XXIV здесь выполняются, а потому существует точка C, производящая рассматриваемое деление. Тогда отрезок (OC) и будет искомым.

Действительно, возьмем отрезок (OK) в первой группе; в таком случае точка K принадлежит I классу и входит в состав отрезка (OC) (теорема 232), так что

$$(OK) \leqslant (OC).$$

Если же (OL) есть какой-нибудь отрезок второй группы, то L принадлежит II классу, а потому входит в состав отрезка (CA), так что

$$(OC) \leqslant (OL).$$

Допустим, наконец, что, кроме (OC), есть еще отрезок (OD), удовлетворяющий всем требованиям теоремы, и пусть для определенности

$$(OD) < (OC).$$

Тогда, если a есть какой-нибудь отрезок первой группы, то

$$a \leqslant (OD).$$

Если же b — отрезок второй группы, то

$$b \geqslant (OC).$$

Отсюда выводим (по теореме 118):

$$b - a \geqslant (OC) - (OD),$$
$$b - a \geqslant (CD).$$

Таким образом, разность между отрезками второй и первой группы не могла бы быть меньше (CD), что противоречит второму условию теоремы.

Итак, отрезок (OC) — единствен.

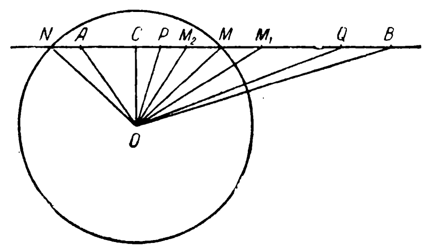
Теорема 242. *Начало Кантора имеет место для углов, двугранных углов и дуг.*

Действительно, теорема 241 была обоснована на таких предложениях, которые справедливы и для этих образов.

§ 23. Относительное положение прямой и окружности, плоскости и шаровой поверхности

Заметим с самого начала, что сопоставлять с окружностью будем только те прямые, которые лежат в ее плоскости.

Теорема 243. *Если одна точка прямой лежит внутри окружности (или шаровой поверхности), а другая — вне ее, то эта прямая пересекает данную окружность (или шаровую поверхность) в двух и только в двух точках.*



Черт. 74

Возьмем сначала окружность и допустим, что у прямой AB точка A будет внутренней, а точка B — внешней для $O(r)$ (черт. 74), т. е.:

$$(OA) < r, \text{ а } (OB) > r.$$

Если данная прямая проходит через центр O, то наше утверждение вытекает из теоремы 217. В противном случае опустим из точки O перпендикуляр на данную прямую, и пусть его основанием будет точка C. Если C совпадает с A, то эта точка, очевидно, будет внутренней для $O(r)$, иначе по теореме 168 имеем:

$$(OC) < (OA) < r,$$

так что точка C во всяком случае будет внутренней для $O(r)$. В дальнейшем мы остановимся на отрезке (CB) и разделим все его точки на два класса следующим образом: в I класс попадают такие точки P, для которых

$$(OP) < r,$$

а во II класс — такие точки Q, для которых:

$$(OQ) \geqslant r.$$

Легко видеть, что первое условие аксиомы непрерывности будет здесь выполнено. Из предыдущих неравенств имеем:

$$(OP) < (OQ),$$

откуда

$$(CP) < (CQ) \qquad \text{(теорема 169).}$$

А так как (CP) и (CQ) являются частями одного и того же отрезка (CB), то P должно лежать между C и Q (теорема 19 и определение 31). Таким образом, P всегда принадлежит отрезку (CQ) и отлично от Q. Мы убеждаемся, что условия аксиомы XXIV выполнены, а потому на нашем отрезке существует точка M, производящая указанное деление. Остается доказать, что это и будет одна из точек пересечения прямой с окружностью, т. е. надо доказать, что

$$(OM)=r.$$

Попробуем, в противность теореме, допустить неравенство:

$$(OM)<r.$$

Тогда $r-(OM)$ есть определенный отрезок.

Отметим во II классе, т. е. внутри отрезка (MB), такую точку M_1, чтобы

$$(MM_1)<r-(OM),\text{ что всегда возможно.}$$

Из $\triangle\, OMM_1$ находим:

$$(OM_1)<(OM)+(MM_1)<(OM)+r-(OM),\text{ т. е.}$$

$$(OM_1)<r,$$

так что точка M_1 принадлежит I классу, и получается противоречие.

Допустим теперь, что

$$(OM)>r;$$

тогда разность $(OM)-r$ есть определенный отрезок.

Отметим в I классе, т. е. внутри (CM), такую точку M_2, чтобы

$$(MM_2)<(OM)-r.$$

Из $\triangle\, OMM_2$ находим:

$$(OM_2)>(OM)-(MM_2)>(OM)-[(OM)-r],\quad\text{т. е.}$$

$$(OM_2)>r,$$

так что точка M_2 принадлежит II классу, что невозможно. Остается принять, что $(OM)=r$ и M есть точка пересечения. Другую точку пересечения получим, отложив $(CN)=(CM)$ на другом луче, исходящем из точки C.

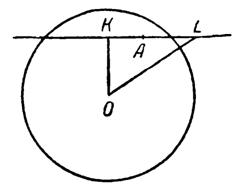
Действительно, из равенства $\triangle\triangle$ OCM и OCN имеем:

$$(ON)=(OM)=r;$$

более же двух точек пересечения быть не может (теорема 216).

Если, наконец, мы имеем дело с шаровой поверхностью, то проведем плоскость через данную прямую и центр поверхности. Эта плоскость пересекает шаровую поверхность по окружности большого круга (теорема 218), и дальнейшее сводится к предыдущему случаю.

Теорема 244. *Если прямая проходит через внутреннюю точку окружности (или шаровой поверхности) и лежит в плоскости окружности, то она пересекает окружность (или шаровую поверхность) в двух и только в двух точках.*



Черт. 75

Пусть данная прямая содержит внутреннюю точку A; ограничиваясь случаем, когда прямая не проходит через центр, опускаем из него перпендикуляр на прямую, и пусть основанием последнего служит точка K (черт. 75); наконец, отложим $(KL)=r$. Тогда из прямоугольного $\triangle OKL$ имеем:

$$(OL)>(KL), \text{ или } (OL)>r;$$

т. е. точка L будет внешней, и дело сводится к теореме 243.

Определение 73. *Прямая, имеющая с окружностью (или с шаровой поверхностью) только одну общую точку и лежащая в плоскости окружности, называется касательной.* Существование таких прямых явствует из следующей теоремы.

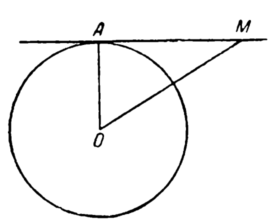
Теорема 245. *Для того чтобы прямая, имеющая общую точку с окружностью (или с шаровой поверхностью) и лежащая в плоскости окружности, была к ней касательной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна к радиусу, проведенному в указанную точку.*

Начнем с окружности (черт. 76), и пусть:

$$AM \perp OA,$$

где A — точка окружности. Тогда для любой другой точки M данной прямой имеем:

$$(OM)>(OA) \qquad \text{(теорема 168, п. I)},$$



Черт. 76

так что точка M будет внешней для окружности и данная прямая — касательной. Обратно, пусть нам дано что прямая AM касается $O(r)$ в точке A; ни одна из точек данной прямой не может лежать внутри окружности, так как иначе она не была бы касательной (теорема 244); следовательно, все остальные ее точки будут внешними для $O(r)$. Поэтому для любой ее точки M, отличной от A, имеем:

$$(OM) > (OA);$$

другими словами, отрезок (OA) является кратчайшим расстоянием от точки O до нашей прямой, а потому:

$$OA \perp AM \qquad \text{(теорема 169)}.$$

Если же дело идет о шаровой поверхности, то берем сечение ее плоскостью, проходящей через центр и данную прямую, и вопрос сводится к предыдущему.

Теорема 246. *Все точки окружности* (за исключением точки касания) *лежат по ту же сторону от касательной, что и центр окружности.*

Допустим, что какая-нибудь точка M окружности лежит с ее центром по разные стороны от касательной. Тогда отрезок (OM) пересекает касательную в некоторой точке N, так что

$$(OM) > (ON).$$

Но, как мы только что видели, для любой точки N на касательной, отличной от точки касания, имеем:

$$(ON) > r, \text{ так что } (OM) > r,$$

и получается противоречие.

Теорема 247. 1) *Если расстояние от центра окружности (или шаровой поверхности) до данной прямой меньше радиуса, то эта прямая пересекает данную фигуру в двух и только в двух точках;*

2) *если это расстояние равно радиусу, то прямая есть касательная;*

3) *если это расстояние больше радиуса, то все точки прямой лежат вне данной фигуры*

4) *и обратно.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 248. *Если плоскость проходит через внутреннюю точку шаровой поверхности, то она пересекает ее по точкам некоторой окружности и только по этим точкам.*

Пусть плоскость α содержит точку A, которая лежит внутри шаровой поверхности с центром в точке S. Если эта плоскость проходит и через точку S, то остается сослаться на теорему 218; в противном случае проведем какую-нибудь плоскость через прямую SA; эта плоскость пересечет данную шаровую поверхность по окружности большого круга (для которой точка A будет внутренней), а плоскость α — по некоторой прямой a, проходящей через точку A. На основании теоремы 244 прямая a пересечет в двух точках указанную окружность большого круга, а следовательно и данную шаровую поверхность.

Таким образом, плоскость α содержит точки шаровой поверхности, и дальнейшее сводится к применению теоремы 220.

Определение 74. *Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью лишь одну общую точку, называется касательной плоскостью.*

Теорема 249. Теоремы 245, 246 и 247 остаются в силе при следующей замене терминов:

прямая — плоскость,
окружность — шаровая поверхность,
пересечение в двух точках — пересечение по окружности.

Доказательство предоставляется читателю.

Замечание. Легко видеть, что касательная плоскость есть геометрическое место касательных прямых (определение 73, теоремы 245, 182).

В интересах дальнейшего докажем еще две теоремы.

Теорема 250. *При данной точке окружности, с данной стороны от проходящего через нее диаметра можно построить хорду, меньшую данного отрезка* ε.

Пусть на окружности дана точка A (черт. 77). Проведем через нее касательную и остановимся на том ее луче AN, который лежит с указанной стороны от диаметра AB. На этом луче отложим отрезок:

$$(AN) = \frac{\varepsilon}{2}$$

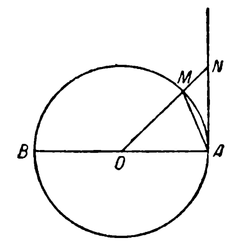
и соединим точку N с центром. На основании теорем 245 и 168 имеем:

$$(ON) > (OA) = r,$$

а потому внутри отрезка (ON) имеется такая точка M, что

$$(OM) = r,$$

т. е. точка M будет точкой окружности. Наконец соединим M с A. На основании теорем 32 и 33 отрезок (AM) будет расположен требуемым образом. Далее, в равнобедренном $\triangle OMA$ $\angle OMA$ будет острым (теорема 156), а потому $\angle AMN$ — тупой (теорема 145).



Черт. 77

Отсюда вытекает, что

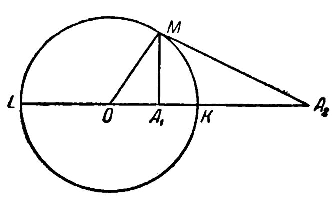
$$(MN) < (AN) = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(теоремы 157, 158).}$$

Наконец, из $\triangle AMN$ выводим:

$$(AM) < (AN) + (MN) < \varepsilon .$$

Теорема 251. *Если точка A не лежит на окружности $O(r)$* (или шаровой поверхности) *и если прямая OA пересекает окружность* (или шаровую поверхность) *в точках K и L, причем точки A и K лежат по одну сторону от O, то отрезки* (AK) и (AL) *дают соответственно наименьшее и наибольшее расстояние от точки A до всевозможных точек окружности* (или шаровой поверхности).

Начнем с окружности (черт. 78); в обоих случаях — будет ли точка A внутренней (A_1) или внешней (A_2) для $O(r)$ — точки A и L всегда лежат по разные стороны от O, ибо они принадлежат различным лучам из точки O, так что



Черт. 78

$$(AL) = (OL) + (OA).$$

Далее, в случае внутренней точки A_1, имеем:

$$(OA_1) < (OK) \quad \text{и} \quad (A_1K) = (OK) - (OA_1);$$

а в случае внешней точки A_2

$$(OA_2) > (OK) \quad \text{и} \quad (A_2K) = (OA_2) - (OK).$$

Возьмем теперь на окружности какую-нибудь точку M, отличную от точек K и L, и рассмотрим $\triangle OMA$. В обоих случаях имеем:

$$(AM) < (OM) + (OA) = (OL) + (OA) = (AL),$$

т. е. отрезок (AL) является наибольшим.

Далее, в случае внутренней точки

$$(A_1M) > (OM) - (OA_1) = (OK) - (OA_1) = (AK_1);$$

а в случае внешней

$$(A_2M) > (OA_2) - (OM) = (OA_2) - (OK) = (A_2K).$$

Таким образом, всегда будет:

$$(AM) > (AK),$$

т. е. отрезок (AK) является наименьшим.

Если же нам дана шаровая поверхность, то, пересекая ее плоскостью OAM, сведем дело к предыдущему случаю.

§ 24. Относительное положение двух окружностей и двух шаровых поверхностей

Замечание. В настоящем параграфе речь будет идти об окружностях, лежащих в одной и той же плоскости.

Определение 75. *Окружности и шаровые поверхности с общим центром называются концентрическими.*

Теорема 252. *Две различные концентрические окружности (шаровые поверхности) не имеют общих точек.*

В самом деле, в противном случае их радиусы были бы равны и они совпали бы.

Определение 76. Пусть даны две неконцентрические окружности (шаровые поверхности) $O(r)$ и $O_1(r_1)$, причем

$$r \geqslant r_1.$$

Прямая OO_1 называется *линией* центров, отрезок (OO_1) — *расстоянием между центрами* и обозначается буквой q. Для дальнейшего условимся в том, что прямая OO_1 пересекает $O_1(r_1)$ в точках K_1 и L_1, причем K_1 лежит по ту же сторону от O_1, что и точка O (а точка L_1 — с противоположной стороны).

Теорема 253. При указанных условиях имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&(OL_1) = q + r_1 && \\
&(OK_1) = q - r_1 && \text{при } q > r_1, \\
&(OK_1) = r_1 - q && \text{„ } q < r_1, \\
&(OK_1) = 0 && \text{„ } q = r_1
\end{aligned}$$

(последнее равенство выражает, что точки O и K_1 совпадают).

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 254. *Если две различные окружности имеют общую точку, не лежащую на линии центров, то у них имеется еще одна и только одна общая точка, симметричная с первой относительно линии центров.*

Пусть у окружностей $O(r)$ и $O_1(r_1)$ имеется общая точка M, не лежащая на прямой OO_1 (черт. 79). Соединим эту точку с центрами и опустим из нее перпендикуляр MP на линию центров; продолжим этот перпендикуляр на отрезок $(PN) = (PM)$.

Из равенства $\triangle\triangle OPM$ и OPN, O_1PM и O_1PN (теорема 165, п. 1) выводим:

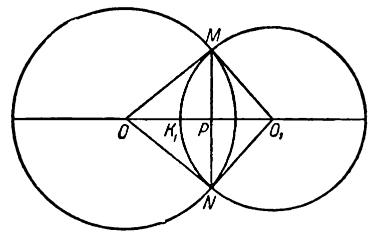
$$(ON) = (OM) = r \quad \text{и} \quad (O_1N) = (O_1M) = r_1,$$

т. е. точка N есть вторая общая точка, и нам остается вспомнить теорему 224.

Теорема 255. *Если две различные шаровые поверхности имеют общую точку, не лежащую на линии центров, то они пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна к линии центров, и других общих точек не имеют.*

Пусть дана общая точка M, не лежащая на прямой OO_1.

Проведем плоскость OO_1M, которая в сечении с шаровыми поверхностями даст окружности, изображенные на черт. 79. Проведя перпендикуляр MP, рассмотрим окружность $P(PM)$ в плоскости, перпендикулярной к прямой OO_1. На основании теоремы 168, п. 2 расстояния любой точки этой окружности от O и O_1 будут соответственно равны r и r_1, т. е. все ее точки будут общими для обеих шаровых поверхностей. О невозможности других общих точек см. замечание после теоремы 224.



Черт. 79

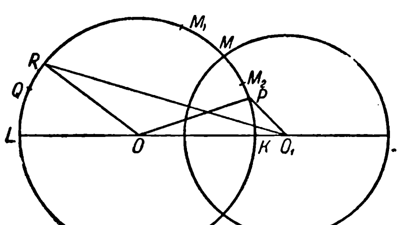
Теорема 256. *Если две различные окружности (шаровые поверхности) имеют общую точку, лежащую на линии центров, то других общих точек у них нет,* и обратно: *если два указанных образа имеют лишь одну общую точку, то последняя лежит на линии центров.*

В самом деле, если бы у них оказалась еще какая-нибудь общая точка, то теорема 254 (или теорема 255) привела бы нас к противоречию с теоремой 224 (или с замечанием к ней). Обратная теорема доказывается от противного при помощи теоремы 254 (или теоремы 255).

Определение 77. *Если две окружности (шаровые поверхности) имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются друг друга в этой точке.*

Теорема 257. *В точке касания две окружности (шаровые поверхности) имеют общую касательную (касательную плоскость).*

(Доказывается на основании теоремы 245 (249), определения 77 и теоремы 256.)



Черт. 80

Теорема 258. *Если одна точка окружности $O(r)$ лежит внутри окружности O_1 (r_1), а другая — вне, то данные окружности пересекаются в точке, не лежащей на линии центров.*

Пусть упомянутыми в теореме точками будут точки P и Q (черт. 80), и пусть прямая OO_1 пересекает O (r) в точках K и L, причем K лежит по ту же сторону от O, что и точка O_1.

Так как на основании теоремы 251

$$(O_1K) < (O_1P) < r_1 \text{ и } (O_1L) > (O_1Q) > r_1,$$

то K будет внутренней, а L внешней точкой для $O_1(r_1)$. Однако, нам может быть дано с самого начала, что P совпадает с K, а Q — с L. В таком случае убедимся, что K не может быть единственной точкой окружности $O(r)$, лежащей внутри $O_1(r_1)$.

Действительно, взяв на $O(r)$ такую точку P, чтобы хорда (KP) была меньше $r_1 - (O_1K)$ (теорема 250), из $\triangle O_1KP$ получим:

$$(O_1P) < (O_1K) + (KP) < r_1,$$

так что P есть внутренняя точка для $O_1(r_1)$, отличная от K. Подобным же образом найдем внешнюю точку Q, отличную от L:

$$\text{при } (LQ) < (O_1L) - r_1, \text{ получим } (O_1Q) > (O_1L) - (LQ) > r_1.$$

Следовательно, если с самого начала даны точки K и L, то на $O(r)$ существуют точки, внутренние и внешние для $O_1(r_1)$ и отличные от данных.•

Остановимся в дальнейшем на точках K и Q, причем будем считать точку Q отличной от L.

Разделим все точки $\smile KQ$ на два класса следующим образом:

в I класс отнесем все такие точки P, для которых

$$(O_1P) < r_1,$$

а во II класс — такие точки R, для которых

$$(O_1R) \geqslant r_1.$$

Легко видеть, что первое условие аксиомы непрерывности (точнее, теоремы 235) здесь выполняется. Далее, применяя к $\triangle\triangle OO_1P$ и OO_1R теорему 162, убеждаемся в неравенстве:

$$\angle O_1OP < \angle O_1OR,$$

а так как обе полупрямые OP и OR принадлежат $\angle O_1OQ$ (определение 71), то правило сравнения углов говорит, что

$$\text{полупрямая } OP \text{ принадлежит } \angle KOR,$$

откуда

$$\text{точка } P \text{ принадлежит } \smile KR,$$

и, конечно, отлична от R.

Таким образом, все условия аксиомы XXIV, распространенной на дуги в теореме 235, здесь выполняются. А потому внутри $\smile KQ$ существует точка M, которая производит рассматриваемое деление.

Остается доказать, что M и есть искомая точка пересечения, т. е. что $(O_1M) = r_1$.

В противность этому допустим, что $(O_1M) < r_1$, так что $r_1 - (O_1M)$ есть определенный отрезок.

Укажем во II классе, т. е. на $\smile MQ$, такую точку M_1, чтобы

$$(MM_1) < r_1 - (O_1M) \qquad \text{(теорема 250)}$$

и чтобы M_1 не лежала на прямой O_1M (в противном случае возьмем вместо нее какую-нибудь точку внутри $\smile MM_1$).

Из $\triangle O_1MM_1$ находим:

$$(O_1M_1) < (O_1M) + (MM_1) < r_1,$$

и точка M_1 принадлежит I классу, что невозможно (теоремы 231 и 235).

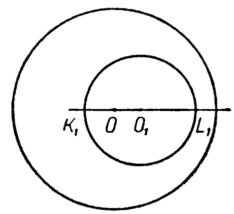
Если допустить, что $(O_1M) > r_1$, то в I классе найдется такая точка M_2, что

$$(MM_2) < (O_1M) - r_1$$

и M_2 не лежит на O_1M. Из $\triangle O_1MM_2$ имеем:

$$(O_1M_2) > (O_1M) - (MM_2) > r_1,$$

и опять получается противоречие.



Черт. 81

Итак, остается только одна возможность, а именно:

$$(O_1M) = r_1.$$

Необходимо добавить, что точка M не может лежать на линии центров, ибо последняя пересекает $O(r)$ лишь в точках K и L, из которых первая лежит внутри, а вторая — вне окружности $O_1(r_1)$.

Теорема 259. Если $q < r - r_1$, то окружность (шаровая поверхность) $O_1(r_1)$ *лежит* целиком *внутри* $O(r)$ (случай $r = r_1$ здесь, конечно, исключается).

Действительно, на основании теоремы 251 отрезок (OL_1) дает наибольшее расстояние от точки O до точек окружности $O_1(r_1)$ (черт. 81). Но

$$(OL_1) = q + r_1 \qquad \text{(теорема 253)},$$

так что в рассматриваемом случае:

$$(OL_1) < (r - r_1) + r_1 = r,$$

т. е. даже точка L_1 будет внутренней для $O(r)$. Следовательно, все точки второй окружности (шаровой поверхности) лежат внутри первой.

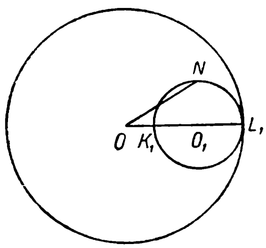
Теорема 260. Если $q = r - r_1$, то окружности (шаровые поверхности) *касаются* в точке L_1, а остальные точки $O_1(r_1)$ лежат внутри $O(r)$ (и здесь исключается случай $r = r_1$).

Действительно, теперь имеем (черт. 82):

$$(OL_1) = q + r_1 = r,$$

т. е. точка L_1 есть точка пересечения, лежащая на линии центров, и нам остается сослаться на теорему 256 и определение 77.

Для всякой другой точки N, лежащей на $O_1(r_1)$, находим:



Черт. 82

$$(ON) < (OL_1) = r \qquad \text{(теорема 251)},$$

и точка N лежит внутри $O(r)$.

Определение 78. Такое положение двух окружностей (шаровых поверхностей) называется *внутренним касанием*.

Теорема 261. Если $r - r_1 < q < r + r_1$, то данные окружности *пересекаются* в двух и только в двух точках.

В самом деле, из неравенства $r - r_1 < q$ выводим:

$$q + r_1 > r,$$

так что

$(OL_1 > r$ (теорема 253) и точка L_1 — внешняя для $O(r)$ (черт. 79).

В дальнейшем различаем 3 случая:

1) $q < r_1$; тогда $(OK_1) = r_1 - q$ (теорема 253),

так что

$$(OK_1) < r_1 \text{ и подавно } (OK_1) < r,$$

т. е. точка K_1 будет внутренней для $O(r)$;

2) $q = r_1$; в этом случае точка K_1 совпадает с O, а потому и лежит внутри $O(r)$;

3) $q > r_1$ (этот случай изображен на черт. 79).

Теперь:

$$(OK_1) = q - r_1 \qquad \text{(теорема 253)},$$

и вторая половина исходного неравенства дает:

$$q < r + r_1 \text{ или } q - r_1 < r,$$

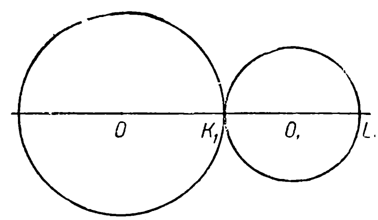
так что

$$(OK_1) < r \text{ и точка } K_1 \text{ — внутренняя для } O(r).$$

Следовательно, во всех случаях точка K_1 окружности $O_1(r_1)$ лежит внутри $O(r)$, а точка L_1 — вне ее. Дальнейшее сводится к теоремам 258 и 254.

Теорема 262. Если $r - r_1 < q < r + r_1$, то данные шаровые поверхности *пересекаются* по точкам окружности, плоскость которой перпендикулярна к линии центров, и других общих точек не имеют.

Действительно, пересекая данные шаровые поверхности какой-нибудь плоскостью, проходящей через линию центров, получаем в этой плоскости предыдущий случай; найдя общую точку поверхностей, не лежащую на линии центров, ссылаемся на теорему 255.



Черт. 83

Теорема 263. Если $q = r + r_1$, то окружности (шаровые поверхности) $O(r)$ и $O_1(r_1)$ *касаются* в точке K_1, причем остальные точки одной будут внешними для другой.

В самом деле, из данных вытекает, что

$$q > r_1, \text{ а потому } (OK_1) = q - r_1 = r \quad \text{(теорема 253).}$$

Следовательно, точка K_1 есть точка пересечения, лежащая на линии центров (черт. 83), и теорема 256 дает первую половину предложения. Далее, на основании теоремы 251 отрезок (OK_1) представляет наименьшее расстояние от O до точек $O_1(r_1)$; поэтому все точки последней (за исключением точки K_1) лежат вне $O(r)$. Наконец, так как условия теоремы симметричны относительно r и r_1, все точки $O(r)$ (за исключением точки K_1) лежат вне $O_1(r_1)$.

Определение 79. Такое положение двух окружностей (шаровых поверхностей) называется *внешним касанием*.

Теорема 264. Если $q > r + r_1$, то одна окружность (шаровая поверхность) лежит *вне* другой.

Действительно, в настоящем случае

$$(OK_1) = q - r_1 > r,$$

так что точка K_1 будет внешней для $O(r)$ (черт. 84). Теорема 251 показывает, что все остальные точки $O_1(r_1)$ и подавно будут внешними для $O(r)$. Затем остается только сослаться на симметрию условия теоремы относительно r и r_1.

Полученные выводы об относительном положении двух окружностей или двух шаровых поверхностей можно собрать в особой таблице.

Теорема 265. Даны две окружности или две шаровые поверхности $O(r)$ и $O_1(r_1)$, причем $r \geqslant r_1$; расстояние между центрами обозначим через q.

Тогда:

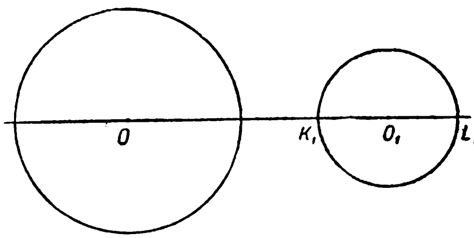
если $q < r - r_1$, то $O_1(r_1)$ лежит внутри $O(r)$;

„ $q = r - r_1$, то имеем *внутреннее касание*;

„ $r - r_1 < q < r + r_1$, „ для двух окружностей... *пересечение* в двух точках, для двух шаровых поверхностей... *пересечение* по окружности;

если $q = r + r_1, \ldots$, то имеем *внешнее касание*;

„ $q > r + r_1, \ldots$, то одна фигура лежит *вне* другой.



Черт. 84

Теорема 266. Для теорем, собранных под № 265, имеют место обратные теоремы.

(Доказывается с помощью обращения по разделению.)

Теорема 267. *Если отрезки a, b, c расположены в порядке убывающей величины, то для существования треугольника со сторонами, равными данным отрезкам, необходимо и достаточно соблюдение условия:*

$$a < b + c.$$

Действительно, если такой треугольник существует, то теорема 159 сейчас же дает требуемое неравенство. Пусть теперь нам дано:

$$a < b + c, \text{ причем } a \geqslant b \geqslant c.$$

Из последнего условия, очевидно, вытекает:

$$a > b - c,$$

так что в общем имеем неравенства:

$$b - c < a < b + c.$$

Возьмем далее отрезок $(OO_1) = a$ и построим окружности $O(b)$ и $O_1(c)$. Согласно теореме 261, эти окружности пересекаются в некоторой точке M, и $\triangle OO_1M$ будет искомым.

Теорема 268. *Существует равносторонний треугольник, у которого стороны равны данному отрезку.*

Действительно, если a данный отрезок, то очевидно:

$$a < a + a,$$

и вступает в силу теорема 267.

Теорема 269. *В равностороннем треугольнике все углы равны между собой*, и обратно.

Доказывается с помощью повторного применения теорем 132 и 133.

Рассмотрев вопросы об относительном положении прямой и окружности и двух окружностей между собой, можно подвести твердое основание под известные „построения с помощью циркуля и линейки". Названные простейшие приборы указывают на то, как эти построения осуществляются на практике; в логическом же курсе геометрии дело идет о доказательстве существования искомых образов. Обычно они строятся при помощи пересечения прямых и окружностей, и здесь преимущественно приходится ссылаться на теоремы 244, 247, 261, которые в то же время дают указание на то, как надо выбирать радиусы вспомогательных окружностей.

Так, например, желая разделить данный угол пополам, мы из его вершины O описываем произвольным радиусом окружность; последняя, как это вытекает из определения окружности, пересекает его стороны в точках A и B. Далее, из этих точек радиусом, бо̀льшим половины отрезка (AB), описываем окружности, которые в силу теоремы 261 пересекутся в двух точках (по крайней мере одна из них будет отлична от O); соединив эту точку с O, получим искомую биссектрису.

Советуем читателю пересмотреть с указанной точки зрения известные построения для других простейших задач, а именно:

1) разделить данный отрезок пополам;

2) в середине отрезка восставить перпендикуляр;

3) восставить перпендикуляр к данной прямой в данной на ней точке;

4) из данной точки вне прямой опустить перпендикуляр на прямую;

5) построить угол, равный данному.

§ 25. Измерение геометрических величин

Замечание. При изложении указанного вопроса предполагается знакомство читателя с учением об иррациональном числе.

Понятие „величины" в своем полном объеме выходит за пределы геометрии; так, в физике мы тоже имеем дело с различными величинами. Ограничиваясь здесь величинами геометрическими, надо, однако, указать, что общие свойства величин везде одни и те же, а потому наши выводы будут справедливы и за пределами геометрии.

Определение 80. *Геометрической величиной называется такая совокупность геометрических образов, которой присущи следующие три свойства* (эти геометрические образы в отдельности образуют различные значения данной величины).

1. *Сравнимость*, т. е., если даны два значения какой-нибудь величины, то между ними имеет место одно из соотношений: „равно", „больше" и „меньше", которые обладают свойствами, указанными (для отрезков) в аксиомах XVII—XIX и теоремах 101—104. Как именно узнать, какое из соотношений имеет место, для каждой величины указывается отдельно (так, для отрезков это было сделано в определении 31).

2. *Слагаемость*, т. е. если даны два значения какой-либо величины, то можно найти вполне определенное третье ее значение, которое называется их *суммой* и обладает свойствами, указанными (для отрезков) в теоремах 106—112. Как именно находится сумма,—для каждого рода величин решается отдельно (для отрезков этот вопрос был решен в определении 32). После этого все последующие определения и теоремы § 10 также могут быть перенесены на величину любого рода. В частности, сюда переносится и понятие о *разности*; но здесь будет уместно несколько расширить это понятие, а именно: разность двух равных значений величины будем считать равной нулю:

$$a - a = 0. \qquad (*)$$

Можно также эту разность называть *нулевым значением* данной величины.

Применяя к (*) общее определение разности, получаем основное свойство нуля:

$$a + 0 = a.$$

Это равенство не противоречит установленным раньше. Действительно, разности, равные нулю, могли бы встретиться только в теоремах 114 и 115. Первая при $b=a$ дает:

$$a + (a - a) = a + 0 = a,$$

а вторая при $a = c$ приводит к заключению, что все четыре значения a, b, c, d равны между собой.

Условимся также считать, что нуль меньше всякого другого значения той же величины. Легко видеть, что правила сравнения не будут нарушены этим условием.

3. *Непрерывность*, которая выражается аксиомой XXIV (для отрезков) с ее главнейшими следствиями (см. § 22).

Теперь можно утверждать, что *отрезки, углы, двугранные углы и дуги* (одной и той же окружности или окружностей с равными радиусами) *образуют четыре различных класса геометрических величин.*

Действительно, первые два свойства определения 80 вытекают: для отрезков из § 10, для углов — из § 12, для двугранных углов — из § 18, для дуг — из определения 72; что же касается непрерывности, то для всех этих образов она была установлена в § 22.

В основание последующего изложения будут положены свойства, указанные в определении 80. Для иллюстрации рассуждений можно пользоваться отрезками, но эти рассуждения будут справедливы для любой геометрической величины.

Определение 81. *Общей мерой двух значений какой-либо величины называется такое ее третье значение, которое служит аликвотной частью* (определение 35) обеих данных. Так, если c есть общая мера для a и b, то:

$$\left.\begin{matrix} a = mc \\ b = nc \end{matrix}\right\}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — целые положительные числа.}$$

Если два значения величины имеют общую меру c, то у них будет бесконечное множество общих мер, так как всякая аликвотная часть c будет общей мерой (теорема 124).

Теорема 270. *Среди общих мер двух значений какой-либо величины имеется наибольшая.*

Пусть a и b имеют общие меры. Возьмем какую-нибудь их общую меру h. Если нет общих мер, бо́льших чем h, то наше утверждение оправдано. В противном случае пусть k будет другой общей мерой, причем

$$k > h.$$

На основании определения 81 имеем:

$$a = mh \text{ и } a = nk, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — натуральные числа.}$$

Далее, получаем неравенства:

$$nk > nh \qquad \text{(теорема 119)}$$

или

$$a > nh, \text{ так что } mh > nh;$$

отсюда следует, что

$$m > n \qquad \text{(теорема 123).}$$

Таким образом n имеет конечное число значений; а так как

$$k = \frac{a}{n} \qquad \text{(определение 35),}$$

то имеется конечное число общих мер, бо́льших чем h. Перебирая их, найдем наибольшую.

При обозначении общей наибольшей меры значений a и b будем пользоваться символом (a, b).

Теорема 271. Если общая наибольшая мера $(a, b) = c$ и $a = mc$, $b = nc$, то m и n суть взаимно простые числа.

Пусть, в противность утверждению, числа m и n имеют общий наибольший делитель $p > 1$, так что

$$m = m_1 p \text{ и } n = n_1 p.$$

Тогда

$$a = m_1 p \cdot c = m_1 (pc) \text{ и } b = n_1 p \cdot c = n_1 (pc) \text{ (теорема 124)},$$

откуда видно, что pc, которое больше c (теорема 123), служит общей мерой для a и b, а это противоречит заданию.

Теорема 272. *Всякая аликвотная часть общей наибольшей меры двух значений какой-либо величины будет их общей мерой, и обратно: всякая их общая мера будет аликвотной частью их общей наибольшей меры.*

Пусть c есть общая наибольшая мера для a и b, так что

$$a = mc \text{ и } b = nc,$$

где m и n — взаимно простые числа, и пусть h есть какая-нибудь аликвотная часть c, так что

$$c = ph, \text{ где } p \text{ — целое положительное число.}$$

Тогда имеем:

$$a = m\,(ph) = (mp)\,h \text{ и } b = n\,(ph) = (np)\,h \qquad \text{(теорема 124)}$$

и h будет общей мерой для значений a и b (определение 81).

Обратно, пусть h есть какая-нибудь общая мера a и b, так что

$$a = k \cdot h, \quad b = l \cdot h,$$

где k и l — целые положительные числа.

Обозначим общий наибольший делитель этих чисел через q и пусть

$$k = k_1 q \quad \text{и} \quad l = l_1 q,$$

где k_1 и l_1 — взаимно простые. Наконец, кратное qh обозначим через h_1. Имеем:

$$a = (k_1 q)h = k_1 h_1 \text{ и } b = (l_1 q)h = l_1 h_1 \qquad \text{(теорема 124)}.$$

Сопоставляя с данными равенствами, получаем:

$$mc = k_1 h_1 \text{ и } nc = l_1 h_1.$$

Возьмем l_1—кратное обеих частей первого равенства:

$$l_1\,(mc) = l_1\,(k_1 h_1) \qquad \text{(теорема 119)},$$

$$l_1 (k_1 h_1) = (l_1 k_1) h_1 = (k_1 l_1) h_1 = k_1\,(l_1 h_1) = k_1 (nc) \qquad \text{(теорема 124)},$$

$$(l_1 m)\,c = (k_1 n)\,c,$$

откуда

$$l_1 m = k_1 n \qquad \text{(теорема 123)},$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k_1}{l_1};$$

а так как обе дроби несократимы, то

$$m = k_1 \text{ и } n = l_1.$$

Подставляя в равенство $mc = k_1 h_1$, находим:

$$k_1 c = k_1 h_1, \text{ откуда } c = h_1 = qh \qquad \text{(теорема 119)},$$

т. е. h есть аликвотная часть c.

Таким образом, нахождение всевозможных общих мер двух значений какой-либо величины сводится к нахождению их общей наибольшей меры.

Теорема 273. Если $a \geqslant b$, то существует одно и только одно такое целое положительное число m, что

$$mb \leqslant a < (m+1)\,b.$$

В силу начала Архимеда, найдется такое целое положительное число n, что

$$n \cdot b > a.$$

На основании теоремы 123 всегда $(n-1)\,b < nb$. Если окажется

$$(n-1)b \leqslant a, \text{ то } m = n-1.$$

Если же

$$(n-1)b > a,$$

то переходим к $(n-2)b$. Если

$$(n-2)b \leqslant a, \text{ то } m = n-2;$$

в противном случае переходим к $(n-3) \cdot b$, и т. д.

Таким путем мы найдем число m, ибо иначе все кратные b и само b оказались бы больше a, что противоречит заданию.

Попробуем допустить, что имеется еще другое число m_1, удовлетворяющее тем же условиям:

$$m_1 b \leqslant a < (m_1+1)\,b,$$

и пусть для определенности $m < m_1$. Тогда имеем:

$$m_1 b \leqslant a \quad \text{и} \quad a < (m+1)\,b,$$

так что

$$m_1 b < (m+1)\,b \qquad \text{(теорема 102 или 103)},$$

откуда

$$m_1 < m + 1 \qquad \text{(теорема 123)},$$

а это противоречит тому, что $m_1 > m$.

Теорема 274. *Если $a \geqslant b$, то существует одно и только одно целое положительное число m, при котором*

$$a = mb + r,$$

где r — так называемый *остаток* — есть вполне определенное значение нашей величины, меньшее b (последнее условие $r < b$ понимаем так, что слагаемое r может и совсем отсутствовать; в таком случае, согласно сказанному выше, можно писать: $r = 0$).

На основании теоремы 273 имеем:

$$mb \leqslant a < (m + 1)\, b,$$

причем такое m — единственно. Из этих неравенств получаем:

$$a = mb, \text{ и здесь } r = 0,$$

или

$$a > mb, \text{ и тогда } a = mb + r \qquad \text{(теорема 112)}.$$

Теперь вторая половина неравенства дает:

$$mb + r < mb + b \qquad \text{(теорема 122)},$$

откуда

$$r < b \qquad \text{(теорема 109)}.$$

Обратно, из равенства

$$a = mb + r$$

вытекало бы приведенное выше неравенство.

Определение 82. Нахождение числа m и остатка r, о которых говорится в теореме 274, называется *откладыванием* значения b на значении a.

Теорема 275. Если $a = mb$, то b и есть общая *наибольшая мера* (a, b).

Действительно, значение b содержится целое число раз и в a и в b, так что b есть общая мера; но так как b не может быть кратным отрезка, большего b (из 123 вытекает, что $nb > b$ при $n > 1$), то эта общая мера будет наибольшей.

Теорема 276. Если $a = mb + r$ (где $r < b$, но не равно 0), то общая наибольшая мера (a, b) равна общей наибольшей мере (b, r) при условии, что эта общая наибольшая мера вообще существует.

Пусть c есть какая-нибудь общая мера для a и b, так что:

$$a = kc \text{ и } b = lc,$$

где k и l целые положительные числа. Из основного равенства имеем:

$$r = a - mb \qquad \text{(определение 33)},$$

$$r = kc - m(lc) = kc - (ml)c = (k - ml)c \quad \text{(теоремы 124, 122)};$$

т. е. c есть аликвотная часть r, а потому — общая мера для b и r.

Обратно, пусть c есть общая мера для b и r, так что:

$$b = lc \quad \text{и} \quad r = nc.$$

Тогда

$$a = (ml)c + nc = (ml + n)c \qquad \text{(теорема 122)},$$

т. е. c есть аликвотная часть a, а потому — общая мера для a и b.

Следовательно, общие меры значений a и b совпадают с общими мерами значений b и r; но в таком случае совпадают и общие наибольшие меры их.

Пусть даны два значения a и b какой-либо величины, причем $a \geqslant b$. Будем b откладывать на a (определение 82) и получим два возможных случая: или b уложится целое число раз, или получится некоторый остаток $r_1 < b$. В последнем случае откладываем r_1 на b и снова стоим перед двумя возможностями, и т. д. Надо заметить, что приемы „откладывания" будут меняться в зависимости от рода рассматриваемой величины.

Принимая во внимание теорему 274, получаем ряд равенств:

$$\left.\begin{array}{ll}
a = m_1 b + r_1, & \text{где } r_1 < b, \\
b = m_2 r_1 + r_2, & \text{где } r_2 < r_1, \\
r_1 = m_3 r_2 + r_3, & \text{где } r_3 < r_2, \\
\dots\dots\dots & \\
r_{n-3} = m_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & \text{где } r_{n-1} < r_{n-2}, \\
r_{n-2} = m_n r_{n-1} + r_n, & \text{где } r_n < r_{n-1}.
\end{array}\right\} *$$

$$\dots\dots\dots$$

Если какой-нибудь из остатков окажется равным 0, то дальнейшее откладывание прекращается и соответствующее равенство будет последним.

Определение 83. Способ, с помощью которого получаются равенства (*), называется *способом последовательного откладывания.*

Теорема 277. Если в способе последовательного откладывания приходим к равенству $r_n = 0$, то предыдущий остаток r_{n-1} равен общей наибольшей мере (a, b).

Действительно, если $r_n = 0$, то теоремы 275 и 276 дают:

r_{n-1} = общей наибольшей мере (r_{n-2}, r_{n-1}) = общей наибольшей мере $(r_{n-3}, r_{n-2}) = \ , \ldots ,$ = общей наибольшей мере (r_1, r_2) = общей наибольшей мере (br_1) = общей наибольшей мере (a, b).

Теорема 278. Если способ последовательного откладывания можно продолжать произвольно далеко (т. е., ни один из остатков не равен 0), то найдется такое число n, что

$$r_n < \varepsilon,$$

где ε есть произвольно малое значение рассматриваемой величины.

В самом деле, в равенстве $a = m_1 b + r_1$ имеем:

$$m_1 \geqslant 1 \text{ и } b > r_1,$$

откуда

$$m_1 b > m_1 r_1 \qquad \text{(теорема 119)},$$

$$m_1 r_1 \geqslant r_1 \qquad (\quad " \quad 123),$$

$$m_1 b > r_1 \qquad (\quad " \quad 102),$$

$$m_1 b + r_1 > 2r_1 \qquad (\quad " \quad 109),$$

так что

$$a > 2r_1 \text{ или } r_1 < \frac{a}{2} \qquad \text{(теоремы 127, 125)}.$$

Переходя к третьему равенству (*), где

$$m_3 \geqslant 1 \text{ и } r_2 > r_3,$$

точно так же получаем:

$$r_3 < \frac{r_1}{2}.$$

Подставляя r_1 из предыдущего неравенства, найдем:

$$r_3 < \frac{a}{2^2} \qquad \text{(теоремы 127, 129, 102)}.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к общей формуле:

$$r_{2k-1} < \frac{a}{2^k}.$$

А теорема 239 говорит, что при достаточно большом числе 2^k получим:

$$\frac{a}{2^k} < \varepsilon.$$

Тогда, полагая $n = 2k - 1$, найдем:

$$r_n < \varepsilon.$$

Теорема 279. Если a и b имеют общую меру, то в способе последовательного откладывания дойдем до некоторого остатка $r_n = 0$.

Действительно, пусть a и b имеют общую наибольшую меру c (теорема 270), а в способе последовательного откладывания ни один из остатков не равен 0. На основании теоремы 276 это c будет аликвотной частью всех остатков; между тем, найдутся остатки, которые будут меньше c (теорема 278), и таким образом получается противоречие (теорема 126).

Теорема 280. *Способ последовательного откладывания всегда решает вопрос о существовании общей меры у двух значений какой-либо величины.*

Действительно, если один из остатков равен 0, то мы сейчас же находим общую наибольшую меру (a,b) (теорема 277); если же ни один из остатков не равен 0, то a и b общей меры иметь не могут (теорема 279).

Определение 84. *Два значения какой-либо величины называются соизмеримыми, если у них имеется общая мера; в противном случае они называются несоизмеримыми.*

Замечание. Наиболее простые и интересные примеры несоизмеримых величин можно указать с помощью теории параллелей.

Переходим к измерению геометрических величин. Выбрав определенное значение e данной величины, мы относим ему число 1 („принимаем e за единицу измерения"). Теперь надо показать, что каждому значению той же величины соответствует вполне определенное число, и обратно.

Начнем со значений, соизмеримых с e.

Теорема 281. Если a и e соизмеримы и b и c суть их различные общие меры, причем:

$$\left.\begin{aligned} a &= mb \\ e &= nb \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} a &= pc \\ e &= qc \end{aligned}\right\}, \text{ то } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Действительно, на основании теорем 236 или 237 делим b на q равных частей, а c — на n равных частей, так что

$$b = q \cdot b_0 \text{ и } c = nc_n.$$

тогда для e получаем выражения:

$$e=nq\cdot b_q \quad \text{и} \quad e=qn\cdot c_n \qquad \text{(теорема 124)},$$

откуда

$$nq\cdot b_q=qn\cdot c_n,$$

и, следовательно,

$$b_q=c_n \qquad \text{(теорема 119)}.$$

Теперь для a имеем:

$$a=mq\cdot b_q \quad \text{и} \quad a=pn\cdot c_n,$$

$$mq\cdot b_q=pn\cdot c_n,$$

откуда

$$mq=pn \qquad \text{(теорема 123)},$$

или

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

Определение 85. Если a и e соизмеримы, причем:

$$\left.\begin{array}{l} a=mb \\ e=nb \end{array}\right\},$$

где b — какая-нибудь их общая мера, то рациональное число $\frac{m}{n}$ называется числом, измеряющим a, когда e принято за единицу, и мы пишем:

$$a=\frac{m}{n}\cdot e.$$

Теорема 281 показывает, что выбор общей меры b — безразличен.

Замечание. В силу указанных выше соотношений между a, e и b и в силу определений 34, 35 можно сказать, что обозначение

$$\frac{m}{n}\cdot e \text{ тождественно с } m\left(\frac{1}{n}\cdot e\right).$$

Теорема 282. *Если дано значение e, принятое за единицу, то каждому (положительному) рациональному числу соответствует определенное значение рассматриваемой величины, которое измеряется этим числом.*

Пусть дано e и число $\frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа. Делим e на n равных частей (теорема 236 или 237), так что

$$e_n=\frac{1}{n}\cdot e,$$

и берем m — кратное от значения e_n, обозначив его через a:

$$a = me_n;$$

так как, кроме того,

$$e = ne_n,$$

то значение a удовлетворяет всем поставленным требованиям.

В следующих пяти теоремах 283—287 рассматриваются только такие значения, которые соизмеримы с e, принятым за единицу.

Теорема 283. *Равные значения величины измеряются равными числами,* и обратно.

Пусть $a_1 = a_2$ и a_1 измеряется по отношению к e числом $\frac{m}{n}$ Тогда

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = me_n \\ e = ne_n \end{array}\right\} \qquad \text{(определение 85).}$$

На основании свойства переносимости равенства имеем:

$$a_2 = me_n,$$

и теперь уже ясно, что a_2 измеряется числом $\frac{m}{n}$.

Пусть, обратно, значения a_1 и a_2 измеряются по отношению к e одним и тем же числом $\frac{m}{n}$. Следовательно, имеем равенства:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = me_n \\ e = ne_n \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{r} a_2 = me'_n \\ e = ne'_n \end{array}\right\}.$$

На основании теоремы 119 должно быть

$$e'_n = e_n;$$

но тогда

$$a_1 = a_2.$$

Теорема 284. *Большее значение измеряется бо́льшим числом,* и обратно.

Пусть значения a_1 и a_2 по отношению к e измеряются числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, так что

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = me_n \\ e = ne_n \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{r} a_2 = pe_q \\ e = qe_q \end{array}\right\} \qquad \text{(определение 85).}$$

Разделим e_n на q равных частей, а e_q — на n равных частей (теорема 236 или 237):

$$e_n = q \cdot h \text{ и } e_q = ng.$$

Тогда имеем:

$$e = nq \cdot h = qn \cdot g \qquad \text{(теорема 124)},$$

откуда

$$h = g \qquad \text{(теорема 119)},$$

$$a_1 = mq \cdot h \text{ и } a_2 = pn \cdot h.$$

Пусть теперь дано, что

$$a_1 > a_2, \text{ т. е.} \ldots mq \cdot h > pn \cdot h.$$

Отсюда

$$mq > pn$$

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \qquad \text{(теорема 123)}.$$

Пусть, обратно дано это последнее неравенство. Тогда

$$mq > pn,$$

$$mq \cdot h > pn \cdot h \qquad \text{(теорема 123)}.$$

$$a_1 > a_2.$$

Теорема 285. *Число, измеряющее сумму, равно сумме чисел, измеряющих слагаемые.*

Достаточно будет ограничиться случаем двух слагаемых: пусть, значения a_1 и a_2 соответственно измеряются числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. Придерживаясь обозначений предыдущей теоремы, пишем

$$a_1 + a_2 = (mq + pn) \cdot h \qquad \text{(теорема 122)},$$

причем

$$e = nq \cdot h.$$

Определение 85 сейчас же показывает, что значение $(a_1 + a_2)$ измеряется числом:

$$\frac{mq + pn}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}.$$

Теорема 286. Если a по отношению к e измеряется числом $\frac{m}{n}$, то e по отношению к a измеряется обратным числом $\frac{n}{m}$.

Утверждение непосредственно вытекает из определения 85.

Теорема 287. Если a по отношению к b измеряется числом $\frac{m}{n}$, а b по отношению к c — числом $\frac{p}{q}$, то a по отношению к c измеряется числом

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

В силу наших данных имеем:

$$\left.\begin{aligned} a &= mb_n \\ b &= nb_n \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} b &= pc_q \\ c &= qc_q \end{aligned}\right\}$$

Далее вводим в рассуждение значения h и g, определяемые из условий:

$$b_n = p \cdot h \quad \text{и} \quad c_q = ng \quad \text{(теорема 236 или 237)};$$

тогда

$$b = np \cdot h = pn \cdot g,$$

откуда

$$h = g \qquad \text{(теорема 119)}.$$

Подставляя, находим следующие равенства:

$$a = mp \cdot h,$$
$$c = qn \cdot h,$$

которые показывают (определение 85), что a по отношению к c измеряется числом:

$$\frac{mp}{qn} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Замечание. Понимая под k и e рациональные числа, последние две теоремы можно выразить следующим образом (имея в виду обозначение, указанное в определении 85): если

$$a = ke \cdot \text{, то } e = \frac{1}{k} \quad a;$$

если

$$a = k \cdot b \text{ и } b = e \cdot c, \text{ то } a = ke \quad c.$$

Пусть теперь значение a несоизмеримо с e. Разделим e на n равных частей, так что

$$e = n \cdot e_n.$$

Если $e_n < a$, то по теореме 273 существует одно и только одно такое целое и положительное число m, что

$$me_n < a < (m+1)e_n$$

(равенства $me_n=a$ здесь быть не может, так как a и e несоизмеримы). Если же $e_n>a$, то указанное число m считаем равным 0, равно как и произведение $m \cdot e_n$.

Таким образом, для каждого целого и положительного числа n находим два значения нашей величины:

$$me_n \text{ и } (m+1)e_n,$$

причем первое меньше a, второе больше a, и оба соизмеримы с e. В силу определения 85 они измеряются числами:

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{m+1}{n}.$$

Определение 86. Вообразим себе, что для каждого целого и положительного числа n найдено по вышеуказанному способу число m. Тогда все *положительные рациональные числа* можно *распределить* на *два класса* следующим образом:

в класс A_1 относим всякое число $\frac{m}{n}$ и все положительные дроби с тем же знаменателем, но с меньшими числителями;

в класс A_2 относим всякое число $\frac{m+1}{n}$ и все дроби с тем же знаменателем, но с большими числителями.

Эти два класса условимся называть определяющими, причем A_1 — нижним, A_2 — верхним; различные числа класса A_1 будем обозначать буквами: α_1, α_1', α_1''..., а различные числа класса A_2 — буквами: α_2, α_2', α_2''...

Теорема 288. *Если дано a, несоизмеримое с e, то:*

1) *всякое положительное рациональное число попадает в один из определяющих классов;*

2) *всякое число нижнего класса меньше всякого числа верхнего класса;*

3) *в нижнем классе нет наибольшего числа, а в верхнем — наименьшего.*

Утверждение п. 1 непосредственно вытекает из определения 86. Переходя к п. 2, возьмем по числу из классов A_1 и A_2:

$$\alpha_1 = \frac{p}{q} \text{ и } \alpha_2 = \frac{u}{v}.$$

Определим для числа q число p_0 так, как было определено m по n в определении 86, т. е.

$$p_0 e_q < a < (p_0+1)e_q, \text{ где } e_q = \frac{1}{q} \cdot e.$$

Из распределения чисел на определяющие классы вытекает, что должно быть:

$$p \leqslant p_0.$$

Точно так же найдем для v число u_0:

$$u_0 e_v < a < (u_0 + 1)\, e_v\,,\ \text{где}\ e_v = \frac{1}{v} \cdot e.$$

и должно быть:

$$u \geqslant u_0 + 1.$$

Эти неравенства дают:

$$p_0 e_q < (u_0 + 1)\, e_v\,,$$

а следовательно, числа, измеряющие эти соизмеримые с единицей значения, связаны неравенством того же типа (теорема 284), так что

$$\frac{p_0}{q} < \frac{u_0 + 1}{v}.$$

Далее имеем:

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{p_0}{q} \quad \text{и} \quad \frac{u_0 + 1}{v} \leqslant \frac{u}{v},$$

а потому

$$\alpha_1 < \alpha_2.$$

Наконец, имея в виду п. 3, возьмем в нижнем классе какое-нибудь число:

$$\alpha_1 = \frac{p}{q},$$

и пусть p_0 есть число, определяемое для q по предыдущему правилу. Если $p < p_0$, то, очевидно, в классе A_1 имеется число $\left(\text{а именно: } \frac{p_0}{q}\right)$, которое будет больше данного. Поэтому допустим, что $p = p_0$; другими словами, число p удовлетворяет неравенствам:

$$pe_q < a < (p + 1) \cdot e_q.$$

Отсюда можно вывести равенство:

$$a = pe_q + r \qquad \text{(теорема 112).}$$

Разделим e_q на s равных частей так, чтобы

$$e_q = s \cdot e_{qs} \quad \text{и} \quad e_{qs} < r \qquad \text{(теорема 239).}$$

Легко видеть, что теперь

$$e = qs \cdot e_{qs}.$$

Далее, имеем:

$$pe_q + e_{qs} < p \cdot e_q + r,$$

$$ps \cdot e_{qs} + e_{qs} < a \qquad \text{(теорема 109)},$$

$$(ps+1) \cdot e_{qs} < a \qquad \text{(теорема 122)}.$$

Следовательно, число $\frac{ps+1}{qs}$ должно во всяком случае попасть в класс A_1 (определение 86). Но

$$\frac{ps+1}{qs} = \frac{p}{q} + \frac{1}{qs} > \frac{p}{q},$$

т. е. в классе A_1 имеется число, большее данного.

Возьмем теперь в классе A_2 какое-нибудь число:

$$\alpha_2 = \frac{u+1}{v},$$

и можно ограничиться допущением, что u удовлетворяет условиям:

$$ue_v < a < (u+1)\, e_v.$$

Отсюда находим:

$$(u+1)\, e_v = a + r' \qquad \text{(теорема 112)}.$$

Найдем число t так, чтобы

$$e_v = t \cdot e_{vt} \quad \text{и} \quad e_{vt} < r' \qquad \text{(теорема 239)}.$$

Тогда

$$(u+1)\, e_{vt} > a + e_{vt} \qquad \text{(теорема 109)},$$

$$(u+1)\, e_v - e_{vt} > a \qquad \text{[теорема 116, определение 33 (расширенное)]},$$

$$[(u+1)\, t - 1] \cdot e_{vt} > a \qquad \text{(теорема 124, 122)}.$$

Следовательно, число $\frac{(u+1)\, t - 1}{vt}$ будет принадлежать классу A_2, но

$$\frac{(u+1)\, t-1}{vt} = \frac{u+1}{v} - \frac{1}{vt} < \frac{u+1}{v},$$

т. е. в классе A_2 имеется число, меньшее данного.

Теорема 289. *Если a несоизмеримо с e, то определяющие классы (A_1, A_2) вполне определяют некоторое иррациональное число, которое больше всех чисел нижнего класса и меньше всех чисел верхнего класса.*

Действительно, в общей арифметике доказывается, что деление рациональных чисел на два класса, обладающие двумя первыми свойствами теоремы 288, приводит к определению некоторого вещественного числа, которое не меньше чисел класса A_1 и не больше чисел класса A_2. Если бы указанное вещественное число было рациональным, то оно попало бы в один из наших классов и было бы либо наибольшим в A_1, либо наименьшим в A_2, что противоречит п. 3 теоремы 288.

Итак, искомое число иррационально, и так как оно не может равняться никакому рациональному числу, то оно должно быть больше всех чисел класса A_1 и меньше всех чисел класса A_2.

Определение 87. Если a несоизмеримо с e, то иррациональное число, существование которого установлено в теореме 289, называется числом, измеряющим a, если e принято за единицу; это число будем обозначать буквой ω (с тем или другим значком) и будем писать:

$$a = \omega_a e.$$

Замечание. Легко видеть, что рациональные числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, о которых шла речь в определении 86, будут приближенными значениями числа ω_a с точностью до $\frac{1}{n}$, первое — с недостатком, а второе — с избытком.

Теорема 290. Если a соизмеримо с e, то определяющие классы сохраняют два первых свойства теоремы 288; но теперь в нижнем классе будет наибольшее число, а именно — число, измеряющее a.

Доказательство предоставляется читателю (придется только несколько видоизменить определение класса A_1, так как теперь возможно равенство $m \cdot e_n = a$).

Замечание. Из предыдущей теоремы следует, что число, измеряющее данное значение величины, всегда можно находить с помощью определяющих классов.

Теорема 291. *Если дано значение величины, принятое за единицу, то каждому ее значению соответствует определенное положительног число* (определение 85 и 87).

Теорема 292. *Если дано значение величины, принятое за единицу, то каждому положительному числу соответствует ее значение, которое измеряется этим числом.*

В случае, когда данное число рационально, ссылаемся на теорему 282. Пусть теперь дано иррациональное число ω, и пусть A_1 и A_2 будут теми двумя классами рациональных чисел, которые определяют иррациональное число ω. На основании теоремы 282 найдем те значения рассматриваемой величины, которые измеряются всевозможными рациональными числами; они разделятся на два класса соответственно делению чисел на классы A_1 и A_2. Как известно из учения об иррациональном числе, классы A_1 и A_2 обладают следующими свойствами:

1) каждое число класса A_1 меньше каждого числа класса A_2;

2) всегда найдется по такому числу в классах A_2 и A_1, что их разность будет меньше произвольно заданного положительного числа. В частности, возьмем два рациональных числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, которые служат приближенными значениями ω с точностью до $\frac{1}{n}$; их разность равна $\frac{1}{n}$, и ее можно сделать, при достаточно большом n меньше любого числа;

3) в классе A_1 нет наибольшего числа, а в классе A_2 нет наименьшего.

На основании теоремы 284 каждое значение величины, принадлежащее I классу, будет меньше каждого значения величины, принадлежащей II классу.

Возьмем два значения, соответствующие только что указанным приближенным числам:

$$\frac{m+1}{n}\cdot e \text{ и } \frac{m}{n}\cdot e;$$

их разность равна

$$\frac{1}{n}\cdot e$$

и может быть сделана меньше всякого наперед заданного значения ε (теорема 239).

Таким образом, все условия начала Кантора (теорема 241 или 242) здесь выполняются, и наши классы вполне определяют некоторое значение a, которое не может равняться ни одному из упомянутых выше соизмеримых значений (в силу п. 3). Если мы пожелаем найти число, измеряющее это a, то определяющими классами будут как раз классы A_1 и A_2, так что мы придем к тому же числу ω.

Замечание. Теперь легко можно доказать существование несоизмеримых значений. Действительно, построим значение a, которое по отношению к e измеряется иррациональным числом ω (теорема 292); тогда a и e будут несоизмеримы, ибо в противном случае значение a измерялось бы рациональным числом (определение 85, теорема 290).

Ближайшая наша задача заключается в обобщении теорем 283—287 на значения, несоизмеримые с единицей; если одно из них окажется соизмеримым, то рассуждение не претерпевает существенных изменений, как это следует из теоремы 290.

Теорема 293. *Равные значения измеряются равными числами,* и обратно.

Действительно, если $a=b$, то неравенства, на которых основано введение определяющих классов, в обоих случаях дадут одно и то же значение для m (при выбранном n), так что эти классы для a и b окажутся тождественными, а следовательно, и приведут нас к равным числам.

Обратно, если два числа равны, то определяющие классы в обоих случаях тождественны, а потому будут тождественными и те пары классов, с помощью которых мы находим соответствующие значения величины. Тогда начало Кантора говорит, что в обоих случаях получатся равные значения.

Теорема 294. *Большее значение измеряется бóльшим числом, и обратно.*

Пусть

$$b > a \text{ и } b - a = \varepsilon.$$

Подберем число n так, чтобы

$$e_n = \frac{e}{n} < \varepsilon \qquad \text{(теорема 239)},$$

а число m определим из неравенств:

$$me_n \leqslant a < (m+1)\,e_n$$

(знак равенства — в случае соизмеримости a и e). Тогда рациональное число $\frac{m+1}{n}$ принадлежит верхнему классу для a.

Далее имеем:

$$me_n \leqslant a, \text{ так что } (m+1)\,e_n \leqslant a + e_n \qquad \text{(теоремы 109, 122)},$$

$$a + e_n < a + \varepsilon \qquad \text{(теорема 110)},$$

$$(m+1)\,e_n < b.$$

Следовательно, рациональное число $\frac{m+1}{n}$ принадлежит нижнему классу для b.

Из учения об иррациональном числе вытекает, что в таком случае

$$\omega_b > \omega_a.$$

Обратно, пусть нам дано это неравенство; оно показывает, что имеется рациональное число $\frac{p}{q}$, которое принадлежит нижнему классу для ω_b и верхнему — для ω_a. Переходя к соответствующим значениям рассматриваемой величины, находим:

$$\frac{p}{q}\,e \leqslant b \quad \text{и} \quad a < \frac{p}{q}\,e \qquad \text{(определение 86)},$$

откуда

$$b > a.$$

Теорема 295. *Число, измеряющее сумму, равно сумме чисел, измеряющих слагаемые.*

Достаточно остановиться на случае двух слагаемых.

Пусть нам дано:

значение a с классами (A_1, A_2), определяющими число ω_a,

" b " " (B_1, B_2), " " ω_b.

Числа классов A_1, A_2, B_1, B_2 будем обозначать соответственно через α_1, α_2, β_1, β_2. Составим теперь новое распределение всех положительных рациональных чисел на два класса, которые обозначим через:

$$A_1+B_1 \text{ и } A_2+B_2$$

и определим следующим образом: в класс (A_1+B_1) отнесем всевозможные суммы $(\alpha_1+\beta_1)$ и все числа, меньшие этих; в класс (A_2+B_2) — всевозможные суммы $(\alpha_2+\beta_2)$ и все числа, бóльшие этих. Легко убедиться, что эти новые классы обладают тремя свойствами, указанными в теореме 288.

Из учения об иррациональном числе известно, что указанное деление рациональных чисел определяет вещественное число $(\omega_a+\omega_b)$.

Далее, возьмем значение $c=a+b$ и составим для него определяющие классы (C_1, C_2) с числами γ_1 и γ_2; пусть они приводят к числу ω_c. В силу определения 86 имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 e \leqslant a < \alpha_2 e \\ \beta_1 e \leqslant b < \beta_2 e\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{(оба знака равенства}\\ \text{одновременно места не имеют).}\end{array}$$

Отсюда

$$\alpha_1 e+\beta_1 e < a+b < \alpha_2 e+\beta_2 e \qquad \text{(теорема 110).}$$

На основании теоремы 285 (для рациональных чисел) число, измеряющее сумму $(\alpha_1 e+\beta_1 e)$, равно $(\alpha_1+\beta_1)$, так что можно написать:

$$\alpha_1 e+\beta_1 e=(\alpha_1+\beta_1)\,e \qquad \text{(определение 85)}$$

и другие подобные равенства. Тогда последнее неравенство перепишется так:

$$(\alpha_1+\beta_1)\,e < c < (\alpha_2+\beta_2)\,e.$$

Отсюда вытекает, что каждое число класса (A_1+B_1) входит в состав класса C_1 (ибо соответствующее значение будет меньше c) и каждое число класса (A_2+B_2) — в состав класса C_2.

Обратно, пусть γ_1 есть какое-нибудь число класса C_1; оно должно попасть в один из классов (A_1+B_1) и (A_2+B_2), и если бы оно попало во второй, то, по только что доказанному, должно было бы принадлежать и классу C_2, что приводит к противоречию (теорема 288, п. 2). Следовательно, всякое число класса C_1 содержится в классе (A_1+B_1), и точно так же всякое число класса C_2 — в классе (A_2+B_2).

Отсюда следует,что деления рациональных чисел на классы $(A_1+B_1,\ A_2+B_2)$ и $(C_1,\ C_2)$ оказываются тождественными, а потому

$$\omega_c=\omega_a+\omega_b.$$

Теорема 296. Если $a=\omega\cdot b$, то $b=\frac{1}{\omega}\cdot a$.

Нам дано, что a по отношению к b измеряется числом ω, и пусть его определяющие классы будут $(A_1,\ A_2)$ с числами α_1 и α_2. Пусть теперь b по отношению к a измеряется числом ω', причем определяющие классы будут $(B_1,\ B_2)$ с числами β_1 и β_2.

Из определения 86 вытекают неравенства:

$$\alpha_1 b < a < \alpha_2 b,$$

$$\beta_1 a < b < \beta_2 a.$$

Пусть рациональное число $\alpha_1=\frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа. Теперь можем написать:

$$\frac{1}{n} b > \frac{1}{n}(\beta_1 a) \qquad \text{(теорема 127)},$$

$$m\cdot\frac{1}{n} b > m\cdot\frac{1}{n}(\beta_1 a) \qquad \text{(теорема 119)},$$

$$\alpha_1 b > \alpha_1(\beta_1 a) \quad \text{(замечание к опред. 85)},$$

$$\alpha_1(\beta_1 a)=\alpha_1\beta_1\cdot a \quad \text{(теорема 287 и замечание)},$$

так что

$$a > \alpha_1 b > \alpha_1\beta_1\cdot a.$$

Точно так же найдем:

$$b < \beta_2 a,$$

$$\alpha_2 b < \alpha_2\beta_2\cdot a,$$

$$a < \alpha_2 b < \alpha_2\beta_2\cdot a.$$

Собирая, получаем неравенства:

$$\alpha_1\beta_1\cdot a < a < \alpha_2\beta_2\cdot a;$$

отсюда на основании теоремы 284 выводим:

$$\alpha_1\beta_1 < 1 < \alpha_2\beta_2.$$

Составим, наконец, распределение рациональных чисел на два класса, которые обозначим через A_1B_1 и A_2B_2 и определим следующим образом: в класс A_1B_1 отнесем всевозможные произведения $\alpha_1\beta_1$ и числа, меньшие этих, а в класс A_2B_2 — всевозможные произведения $\alpha_2\beta_2$ и числа, бóльшие этих. Как известно из учения об иррациональном числе, указанные классы определят число $\omega \cdot \omega'$. С другой стороны, предыдущие неравенства говорят, что эти классы определяют число 1, а так как такое число — единственно, то

$$\omega \cdot \omega' = 1, \text{ откуда } \omega' = \frac{1}{\omega}.$$

Теорема 297. Если $a = \omega_1 b$ и $b = \omega_2 c$, то $a = (\omega_1\omega_2)c$.

Нам дано, что a по отношению к b измеряется числом ω_1; пусть определяющими классами будут (A_1, A_2) с числами α_1 и α_2; далее дано, что b по отношению к c измеряется числом ω_2 и пусть определяющими классами будут (B_1, B_2) с числами β_1 и β_2. Подобно предыдущему рассуждению, составим деление рациональных чисел на классы (A_1B_1 и A_2B_2), которые определят число, равное $\omega_1 \cdot \omega_2$. Далее, будем измерять a с помощью c; пусть определяющими классами будут (C_1, C_2) с числами γ_1, γ_2 и пусть эти классы определяют число ω, так что

$$a = \omega \cdot c.$$

На основании определения 86 имеем:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 b &\leqslant a < \alpha_2 b \\ \beta_1 c &\leqslant b < \beta_2 c \end{aligned}\right\}$$ (одновременное существование обоих знаков равенства невозможно);

отсюда на том же основании, как и при доказательстве предыдущей теоремы:

$$a < \alpha_2 b < \alpha_2\beta_2 c,$$

$$a \geqslant \alpha_1 b \geqslant \alpha_1\beta_1 c,$$

или

$$\alpha_1\beta_1 \cdot c < a < \alpha_2\beta_2 \quad c.$$

Эти неравенства говорят, что всякое число класса A_1B_1 содержится в классе C_1 и всякое число класса A_2B_2 содержится в классе C_2.

Обратно, пусть γ_1 есть какое-нибудь число класса C_1; оно должно попасть в один из классов A_1B_1, A_2B_2, и если бы оно попало во второй, то по предыдущему оно вошло бы и в класс C_2, что невозможно.

Следовательно, всякое число класса C_1 принадлежит классу A_1B_1, и всякое число класса C_2 — классу A_2B_2.

Таким образом, оба деления рациональных чисел на классы (A_1B_1, A_2B_2) и (C_1, C_2) оказываются тождественными, а потому определяют одно и то же число, т. е.

$$\omega=\omega_1\cdot\omega_2.$$

Теорема 298. Если от единицы измерения e перейдем к единице $e'=\varepsilon\cdot e$, то все числа, измеряющие различные значения величины, приобретают один и тот же множитель, равный $\frac{1}{\varepsilon}$.

Действительно, пусть

$$a=\omega\cdot e.$$

Из того, что $e'=\varepsilon\cdot e$, следует:

$$e=\frac{1}{\varepsilon}\cdot e' \qquad \text{(теорема 286 или 296)};$$

если же $a=\omega\cdot e$ и $e=\frac{1}{\varepsilon}\cdot e'$, то

$$a=\left(\omega\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot e' \qquad \text{(теорема 287 или 297)},$$

т. е. значение a измеряется теперь числом $\omega\cdot\frac{1}{\varepsilon}$.

Замечание. В дальнейшем буквами $a, b, c\ldots$ иногда обозначаются различные значения величины, иногда — измеряющие их числа (в особенности это относится к отрезкам). Во избежание недоразумений, всегда надо по существу вопроса выяснить, о чем собственно идет речь: о геометрических величинах или об измеряющих их числах.

§ 26. Отношения и пропорции

Определение 88. Если a и b суть значения одной и той же величины, то *отношением* a к b называется *число, измеряющее a, когда b принято за единицу*; если это число равно ω, то условимся писать

$$\frac{a}{b}=\omega \text{ или } a:b=\omega.$$

Отсюда вытекает, что вопрос о равенстве двух отношений совпадает с вопросом о равенстве двух вещественных чисел. В случае рациональных отношений задача эта решается непосредственно, а для равенства двух иррациональных чисел необходимо и достаточно тождество определяющих их классов. Для последнего случая мы дадим сейчас более простой признак; для этого вспомним вычисление приближенных значений для чисел, измеряющих значения, несоизмеримые с принятой единицей.

Пусть a и b будут несоизмеримыми. Разделим b на n равных частей, так что

$$b = n \cdot b_n,$$

и найдем целое положительное число m из условий:

$$mb_n < a < (m+1)\, b_n.$$

Тогда рациональные дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будут приближенными значениями отношения $\frac{a}{b}$ с точностью до $\frac{1}{n}$, первая — с недостатком, а вторая — с избытком (см. замечание к определению 87 и определение 88).

Теорема 299. *Если приближенные значения двух иррациональных отношений, вычисленные с произвольной, но одинаковой точностью и оба взятые с недостатком, оказываются равными, то такие отношения будут равны между собой.*

В самом деле, определение 86 показывает, что определяющие классы в обоих случаях будут одними и теми же; а потому определяемые ими иррациональные числа будут равны между собой.

Теорема 300. *Отношение двух значений какой-либо величины равно отношению чисел, измеряющих эти значения в одной и той же единице.*

Действительно, пусть a и b измеряются в зависимости от e числами ω_a и ω_b, так что

$$a = \omega_a \cdot e \quad \text{и} \quad b = \omega_b \cdot e.$$

Если мы пожелаем теперь измерить a, приняв за единицу b, то теорема 298 говорит, что a будет измеряться числом $\frac{\omega_a}{\omega_b}$, откуда и следует теорема (определение 88).

Определение 89. Если a и b суть два значения одной и той же величины, c и d — также два значения одной и той же величины (одинаковой с первой или отличной от нее), и если отношение $\frac{a}{b}$ равно отношению $\frac{c}{d}$, то говорят, что четыре данные значения образуют *пропорцию*. Пишут:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{или} \quad a : b = c : d.$$

Теорема 301. *Пропорции между значениями величин соответствует такая же пропорция между измеряющими их числами*, и обратно.

Действительно, пусть нам дана пропорция между величинами:

$$a : b = c : d.$$

На основании теоремы 300 имеем:

$$a : b = \omega_a : \omega_b \text{ и } c : d = \omega_c : \omega_d ;$$

а так как левые части равны, то

$$\omega_a : \omega_b = \omega_c : \omega_d .$$

Пусть, обратно, дана пропорция между числами:

$$\omega_1 : \omega_2 = \omega_3 : \omega_4.$$

Выберем среди значений данной величины такие два a и b, которые в зависимости от выбранной единицы измерялись бы числами ω_1 и ω_2 (теорема 292).

Тогда по теореме 300

$$a : b = \omega_1 : \omega_2.$$

Точно так же найдем два такие значения c и d (той же самой или другой величины — в зависимости от условий вопроса), чтобы

$$c : d = \omega_3 : \omega_4,$$

а так как правые части равны, то:

$$a : b = c : d.$$

Теорема 302. *Пропорция между величинами обладает всеми теми свойствами пропорции между числами, в которых речь идет лишь о свойствах сравнимости и слагаемости.*

Необходимость последней оговорки вытекает из того, что действия умножения, деления, возвышения в степень не были определены для величины. Доказательство основано на предыдущей теореме, и мы выясним его принцип на примерах.

1. Если $a : b = c : d$ и если $a > b$, то и $c > d$.

Действительно, перейдем к пропорции между числами:

$$\omega_a : \omega_b = \omega_c : \omega_d \qquad \text{(теорема 301)},$$

причем

$$\omega_a > \omega_b \qquad \text{(теорема 284 или 294)}.$$

Но из алгебры известно, что в таком случае

$$\omega_c > \omega_d,$$

и те же теоремы 284 или 294 приводят к неравенству:

$$c > d.$$

2. Если $a : b = c : d$, то $(a + b) : a = (c + d) : c$.

Действительно, переходим к пропорции между числами:

$$\omega_a : \omega_b = \omega_c : \omega_d,$$

и отсюда по правилам алгебры выводим новую пропорцию:

$$(\omega_a + \omega_b) : \omega_a = (\omega_c + \omega_d) : \omega_c.$$

На основании теоремы 285 или 295 числам $(\omega_a + \omega_b)$ и $(\omega_c + \omega_d)$ соответствуют измеряемые ими значения $(a + b)$ и $(c + d)$, и теорема 301 тогда дает:

$$(a + b) : a = (c + d) : c.$$

3. Свойство пропорции, по которому можно переставлять средние члены, переносится на пропорции между величинами только в том случае, когда все четыре значения однородны, так как отношение определено нами лишь для значений одной и той же величины.

Определение 90. Если между значениями двух различных величин можно установить такое одно-однозначное соответствие, что всегда имеет место пропорция $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, где a_1 и b_1, a_2 и b_2 суть две произвольные пары соответственных значений, то такие величины называются (*прямо*) *пропорциональными* друг другу.

(Если же при вышеуказанных условиях имеет место пропорция: $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$, то такие величины называются *обратно пропорциональными*.)

Теорема 303. *Если между значениями двух различных величин можно установить такое одно-однозначное соответствие что:*

1) *равным значениям одной соответствуют равные значения другой;*

2) *сумме значений одной соответствует сумма соответствующих значений другой,*

то такие величины пропорциональны друг другу.

Возьмем две произвольные пары соответствующих значений: a_1 и b_1, a_2 и b_2. Прежде всего, установим, что значению величины, отличному от нуля, не может соответствовать нулевое значение другой величины. В противность этому допустим, что a_1, a_2, b_1 — отличны от нуля, а b_2 равно нулю.

Тогда сумме

$$a_1 + a_2 \text{ соответствует } b_1 + o = b_1,$$

и таким образом значению b_1 соответствуют два различных значения a_1 и a_1+a_2, что противоречит одно-однозначности соответствия.

Дальнейшее доказательство разделим на две части.

1. Значения a_1 и a_2 — соизмеримы.

Пусть именно $a_1=me$ и $a_2=ne$, где e их общая мера. Тогда

$$a_1:a_2=m:n \quad \text{(теорема 300, опред. 85).}$$

Пусть h будет значением другой величины, соответствующим значению e первой; значение b_1 в силу условий теоремы должно быть суммой m значений, равных h:

$$b_1=mh \text{ и точно так же } b_2=nh,$$

откуда

$$b_1:b_2=m:n.$$

Сопоставляя оба равенства, находим:

$$a_1:a_2=b_1:b_2.$$

2. Значения a_1 и a_2 — несоизмеримы.

Вычислим отношение $\frac{a_1}{a_2}$ с точностью до $\frac{1}{n}$ (с недостатком), для чего разделим a_2 на n равных частей:

$$a_2=ne,$$

и найдем целое положительное число m из условий:

$$\ldots\ me<a_1<(m+1)e; \qquad (*)$$

тогда искомое приближение будет равно $\frac{m}{n}$.

Переходим к другой величине, и пусть ее значение h соответствует e. Тогда в силу условий теоремы имеем:

$$b_2=nh;$$

далее, из неравенств (*) выводим:

$$a_1=me+r, \text{ а потому } b_1=mh+s,$$

где s соответствует r. Отсюда вытекает неравенство:

$$mh<b_1.$$

Из того же неравенства (*) получаем:

$$(m+1)e=a_1+r',$$

а потому:

$$(m+1)h=b_1+s',$$

где s' соответствует r'. Отсюда новое неравенство:

$$b_1 < (m+1)h.$$

Итак, мы получили неравенства:

$$mh < b_1 < (m+1)h,$$

которые говорят, что приближенное значение отношения $\frac{b_1}{b_2}$ с точностью до $\frac{1}{n}$ (с недостатком) равно $\frac{m}{n}$. На основании теоремы 299 отсюда заключаем:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Теорема 304. *Нам известны два примера пропорциональных величин:*

1) *центральные углы и дуги окружности* (одной и той же или различных окружностей с равными радиусами);

2) *двугранные углы и их нормальные сечения.*

Последнее утверждение вытекает из определения 62 и теоремы 195 в связи с теоремой 303, а первое — из определений 71 и 72.

Теорема 305. *Если за единицы измерения двух пропорциональных величин принять два соответствующих значения, то числа, измеряющие соответствующие значения данных величин, будут равны между собой.*

Действительно, пусть a и b будут какой-нибудь парой соответствующих значений двух пропорциональных величин; за единицы измерения примем тоже два соответствующих значения e и h.

Тогда имеем пропорцию:

$$a : e = b : h \qquad \text{(определение 90);}$$

по отношения

$$\frac{a}{e} \text{ и } \frac{b}{h}$$

и суть числа, измеряющие a и b.

Замечание. Сущность теоремы 305 обыкновенно выражают словами: *из двух пропорциональных величин одну можно измерять с помощью другой.*

Таким образом, говорят об измерении двугранных углов с помощью их нормальных сечений или об измерении центральных углов с помощью дуг (и обратно). Как известно, за единицу измерения для углов принимают угол, равный $^1/_{90}$ прямого угла, и называют этот угол градусом. Совершенно так же можно говорить о дуговом градусе, понимая под этим дугу, соответствующую центральному углу в один градус.

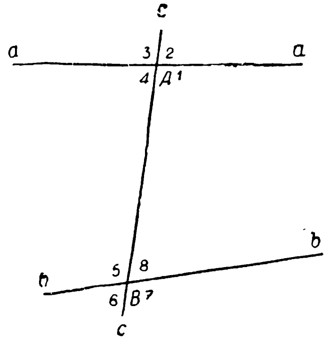
§ 27. Параллельные прямые

Мы исчерпали главнейшие следствия введенных до сих пор аксиом; для того чтобы идти дальше, необходимо сделать определённое допущение о пересечении прямых, лежащих в одной плоскости; это допущение позволит завершить систему геометрии, разобрав наиболее важные отделы ее.

Что касается прямых одной и той же плоскости, то они, конечно, могут пересекаться друг с другом; но возможен случай, когда две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек; например: два перпендикуляра к одной прямой не могут пересекаться в силу теоремы 167. Последнее обстоятельство дает основание для следующего определения.

Определение 91. *Две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными.* Параллельность двух прямых a и b обозначается символом $a \parallel b$. Если два луча или два отрезка принадлежат параллельным прямым, то иногда говорят прямо о параллельных лучах или отрезках.

Замечание. Легко видеть, что параллельность есть свойство взаимное, так что, если $a \parallel b$, то и $b \parallel a$.



Черт. 85

Теорема 306. *Все точки одной из двух параллелей лежат с одной и той же стороны от другой.*

Действительно, любой определяемый этими точками отрезок не может пересекать другую параллель (определение 91), и остается вспомнить определение 10.

Определение 92. Пусть даны две прямые a и b, лежащие в одной плоскости, и пусть третья прямая c пересекает их в точках A и B (черт. 85). Пересекаясь, эти прямые образуют 8 углов (теорема 47), которые на чертеже обозначены цифрами от 1 до 8. Эти углы имеют особые названия. Те углы при точке A, одной стороной которых служит полупрямая AB, и те углы при точке B, одной стороной которых служит полупрямая BA, называются *внутренними* (таковы углы *1*, *4*, *5*, *8*); остальные называются *внешними*. Те углы, которые лежат по одну сторону от секущей c, называются *односторонними* (таковы, например, углы *2*, *1*, *8*, *7*); в противном случае — *разносторонними*.

Внутренними накрест лежащими называются такие внутренние углы, которые лежат по разные стороны от секущей, но не являются смежными (таковы *1* и *5*, *4* и *8*). *Соответственными* называются такие два односторонних угла, из которых один внутренний, а другой внешний, но сами углы — не смежные (например, *1* и *7*, *5* и *3*). Название *внутренние односторонние* понятно из предыдущего (таковы *1* и *8*, *4* и *5*).

Теорема 307. *Если* при условиях определения 92 имеет место одно из утверждений:

1) *внутренние накрест лежащие углы равны,*

2) *соответственные углы равны,*

3) *внутренние односторонние углы пополнительны,*
то имеют место и все остальные.

Доказательство предоставляется читателю (с помощью черт. 87, не обращая внимания на прямую NN').

Теорема 308. Если имеет место одно из трех утверждений теоремы 307, то данные прямые параллельны.

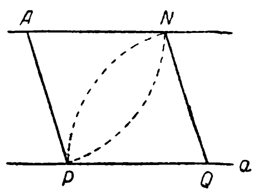
Пусть нам дано, что два внутренних накрест лежащих угла равны так что

$$\angle ABL = \angle BAK' \text{ (черт. 87, прямая } NN' \text{ пока не нужна).}$$

Попробуем допустить, что прямые $L'L$ и $K'K$ пересекаются, и пусть точка пересечения лежит по ту же сторону от прямой AB, как и точки K, L. Тогда получается треугольник, для которого $\angle ABL$ будет внутренним, а $\angle BAK'$ — внешним, и мы приходим к противоречию с теоремой 155. Если же принять, что данные прямые пересекаются по другую сторону от AB, то в приведенном выше рассуждении только углы поменяются ролями, а сущность остается той же самой.

Следовательно, прямые $L'L \parallel K'K$.

Если, наконец, имеет место какое-нибудь другое из утверждений теоремы 307, то в силу этой же самой теоремы дело сведется к предыдущему случаю.



Черт. 86

Теорема 309. *Через точку, данную вне прямой, можно провести прямую, ей параллельную.*

Пусть дана прямая a и точка A вне ее (черт. 86). На прямой a отметим произвольную точку P и от этой точки на данной прямой отложим отрезок $(PQ) = (AP)$. Далее, из точек A и Q (в плоскости aA) описываем окружности радиусами, равными (AP). Так как эти окружности уже имеют общую точку P, не лежащую на линии центров AQ, то у них имеется еще другая общая точка N по другую сторону от AQ (теорема 254). Прямая AN и будет искомой (доказательство основано на теореме 308 и предоставляется читателю).

Построение, указанное в предыдущей теореме, исходит из произвольно выбранной точки P; возможны и другие построения (например, с помощью проведения перпендикуляров). Поэтому возникает вопрос, всегда ли мы придем к той же самой AN; другими словами, сколько параллелей можно провести к данной прямой через данную точку? Введенные до сих пор аксиомы не дают возможности дать вполне определенный ответ; поэтому здесь нужно ввести еще одну и последнюю аксиому.

Аксиома XXV. *Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной.*

Теорема 310. *Если прямая пересекает одну из двух параллелей и лежит в их плоскости, то она пересечет и другую.*

В противном случае получилось бы противоречие с аксиомой XXV.

Теорема 311. *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:*

1) *внутренние накрест лежащие углы равны;*
2) *соответственные углы равны;*
3) *внутренние односторонние углы пополнительны.*

Пусть даны две прямые $K'K \parallel L'L$ (черт. 87) и пусть $\angle ABL \neq \angle BAK'$. Тогда существует такой луч AN', лежащий с той же стороны от AB, что и полупрямая AK', и образующий $\angle BAN' = \angle ABL$ (аксиома XXII).

В силу теоремы 308 имеем:

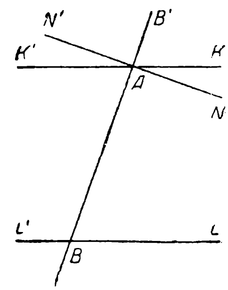
$$N'N \parallel L'L,$$

и получается противоречие с аксиомой XXV.

Следовательно,

$$\angle ABL = \angle BAK',$$

а остальные утверждения вытекают из теоремы 307.



Черт. 87

Теорема 312. *Если две прямые лежат в одной плоскости и в пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, причем сумма их меньше $2d$, то эти прямые пересекаются и притом с той стороны от секущей, с которой лежат внутренние односторонние углы, дающие сумму меньше $2d$.*

По существу, это есть то предложение, которое знаменитый греческий геометр Евклид положил в основу учения о параллельных прямых вместо нашей аксиомы XXV.

Пусть указанным свойством обладают прямые $L'L$ и $N'N$ в пересечении с прямой AB (черт. 87). Если бы эти прямые были параллельны, то углы ABL и BAN были бы пополнительными (теорема 311), что противоречит заданию; следовательно, прямые $L'L$ и $N'N$ должны пересекаться.

Проведем через A прямую $K'K \parallel L'L$ (теорема 309). Тогда

$$\angle ABL + \angle BAK = 2d \qquad \text{(теорема 311).}$$

С другой стороны:

$$(\angle ABL + \angle BAN) + (\angle ABL' + \angle BAN') = 4d \qquad \text{(теорема 148);}$$

а так как ни одна из частичных сумм не равна $2d$, то одна из них должна быть меньше $2d$, а другая больше $2d$. Пусть для определенности:

$$\angle ABL + \angle BNA < 2d.$$

Из этого неравенства, в связи с тем обстоятельством, что точки N и K по построению лежат по одну сторону от AB, вытекает положение луча AN внутри $\angle BAK$ (определение 39). Следовательно, полупрямая AN расположена в полуплоскости $AK \cdot B$ (теоремы 43, 33), в которой лежит также целиком прямая $L'L$ (теорема 306); полупрямая AN' лежит в другой полуплоскости (теорема 34). Поэтому точка пересечения прямых $N'N$ и $L'L$ должна лежать на полупрямой AN, которая лежит по отношению к AB с требуемой стороны.

Замечание. Отсюда, между прочим, вытекает, что всегда можно построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам, если только их сумма меньше $2d$.

Теорема 313. *Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, лежащие в одной и той же плоскости, всегда пересекаются и притом с той стороны от данной прямой, с которой наклонная образует острый угол* (теорема 312).

Теорема 314. *Два перпендикуляра к одной и той же прямой, лежащие в одной и той же плоскости, всегда параллельны* (теорема 167).

Теорема 315. *Прямая, лежащая в плоскости двух параллелей и перпендикулярная к одной из них, будет перпендикулярной и к другой.*

Прежде всего, на основании теоремы 310 данный перпендикуляр пересекает и другую прямую, а на основании теоремы 311 (п. 3) он образует с ней прямой угол.

Теорема 316. *Если к двум пересекающимся прямым восставим в их плоскости перпендикуляры, то эти перпендикуляры тоже пересекаются.*

Допустим, что перпендикуляры, восставленные к прямым a и b, пересекающимся в точке O, оказались параллельными; тогда прямая a будет перпендикуляром к обеим этим параллелям (теорема 315).

Таким образом, на перпендикуляр, восставленный к прямой b, из точки O будут опущены два различных перпендикуляра (а именно: a и b), что невозможно (теорема 167).

Теорема 317. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну окружность.*

Действительно, пусть даны точки A, B, C, причем прямые AB и BC будут различными. В середине отрезков (AB) и (BC) восставим перпендикуляры к соответствующим прямым; эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O (теорема 316). На основании теоремы 178 точка O будет равноотстоять от трех данных точек; а потому окружность O (OA) будет искомой; ее единственность вытекает из теоремы 224.

Теорема 318. *Плоскость, пересекающая одну из параллелей, пересечет и другую.*

В самом деле, пусть плоскость α пересекает в точке A прямую a, которая параллельна b; тогда плоскость ab пересекается с плоскостью α по некоторой прямой, проходящей через точку A. На основании теоремы 310 эта последняя прямая пересечет прямую b, и точка пересечения будет искомой.

Теорема 319. *Плоскость, перпендикулярная к одной из параллелей, будет перпендикулярной и к другой.*

Пусть плоскость α перпендикулярна к прямой a в точке A. На основании теоремы 318 плоскость α пересечет прямую b, параллельную a, в некоторой точке B. Прямая a перпендикулярна прямой AB (определение 57), а потому и прямая b перпендикулярна AB (теорема 315); с другой стороны, плоскость ab перпендикулярна плоскости α (теорема 199), и теорема 200 теперь показывает, что плоскость α перпендикулярна прямой b.

Замечание. Вспоминая определение 60, можно теперь сказать (в обобщение теоремы 315), что прямая, перпендикулярная к одной из параллелей, будет перпендикулярной и к другой.

Теорема 320. *Два перпендикуляра к одной и той же плоскости всегда параллельны друг другу* (теорема 186, определение 91).

Теорема 321. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Пусть нам дано:

$$a \parallel b \text{ и } a \parallel c.$$

В некоторой точке прямой a проведем к ней перпендикулярную плоскость α (теорема 183). На основании теоремы 319

$$b \perp \alpha \text{ и } c \perp \alpha,$$

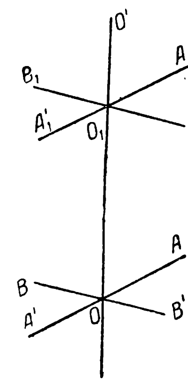
откуда

$$b \parallel c \qquad \text{(теорема 320).}$$

Определение 93. Совокупность всевозможных прямых, параллельных между собой, называется *связкой* параллельных прямых; если же ограничиться прямыми одной плоскости, то получается *пучок* параллельных прямых.

Определение 94. Два параллельных луча (или отрезка) называются *одинаково или разно направленными*, смотря по тому, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от прямой, соединяющей их вершины (или точки, принятые за начала отрезков).

Теорема 322. *Если у двух углов стороны соответственно параллельны и если в обеих парах параллельные стороны одинаково направлены или в обеих—разно направлены, то такие углы равны между собой; если же в одной паре параллельные стороны одинаково направлены, а в другой — разно направлены, то такие углы—пополнительны.*



Черт. 88

Действительно, пусть углы AOB и $A_1O_1B_1$ (черт. 88) образованы одинаково направленными лучами: OA и O_1A_1, OB и O_1B_1 (определение 94).

Начнем со случая, когда данные углы лежат в разных плоскостях; тогда можно говорить о двугранном угле с ребром OO_1. В силу наших данных каждая пара лучей OA и O_1A_1, OB и O_1B_1 лежит в одной и той же полуплоскости с ребром OO_1, т. е. в одной и той же грани указанного двугранного угла.

Так как соответственные углы равны, то данные углы будут равно-наклоненными сечениями двугранного $\angle OO_1$ (определение 63); а так как двугранный угол равен самому себе, то

$$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1 \qquad \text{(теорема 198).}$$

Пусть теперь эти углы лежат в одной плоскости. Возьмем вне ее точку S и проведем полупрямые SA_2 и SB_2, одинаково направленные: первая—с OA, вторая—с OB. На основании предыдущего

$$\angle AOB = \angle A_2SB_2.$$

Так как лучи OA и O_1A_1 лежат по одну сторону от плоскости SOO_1, то полупрямая SA_2 будет одинаково направленной с O_1A_1 и точно так же полупрямая SB_2 — с O_1B_1; а потому

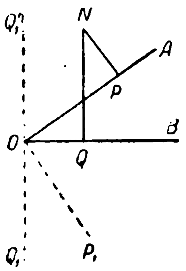
$$\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2SB_2.$$

Сопоставляя оба равенства, получаем:

$$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1.$$

Если теперь даны углы, у которых соответственные стороны разно направлены, например: $\angle A'OB'$ и $\angle A_1O_1B_1$, то, заменяя один из них углом вертикальным, переходим к предыдущему случаю.

Пусть, наконец, даны два угла, у которых одна пара параллельных сторон состоит из одинаково направленных лучей, а другая—из разно направленных, например $\angle AOB'$ и $\angle A_1O_1B_1$. На основании предыдущего имеем:



Черт. 89

$$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1,$$

$$\angle AOB' + \angle AOB = 2d \qquad \text{(теорема 148)},$$

откуда

$$\angle AOB' + \angle A_1O_1B_1 = 2d.$$

Теорема 323. *Если у двух углов, лежащих в одной плоскости, стороны соответственно перпендикулярны, то такие углы либо равны, либо пополнительны.*

Пусть в некоторой плоскости даны углы AOB и PNQ, причем

$$NP \perp OA \quad \text{и} \quad NQ \perp OB \qquad \text{(черт. 89)}.$$

Восставим в точке O перпендикулярные лучи:

$$OP_1 \perp OA \text{ и } OQ_1' \perp OB,$$

направив каждый из них в ту сторону, с которой лежит другая сторона $\angle AOB$. Рассуждение, подобное тому, которое было приведено при доказательстве теоремы 196, дает:

$$\angle AOB + \angle P_1OQ_1' = 2d;$$

отсюда, заменяя второй угол смежным ему, находим:

$$\angle AOB = \angle P_1OQ_1.$$

Но стороны углов P_1OQ_1 и PNQ соответственно параллельны (теорема 311), а потому (теорема 322) имеем:

$$\text{или } \angle PNQ = \angle P_1OQ_1, \quad \text{или } \angle PNQ + \angle P_1OQ_1 = 2d.$$

Подставляя $\angle AOB$ вместо $\angle P_1OQ_1$, находим искомое (на черт. 89 изображен случай, соответствующий равенству наших углов).

§ 28. Сумма углов треугольника

Теорема 324. *Внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных.*

Возьмем какой-нибудь $\triangle ABC$ (черт. 90) и проведем два луча: полупрямую BA', противоположную для BA, и полупрямую BE, параллельную полупрямой AC и одинаково с ней направленную. На основании теоремы 46 полупрямая BE должна попасть внутрь одного из углов ABC и $A'BC$; но первое—невозможно, так как тогда полупрямая BE пересекала бы (AC); поэтому полупрямая BE находится внутри $\angle A'BC$, так что

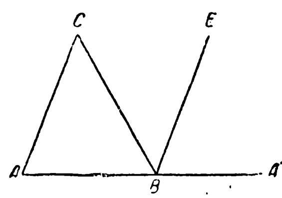
$$\angle A'BC = \angle A'BE + \angle CBE.$$

Углы BAC и $A'BE$ будут, очевидно, соответственными, а потому

$$\angle A'BE = \angle BAC.$$

Выясним далее, что точки A и E лежат по разные стороны от BC. Действительно, точка A принадлежит полуплоскости $BC \cdot A$, а точка E, будучи внутренней для $\angle A'BC$, принадлежит полуплоскости $BC \cdot A'$ (теорема 43). Теперь можно утверждать, что углы BCA и CBE будут внутренними накрест лежащими, так что

$$\angle CBE = \angle BCA.$$



Черт. 90

Подставляя, получаем:

$$\angle A'BC = \angle BAC + \angle BCA.$$

Теорема 325. *Сумма углов треугольника равна двум прямым углам.*

Действительно, имея в виду черт. 90 и теорему 324, пишем

$$\angle BAC + \angle BCA + \angle CBA = \angle A'BC + \angle CBA,$$

откуда:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 2d \quad \text{(теорема 148).}$$

Как следствие этой теоремы, читатель без труда докажет, что острые углы прямоугольного треугольника дополнительны и что углы равностороннего треугольника равны 60°.

Замечание. Теорема о сумме углов треугольника позволяет упростить доказательства некоторых предыдущих теорем. Так, теорема 155 является непосредственным следствием теоремы 324; теорема 164 с помощью теоремы 325 сейчас же сводится к теореме 131; то же самое надо сказать о некоторых пунктах теоремы 165. Если же для всех этих теорем были даны особые доказательства, то это потому, что мы желали изложить сначала те вопросы, которые для своего обоснования не нуждаются в аксиоме XXV.

Теорема 326. *В треугольниках с соответственно параллельными сторонами углы соответственно равны.*

Пусть в $\triangle\triangle ABC$ и $A_1B_1C_1$ дано:

$$AB \parallel A_1B_1, \quad BC \parallel B_1C_1, \quad CA \parallel C_1A_1;$$

на основании теоремы 322 относительно каждой пары углов A и A_1, B и B_1, C и C_1 можно сделать два и только два предположения или они равны, или пополнительны. Если допустить, что хотя бы в двух случаях имеет место последнее предположение, например:

$$A + A_1 = 2d \quad \text{и} \quad B + B_1 = 2d,$$

то сумма углов обоих треугольников будет непременно больше $4d$, что невозможно (теорема 325). Поэтому придется принять, что, по крайней мере, в двух парах углы равны:

$$A = A_1 \quad \text{и} \quad B = B_1;$$

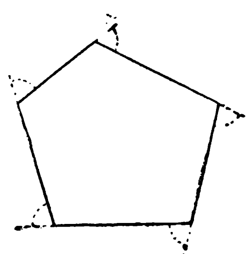
но тогда и

$$C = C_1 \qquad \text{(теорема 325)}.$$

Замечание. Такую же теорему и тем же самым методом (ссылаясь на теорему 323) можно доказать для двух треугольников с соответственно перпендикулярными сторонами, но с условием, что они лежат в одной плоскости.

Теорема 327. *Сумма углов выпуклого n-угольника равна $2d\,(n-2)$.* Утверждение вытекает из теорем 69 и 325.

Теорема 328. *Сумма всех внешних углов всякого выпуклого многоугольника равна $4d$.*



Черт. 91

Под внешним углом многоугольника мы понимаем угол, смежный с его внутренним углом (черт. 91; для каждого внутреннего угла имеется два смежных, но они равны между собой). Каждый внешний угол в сумме со смежным ему внутренним углом дает $2d$; для n-угольника в общем получим $2nd$; на долю внутренних углов здесь придется $2d\,(n-2)$, а на долю внешних

$$2nd - 2d\,(n-2) = 4d.$$

Как следствие, отсюда можно утверждать, что в выпуклом многоугольнике не может быть более трех острых углов, так как иначе сумма внешних углов была бы больше $4d$.

§ 29. Параллелограммы и трапеция

Определение 95. Четыреугольник, у которого противоположные стороны параллельны, называется *параллелограммом*. Из теорем 306 и 32 вытекает, что параллелограмм—четыреугольник *выпуклый*.

Существование такого четыреугольника можно доказать, пересекая одну пару параллельных прямых другой парой параллельных прямых.

Теорема 329. *Во всяком параллелограмме:*

1) *соседние углы пополнительны;*
2) *противоположные углы равны;*
3) *диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;*
4) *противоположные стороны равны;*
5) *в точке пересечения диагонали делятся пополам.*

Доказательство предоставляется читателю.

Пункт 4 этой теоремы можно выразить словами: „отрезки параллельных между параллельными равны".

Теорема 330. *Если две соседних стороны и заключенный между ними угол одного параллелограмма соответственно равны двум сторонам и заключенному между ними углу другого параллелограмма, то такие параллелограммы равны.*

Действительно, предыдущая теорема показывает, что при данных условиях у рассматриваемых параллелограммов все стороны и углы соответственно равны; тогда дело сводится к определению 53.

Теорема 331. *Выпуклый четыреугольник будет параллелограммом при соблюдении одного из следующих условий:*

1) *противоположные стороны его равны;*
2) *противоположные углы равны;*

3) *две противоположные стороны равны и параллельны*;

4) *в точке пересечения диагонали делятся пополам* (существование точки пересечения вытекает из теорем § 6).

Будем иметь в виду черт. 92 и пусть дано:

1) $(AB) = (CD)$ и $(AD) = (BC)$.

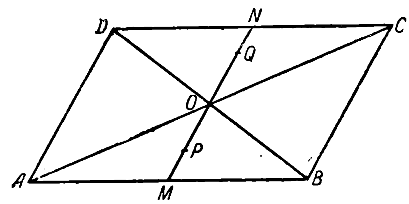
Из равенства $\triangle\triangle$ ABC и CDA (по трем сторонам) имеем:

$$\angle BAC = \angle DCA \quad \text{и} \quad \angle BCA = \angle DAC,$$

так что

$$AB \parallel CD \quad \text{и} \quad BC \parallel AD \qquad \text{(теорема 308)};$$

2) $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.



Черт. 92

Так как в четыреугольнике вообще имеем (теорема 327)

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d,$$

то в нашем случае

$$2(\angle A + \angle D) = 4d, \quad \text{или}$$
$$\angle A + \angle D = 2d.$$

Но тогда

$$AB \parallel CD \qquad \text{(теорема 308).}$$

Точно так же можем получить:

$$\angle A + \angle B = 2d,$$

откуда

$$AD \parallel BC.$$

3) $(AD) = (BC)$ и $AD \parallel BC$.

В таком случае

$$\triangle ADB = \triangle CBD \qquad \text{(теорема 130),}$$

откуда

$$\angle ABD = \angle CDB,$$

а потому

$$AB \parallel CD.$$

4) $(OA) = (OC)$ и $(OB) = (OD)$.

Из равенства $\triangle\triangle$ AOD и COB находим:

$$\angle ADO = \angle CBO, \text{ так что, } AD \parallel BC.$$

Точно так же из равенства $\triangle\triangle$ AOB и COD выведем:

$$AB \parallel CD.$$

Теорема 332. *Если какую-нибудь точку M стороны параллелограмма соединим прямой с точкой O пересечения его диагоналей, то прямая OM пересечет еще противоположную сторону — и только ее — в точке N, причем $(OM) = (ON)$.*

Для вершин параллелограмма теорема вытекает из теоремы 329 (п. 5). Возьмем поэтому точку M внутри одной из сторон, например, внутри (AB) (черт. 92). Полупрямая OM принадлежит $\angle AOB$, а потому противоположный ей луч пойдет внутри $\angle COD$ (теорема 41) и пересечет его секущий отрезок (CD) в некоторой точке N; на основании теоремы 67 прямая OM не может иметь других общих точек с обводом параллелограмма.

Рассматривая $\triangle\triangle$ NOD и MOB, имеем:

$$(OD)=(OB) \qquad \text{(теорема 329, п. 5)},$$

$$\angle ODN=\angle OBM \qquad \text{(теорема 311)},$$

$$\angle NOD=\angle MOB \qquad \text{(теорема 135)},$$

так что

$$\triangle NOD=\triangle MOB,$$

откуда

$$(ON)=(OM).$$

Определение 96. Пусть дана плоская фигура и в ее плоскости точка, обладающая следующим свойством: для каждой точки данной фигуры существует на ней такая другая точка, что середина определяемого ими отрезка находится в данной точке; тогда эта последняя называется *центром симметрии* данной фигуры.

Теорема 333. *Точка пересечения диагоналей есть центр симметрии параллелограмма.*

Теорема 332 говорит, что точки его обвода попарно симметричны относительно точки O (черт. 92); если же возьмем какую-нибудь внутреннюю точку P, то для нее существует также симметричная точка Q, в построении которой читатель без труда разберется с помощью черт. 92.

Из теоремы 329 (п. 1) непосредственно вытекает, что если один из углов параллелограмма равен d, то и все остальные равны d; существование таких параллелограммов устанавливается без труда.

Определение 97. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником.*

Теорема 334. *Всякий выпуклый четыреугольник с равными углами есть прямоугольник.*

Действительно, так как сумма всех его углов равна $4d$, то каждый угол равен d; дальнейшее сводится к теореме 331 (п. 2) и определению 97.

Теорема 335. *Во всяком прямоугольнике диагонали равны.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 336. *Параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник.*

Пусть в параллелограмме $ABCD$ (черт. 93) дано:

$$(AC) = (BD).$$

Легко видеть, что тогда

$$\triangle ADB = \triangle BCA \text{ (по трем сторонам)},$$

так что

$$\angle BAD = \angle ABC.$$

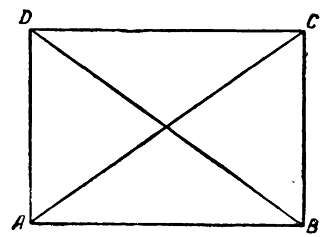
Но вообще имеем:

$$\angle BAD + \angle ABC = 2\,d \qquad \text{(теорема 329, п. 1)},$$

а потому

$$\angle BAD = \angle ABC = d.$$

Дальнейшее сводится к применению теоремы 329 (п. 2) и определения 97.



Черт. 93

Легко видеть, что если в параллелограмме две соседних стороны равны, то все его стороны равны между собой (теорема 329, п. 4); возможность такого параллелограмма очевидна.

Определение 98. Параллелограмм с равными сторонами называется *ромбом*.

Теорема 337. *Выпуклый четыреугольник с равными сторонами есть ромб* (теорема 331, п. I и определение 98).

Теорема 338. *Во всяком ромбе:*

1) *диагонали делят углы пополам;*

2) *диагонали взаимно перпендикулярны.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 339. *Параллелограмм будет ромбом при соблюдении одного из следующих условий:*

1) *если его диагонали взаимно перпендикулярны;*

2) *если диагональ делит пополам его угол.*

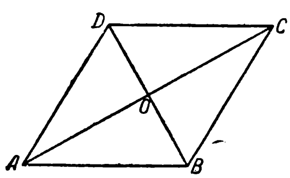
Действительно, возьмем параллелограмм $ABCD$ (черт.94), и пусть нам дано:

1) $AC \perp BD$. Тогда:

$$\triangle ADO = \triangle CDO \text{ (по двум катетам)},$$

откуда

$$(AD) = (CD),$$



Черт. 94

и дело сводится к теореме 329 (п. 4) и определению 98.

2) DB делит пополам $\angle D$. Так как, кроме того:

$$\angle CDO = \angle ABO \qquad \text{(теорема 311)},$$

то и

$$\angle ADO = \angle ABO.$$

Следовательно, $\triangle ADB$ равнобедренный, а потому

$$(AD) = (AB).$$

Легко видеть, что диагонали ромба суть его оси симметрии.

Определение 99. Параллелограмм, у которого все углы прямые и все стороны равны между собой, называется *квадратом*. Существование таких фигур устанавливается без труда.

Так как квадрат соединяет в себе свойства прямоугольника и ромба то без дальнейших доказательств утверждаем:

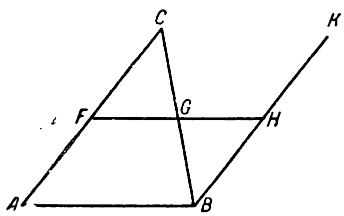
Теорема 340. 1) *Прямоугольник, у которого две соседние стороны равны, или ромб, у которого один из углов равен прямому углу, есть квадрат*;

2) *во всяком квадрате диагонали равны, взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам;*

3) *параллелограмм будет квадратом, если его диагонали равны и взаимно перпендикулярны, или если диагонали равны и одна из них делит пополам его угол.*

Прежде чем идти дальше, докажем следующую теорему о треугольнике, которая нам неоднократно пригодится.

Теорема 341. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен его третьей стороне и равен ее половине.*



Черт. 95

Действительно, возьмем $\triangle ABC$ (черт. 95) и соединим отрезком (FG) середины его сторон (AC) и (BC); из точки B проведем полупрямую BK, параллельную полупрямой AC и одинаково с ней направленную.

Рассуждение, подобное приведенному в теореме 324, показывает, что полупрямая BC принадлежит $\angle ABK$; поэтому точки A и K лежат по разные стороны от BC и полупрямые BK и CA будут разнонаправленными. Отложим на полупрямой BK отрезок $(BH) = (AF)$ и соединим точки G и H (будут ли три точки F, G, H лежать на одной прямой, мы пока не знаем). В $\triangle\triangle$ FGC и HGB имеем:

$$(FC) = (HB) \text{ [(так как оба равны } (AF)],$$

$$(GC) = (GB) \text{ (по построению)},$$

$$\angle FCG = \angle HBG \qquad \text{(теорема 311, п. 1)},$$

так что

$$\triangle FCG = \triangle HGB,$$

откуда

$$(FG) = (GH) \text{ и } \angle FGC = \angle HGB.$$

Последнее равенство, в связи с теоремой 151, показывает, что точки F, G, H лежат на одной прямой, а первое, — что точка G есть середина отрезка (FH). Если мы рассмотрим четыреугольник $ABHF$ (легко убедиться в его выпуклости), то по теореме 331 (п. 3) он будет параллелограммом. Следовательно:

$$FH \parallel AB \text{ и } (FH) = (AB),$$

но (FG) есть половина отрезка (FH).

Определение 100. Выпуклый четыреугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией*; параллельные стороны называются *основаниями*, а две другие — *боками*; если две последние равны между собой, то трапеция называется *равнобочной*. Отрезок, соединяющий середины боков, называется *средней линией* трапеции. Существование таких четыреугольников доказано в предыдущем построении, а именно там была построена трапеция $ABGF$ (черт. 95).

Теорема 342. *Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.*

Возьмем трапецию $ABCD$ (черт. 96) и проведем ее среднюю линию (FG); соединим точки C и F; эта прямая пересечет AB в некоторой точке K. Надо установить, что точки C и K лежат по разные стороны от точки F. Действительно, если бы, например, точка K лежала между F и C, то, применяя постулат Паша к $\triangle FDC$ и прямой AB, нашли бы, что AB пересекает (FD) во внутренней точке, а это невозможно. На основании того же постулата и выпуклости трапеции точка A должна лежать внутри (KB). В $\triangle\triangle$ AFK и DFC имеем:

$$(AF) = (DF),$$

$$\angle KAF = \angle CDF \quad \text{(теорема 311)},$$

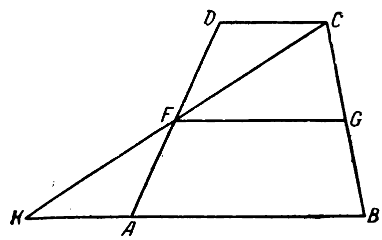
$$\angle AFK = \angle DFC \quad \text{(как вертикальные)},$$

так что

$$\triangle AFK = \triangle DFC,$$

откуда

$$(KF) = (CF) \text{ и } (AK) = (DC).$$



Черт. 96

Возьмем теперь $\triangle CKB$ и, применив к нему теорему 341, получим:

$$FG \parallel AB \text{ и } (FG) = \frac{(KB)}{2} = \frac{(AK)+(AB)}{2} = \frac{(CD)+(AB)}{2}.$$

Т е о р е м а 343. *Прямая, проходящая через середину одного из боков трапеции и параллельная ее основаниям, пройдет и через середину другого бока.*

Теорема вытекает из теоремы 342 с помощью обращения по тождеству (см. введение).

Настоящий параграф заканчиваем теоремой, доказательство которой предоставляется читателю.

Т е о р е м а 344. *Геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой и лежащих по одну и ту же сторону от нее, есть прямая, параллельная данной.*

§ 30. Параллельные прямые и плоскости

О п р е д е л е н и е 101. *Если прямая и плоскость или две плоскости не имеют общих точек, то они называются параллельными.* Существование таких образов вытекает из последующих теорем.

Т е о р е м а 345. *Если прямая проходит через точку, не лежащую в данной плоскости, и параллельна какой-нибудь прямой этой плоскости, то данная прямая параллельна данной плоскости.*

Пусть прямая a проходит через точку A, не лежащую в плоскости α, и $a \parallel b$, где b есть прямая плоскости α. Плоскость ab отлична от плоскости α, так как иначе точка A лежала бы в этой последней. Следовательно, плоскости α и ab пересекаются по прямой, а именно — по прямой b. Если допустить, что прямая a пересекает плоскость α, то эта прямая должна пересечь и прямую b, что невозможно. Поэтому a не может пересекать α, т. е. (определение 101):

$$a \parallel \alpha.$$

Теорема 346. *Если прямая* $a \parallel$ *плоскости* α, *то всякая плоскость проходящая через* a *и пересекающая* α, *пересекает ее по прямой, параллельной* a.

Действительно, пусть какая-нибудь из этих плоскостей пересекает плоскость α по прямой b. Тогда прямые a и b лежат в одной плоскости и не могут пересекаться, так как иначе a не была бы параллельна α. Следовательно:

$$a \parallel b.$$

Теорема 347. *Если плоскости* α *и* β *пересекаются и обе параллельны прямой* a, *то и прямая их пересечения параллельна* a.

Действительно, проведем плоскость через прямую a и какую-нибудь точку N, общую для двух данных плоскостей. Тогда плоскость aN пересекает как плоскость α, так и плоскость β по прямым, параллельным a (теорема 346); а так как обе эти параллели проходят через точку N, то они должны слиться в одну прямую (аксиома XXV). Но эта последняя прямая, находясь в обеих данных плоскостях, должна быть не чем иным, как линией их пересечения.

Теорема 348. *Прямая и плоскость, перпендикулярные к одной и той же прямой в различных ее точках, параллельны между собой.*

Пусть прямая a и плоскость α обе перпендикулярны некоторой прямой соответственно в точках A и P. Плоскость aP пересекает α по прямой b, которая будет перпендикулярна к прямой AP (определение 57). А потому

$$a \parallel b \qquad \text{(теорема 314)},$$

$$a \parallel \alpha \qquad \text{(теорема 345)}.$$

Теорема 349. *Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны друг другу.*

Иначе, из их общей точки были бы проведены две плоскости, перпендикулярные к данной прямой, что невозможно (теорема 183).

Теорема 350. *Если в плоскости* α *имеются две пересекающиеся прямые, параллельные плоскости* β, *то* $\alpha \parallel \beta$.

В самом деле, если бы эти плоскости не были параллельными, то они пересекались бы по прямой, которая была бы параллельной обеим данным прямым (теорема 346), что невозможно (аксиома XXV).

Теорема 351. *Через точку, данную вне плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной.*

Действительно, опустим из данной точки перпендикуляр на данную плоскость (теорема 185) и в данной точке восставим плоскость, перпендикулярную к только что построенной прямой (теорема 183); эта плоскость параллельна данной (теорема 349). Попробуем допустить, что через данную точку проходят две различные плоскости α и β, обе параллельные данной; пусть они пересекаются по прямой m. Возьмем в данной плоскости две пересекающиеся прямые a и b. Так как обе плоскости α и β параллельны a (будучи параллельными данной плоскости, они не могут пересекаться с a), то $m \parallel a$ (теорема 347), и точно так же докажем, что $m \parallel b$, а это невозможно (аксиома XXV).

Следовательно, параллельная плоскость единственна.

Замечание. Если речь идет о проведении плоскости через данную прямую параллельно данной плоскости, то задача невозможна, если данная прямая пересекает плоскость. Если же они параллельны, то вопрос решается, например, с помощью следующей теоремы.

Теорема 352. *Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости, есть плоскость, проходящая через данную точку и параллельная данной плоскости.*

Пусть дана плоскость α и точка A вне ее. Проведем через точку A плоскость $\beta \parallel \alpha$ (теорема 351). Совершенно ясно, что всякая прямая плоскости β, проходящая через точку A, будет параллельна плоскости α (определение 101).

Пусть обратно, дана какая-нибудь прямая a, проходящая через точку A и параллельная плоскости α.. Проведем через точку A другую прямую $b \parallel$ плоскости α (возможность этого вытекает из теоремы 345). Тогда плоскость $ab \parallel \alpha$ (теорема 350), плоскость ab должна слиться с плоскостью β (теорема 351), и прямая a лежит в плоскости β.

Теорема 353. *Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Действительно, если бы они пересекались, то получилось бы противоречие с теоремой 351.

Теорема 354. *Плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересекает и другую, причем в пересечении получаются параллельные прямые.*

Пересечение с другой плоскостью происходит в силу теоремы 351. Далее, прямые сечения лежат в одной плоскости и не могут пересекаться, так как принадлежат параллельным плоскостям; следовательно, они параллельны.

Как следствие отсюда вытекает, что прямая, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересекает и другую.

Теорема 355. *Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.*

В самом деле, по предыдущему данная прямая пересекает и другую плоскость. Если бы она не была перпендикулярна к ней, то, проведя в точке пересечения перпендикулярную плоскость (теорема 183), мы пришли бы к противоречию (теорема 349, 351).

Теорема 356. *Плоскость, перпендикулярная к одной из параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.*

Эта плоскость пересекает обе параллельные плоскости по параллельным прямым (теорема 354). Поэтому, если для получения нормального сечения двугранного угла, образованного ею с первой плоскостью, проведем плоскость, перпендикулярную к его ребру, то эта же плоскость даст нам нормальное сечение и второго двугранного угла (теорема 319). Теперь легко видеть (теорема 311), что упомянутые нормальные сечения одновременно будут равны прямому углу, а потому и второй двугранный угол будет прямым.

Замечание. Подобным же методом можно рассмотреть и другие соотношения между двугранными углами, получаемыми в сечении двух плоскостей третьей (если только последняя пересекает их по параллельным прямым).

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

Теорема 357. *Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны между собой.*

Теорема 358. *Все точки прямой или плоскости, параллельной данной плоскости, находятся на одном и том же расстоянии от последней.*

Ниже приведем некоторые свойства скрещивающихся прямых.

Теорема 359. *Если даны две скрещивающиеся прямые, то через каждую из них проходит одна и только одна плоскость, параллельная другой прямой.*

Действительно, пусть даны две такие прямые a и b. Выберем на одной из них, например, на a, какую-нибудь точку A

и проведем через нее прямую $b_1 \parallel b$ (теорема 309). Тогда плоскость ab_1 будет одной из искомых (теорема 345). Если допустить существование еще другой плоскости, проходящей через a и параллельной b, то прямая их пересечения, т. е. прямая a, должна быть параллельна b (теорема 347), что противоречит заданию.

Теорема 360. *Если даны две скрещивающиеся прямые, то существует одна и только одна пара параллельных плоскостей, соответственно проходящих через данные прямые.*

Пусть даны прямые a и b. Проведем через a плоскость $\alpha \parallel b$ и через b плоскость $\beta \parallel a$ (теорема 359). Попробуем допустить, что плоскости α и β пересекаются по прямой m; эта прямая не может оказаться параллельной и к a и к b, так как тогда было бы $a \parallel b$ (теорема 321) и данные прямые не были бы скрещивающимися. Поэтому прямая m пересекает, например, прямую a. Но в этом случае прямая a пересекала бы плоскость β, что противоречит построению. Следовательно, плоскости α и β параллельны. Предположим теперь, что нам даны плоскости α и β, соответственно проходящие через прямые a и b и параллельные друг другу. Отсюда сейчас же вытекает, что $\alpha \parallel b$ и $\beta \parallel a$ (определение 101), и мы приходим к тем же самым двум плоскостям, что и выше, а такие плоскости единственны (теорема 359).

Теорема 361. *Если даны две скрещивающиеся прямые и еще дана точка, не лежащая ни в одной из плоскостей, указанных в теореме 359, то через эту точку проходит одна и только одна прямая, пересекающая обе данные прямые.*

Пусть даны две прямые a и b и точка O, расположенные указанным образом. Проведем через точку O прямую h, которая с каждой из данных прямых лежит в одной плоскости. Такая прямая определяется как пересечение плоскостей aO и bO и будет единственной. Если допустить, что $h \parallel a$ и $h \parallel b$, то и $a \parallel b$, что невозможно. Попробуем допустить, что $h \parallel a$ и пересекает b (в некоторой точке B). В таком случае h лежит в плоскости bh, которая будет параллельна a (теорема 345). Но тогда и точка O лежит в этой плоскости, что противоречит заданию.

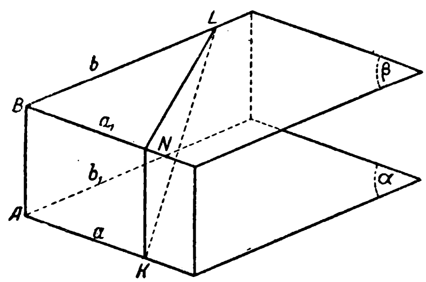
Точно так же невозможно, чтобы h пересекала a и была параллельна b.

Следовательно, остается допустить, что h пересекает обе данные прямые.

Теорема 362. *Если даны две скрещивающиеся прямые, то существует одна и только одна прямая, перпендикулярная к обеим данным и обе их пересекающая.*

Действительно, пусть даны прямые a и b (черт. 97). Проводим через a плоскость $\alpha \parallel b$ и через b — плоскость $\beta \parallel a$ (теорема 359). Из доказательства теоремы 360 мы знаем, что $\alpha \parallel \beta$.

Далее, через прямую a проводим плоскость, перпендикулярную к α (теорема 203); эта плоскость будет перпендикулярной и к плоскости β (теорема 356), и пересечет ее по прямой $a_1 \parallel a$ (теорема 354). Точно так же через прямую b проведем плоскость, перпендикулярную к β, которая будет перпендикулярной и к α и пересечет последнюю по прямой $b_1 \parallel b$. В плоскости α мы имеем теперь две прямые a и b_1, которые не могут ни слиться в одну, ни оказаться параллельными, так как тогда было бы $a \parallel b$.



Черт. 97

Следовательно, прямые a и b_1 пересекаются в одной и только в одной точке A.

Точно так же докажем, что прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B. Прямая AB и будет искомой. Действительно, она, очевидно, пересекает обе данные прямые. Далее:

$AB \perp \beta$ (теорема 202),

откуда

$$AB \perp b \qquad \text{(определение 57)},$$

и точно так же

$$AB \perp a.$$

Чтобы установить единственность общего перпендикуляра, возьмем данные прямые a и b и допустим, что нам задан их общий перпендикуляр в виде прямой AB. Построим по предыдущему плоскости α и β, которые вполне определяются заданием прямых a и b (теорема 359). Далее, проведем плоскости bA и aB. Последняя пересекает β по прямой $a_1 \parallel a$ (теорема 346) и:

$$AB \perp a_1 \qquad \text{(теорема 315)},$$
$$AB \perp \beta \qquad \text{(теорема 181)},$$
$$bA \perp \beta \qquad \text{(теорема 199)}.$$

Точно так же докажем, что

$$aB \perp \alpha.$$

Таким образом, общий перпендикуляр AB определяется как пересечение плоскости, проходящей через a и перпендикулярной к α, с плоскостью, проходящей через b и перпендикулярной к β, а такие плоскости единственны (теорема 203).

З а м е ч а н и е. Для построения общего перпендикуляра достаточно построить следующие три плоскости: 1) плоскость через одну из данных прямых параллельно другой, 2) плоскость через a перпендикулярно первой плоскости, 3) плоскость через b перпендикулярно первой плоскости.

Теорема 363. *Отрезок общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, определяемый его основаниями на данных прямых, есть кратчайшее расстояние между точками этих прямых.*

Пусть прямая AB есть общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых a и b (черт. 97). Возьмем на данных прямых по точке K и L, из которых по крайней мере одна отлична от A или B. Так как плоскость $aB \perp \beta$ (теорема 356), то перпендикуляр из точки K на плоскость β лежит в плоскости aB (теорема 201), а потому его основание N упадет на прямую a_1.

Из прямоугольного $\Delta\ KNL$ имеем: $(KN) < (KL)$.

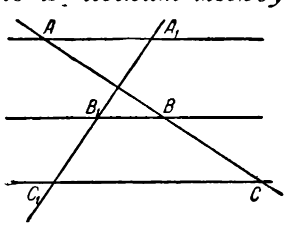
С другой стороны: $(KN) = (AB)$ (теоремы 314 и 329, п. 4).

Следовательно:

$$(AB) < (KL).$$

§ 31. Пропорциональные отрезки между параллелями

Теорема 364. *Если три прямые параллельные друг другу, пересекают две другие прямые соответственно в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1, и если B лежит между A и C, то B_1 лежит между A_1 и C_1.*



Черт. 98

Теорема поясняется черт. 98. В силу наших данных, точки A и C лежат по разные стороны от параллели, проходящей через точку B. На основании теоремы 306 такое же расположение будет иметь место для всех точек параллелей, проходящих через точки A и C.

Следовательно, и точки A_1, C_1 лежат по разные стороны от B_1.

Теорема 365. Дан *пучок параллельных прямых и еще две прямые, лежащие в той же плоскости, но не принадлежащие данному пучку.* Тогда *между точками этих прямых* с помощью данного пучка параллелей можно установить такое *одно-однозначное соответствие,* что:

1) *равным отрезкам на одной прямой соответствуют равные же отрезки на другой;*

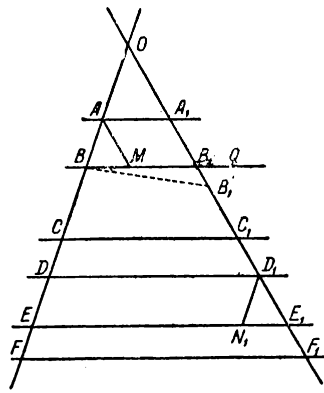
2) *отрезку, который является суммой отрезков одной прямой, соответствует на другой прямой отрезок, который является суммой соответствующих отрезков.*

Условимся считать соответствующими такие точки двух данных прямых, которые лежат на одной и той же параллели. Ясно, что соответствие будет одно-однозначным. Далее, соответствующими будем считать те отрезки, которые определяются парами соответствующих точек, как, например, отрезки (черт. 99) (AB) и (A_1B_1), (BD) и (B_1D_1), и т. д.

Пусть теперь нам дано, что $(AB)=(DE)$, и надо доказать равенство $(A_1B_1)=(D_1E_1)$.

Из точки A проведем прямую, параллельную A_1B_1 до пересечения с BB_1 в точке M (теорема 310). Легко видеть, что получается параллелограмм $AA_1\,B_1M$, а потому

$$(AM)=(A_1B_1).$$



Черт. 99

Точно так же из точки D_1 проводим прямую, параллельную AB до пересечения с EE_1 в точке N_1, и получаем:

$$(D_1N_1)=(DE).$$

В $\triangle\triangle$ ABM и $D_1N_1E_1$ все углы соответственно равны (теорема 326), а так как, кроме того,

$$(AB)=(D_1N_1),$$

то

$$\triangle ABM=\triangle D_1N_1E_1,$$

откуда

$$(AM)=(D_1E_1),$$

или

$$(A_1B_1)=(D_1E_1).$$

Рассуждение остается в силе и тогда, когда (AB) и (DE) лежат по разные стороны от O.

(Читателю предоставляется разобрать те случаи, когда две данные прямые параллельны или когда одна пара соответствующих точек совпадает с O.)

Пусть теперь отрезок $(AC)=(AB)+(BC)$, так что точка B лежит между A и C; но тогда точка B_1 лежит между A_1 и C_1 (теорема 364), а потому

$$(A_1C_1)=(A_1B_1)+(B_1C_1).$$

Рассуждение без труда обобщается на случай нескольких слагаемых.

Замечание. На этой теореме основано решение задачи о делении данного отрезка (AB) на n равных частей, а именно: проводим из точки A произвольный луч, отличный от луча AB и от противоположного луча; от точки A на проведенном луче откладываем последовательно n любых равных между собою отрезков; конец последнего K соединяем с B и через концы остальных отрезков проводим прямые, параллельные KB. Эти прямые разделяют (AB) на n равных частей (теорема 365, п. 1).

Теорема 366. *При условиях теоремы 365 соответствующие отрезки на двух данных прямых прямо пропорциональны.*

Утверждение непосредственно вытекает из теоремы 365 и 303. Обращаясь к черт. 99, имеем, например, следующие пропорции:

$$\frac{(OA)}{(BD)} = \frac{(OA_1)}{(B_1D_1)}, \qquad \frac{(AE)}{(CF)} = \frac{(A_1E_1)}{(C_1F_1)}, \ldots, \text{и т. д.}$$

Теорема 367. Если две пересекающиеся в точке O прямые пересекаются двумя параллельными в точке A и A_1, B и B_1, то имеют место следующие пропорции:

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(OA_1)}{(A_1B_1)}; \qquad \frac{(OA)}{(OB)} = \frac{(OA_1)}{(OB_1)}; \qquad \frac{(OB)}{(AB)} = \frac{(OB_1)}{(A_1B_1)},$$

$$\frac{(AA_1)}{(BB_1)} = \frac{(OA)}{(OB)}.$$

Действительно, стоит только через точку O провести прямую, параллельную данным параллелям, и первая группа пропорций непосредственно вытекает из предыдущей теоремы. Для дальнейшего проведем из точки A прямую, параллельную OA_1, до пересечения с BB_1 в точке M (черт. 99). Если точка A лежит между O и B, то M лежит между B и B_1 (проведем через B прямую, параллельную OA_1, и сошлемся на теорему 364). Кроме того, легко видеть, что

$$(B_1M) = (A_1A).$$

Применяя теорему 366 к прямым OB и BB_1, пересекаемым параллелями AM и OB_1, находим:

$$\frac{(B_1M)}{(B_1B)} = \frac{(OA)}{(OB)},$$

или

$$\frac{(A_1A)}{(B_1B)} = \frac{(OA)}{(OB)}.$$

[Если A и B лежат по разные стороны от O, то в предыдущем рассуждении придется только изменить утверждение о расположении точек B, B_1, M, а именно: теперь B_1 лежит между B и M (теорема 364)].

Замечание. На изложенной теореме основано решение задачи: по трем данным отрезкам a, b, c построить четвертый пропорциональный отрезок.

Берем какой-нибудь угол с вершиной в точке O и на одной из его сторон откладываем отрезки: $(OA) = a$ и $(AB) = b$ (A лежит между O и B), а на другой стороне отрезок $(OC) = c$; соединяем A с C и из точки B проводим прямую, параллельную AC до пересечения с полупрямой OC в точке D. Так как на основании теоремы 367

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(OC)}{(CD)},$$

то отрезок (CD) и будет искомым.

Подобным же образом решается задача о делении отрезка в данном отношении.

Теорема 368. Если на одной стороне угла (с вершиной в точке O) даны точки A и B, а на другой — точки A_1 и B_1, и если имеет место пропорция $\frac{(OA)}{(OB)}=\frac{(OA_1)}{(OB_1)}$, то

$$AA_1 \parallel BB_1.$$

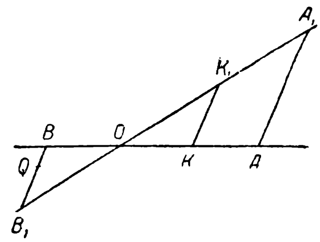
Для доказательства проведем из точки B прямую, параллельную AA_1 до пересечения с OA_1 в точке B_1' (черт. 99).

На основании теоремы 367 имеем:

$$\frac{(OA)}{(OB)}=\frac{(OA_1)}{(OB_1')}.$$

Сравнивая эту пропорцию с данной в условии пропорцией, находим (теорема 302):

$$(OB_1)=(OB_1'),$$



Черт. 100

а потому точка B_1' совпадает с B_1 (аксиома XX).

Замечание. Читателю предлагается доказать, что к тому же заключению приводят и пропорции:

$$\frac{(OA)}{(AB)}=\frac{(OA_1)}{(A_1B_1)}, \qquad \frac{(OB)}{(AB)}=\frac{(OB_1)}{(A_1B_1)}$$

при условии, что точки A_1, B_1 расположены так же, как и точки A, B. Следует, кроме того, указать пример, когда при нарушении условия об одинаковом расположении, утверждение становится неверным.

Теорема 369. *Если точки O, A, B лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 лежат по одну сторону от AB или по разные стороны от нее, смотря по тому, лежат ли точки A и B по одну сторону от O или по разные; если $AA_1 \parallel BB_1$ и имеет место пропорция:*

$$\frac{(AA_1)}{(BB_1)}=\frac{(OA)}{(OB)},$$

то точки O, A_1, B_1 тоже лежат на одной прямой.

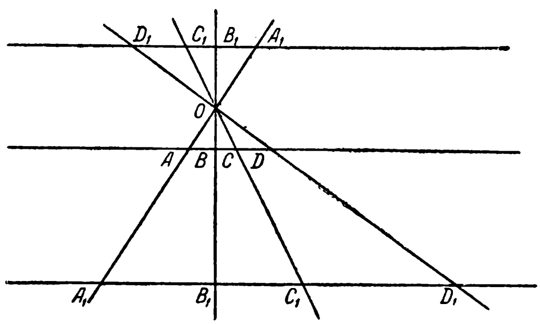
Допустим, что прямая OA_1 пересекает BB_1 в некоторой точке Q. В случае, когда A и B лежат по одну сторону от O, а A_1 и B_1 — по одну сторону от AB (черт. 99), то прямые AA_1 и BB_1 лежат по одну сторону от прямой, проходящей через O и параллельной AA_1 (теорема 306). Следовательно, точка Q принадлежит полупрямой OA_1. В случае же, когда A и B лежат по разные стороны от O, а A_1 и B_1 — по разные стороны от AB (черт. 100), то прямые AA_1 и BB_1 лежат по разные стороны от указанной прямой. Тогда точка Q принадлежит противоположной полупрямой OA_1. Отсюда вытекает, что в обоих случаях точки Q и B_1 лежат по одну сторону от AB. Другими словами, точка Q принадлежит полупрямой BB_1. На основании теоремы 367 можно написать:

$$\frac{(AA_1)}{(BQ)} = \frac{(OA)}{(OB)}.$$

Сравнивая эту пропорцию с данной, находим:

$$(BB_1) = (BQ) \qquad \text{(теорема 302).}$$

В связи с положением точки Q, отсюда вытекает, что Q совпадает с B_1 (аксиома XX), так что точки O, A_1 и B_1 лежат на одной прямой.



Черт. 101

Замечание. Читателю предлагается придумать примеры, когда при нарушении условия о расположении точек три точки O, A_1, B_1 не лежат на одной прямой.

Теорема 370. *Две параллельные прямые рассекаются пучком прямых (той же плоскости) на пропорциональные части.*

Пусть даны прямые $AB \parallel A_1B_1$, которые прямыми пучка O пересекаются соответственно в точках A и A_1, B и B_1 и т. д. (черт. 101, на котором изображены два различных положения прямой A_1B_1). Если этот пучок образован параллельными прямыми, то предложение непосредственно вытекает из теоремы 366; в противном случае, применяем теорему 367 к прямым OA и OB:

$$\frac{(OA)}{(OA_1)} = \frac{(AB)}{(A_1B_1)} = \frac{(OB)}{(OB_1)}.$$

Точно так же прямые OB и OC дают:

$$\frac{(OB)}{(OB_1)} = \frac{(BC)}{(B_1C_1)} = \frac{(OC)}{(OC_1)}, \text{ и т. д.}$$

Сравнивая эти пропорции, получаем:

$$\frac{(AB)}{(A_1B_1)} = \frac{(BC)}{(B_1C_1)} = \frac{(CD)}{(C_1D_1)} = \ldots$$

Переставляя в каждой из заключающихся здесь пропорций средние члены, можем эти равенства переписать так:

$$(AB):(BC):(CD):\ldots = (A_1B_1):(B_1C_1):(C_1D_1):\ldots,$$

§ 32. Подобие и гомотетия

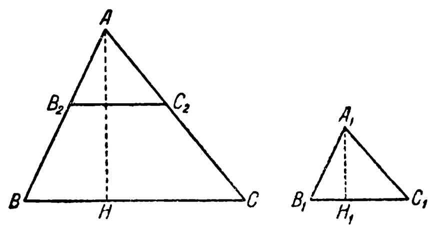
Определение 102. *Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны* (сходственными называют стороны, противолежащие равным углам); подобие обозначается символом $\sim$. В обозначении подобных треугольников мы будем придерживаться правила, подобного тому, которое было указано для равных треугольников в замечании к теореме 130. Общая величина отношений сходственных сторон называется отношением подобия данных треугольников (если отношение подобия равно 1, то данные треугольники равны).

Существование подобных треугольников *вытекает из* следующей теоремы.

Теорема 371. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку стороны треугольника и параллельная его основанию, отсекает треугольник, подобный данному.*

Возьмем $\triangle ABC$ и через внутреннюю точку B_2 стороны (AB) проведем прямую, параллельную BC ($\triangle ABC$ на черт. 102); эта прямая пересечет сторону (AC) также во внутренней точке C_2 (теорема 364). В $\triangle\triangle$ ABC и AB_2C_2 угол A — общий, а $\angle B = \angle B_2$ и $\angle C = \angle C_2$, как соответственные. Далее, теорема 367 дает:

$$\frac{(AB)}{(AB_2)} = \frac{(AC)}{(AC_2)} = \frac{(BC)}{(B_2C_2)},$$



Черт. 102

так что:

$$\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC.$$

Теорема 372. 1. *Два треугольника, подобные третьему, подобны друг другу.*

2. *Если один треугольник подобен второму, а второй равен третьему, то первый подобен третьему.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 373. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.*

Пусть для $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ дано:

$$\angle B = \angle B_1 \quad \text{и} \quad \angle C = C_1 \qquad \text{(черт. 102).}$$

Прежде всего отсюда следует, что

$$\angle A = \angle A_1 \qquad \text{(теорема 325).}$$

Если стороны $(AB) = (A_1B_1)$, то наши треугольники равны [равенство можно рассматривать, как частный случай подобия (см. определение 102)]; если же они не равны, то пусть $(AB) > (A_1B_1)$. Тогда внутри стороны (AB) найдется такая точка B_2, что

$$(AB_2) = (A_1B_1).$$

Через эту точку проводим прямую, параллельную BC.

Далее имеем:

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2 \qquad \text{(теорема 371),}$$

$$\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1 \qquad \text{(теорема 131),}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \qquad \text{(теорема 372, п. 2).}$$

Т е о р е м а 374. *Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а заключенные между ними углы равны, то такие треугольники подобны.*

Пусть даны $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 102), в которых

$$\frac{(AB)}{(A_1B_1)} = \frac{(AC)}{(A_1C_1)} \quad \text{и} \ \angle A = \angle A_1.$$

Если $(AB) = (A_1B_1)$, то и $(AC) = (A_1C_1)$ (теорема 302), и наши треугольники равны.

Допустим, что $(AB) > (A_1B_1)$ и отложим $(AB_2) = (A_1B_1)$. Через точку B_2 проведем прямую $B_2C_2 \parallel BC$. На основании теоремы 371 имеем:

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2,$$

откуда

$$\frac{(AB)}{(AB_2)} = \frac{(AC)}{(AC_2)} \qquad \text{(определение 102).}$$

Сопоставляя эту пропорцию с данной в условии пропорцией и помня о равенстве отрезков (AB_2) и (A_1B_1), находим:

$$(A_1C_1) = (AC_2) \qquad \text{(теорема 302).}$$

Тогда

$$\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1 \qquad \text{(теорема 130),}$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1 \qquad \text{(теорема 372, п. 2)}$$

Т е о р е м а 375. *Если стороны одного треугольника соответственно пропорциональны сторонам другого, то такие треугольники подобны.*

Доказывается тем же методом, что и предыдущая теорема; равенство $\triangle\triangle$ AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ теперь нужно обосновать с помощью теоремы 138.

Т е о р е м а 376. *Два треугольника с соответственно параллельными сторонами подобны* (теоремы 326 и 373).

З а м е ч а н и е. То же можно утверждать и в случае взаимно перпендикулярных сторон, если треугольники лежат в одной плоскости.

Т е о р е м а 377. *Прямоугольные треугольники подобны:*

1) *если у них имеется по равному острому углу;*

2) *если катеты одного пропорциональны катетам другого;*

3) *если катет и гипотенуза одного соответственно пропорциональны катету и гипотенузе другого.*

Первые два пункта непосредственно вытекают из теорем 373 и 374; что касается третьего, то он доказывается тем же методом, что и теорема 374 (можно даже воспользоваться черт. 102, считая $\angle A = \angle A_1 = d$); только равенство $\triangle\triangle$ AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ теперь вытекает из теоремы 165 (п. 3).

Т е о р е м а 378. *В подобных треугольниках отношение соответственных высот равно отношению подобия данных треугольников.*

Пусть в двух подобных $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ проведены соответствующие высоты (AH) и (A_1H_1) (черт. 102), так как $\angle B = \angle B_1$, то острые углы при вершинах B и B_1 в прямоугольных $\triangle\triangle$ ABH и $A_1B_1H_1$ будут между собою равны: или эти углы тождественны с углами B и B_1 (случай чертежа), или они тождественны с углами смежными [если $\angle B$ и $\angle B_1$ тупые, так что H и H_1 лежат вне основания (теорема 172)].

Но тогда

$$\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1 \quad \text{(теорема 377, п. 1), откуда}$$

$$\frac{(AH)}{(A_1H_1)}=\frac{(AB)}{(A_1B_1)}.$$

Замечание. Такое же предложение можно доказать для соответствующих медиан и биссектрис. В известном смысле обобщением является следующее предложение.

Теорема 379. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с отношением подобия, равным k, и если внутри сторон (AB), (A_1B_1), (AC) и (A_1C_1) отмечены соответственно такие точки D, D_1, E и E_1, что:

$$\frac{(AD)}{(BD)}=\frac{(A_1D_1)}{(B_1D_1)} \quad \text{и} \quad \frac{(AE)}{(CE)}=\frac{(A_1E_1)}{(C_1E_1)}, \quad \text{то}$$

$$\frac{(DE)}{(D_1E_1)}=k.$$

Действительно, берем пропорции, производные от данных (теорема 302):

$$\frac{(AD)+(BD)}{(AD)}=\frac{(A_1D_1)+(B_1D_1)}{(A_1D_1)} \quad \text{и} \quad \frac{(AE)+(CE)}{(AE)}=\frac{(A_1E_1)+(C_1E_1)}{(A_1E_1)}$$

или

$$\frac{(AB)}{(AD)}=\frac{(A_1B_1)}{(A_1D_1)} \quad \text{и} \quad \frac{(AC)}{(AE)}=\frac{(A_1C_1)}{(A_1E_1)}.$$

$$\frac{(AD)}{(A_1D_1)}=\frac{(AB)}{(A_1B_1)}=k \quad \text{и} \quad \frac{(AE)}{(A_1E_1)}=\frac{(AC)}{(A_1C_1)}=k,$$

откуда

$$\frac{(AD)}{(A_1D_1)}=\frac{(AE)}{(A_1E_1)}.$$

Следовательно:

$$\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1 \qquad \text{(теорема 374),}$$

откуда

$$\frac{(DE)}{(D_1E_1)}=\frac{(AD)}{(A_1D_1)}=k.$$

Замечание. Читателю предоставляется убедиться в том, что теорема остается в силе, если одна из точек D и E совпадает с вершиной треугольника или если обе точки лежат на одной и той же стороне треугольника.

Подобно тому, как в § 15 был сделан переход от равенства треугольников к равенству многоугольников, так и здесь можно от подобия треугольников перейти к подобию многоугольников.

Теорема 380. Определение 53 и теорема 175 остаются в силе при следующей замене терминов: „равенство сторон" заменяется на „пропорциональность сторон", „равенство треугольников и многоугольников" — на „подобие" этих фигур, „равенство углов" — остается.

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 381. *Отношение периметров двух подобных многоугольников равно отношению подобия.*

В самом деле, если $ABCD\ldots \backsim A_1B_1C_1D_1\ldots$, то

$$\frac{(AB)}{(A_1B_1)}=\frac{(BC)}{(B_1C_1)}=\frac{(CD)}{(C_1D_1)}=\ldots=k.$$

По свойству равных отношений отсюда выводим (теорема 302):

$$\frac{(AB)+(BC)+(CD)+\ldots}{(A_1B_1)+(B_1C_1)+(C_1D_1)+\ldots}=k.$$

К учению о подобии любых геометрических образов можно подойти со следующей точки зрения.

Определение 103. Два геометрических *образа* называются *подобными*, если между их точками установлено такое *одно-однозначное соответствие*, что если M и M_1, N и N_1 суть две пары соответственных точек, то всегда

$$\frac{(M_1N_1)}{(MN)}=k,$$

где k есть постоянное положительное число, которое называется *отношением подобия*. Важно отметить, что если $k=1$, то получаем общее учение о равенстве, которое является здесь частным случаем подобия.

Прежде всего необходимо установить, что новое определение не противоречит прежнему.

Теорема 382. Два треугольника (или многоугольника), подобные в смысле определения 102, будут подобными и в смысле определения 103, и обратно.

Как легко усмотреть, доказательство существенно основано на теореме 379.

Не входя в подробное изложение вопроса (ниже будет подробно рассмотрена гомотетия), отметим некоторые теоремы о подобии многогранников (при $k=1$, получаем теоремы о равенстве).

Теорема 383. *Два тетраэдра подобны:*

1) *если их ребра соответственно пропорциональны;*

2) *если у них имеется по две подобных и одинаково расположенных грани и если образуемые ими двугранные углы равны между собой.*

Для доказательства п. 1 замечаем, что при данных условиях грани наших тетраэдров будут соответственно подобны, и дело сводится к повторному применению теоремы 379. Во втором случае, пользуясь равенством трехгранных углов, получаем подобие двух остальных граней, и дело сводится к предыдущему.

От тетраэдров естественно перейти к многогранникам вообще. Две следующие теоремы доказываются с помощью разложения многогранника на тетраэдры (см. теорему 92).

Теорема 384. *Два подобных многогранника можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных тетраэдров, и обратно.*

Теорема 385. *Если между вершинами двух выпуклых многогранников можно установить такое одно-однозначное соответствие, что соответственные грани будут подобны, а соответственные многогранные углы равны, то данные многогранники подобны.*

Было уже упомянуто, что при $k=1$ предыдущие теоремы являются теоремами о равенстве. С этой точки зрения уместно будет доказать здесь еще следующее предложение.

Теорема 386. Если тетраэдр $MABC =$ тетраэдру $M'ABC$, то или M' совпадает с M, или M' симметрично с M относительно плоскости ABC.

Различаем два случая:

1) M' и M лежат по одну сторону от плоскости ABC.

Так как двугранные углы при AB будут равны, то полуплоскость $AB.M$ совпадает с полуплоскостью $AB \cdot M'$ (теорема 194), и точно так же полуплоскость $AC \cdot M$ совпадает с полуплоскостью $AC \cdot M'$; поэтому и их пересечения окажутся тождественными, т. е. полупрямая AM совпадает с полупрямой AM'. Так как, наконец, ребра $(AM) = (AM')$, то M' совпадет с M.

2) M' и M лежат по разные стороны от плоскости ABC.

Построим точку N, симметричную с M относительно плоскости ABC. Легко видеть, что тетраэдр $NABC =$ тетраэдру $MABC =$ тетраэдру $M'ABC$. А так как теперь N и M' лежат по одну сторону от плоскости ABC, то, по предыдущему, точка M' совпадет с N.

Ограничиваясь этими краткими замечаниями по поводу общего учения о подобии, мы более подробно остановимся на одном преобразовании, тесно с ним связанном.

Определение 104. Пусть дана постоянная точка O („центр гомотетии, или центр подобия“) и постоянное положительное число k, не равное 1 („отношение подобия“).

Гомотетией называется преобразование, в силу которого любой точке M, отличной от O, соответствует такая точка M_1, лежащая на прямой OM, что

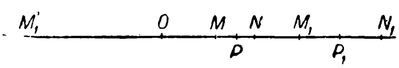
$$\frac{(OM_1)}{(OM)} = k\,;$$

точка O соответствует самой себе.

Гомотетия называется *прямой*, если M_1 лежит на полупрямой OM, и она называется *обратной*, если M_1 лежит на противоположной полупрямой. Если одна фигура получается из другой при помощи гомотетии, то они называются *гомотетичными*. Гомотетия может распространяться на все пространство или же ограничиваться точками определенной плоскости.

Теорема 387. *Гомотетия есть одно-однозначное преобразование.*

Действительно, пусть дана точка M, отличная от O (точка O соответствует самой себе). Тогда вполне определяется прямая OM, а также и отрезок (OM_1) из условия:



Черт. 103

$$(OM_1) = k \cdot (OM)\,.$$

Наконец задание, с какой именно гомотетией мы имеем дело, показывает, на каком луче прямой OM надо отложить отрезок (OM_1).

Таким образом, точка M преобразуется во вполне определенную точку M_1, и обратно: M_1 переходит в M при гомотетии с центром в точке O и с отношением подобия, равным $\frac{1}{k}$.

Теорема 388. *Обратная гомотетия сводится к прямой гомотетии в соединении с преобразованием по симметрии относительно центра подобия.*

В самом деле, пусть точка M прямо гомотетична с точкой M_1 и обратно гомотетична с точкой M_1' при одном и том же отношении подобия (черт. 103).

По определению 104 имеем:

$$\frac{(OM_1)}{(OM)} = k \quad \text{и} \quad \frac{(OM_1')}{(OM)} = k\,,$$

откуда

$$\frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{(OM_1')}{(OM)}\,,$$

$$(OM_1) = (OM_1') \qquad \text{(теорема 302).}$$

Теперь остается вспомнить определение 96.

Последняя теорема приводит к мысли доказать здесь одно предложение о симметрии, а затем уже ограничиться случаем прямой гомотетии, предоставляя читателю устанавливать соответствующие свойства для обратной гомотетии.

Теорема 389. *При преобразовании по симметрии относительно центра фигуры переходят в равные им, причем соответствующие отрезки параллельны и разно направлены.*

Действительно, возьмем две какие-нибудь точки A_1 и B_1 данной фигуры (черт. 104) и преобразуем их в точки A_1' и B_1', симметричные с ними относительно O. Тогда по определению 96 имеем равенства:

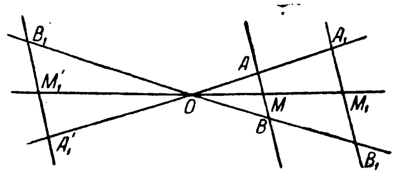
$$(OA_1) = (OA_1') \quad \text{и} \quad (OB_1) = (OB_1').$$

Отсюда нетрудно заключить, что:

$$\triangle A_1OB_1 = \triangle A_1'OB_1',$$

а потому

$$(A_1'B') = (A_1B_1).$$



Черт. 104

Таким образом, равенство данной и преобразованной фигур уже доказано (определение 103 при $k=1$). Далее имеем:

$$\angle OA_1B_1 = \angle OA_1'B_1',$$

причем точки B_1 и B_1' лежат по разные стороны от прямой A_1OA_1'.

Следовательно:

$$A_1B_1 \parallel A_1'B_1' \qquad \text{(теорема 308, п. 1)}$$

и определение 94 дает разно-направленность отрезков (A_1B_1) и $(A_1'B_1')$.

Теорема 390. *Гомотетичные фигуры подобны.*

Действительно, возьмем две какие-нибудь точки A и B данной фигуры (черт. 104) и преобразуем их с помощью прямой гомотетии в точки A_1 и B_1. По определению 104 имеем:

$$\frac{(OA_1)}{(OA)} = k \quad \text{и} \quad \frac{(OB_1)}{(OB)} = k,$$

откуда

$$\frac{(OA_1)}{(OA)} \quad \frac{(OB_1)}{(OB)}.$$

Теперь теорема 368 показывает, что

$$A_1B_1 \parallel AB,$$

а по теореме 367

$$\frac{(A_1B_1)}{(AB)} = \frac{(OA_1)}{(OA)} = k.$$

Если вспомнить определение 103, то последнее равенство и доказывает теорему.

Теорема 391. *При гомотетии прямая, проходящая через центр подобия, преобразуется в самое себя; всякий ее отрезок преобразуется в ее же отрезок, причем его длина умножается на k.*

Из определения 104 непосредственно вытекает, что точки прямой OM преобразуются в точки той же прямой. Пусть далее точки M, P и N преобразуются в точки M_1, P_1 и N_1 (черт. 103), так что

$$(OM_1) = k \cdot (OM), \quad (OP_1) = k \cdot (OP), \quad (ON_1) = k \cdot (ON).$$

Допустим теперь, что $(OM) < (ON)$ и что точка P лежит внутри отрезка (MN). Тогда, очевидно, имеем неравенства:

$$(OM) < (OP) < (ON).$$

Так как при гомотетии все такие отрезки умножаются на одно и то же положительное число k, то

$$(OM_1) < (OP_1) < (ON_1),$$

и точка P_1 лежит внутри отрезка (M_1N_1). Следовательно, отрезок (MN) преобразуется в отрезок (M_1N_1).

Наконец, из приведенных выше равенств получаем:

$$(ON_1) - (OM_1) = k \cdot [(ON) - (OM)],$$

или

$$(M_1N_1) = k \cdot (MN).$$

Теорема 392. *При гомотетии прямая, не проходящая через центр подобия, преобразуется в параллельную прямую; ее отрезок преобразуется в параллельный отрезок, причем длина его изменяется в k раз.*

На основании теорем 388 и 389 ограничимся случаем прямой гомотетии. Пусть дана прямая AB (черт. 104). Отметим на ней две точки A, B, и пусть они преобразуются в точки A_1, B_1, так что

$$\frac{(OA_1)}{(OA)} = k, \quad \frac{(OB_1)}{(OB)} = k, \text{ откуда } \frac{(OA_1)}{(OA)} = \frac{(OB_1)}{(OB)}.$$

Проведем прямую A_1B_1. На основании теоремы 368 $A_1B_1 \parallel AB$.

Пусть M есть какая-нибудь точка прямой AB и пусть прямая OM пересекает A_1B_1 в точке M_1 (теорема 310). На основании теоремы 367 имеем:

$$\frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{(OA_1)}{(OA)} = k,$$

причем M_1 должна принадлежать полупрямой OM, так как по построению и по теореме 306 все точки прямой A_1B_1 лежат по ту же сторону от параллели через O, что и точки прямой AB. Отсюда видно, что M_1 гомотетична с M и прямая AB преобразуется в прямую A_1B_1.

Возьмем теперь отрезок (AB) на данной прямой. Какая-нибудь его точка M преобразуется в точку M_1, и на основании определения угла (определение 12, теорема 38) можно утверждать, что M_1 принадлежит отрезку (A_1B_1).

Наконец, теорема 367 дает:

$$\frac{(A_1B_1)}{(AB)} = \frac{(OA_1)}{(OA)} = k.$$

Замечание. Если вспомнить определение 94, то нетрудно придти к выводу, что при прямой гомотетии отрезки (AB) и (A_1B_1) — одинаково, а при обратной — разно направлены (для последнего утверждения нужны теоремы 388 и 389).

Теорема 393. *При гомотетии три точки, не лежащие на одной прямой, преобразуются в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

Иначе получилось бы противоречие с теоремой 391 или 392, так как точка M получается из точки M_1 также с помощью гомотетии при том же центре подобия (но при отношении подобия равном $\frac{1}{k}$).

Теорема 394. *При гомотетии:*

1) *плоскость, проходящая через центр подобия, преобразуется в самое себя;*

2) *плоскость, не проходящая через центр подобия, преобразуется в параллельную плоскость;*

3) *четыре точки, не лежащие в одной плоскости, преобразуются в точки, обладающие тем же свойством.*

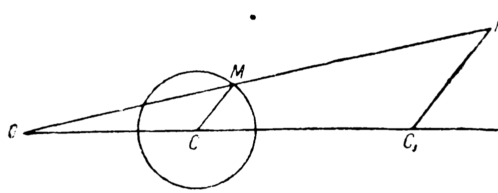
Рассматривая плоскость как пучок прямых, выводим п. 1 из теоремы 391, а п. 2 — из теорем 392 и 352; что же касается п. 3, то он доказывается от противного.

Теорема 395. *При гомотетии многоугольник преобразуется в подобный многоугольник с соответственно параллельными сторонами.*

Действительно, будем строить фигуру, гомотетичную с данным многоугольником. На основании теорем 394 (пп. 1 и 2), 391 и 392, 393 это будет также многоугольник со сторонами, параллельными сторонам данного. Пропорциональность сторон вытекает из теорем 391 и 392, а равенство углов — из теоремы 322. Наконец, ссылка на определение 53 и теорему 380 завершает доказательство.

Теорема 396. *При гомотетии многогранник преобразуется в подобный многогранник с соответственно параллельными ребрами и гранями.*

Сначала берем случай тетраэдра и доказываем предложение с помощью теорем 394, 393, 391, 392 и 383 (п. 1). К общему случаю переходим, присоединяя сюда теорему 384.



Черт. 105

Теорема 397. *При гомотетии окружность (шаровая поверхность) C (r) преобразуется в окружность (шаровую поверхность) C_1 (r_1),* где C_1 и C — гомотетичные точки, а $r_1 = k \cdot r$.

Действительно, пусть дана окружность или шаровая поверхность C (r) (черт. 105); даны также центр гомотетии O (который может также лежать и на окружности и внутри ее) и отношение подобия k. Если O совпадает с C, то теорема 391 сейчас же показывает, что гомотетичной фигурой будет окружность (шаровая поверхность), концентрическая с данной и имеющая радиус, равный $k \cdot r$.

В противном случае построим точки C_1 и M_1, гомотетичные с C и M, где M есть любая точка данного геометрического места; по теореме 391 или 392 имеем:

$$(C_1M_1) = k \cdot (CM).$$

Таким образом, для преобразованной фигуры отрезок (C_1M_1) будет иметь постоянную длину, откуда и следует теорема.

Теорема 398. *Два треугольника с соответственно параллельными сторонами всегда гомотетичны.*

Пусть даны $\triangle\triangle$ ABC и $A_1B_1C_1$ с параллельными сторонами (черт. 106). Эти треугольники подобны (теорема 376).

Проведем прямые AA_1 и BB_1. Возможны два случая:

1. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O.

На основании теоремы 367 пишем:

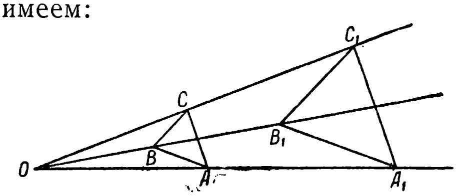
$$\frac{(OA_1)}{(OA)} = \frac{(A_1B_1)}{(AB)} = k,$$

где k — отношение подобия данных треугольников. Из подобия данных треугольников имеем:

$$\frac{(A_1C_1)}{(AC)} = k,$$

так что

$$\frac{(A_1C_1)}{(AC)} = \frac{(OA_1)}{(OA)}.$$



Черт. 106

Если точка O не лежит между A и A_1, то она не будет лежать между B и B_1 (теорема 364). Следовательно, точки B и B_1 лежат по одну сторону от прямой AA_1, а отрезки (AB) и (A_1B_1) будут одинаково направленными (определение 94). Тогда из равенства $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и теоремы 322 следует, что отрезки (AC) и (A_1C_1) будут также одинаково направленными, т. е. точки C и C_1 лежат по одну сторону от AA_1 (ссылка на теорему 322 ничего не дает в случае $\angle BAC = d$; но тогда мы поменяли бы местами точки A и B). Если же точка O лежит между A и A_1, то подобным же образом докажем, что точки C и C_1 лежат по разные стороны от AA_1. Словом, все условия теоремы 369 здесь выполняются, а потому прямая CC_1 тоже пройдет через точку O. Теперь вершины наших треугольников гомотетичны относительно точки O с отношением, равным k; гомотетия же самих треугольников вытекает из теоремы 395 в связи с уже доказанным.

2. Прямая $AA_1 \parallel BB_1$.

В таком случае и $CC_1 \parallel BB_1$, так как если бы эти прямые пересекались, то по предыдущему и прямая AA_1 прошла бы через их общую точку. Кроме того, по теореме 329 (п. 4):

$$(A_1B_1) = (AB), \quad (B_1C_1) = (BC), \quad (C_1A_1) = (CA),$$

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC.$$

О гомотетии, в прежнем смысле слова, здесь говорить нельзя; однако, легко видеть, что с помощью пучка прямых, параллельных AA_1, между точками данных треугольников можно установить одно-однозначное соответствие, при котором соответствующие отрезки будут равны.

Для того, чтобы избежать этого исключения, мы расширяем первоначальное понятие следующим добавочным определением.

Определение 105. *Аффинной гомотетией называется преобразование, при котором соответствующие точки лежат на параллелях некоторой связки, а соответствующие отрезки равны между собою* (о центре подобия условно говорят, что он находится на бесконечности).

Подобным же образом доказываются следующие два предложения.

Теорема 399. *Если в двух подобных плоских фигурах две пары соответственных отрезков с общей вершиной соответственно параллельны и в обеих парах одинаково* (разно) *направлены, то такие фигуры прямо* (обратно) *гомотетичны.*

Теорема 400. *Если в двух подобных фигурах три пары соответственных отрезков с общей вершиной и не лежащих в одной плоскости соответственно параллельны и в каждой паре одинаково* (разно) *направлены, то такие фигуры прямо* (обратно) *гомотетичны.*

Теорема 401. *Если даны две подобные фигуры, то существует третья, гомотетичная с одной и равная другой.*

Пусть даны две подобные фигуры F и F_1 с отношением подобия, равным k. Выбрав произвольную точку O за центр гомотетии, а число k — за ее отношение, построим фигуру F гомотетичную с F (в случае $k = 1$ придется иметь дело с аффинной гомотетией). Пусть паре точек M, N в фигуре F соответствуют в F_1 точки M_1, N_1, а в F_2 — точки M_2, N_2. Тогда имеем:

$$\frac{(M_1N_1)}{(MN)} = k \quad \text{и} \quad \frac{(M_2N_2)}{(MN)} = k,$$

откуда

$$(M_2N_2) = (M_1N_1),$$

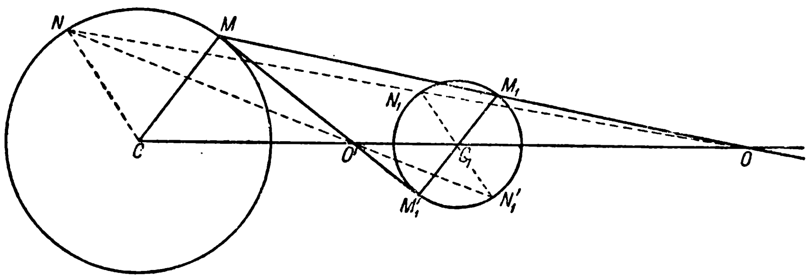
т. е. фигуры $F_2 = F_1$.

Замечание. Эту теорему иногда выражают словами: „две подобных фигуры можно привести в гомотетичное положение“.

Теорема 402. *Две окружности, лежащие в одной плоскости* (*или две шаровые поверхности*) *всегда обратно и прямо* (*или аффинно*) *гомотетичны.*

Пусть нам даны две окружности C (r) и $C_1(r_1)$ (черт. 107). Между их точками можно установить одно-однозначное соответствие двояким образом.

Возьмем на C (r) какую-нибудь точку M и соединим ее с центром; затем через C_1 проведем прямую, параллельную CM, которая пересечет $C_1(r_1)$ в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_1'. Теперь можно за точку, соответствующую точке M, принять точку M_1, лежащую на конце радиуса (C_1M_1), одинаково направленного с (CM); но точно так же можно за соответствующую точку принять M_1', лежащую на конце радиуса (C_1M_1'), разно направленного с радиусом (CM). Остановимся сначала на соответствии по второму способу и соединим отрезком точки M и M_1'. Определение 94 показывает, что этот отрезок пересекается с прямой CC_1 в некоторой точке O'; а по теореме 364 (стоит только через O' провести прямую, параллельную CM)



Черт. 107

эта точка будет лежать внутри отрезка (CC_1). В силу теоремы 367 имеем:

$$\frac{(CO')}{(C_1O')} = \frac{(CM)}{(C_1M_1')} = \frac{r}{r_1}.$$

Взяв еще какую-нибудь пару точек N и N_1', соответствующих друг другу по второму способу, при помощи теоремы 369 убедимся, что точки O', N, N_1' лежат на одной прямой, причем O' лежит внутри (NN_1') и, кроме того:

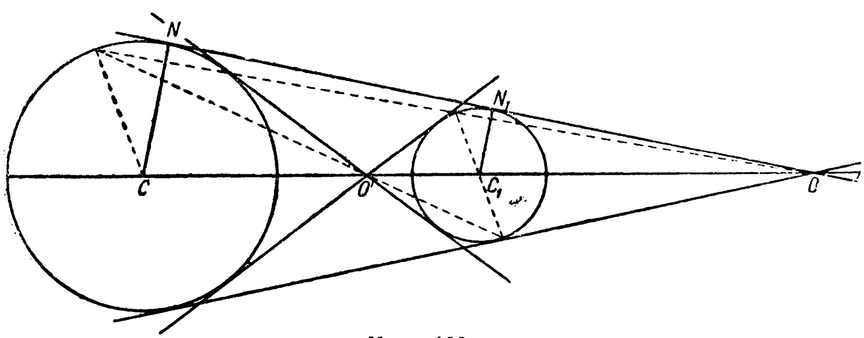
$$\frac{(O'N_1')}{(O'N)} = \frac{r_1}{r}, \text{ равно как } \frac{(O'M')}{(O'M)} = \frac{r_1}{r} \text{ (теорема 367).}$$

Все это доказывает, что точка O' является для данных окружностей центром обратной гомотетии с отношением подобия равным $\frac{r_1}{r}$.

Возьмем теперь соответствие по первому способу. Легко видеть, что прямые MM_1 и CC_1 могут оказаться параллельными тогда и только тогда, когда $r=r_1$ (теорема 329, п. 4 и теорема 331, п. 3). Пусть $r \neq r_1$; в этом случае MM_1 пересекает CC_1 в точке O, лежащей вне отрезка (MM_1), а также и вне отрезка (CC_1) (теорема 364).

На основании теоремы 369 придем к заключению, что точка O служит для данных окружностей центром прямой гомотетии с отношением подобия равным $\frac{r_1}{r}$. Если же $r = r_1$, то $MM_1 \parallel CC_1$ и данные окружности находятся в аффинной гомотетии.

Надо добавить, что в случае концентрических окружностей оба центра подобия сливаются с общим центром, как в этом нетрудно убедиться. Наконец, если вместо окружностей даны шаровые поверхности, то в предыдущем рассуждении надо только отбросить ограничение одной плоскостью.



Черт. 108

Замечание. Читателю рекомендуется рассмотреть расположение точек O и O' в различных случаях взаимного положения двух окружностей (см. § 24).

Определение 106. Построенные только что точки O и O' называются *центрами подобия* данных окружностей.

Теорема 403. *Если из центра подобия можно провести касательную к одной из двух данных окружностей, то эта прямая будет касательной и к другой, и обратно: общая касательная двух окружностей проходит через их центр подобия* (или параллельна линии центров).

Пусть из центра подобия O проведена прямая, касательная к C (r) в точке N (черт. 108), причем $CN \perp ON$; точка N_1, соответствующая точке N на C_1 (r_1), должна лежать на прямой ON и на конце радиуса, параллельного (CN) (теорема 402). Следовательно:

$$(C_1N_1) \perp ON \text{ в точке } N_1$$

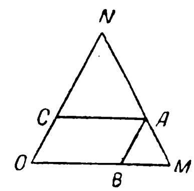
и ON будет касательной к C_1 (r_1). Обратная теорема вытекает из того, что если прямая NN_1 есть общая касательная, то $CN \parallel C_1N_1$, а потому точки N и N_1 будут соответственными (см. доказательство теоремы 402), и прямая NN_1 пройдет через центр подобия.

Замечание. К построению касательной мы вернемся ниже.

Теорема 404. *Если в параллелограмме $OBAC$ (черт. 109) стороны постоянны и на прямых OB и OC даны неизменные точки M и N, так что B лежит между O и M, а C — между O и N, и если три точки N, A, M лежат на одной прямой при некотором определенном значении $\angle O$, то при всяком значении $\angle O$ указанные три точки находятся на одной прямой, причем A лежит между N и M, и отношения*

$$\frac{(NA)}{(NM)} \text{ и } \frac{(AN)}{(AM)}$$

суть величины постоянные.



Черт. 109

Действительно, по теореме 364 точка A лежит между N и M, а потому точки A и M лежат по одну сторону от прямой ON, далее, при указанном значении $\angle O$ имеем:

$$\frac{(OM)}{(CA)} = \frac{(ON)}{(NC)} \qquad \text{(теорема 367)},$$

а так как все входящие сюда отрезки неизменны, то эта пропорция имеет место при всяком $\angle O$. Тогда на основании теоремы 369 точки N, A, M всегда лежат на одной прямой. Что же касается упомянутых в теореме отношений, то

$$\frac{(NA)}{(NM)} = \frac{(NC)}{(NO)} \text{ и } \frac{(AN)}{(AM)} = \frac{(NC)}{(OC)} \qquad \text{(теорема 367)},$$

откуда вытекает их постоянство.

Замечание 1. На этой теореме основано устройство пантографа, т. е. прибора, служащего для вычерчивания фигур, подобных данным.

Возьмем четыре стержня: (OM), (ON), (BA), (CA) и соединим их шарнирами в точках O, B, A, C так, чтобы $(OB) = (CA)$ и $(OC) = (BA)$. Если закрепить точку N, а точку A перемещать по данной фигуре, то точка M опишет фигуру, прямо гомотетичную с данной при отношении подобия равном $\frac{(ON)}{(NC)}$. Если же закрепить точку A, а точку N перемещать по данной фигуре, то получим фигуру, обратно гомотетичную с данной при отношении подобия, равном $\frac{(OC)}{(NC)}$.

Замечание 2. Учение о гомотетии приводит к так называемому методу подобия для решения задач на построение. Сущность метода заключается в том, что, отбрасывая часть данных, строим фигуру, подобную искомой; затем среди гомотетичных с ней отыскиваем такую, которая удовлетворяет уже всем требованиям. Следующий пример пояснит это общее замечание.

Пусть требуется построить треугольник по двум углам α и β и по периметру $2p$. Оставляя пока в стороне последнее условие, построим на произвольном отрезке (AB) треугольник, подобный искомому так, чтобы

$$\angle CAB = \alpha \text{ и } \angle CBA = \beta \text{ (черт. 106).}$$

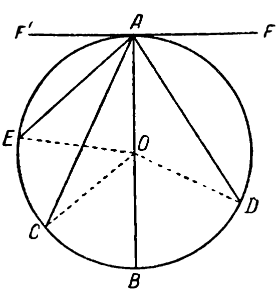
Приняв точку O за центр гомотетии (еще проще было бы взять одну из вершин треугольника), мы легко можем с помощью проведения параллелей строить треугольники, гомотетичные с $\triangle ABC$. Для того, чтобы получить искомый треугольник, проводим

$$C_1A_1 \parallel CA \text{ и } C_1B_1 \parallel CB$$

из такой точки C_1, что отношение $\frac{(OC_1)}{(OC)}$ равно отношению данного отрезка $2p$ к периметру $\triangle ABC$.

§ 33. Углы, связанные с окружностью

Определение 107. Возьмем окружность и будем рассматривать ее хорды, касательные и секущие. Под углом, образованным двумя из этих линий, понимаем всякий угол, вершина которого лежит в точке их пересечения, а сторонами служат полупрямые, содержащие точки окружности (примеры увидим ниже). Если хорды пересекаются на окружности, то образованный ими угол называется *вписанным* (например $\angle CAD$ на черт. 110); два другие конца этих хорд делят окружность на две дуги; та, которая содержит вершину угла (например, $\smile CAD$), называется *вмещающей* данный угол; о другой же дуге говорят, что рассматриваемый угол на нее опирается (например $\smile CBD$ и $\angle CAD$ на черт. 110). Угол между двумя касательными называется *описанным* около окружности.



Черт. 110

Теорема 405. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу.*

При доказательстве различаем три случая:

1. Центр окружности лежит на одной из хорд; этот случай представлен $\angle BAC$ на черт. 110. Проведем радиус (OC). Так как O лежит между A и B, то полупрямые OA и OB противоположны и $\angle BOC$ будет внешним для $\triangle AOC$.

На основании теоремы 324 имеем:

$$\angle BOC = \angle OAC + \angle ACO = 2 \angle BAC \qquad \text{(теорема 132).}$$

2. Центр лежит внутри вписанного угла ($\angle CAD$ на черт. 110). Полупрямая AO пересекает секущий отрезок (CD) данного угла, а потому лежит внутри центрального $\angle COD$, опирающегося на ту же дугу. Следовательно, прямая AOB делит оба угла на две части, к которым применяется п. 1:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \text{ и } \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD.$$

Складывая, получаем:

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD.$$

3. Центр лежит вне вписанного угла ($\angle CAE$ на черт. 110). Полупрямая AO теперь не пересекает (CE), а потому полупрямые AE и AC лежат по одну сторону от прямой AOB. Тогда в силу теоремы 48 одна из них, например, AC, лежит внутри угла, образованного другой (внутри $\angle BAE$). Следовательно:

$$\angle CAE = \angle BAE - \angle BAC.$$

Применяя п. 1, получаем:

$$\angle CAE = \frac{1}{2} \angle COE.$$

Замечание. Вспоминая теоремы 304 и 305, можно сказать, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. В дальнейшем, для сокращения речи, будем пользоваться последней формулировкой.

Как следствие предыдущей теоремы, можно утверждать, что углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

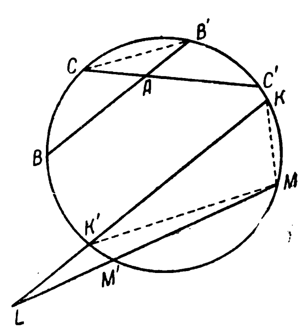
Теорема 405 была доказана подробно; что же касается последующих, то там будет указана только основа доказательства, а подробное его развитие предоставляется читателю.

Теорема 406. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен прямому,* и обратно: вписанный прямой угол опирается на диаметр.

Предложение вытекает из теоремы 405.

Теорема 407. *Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.*

Таковым является $\angle DAF$ на черт. 110. Доказательство основано на том, что этот угол можно рассматривать как разность углов BAF и BAD; первый, будучи прямым, измеряется половиной полуокружности BDA, а второй по теореме 405 — половиной $\smile BD$.



Черт. 111

Теорема 408. *Угол между хордами измеряется полусуммой двух дуг, заключенных: одна — между его сторонами, а другая — между противоположными лучами.*

Возьмем $\angle BAC$ на черт. 111. Доказательство основано на том, что по теореме 324 имеем:

$$\angle BAC = \angle BB'C + \angle B'CC',$$

и дело сводится к двукратному применению теоремы 405.

Теорема 409. *Угол между секущими, или между секущей и касательной, или между двумя касательными измеряется полуразностью дуг, заключающихся между сторонами угла.*

Рассмотрим $\angle KLM$ между секущими (черт. 111). Доказательство основано на том, что, проведя отрезки $(K'M)$ и (KM), найдем:

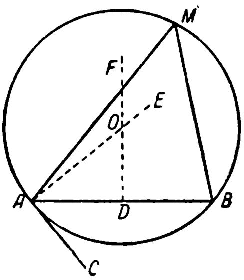
$$\angle KLM = \angle KK'M - \angle LMK'.$$

Дело сводится к применению теоремы 405 к этим углам. Другие случаи рассматриваются подобным же образом.

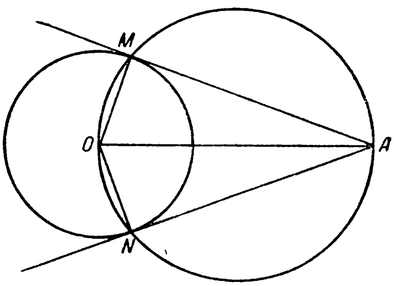
Замечание 1. На теореме 407 основано построение дуги, вмещающей данный угол. Пусть на отрезке (AB) (черт. 112) надо построить дугу, вмещающую $\angle BAC$. В точке A к прямой AC восставим перпендикуляр AE и еще восставим перпендикуляр к (AB) в его середине (прямая DF). Эти перпендикуляры пересекутся в точке O (теорема 316), которая и будет центром искомой окружности. В силу теорем 405 и 407 любой $\angle AMB$

будет равен $\angle BAC$. Если данный угол прямой, то искомая дуга будет полуокружностью с диаметром (AB).

Замечание 2. Теорема 406 дает простой способ проведения касательной. Пусть требуется из внешней точки A провести касательные к окружности с центром O (черт. 113). Построим окружность на (OA), как на диаметре.



Черт. 112



Черт. 113

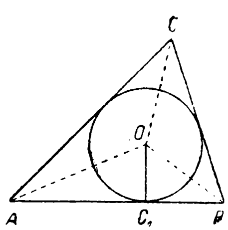
Наши окружности пересекутся в точках M и N (теоремы 258, 254), и прямые AM и AN будут искомыми касательными (теоремы 406, 245). Касательных будет только две, так как каждая точка касания является точкой пересечения наших окружностей. Умея проводить касательную к одной окружности, можно решить задачу о проведении общей касательной к двум окружностям; для этого надо только вспомнить теорему 403.

§ 34. Замечательные точки в треугольнике

Определение 108. *Многоугольник (или многогранник) называется описанным около круга (шара), если его стороны (грани) суть касательные к кругу (шару) во внутренних своих точках;* круг (шар) в таком случае называется вписанным в данный многоугольник (многогранник).

Теорема 410. *В данный треугольник можно вписать один и только один круг.*

Действительно, если в треугольник можно вписать круг, то его центр должен находиться от всех трех сторон на расстоянии, равном радиусу (теорема 247, п. 2); следовательно, искомый центр должен лежать на равноделящих углов треугольника (теорема 179), которые все три пересекаются в одной точке (теорема 180). Отсюда ясно построение искомого круга и его единственность (черт. 114); остается только доказать, что точки касания будут лежать внутри сторон треугольника.



Черт. 114

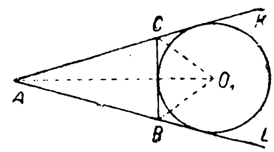
В самом деле, точка O лежит внутри треугольника, который теперь распадается на $\triangle\triangle$ OAB, OBC, OCA (теорема 58); отрезок (OC_1) есть высота $\triangle OAB$, а так как углы OAB и OBA, будучи половинами углов A и B данного треугольника, необходимо оба — острые (теорема 156), то основание C_1 указанной высоты упадет внутрь стороны (AB) (теорема 172), а точка C_1 и есть точка касания. Точно так же рассматриваются и две другие точки касания.

Одну замечательную точку треугольника мы уже получили: это — центр вписанного круга (она же — точка пересечения его биссектрис).

Теорема 411. *Биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса его третьего угла пересекаются в одной точке.*

Действительно, проведем биссектрисы внешних углов $\triangle ABC$ при точках B и C (черт. 115). На основании теоремы 312 эти прямые пересекутся в некоторой точке O_1, которая находится на одинаковом расстоянии от всех трех сторон указанных углов (теорема 179); в частности, точка O_1 находится на одном и том же расстоянии от полупрямых CK и BL, которые являются частями полупрямых AC и AB (теорема 27, п. 2), образующих внутренний $\angle A$; поэтому точка O_1 должна лежать на биссектрисе этого угла.

Подобным же образом рассматриваются и два других случая, приводящие к новым двум точкам O_2 и O_3.



Черт. 115

Теорема 412. *Существуют три и только три круга, касающиеся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.*

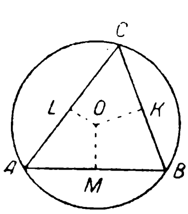
Легко видеть, что центр такого круга должен находиться в одной из точек, рассмотренных в теореме 411; определение радиуса труда не представляет. В частности, круг, описанный из центра O_1, радиусом, равным расстоянию этой точки от прямой BC (черт. 115), коснется продолжений сторон (AB) и (AC), а также стороны (BC) во внутренней точке; последнее вытекает из того, что наш круг должен коснуться и полупрямых BC и CB, у которых общей частью будет отрезок (BC) (теорема 27, п. 2).

Определение 109. Три круга, рассмотренные в теореме 412, называются *вне-вписанными* для данного треугольника. Таким образом, получены дальнейшие три замечательные точки в треугольнике — центры вне-вписанных кругов.

Теорема 413. *Перпендикуляры, восставленные в серединах сторон треугольника (в его плоскости), пересекаются в одной точке.*

Возьмем $\triangle ABC$ и в серединах M и K сторон (AB) и (BC) построим указанные перпендикуляры (черт. 116); они пересекутся в некоторой точке O (теорема 316), которая находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, B и C (теорема 178); но, одинаково отстоя от точек A и C, эта точка O должна лежать и на перпендикуляре, восставленном в середине L стороны (AC) (теорема 178).

Определение 110. *Многоугольник (многогранник) называется вписанным в круг (шар), если его вершины лежат на этом последнем,* о круге же (или шаре) говорят, что он описан около многоугольника (многогранника).



Черт. 116

Теорема 414. *Около треугольника можно описать один и только один круг,* центром которого служит точка теоремы 413.

Доказательство вытекает из теорем 317, 178 и 413.

Эта теорема дает нам новую замечательную точку для треугольника — центр описанного круга.

Теорема 415. *Если центр описанного круга лежит внутри треугольника, то этот треугольник остроугольный; если он лежит на стороне треугольника, то — прямоугольный; если же он лежит вне треугольника, то — тупоугольный.*

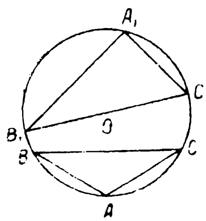
1. Пусть центр O лежит внутри треугольника (черт. 116).

На основании теоремы 56 точки B и O лежат по одну сторону от AC; поэтому и точка A', диаметрально противоположная для A и лежащая на полупрямой AO, будет лежать с B по одну сторону от AC (теорема 33). Отсюда вытекает, что точка A' принадлежит дуге, вмещающей $\angle ABC$ (определение 107), а потому дуга, на которую опирается этот угол, будет меньше полуокружности (теорема 229, 227). На основании теоремы 405 этот угол будет острым. То же самое можно утверждать и для двух остальных углов треугольника.

2. Пусть точка O лежит на стороне $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 117); теорема 406 показывает, что $\triangle A_1B_1C_1$ — прямоугольный.

3. Пусть, наконец, центр O лежит вне $\triangle ABC$ (черт. 117).

Среди углов треугольника найдутся два таких, что точка O не будет лежать внутри их (см. замечание к теореме 55); пусть это будут углы ABC и ACB. Оба эти угла будут острыми. В самом деле, прямым ни один из них не может быть, так как иначе центр лежал бы на стороне треугольника (теорема 406); а если бы один из них, например, $\angle ABC$, оказался тупым, то прямой угол составлял бы его часть, и центр круга лежал бы на внутреннем луче угла ABC, что противоречит заданию. Далее, $\smile BC$, которая вмещает $\angle BAC$, точкой A делится на две части: $\smile AB$ и $\smile AC$ (теорема 227); точка B', диаметрально противоположная точке B, не может лежать ни на $\smile AB$, так как тогда $\angle ACB$ был бы тупым, ни на $\smile AC$, так как тогда точка O лежала бы внутри $\angle ABC$. Следовательно, точка B' принадлежит той $\smile BC$, на которую опирается $\angle BAC$, откуда явствует, что $\angle BAC$ тупой.



Черт. 117

Теорема 416. *Если треугольник остроугольный, то центр описанного круга лежит внутри его, если треугольник прямоугольный, то — на его стороне; если треугольник тупоугольный, то — вне его.*

Доказывается с помощью обращения по разделению.

Теорема 417. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1* (считая от вершины).

Проведем в $\triangle ABC$ две медианы (AA_1) и (BB_1) (черт. 118); они пересекаются во внутренней точке M, как это легко вывести из постулата Паша. Разделим отрезки (AM) и (BM) пополам в точках A_2 и B_2 и проведем отрезки: (A_1B_1), (B_1A_2), (A_2B_2), (B_2A_1).

На основании теоремы 341 имеем:

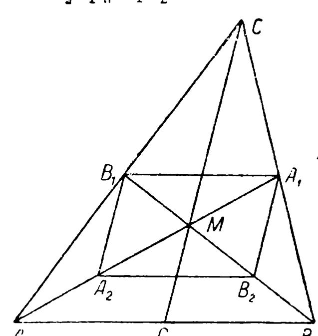
$$A_1B_1 \parallel AB \text{ и } A_2B_2 \parallel AB, \text{ так что } A_1B_1 \parallel A_2B_2;$$

$$A_2B_1 \parallel CM \text{ и } A_1B_2 \parallel CM, \text{ так что } A_2B_1 \parallel A_1B_2.$$

Теперь легко видеть, что четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$ есть параллелограмм. Но тогда

$$(A_2M) = (A_1M) \text{ и } (B_2M) = (B_1M)$$

(теорема 329, п. 5).



Черт. 118

Таким образом, медиана (AA_1) точками A_2 и M разделена на три равные части, откуда:

$$\frac{(AM)}{(A_1M)} = 2, \text{ и точно так же } \frac{(BM)}{(B_1M)} = 2.$$

Если теперь рассмотрим медианы (AA_1) и (CC_1), то точно так же найдем, что они пересекаются в точке M', причем:

$$(A_1M') = (A_1M) \qquad \text{(теорема 127)},$$

но в таком случае M' совпадает с M (аксиома XX).

Определение 111. Точка пересечения медиан треугольника называется его *центром тяжести* (имеется в виду известная теорема физики).

Теорема 418. *Если через вершины треугольника провести прямые, параллельные его сторонам, то получим треугольник, обратно гомотетичный с данным относительно общего центра тяжести с отношением подобия равным 2.*

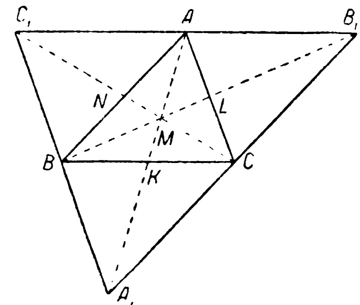
Сделаем указанное построение с $\triangle ABC$ (черт. 119). В силу теоремы 310 эти прямые попарно пересекаются и образуют $\triangle A_1B_1C_1$, который будет гомотетичен данному (теорема 398). Далее имеем:

$$(AB) = (B_1C) \text{ и } (AB) = (A_1C) \qquad \text{(теорема 329, п. 4)},$$

откуда следует, что

$$(B_1C) = (A_1C)$$

и точка C есть середина отрезка (A_1B_1). Таким же свойством обладают точки A и B.



Черт. 119

Следовательно, отрезки (AA_1), (BB_1), (CC_1) суть медианы $\triangle A_1B_1C_1$ и, как таковые, пересекаются в его центре тяжести M, который и будет центром гомотетии. Эта точка лежит внутри упомянутых отрезков, так что гомотетия будет обратной, а отношения подобия

$$\frac{(MA_1)}{(MA)} = \frac{(MB_1)}{(MB)} = \frac{(MC_1)}{(MC)} = 2 \qquad \text{(теорема 417)}.$$

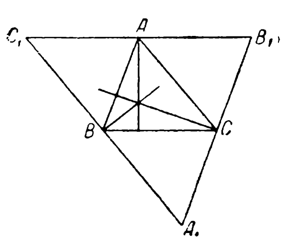
Наконец, теорема 370 показывает, что точки K, L, N будут серединами сторон $\triangle ABC$, а потому точка M будет и для него центром тяжести.

Теорема 419. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Действительно, высоты $\triangle ABC$ будут для $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 120) перпендикулярами, восставленными в серединах его сторон, а эти перпендикуляры пересекаются в одной точке (теорема 413).

Определение 112. *Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром или точкой высот.*

Теорема 420. *Центр тяжести треугольника, центр описанного круга и ортоцентр лежат на одной прямой* („прямая Эйлера").



Черт. 120

Действительно, возьмем два треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 119), о которых шла речь в теореме 418. Опишем около $\triangle ABC$ окружность, и пусть ее центром служит точка O (на чертеже не обозначенная); построим далее окружность, обратно гомотетичную с этой относительно точки M с отношением подобия равным 2; центры обеих окружностей будут гомотетичными точками (теорема 397), так что они лежат на одной прямой с M. Но если первая окружность проходит через точки A, B, C, то вторая окружность содержит точки A_1, B_1, C_1, им гомотетичные (теорема 418), так что вторая окружность будет описана около $\triangle A_1B_1C_1$. Но при доказательстве теоремы 419 мы видели, что центром H этой окружности будет ортоцентр данного треугольника (см. черт. 120). Таким образом, точки O, M, H лежат на одной прямой.

Чтобы дать пример вписанного и описанного многогранника, укажем две следующих теоремы, предоставив их доказательство читателю.

Теорема 421. *В тетраэдр можно вписать один и только один шар.* (Надо исходить из теоремы 179, которая с помощью теоремы 195 переносится на двугранные углы.)

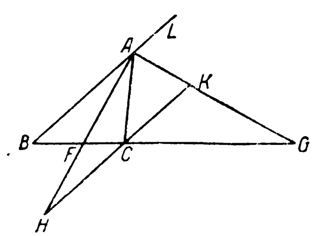
Теорема 422. *Около тетраэдра можно описать один и только один шар.* (Надо сначала обобщить теорему 178 на пространство: получается плоскость, перпендикулярная отрезку в его середине.)

Построение этого шара решит такую задачу: провести шаровую поверхность через четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Замечание. Об одной замечательной точке в тетраэдре см. приложение III, задачи № 35—37.

§ 35. Пропорциональные отрезки в треугольнике и в круге

Теорема 423. *Биссектриса внутреннего* (внешнего) *угла треугольника делит противоположную сторону внутренним* (внешним) *образом на части, пропорциональные двум другим его сторонам.* (Исключение представляет биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника).



Черт. 121

Действительно, возьмем $\triangle ABC$ и проведем равноделящие внутреннего $\angle BAC$ и внешнего $\angle CAL$ (черт. 121); первая, будучи внутренним лучом $\angle BAC$, пересекает его секущий отрезок (BC) в некоторой точке F. Что же касается второй, то она может оказаться параллельной BC, но это будет тогда и только тогда, когда $\triangle ABC$ равнобедренный $[(AB) = (AC)]$. В самом деле, в этом случае биссектрисы AF и AK взаимно перпендикулярны, так как угол между ними составлен из половин двух смежных углов, и дело сводится к теоремам 170 и 314. В дальнейшем предполагается, что точка A не есть вершина равнобедренного треугольника, так что биссектриса внешнего угла пересекает BC в некоторой точке G. Проведем через точку C прямую, параллельную AB; эта прямая пересечет обе наши биссектрисы (теорема 310). Будучи расположена по отношению к прямой AB с той же стороны, что и точки C и F (теорема 306), эта параллель должна пересечь именно полупрямую AF в некоторой точке H, которая не может лежать между A и F, так как тогда, по постулату Паша, прямая CH пересекала бы прямую AB, что невозможно. Следовательно, точка F лежит между A и H. Точно так же указанная параллель должна проходить внутри $\angle ACG$, так как иначе она пошла бы внутри $\angle ACB$ (теорема 46) и опять пересекала бы AB; а потому она пересекает (AG) в некоторой точке K.

Далее, имеем:

$$\angle AFB = \angle HFC \qquad \text{(теорема 135)},$$

$$\angle BAF = \angle CHF \qquad \text{(теорема 311, п. 1)},$$

$$\angle AKC = \angle KAL \text{ (}L\text{ — на продолжении }(BA)\text{)} \quad \text{(теорема 311, п. 1)}.$$

Первые два равенства дают:

$$\triangle ABF \sim \triangle HCF,$$

откуда

$$\frac{(BF)}{(CF)} = \frac{(AB)}{(HC)} .$$

Кроме того, из теоремы 367 непосредственно выводим:

$$\frac{(BG)}{(CG)} = \frac{(AB)}{(CK)} .$$

В силу условий теоремы:

$$\angle BAF = \angle CAF, \text{ так что } \angle CHF = \angle CAF,$$

$$\angle CAK = \angle LAK, \text{ так что } \angle CAK = \angle CKA.$$

Таким образом, оба $\triangle$ ACH и ACK равнобедренны, откуда

$$(HC) = (AC) = (CK).$$

Подставляя в предыдущие пропорции, получаем:

$$\frac{(BF)}{(CF)} = \frac{(AB)}{(AC)}; \frac{(BG)}{(CG)} = \frac{(AB)}{(AC)} .$$

Замечание. Отметим, что построение, сделанное на черт. 121, дает ключ к решению такой задачи: разделить отрезок в данном отношении внутренним и внешним образом.

Теорема 424. *Если прямая, исходящая из вершины треугольника, делит его основание внутренним (внешним) образом на части, пропорциональные двум другим сторонам, то эта прямая есть биссектриса внутреннего (внешнего) угла треугольника.*

В самом деле, пусть в $\triangle ABC$ точки F и G обладают указанными свойствами (черт. 121). Проводим через точку C прямую, параллельную AB, и делаем те же заключения о точках пересечения H и K, что и выше. Из подобия треугольников и из теоремы 367 попрежнему имеем:

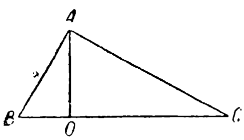
$$\frac{(BF)}{(CF)} = \frac{(AB)}{(HC)} \text{ и } \frac{(BG)}{(CG)} = \frac{(AB)}{(KC)} .$$

Сопоставляя эти пропорции с данными, выводим:

$$(HC) = (AC) = (KC),$$

так что $\triangle\triangle$ ACH и ACK равнобедренные. Отсюда заключаем: $\angle CAF = \angle CHF = \angle BAF$, так что AF — биссектриса $\angle BAC$; $\angle CAK = \angle CKA = \angle LAK$, так что AK — биссектриса $\angle LAC$.

Определение 113. Если три значения величины a, b, c связаны пропорцией $a : b = b : c$, то b называется средней пропорциональной между a и c.



Черт. 122

Теорема 425. *Если в прямоугольном треугольнике опустить высоту из вершины прямого угла, то эта высота есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, а каждый катет — средняя пропорциональная между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу.*

Основание названной высоты лежит внутри гипотенузы (теорема 172). На основании теоремы 323

$$\angle ABO = \angle CAO \text{ (так как оба острые, черт. 122).}$$

Следовательно,

$$\triangle ABO \sim \triangle CAO \text{ (теорема 377, п. I),}$$

откуда

$$(BO) : (AO) = (AO) : (OC).$$

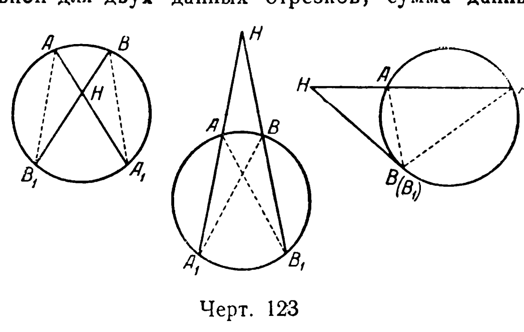
Две другие пропорции получим из рассмотрения подобных треугольников:

$$\triangle ABC \text{ и } \triangle OBA, \ \triangle ABC \text{ и } \triangle OAC.$$

Теорема 426. *Если из какой-либо точки окружности опустим перпендикуляр на диаметр, то этот перпендикуляр есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра, а хорда, соединяющая данную точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и своей проекцией на диаметр.*

Доказывается на основании теорем 406 и 425.

Замечание. На основании теоремы 426 решается задача о построении средней пропорциональной для двух данных отрезков; сумма данных отрезков принимается за диаметр окружности и в точке их соединения восставляется перпендикуляр до пересечения с окружностью.



Черт. 123

Теорема 427. Если через точку H, не лежащую на данной окружности, проведем две прямые, пересекающие эту окружность соответственно в точках A и A_1 B и B_1, то отрезки (HA), (HA_1), (HB), (HB_1) образуют пропорцию, причем крайними членами ее служат отрезки одной прямой, а средними — отрезки другой (различные случаи см. на черт. 123).

Наметим кратко сущность доказательства: проведем вспомогательные отрезки (AB_1) и (A_1B) и на основании теоремы 405 (следствие) и 373 убедимся, что

$$\triangle HAB_1 \sim \triangle HBA_1,$$

откуда

$$\frac{(HA)}{(HB)} = \frac{(HB_1)}{(HA_1)}.$$

Замечание. В случае, когда одна из данных прямых есть касательная, теорему выражают словами: *отрезок касательной есть средняя пропорциональная между всей секущей и ее внешней частью.*

Теорема 428. Если на двух прямых, пересекающихся в точке H, отложены отрезки (HA) и (HA_1), (HB) и (HB_1), причем или обе пары точек A и A_1, B и B_1 лежат по одну сторону от H, или обе пары — по разные стороны от H, и если имеет место пропорция

$$(HA):(HB) = (HB_1):(HA_1),$$

то четыре точки A, A_1, B, B_1 лежат на одной окружности.

Для доказательства проводим окружность через точки A, A_1, B и устанавливаем (на основании теоремы 427 и свойств пропорции), что четвертая точка пересечения совпадет с точкой B_1.

§ 36. Приложение алгебры к геометрии

Учение об измерении геометрических величин (в частности — отрезков) дает возможность применять алгебру к геометрическим вопросам. Именно, выбрав определенную единицу длины и выразив длину каждого отрезка числом, можно различные геометрические соотношения между отрезками переводить на язык алгебры; в частности, теорема 301 позволяет переходить от пропорций геометрических (между отрезками) к пропорциям алгебраическим (между числами, выражающими их длины), которые можно дальше преобразовывать по правилам алгебры. В этом заключается одна сторона приложения алгебры к геометрии.

Для сокращения речи в настоящем параграфе мы условимся вместо выражений:

число, измеряющее сторону треугольника, квадрат числа, измеряющего такой-то отрезок, произведение чисел, измеряющих такие-то отрезки и т. п., — говорить короче: сторона треугольника, квадрат отрезка, произведение отрезков и т. п.

Числа, измеряющие отрезки, будем обозначать теми же символами, что и самые отрезки: (AB), (BC), ... Это замечание — существенно, так как, например, „произведение двух отрезков“ иначе не будет иметь никакого смысла.

После этих общих замечаний, переведем на язык алгебры теоремы § 35 и выведем из них некоторые следствия.

Теорема 429. Если в $\triangle ABC$, прямоугольном при A, провести высоту (AD), то

$$(AD)^2 = (BD)\cdot(DC),$$

$$(AB)^2 = (BC)\cdot(BD);\quad (AC)^2 = (BC)\cdot(CD).$$

Доказывается на основании теорем 425, 301 и свойств алгебраических пропорций.

Теорема 430. *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Для доказательства складываем два последних равенства теоремы 429.

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)\cdot[(BD) + (CD)];$$

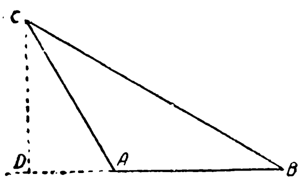
но точка D лежит между B и C (теорема 172), так что для отрезков имеем:

$$(BD)+(CD)=(BC) \text{ (теорема 106)},$$

и такое же равенство имеет место и для измеряющих их чисел (теорема 295). Подставляя, получаем:

$$(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2.$$

Теорема 431. *Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого (тупого) угла, равен сумме квадратов двух других сторон минус (плюс) удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой стороны на прямую первой.*



Черт. 124

Остановимся сначала на стороне (AC), лежащей против острого $\angle ABC$ (черт. 124). Если и $\angle BAC$ острый, то основание высоты (CD) упадет внутрь стороны (AB), и получится равенство:

$$(AD)=(AB)-(BD).$$

Если же $\angle BAC$ тупой, то точка D лежит вне (AB) (теорема 172) и притом так, что A лежит между B и D. Действительно, если бы B лежала между A и D, то $\angle ABC$, будучи внешним для $\triangle CBD$, оказался бы тупым, что противоречит заданию. В этом втором случае имеем соотношение:

$$(AD)=(BD)-(AB).$$

Значит, вообще можно написать:

$$(AD)=\pm[(AB)-(BD)],$$

где (BD) есть как раз проекция (BC) на прямую AB.

Далее, пишем:

$$(AC)^2=(AD)^2+(CD)^2 \text{ (теорема 430)},$$

$$(AC)^2=(AB)^2-2(AB)\cdot(BD)+(BD)^2+(CD)^2,$$

$$(BD)^2+(CD)^2=(BC)^2,$$

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2-2(AB)\cdot(BD).$$

Надо прибавить, что эта зависимость остается в силе и при $\angle BAC=d$, так как тогда $(AB)=(BD)$, а потому

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2-2(AB)^2=(BC)^2-(AB)^2,$$

как это и должно быть в силу теоремы 430.

Перейдем теперь к стороне (BC), лежащей против тупого $\angle BAC$; положение точки D было уже выяснено выше, и мы находим:

$$(BC)^2=(BD)^2+(CD)^2,$$

$$(CD)^2=(AC)^2-(AD)^2,$$

$$(BD)=(AB)+(AD),$$

где (AD) есть проекция (AC) на прямую AB. Подставляя, получаем:

$$(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2+2(AB)\cdot(AD).$$

Если, наконец, возьмем сторону, лежащую против прямого угла, то обе формулы приводят к теореме 430, так как в этом случае

$$\text{или } (BD) = 0 \text{ или } (AD) = 0.$$

Теорема 432. В $\triangle ABC$ угол $A \lesseqgtr d$, смотря по тому, будет ли

$$(AB)^2 + (AC)^2 \lesseqgtr (BC)^2.$$

В самом деле, если $\angle A$ задан, то утверждение вытекает из теорем 430 и 431; обратное получаем при помощи обращения по разделению.

Замечание. Например, треугольник со сторонами 3, 4, 5 будет прямоугольным, так как $5^2 = 3^2 + 4^2$; этот треугольник известен с глубокой древности, и им пользовались для практических целей.

Теорема 433. Если из точки H, не лежащей на окружности, проведена произвольная прямая, пересекающая эту окружность в точках A и A_1, то произведение: $(HA) \cdot (HA_1)$ есть число постоянное (при данной точке H).

Действительно, берем пропорцию теоремы 427, переходим к пропорции между числами и приравниваем произведения крайних и средних.

Замечание. Точки A и A_1 могут совпасть, если H лежит вне окружности: тогда получается, как частный случай, предложение: *произведение секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное, равное квадрату касательной (проведенной из той же точки).*

Другая сторона приложения алгебры к геометрии заключается в решении геометрических задач с помощью алгебраических уравнений. Обозначив, например, длину искомого отрезка через x, на основании данных задачи составляем уравнение, которому должен удовлетворять этот x. Найдя x, мы вполне определим искомый отрезок, как это следует из теоремы 292; конечно, необходимо исследовать, удовлетворяет ли полученное число геометрическим условиям задачи. Но та же самая зависимость, которая показывает связь между числами, измеряющими искомый и данные отрезки, дает возможность геометрически построить искомый отрезок, исходя из данных отрезков. Приведем для примера несколько основных построений. Так, если

$$x = \frac{a \cdot b}{c},$$

то x строится как четвертая пропорциональная к трем данным отрезкам. Если

$$x = \sqrt{ab},$$

то x строится как средняя пропорциональная. Если

$$x = \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

то x строится, как гипотенуза или катет прямоугольного треугольника, и т. д.

Не входя в дальнейшие подробности, поясним изложенное решением одной известной задачи:

Разделить данный отрезок в крайнем и среднем отношении (другими словами, найти такую часть отрезка, которая была бы средней пропорциональной между всем отрезком и другой частью).

Пусть дан отрезок a (буквой a обозначаем также его длину). Обозначив искомую часть через x, имеем:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

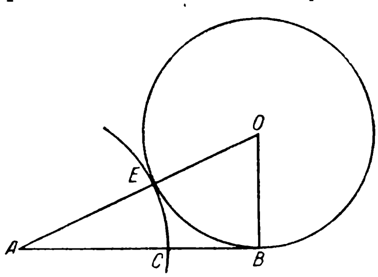
или

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \qquad (*).$$

Легко видеть, что нижний знак дает отрицательное значение для x, которое здесь не годится, а верхний — положительное и притом меньшее a. Желая построить x, зная a, из формулы (*) усматриваем, что сначала надо построить прямоугольный треугольник с катетами a и $\frac{a}{2}$ и затем отнять $\frac{a}{2}$ от его гипотенузы. Это построение сделано на черт. 125, где



Черт. 125

$(AB) = a$, $OB \perp AB$, $(OB) = \frac{a}{2}$, $(AE) = (AC) = x$.

Деление отрезка в крайнем и среднем отношении называется также „золотым делением“; оно часто встречается в природе и в произведениях изобразительного искусства (конечно, в приближенном виде). Наконец, его называют еще „непрерывным делением“ на основании следующего предложения.

Теорема 434. Если отрезок (AB) разделен золотым делением на отрезки (AC) и (CB), то при золотом делении отрезка (AC) бо̀льшая часть будет равна отрезку (BC).

Действительно, из пропорции

$$\frac{(AB)}{(AC)} = \frac{(AC)}{(CB)}$$

выводим:

$$\frac{(AB)-(AC)}{(AC)} = \frac{(AC)-(CB)}{(CB)},$$

$$\frac{(CB)}{(AC)} = \frac{(AC)-(CB)}{(CB)},$$

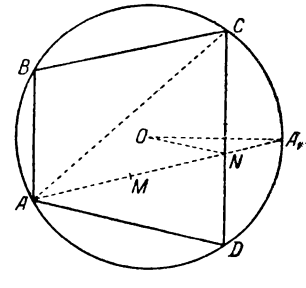
или

$$\frac{(AC)}{(CB)} = \frac{(CB)}{(AC)-(CB)}.$$

§ 37. Вписанные и описанные многоугольники

Теорема 435. *Все точки вписанного многоугольника* (за исключением его вершин) *лежат внутри описанного круга.*

Пусть дан многоугольник $ABCD$, вписанный в круг (черт. 126). На основании определений 110, 70 и теоремы 225 внутренние точки его сторон и диагоналей будут внутренними и для круга. Далее, имея в виду определение 24, возьмем какую-нибудь точку M, лежащую внутри трансверсали (AN), где N — точка стороны (CD); в силу теоремы 244 прямая AN пересекает окружность еще в одной точке A_1. Названная выше точка N должна лежать внутри хорды (AA_1), так как иначе $\angle OA_1N$, как внешний угол равнобедренного $\triangle OAA_1$, был бы тупым, а потому (ON) было бы больше (OA_1), что противоречит положению точки N внутри окружности [в случае если точки O, N, A_1 лежат на одной прямой, утверждение следует из того, что $(ON) < (OA_1)$]. Если же N лежит внутри (AA_1), то и M является его внутренней точкой (теорема 18), и теорема 225 решает вопрос.



Черт. 126

Замечание. Выше было доказано (теорема 317), что через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность; но для того, чтобы существовала окружность, проходящая через четыре данные точки, эти последние должны быть расположены особым образом, как это видно из следующей теоремы.

Теорема 436. *Для того, чтобы выпуклый четыреугольник $ABCD$ был вписан в окружность, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:*

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 2d.$$

Действительно, пусть дан вписанный четыреугольник $ABCD$ (черт. 126). Проведя диагональ (AC) и вспоминая теорему 63 и определение 107, убеждаемся, что углы B и D опираются на взаимно дополнительные дуги; а в таком случае теорема 405 приводит к равенству:

$$\angle B + \angle D = 2d.$$

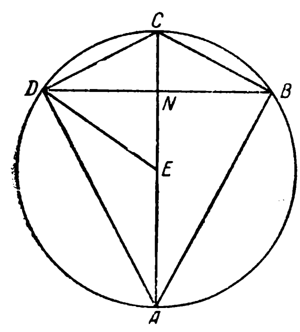
Обратно, пусть дан четыреугольник $ABCD$ с вышеуказанным соотношением между углами. Проведем через три точки A, B, C окружность и допустим, что она не пройдет через точку D, так что последняя будет либо внутри этой окружности, либо вне ее; точки же B и D будут попрежнему лежать по разные стороны от диагонали (AC) (теорема 63). Но в таком случае $\angle D$ будет измеряться или числом большим, чем половина $\smile ABC$, или же — меньшим (теорема 408 или 409). Между тем, наши данные показывают, что он должен измеряться как раз числом, равным этой половине. Следовательно, точка D будет лежать на окружности ABC.

Теорема 437. *Из числа параллелограммов в окружность вписывается лишь прямоугольник* (квадрат).

Действительно, в параллелограмме противоположные углы равны (теорема 329, п. 2) и сумма их должна равняться $2d$ (теорема 436).

Теорема 438 (теорема Птолемея). *Во вписанном четыреугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Пусть дан вписанный четыреугольник $ABCD$ (черт. 127), и пусть его диагонали (AC) и (BD) пересекаются в точке N (теорема 63). При луче DC построим, как часть угла ADC, $\angle EDC = \angle ADN$; другая его сторона пойдет внутри $\angle ADC$ и пересечет (AC) в некоторой точке E. Пусть для определенности точка E лежит между A и N. Тогда N лежит между E и C (теорема 18), и легко видеть, что



Черт. 127

$\angle BDC$ и $\angle ADE$ не имеют общих лучей;

$\angle EDC$ и $\angle ADB$ имеют общую часть $\angle EDB$

(эти утверждения вытекают из рассмотрения секущих отрезков).

Далее имеем:

$$\angle BDC = \angle ADE \quad \text{(теоремы 115 и 147)}$$

$$\angle CBD = \angle EAD \quad \text{(теорема 405)},$$

следовательно:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE,$$

откуда

$$\frac{(BC)}{(AE)} = \frac{(BD)}{(AD)}, \text{ или, } (AE) \cdot (BD) = (AD) \cdot (BC).$$

Подобным же образом убеждаемся, что

$$\triangle ADB \sim \triangle EDC,$$

откуда

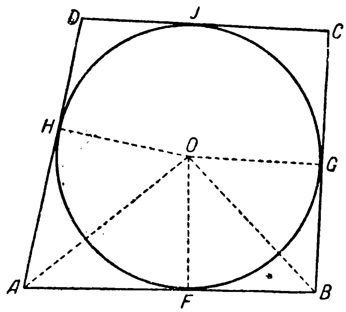
$$\frac{(AB)}{(CE)} = \frac{(BD)}{(CD)}, \text{ или } (BD) \cdot (CE) = (AB) \cdot (CD).$$

Наконец, складывая два полученных равенства, находим:

$$(AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (BC) \cdot (AD).$$

Теорема 439. *Все точки круга* (за исключением точек касания) *лежат внутри описанного многоугольника.*

Пусть многоугольник $ABCD$ описан около окружности $O(r)$ и точки F, G, J, H суть точки касания (черт. 128). Все точки окружности (за исключением точки F) лежат по одну сторону от прямой AB (теорема 246); по эту же сторону лежит точка касания H, а также и точка D, ибо все точки выпуклого многоугольника лежат по одну сторону от прямых его сторон. Итак, все точки окружности (за исключением точки F) принадлежат полуплоскости $AB.D$. Точно так же докажем, что все точки окружности (за исключением точки H) принадлежат полуплоскости $AD.B$. Но в таком случае все точки окружности (за исключением точек F и H) лежат внутри $\angle BAD$ (теорема 43). Остается проделать это рассуждение для всех вершин и сослаться на теорему 70.



Черт. 128

Теорема 440. *Периметр вписанного многоугольника всегда меньше периметра описанного.* (Теоремы 439 и 177).

Теорема 441. *Для того, чтобы выпуклый четыреугольник ABCD был описан около окружности, необходимо и достаточно соблюдение условия:*

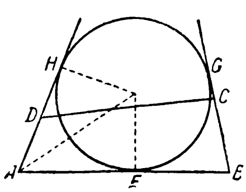
$$(AB)+(CD)=(AD)+(BC).$$

Пусть четыреугольник $ABCD$ описан около окружности (черт. 128) и точки F, G, H, J суть точки касания соответствующих сторон. Из равенства прямоугольных $\triangle\triangle$ OFA и OHA, OFB и OGB и т. д. (теорема 165, п. 3) вытекают равенства отрезков:

$$(AF)=(AH),\ (BF)=(BG),\ (CJ)=(CG),\ (DJ)=(DH).$$

Складывая почленно, получаем искомую зависимость.

Пусть, обратно, стороны данного четыреугольника выполняют эту зависимость. Проведем равноделящие углов BAD и ABC, и пусть они пересекаются в точке O (теорема 312); эта точка будет центром окружности, касающейся полупрямых AB, AD, BA, BC (теорема 179). Точка касания с полупрямыми AB и BA должна принадлежать их общей части, т. е. отрезку (AB) (теорема 27, п. 2); положение же точек касания на двух других лучах пока еще не определено. Попробуем допустить, что обе точки касания H и G лежат вне сторон четыреугольника (черт. 129а), так что



Черт. 129а

$$(AH)>(AD) \text{ и } (BG)>(BC).$$

Далее, из равенства прямоугольных треугольников (теперь ссылаемся на теорему 165, п. 5) имеем:

$$(AH)=(AF) \text{ и } (BG)=(BF).$$

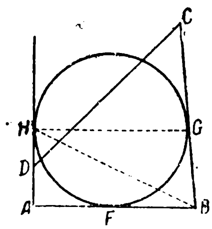
Следовательно:

$$(AB)=(AF)+(BF)=(AH)+(BG)>(AD)+(BC),$$

а это противоречит заданию.

Допустим далее, что одна точка касания G лежит внутри, а другая точка H — вне соответствующей стороны (черт. 129b). В этом случае пишем:

$$(BF)=(BG),\ (AF)=(AH)>(AD),\ (AB)>(AD)+(BG);$$



Черт. 129b

кроме того, дано:

$$(AD)+(BC)=(AB)+(CD),$$

так что

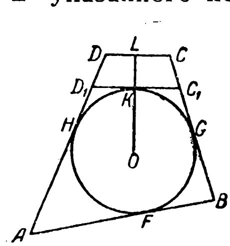
$$(AD)+(BC)>(AD)+(BG)+(CD),$$

откуда

$$(CG)>(CD).$$

Применяя постулат Паша к прямой CD и треугольникам ABH и BGH, убедимся, что CD проходит через внутреннюю точку хорды (HG), а потому пересекает окружность в двух точках (теорема 244). Далее, эти точки пересечения принадлежат именно отрезку (CD), ибо этот отрезок (а не остальная часть прямой CD) лежит в тех же углах A и B, внутри которых расположена наша окружность (теоремы 70 и 439). В таком случае (CD) содержит оба отрезка секущей из точки C, а (CG) есть отрезок касательной из той же точки C. Тогда неравенство $(CD)<(CG)$ противоречит теореме 433 (см. замечание к этой теореме).

Итак, точки касания H и G должны лежать внутри сторон (AD) и (BC). Но допустим, что (CD) не касается окружности. Опустим из центра перпендикуляр на CD и в точках пересечения его с окружностью проведем касательные, параллельные CD. Из этих касательных выберем ту, которая лежит по ту же сторону от центра, что и основание L указанного перпендикуляра; пусть это будет C_1D_1. Сторона (CD) данного четыреугольника может иметь положение, указанное на черт. 129c или другое, при котором D лежит между H и D_1, а C — между G и C_1; возможность этих и только этих двух случаев вытекает из теоремы 306. Легко убедиться, что точка касания K должна лежать внутри отрезка (C_1D_1); это вытекает из положения (C_1D_1) и $O(r)$ внутри углов A и B; а потому по п. I настоящей теоремы для четыреугольника ABC_1D_1 имеем:



Черт. 129c

$$(AB)+(C_1D_1)=(AD_1)+(BC_1);$$

с другой стороны, нам дано:

$$(AB) + (CD) = (AD) + (BC).$$

Сопоставляя оба равенства, получаем:

$$(CD) - (C_1D_1) = (D_1D) + (C_1C)$$
$$(CD) = (D_1D) + (C_1D_1) + (C_1C),$$

а это противоречит теореме 176.

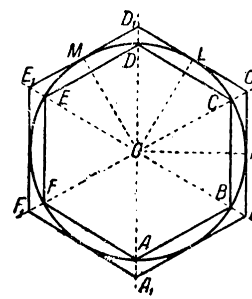
Итак, прямая C_1D_1 совпадет с CD и теорема доказана.

Теорема 442. *Из параллелограммов описать около окружности можно только ромб (квадрат).*

Предложение вытекает из теоремы 329, п. 4 и 441.

§ 38. Правильные многоугольники

Определение 114. Многоугольник (выпуклый) называется *равносторонником*, если все его стороны равны между собой (например, ромб); многоугольник называется *равноугольником*, если все его углы равны между собой (например, прямоугольник); многоугольник, который является и равносторонником и равноугольником, называется правильным (например, квадрат).



Черт. 130

Теорема 443. *Вписанный равносторонник и описанный равноугольник будут правильными многоугольниками.*

Пусть многоугольник $ABCDEF$ (черт. 130) будет вписанным равносторонником. На основании теоремы 230 (п. I) и 405 (следствие) легко доказать, что все его углы равны между собой, а потому он будет правильным (определение 114). Пусть, далее, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ будет описанным равноугольником; рассматривая равные прямоугольные треугольники OMD_1 и OLD_1, OLC_1 и OKC и т. д., получаем:

1) $(MD_1) = (LD_1)$, $(LC_1) = (KC_1)$ и т. д.;

2) OD_1 — равноделящая $\angle D_1$, OC_1 — равноделящая $\angle C_1$ и т. д. А так как углы данного многоугольника равны между собой, то

$$\triangle OE_1M = \triangle OD_1M \quad \text{(теорема 165, п. 4)},$$
$$(MD_1) = (ME_1),$$

и точно так же докажем, что

$$(LD_1) = (LC_1) \text{ и т. д.},$$

т. е. точки касания M, L, K... суть середины сторон данного многоугольника. Сопоставляя полученные равенства, находим:

$$(E_1D_1) = (D_1C_1) = \ldots,$$

так что у данного многоугольника и стороны равны, а потому он будет правильным.

Теорема 444. *Если многоугольник вписан в одну из двух концентрических окружностей и описан около другой, то он будет правильным.*

Легко видеть, что стороны данного многоугольника служат хордами первой окружности, равноотстоящими от центра (именно, их расстояние от центра равно радиусу второй окружности). Следовательно, они равны между собой (теорема 226, п. 3) и дело сводится к теореме 443.

Теорема 445. *Существует правильный n-угольник ($n \geqslant 3$), вписанный в данную окружность, и другой правильный n-угольник, описанный около нее.*

Проводим в данной окружности два взаимно перпендикулярные диаметра и делим каждый из полученных прямых углов на n равных частей (теорема 236); образуя суммы четырех смежных частей, разделим полный угол при центре на n равных частей. Так, на черт. 130 (где $n=6$) полный угол при точке O разделен на следующие шесть равных углов:

$$\angle AOB,\ \angle BOC,\ \angle COD,\ \angle DOE,\ \angle EOF,\ \angle FOA.$$

Далее строим хорды, на которые опираются равные углы при центре. Эти хорды будут равны между собой (теорема 130) и образуют вписанный равносторонник (легко видеть, что получается выпуклый многоугольник), который и будет правильным n-угольником (теорема 443). Переходя к построению описанного многоугольника, обозначим через r радиус данной окружности, а через h — расстояние от центра до сторон правильного вписанного n-угольника (на основании теоремы 226, п. I, эти стороны равноотстоят от точки O). Построим далее многоугольник, гомотетичный с правильным вписанным n-угольником, взяв центр гомотетии в точке O, а отношение подобия равным $\frac{r}{h}$. Получим многоугольник, подобный данному (теорема 395). Из свойств подобия нетрудно будет вывести, что вновь построенный многоугольник есть правильный n-угольник. Основываясь на теореме 391 и 390, можно утверждать, что расстояния его сторон от центра равны:

$$h \cdot \frac{r}{h} = r;$$

т. е. его стороны будут касаться данной окружности (теорема 247, п. 2) и именно — в своих серединах, так как перпендикуляр из центра делит пополам сторону вписанного многоугольника, подобного рассматриваемому.

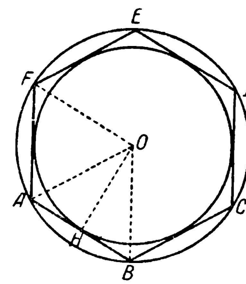
Следовательно, этот последний будет правильным описанным n-угольником.

Теорема 446. *Существует окружность, вписанная в данный правильный многоугольник, и другая окружность, описанная около него.*

Дан правильный многоугольник $ABCD\ldots$ (черт. 131). Проведем биссектрисы его углов A и B; они пересекутся в точке O (теорема 312).

Так как $\angle A = \angle B$, то $\triangle OAB$ равнобедренный, а потому:

$$(OA) = (OB).$$



Черт. 131

Соединив точки O и F, получим равные треугольники OFA и OBA [$(AF) = (AB)$, (OA) — общая, $\angle OAF = \angle OAB$], откуда

$$(OF) = (OA) \quad \text{и} \quad \angle OFA = \angle OBA,$$

и прямая OF есть биссектриса угла F и т. д.

Таким образом, мы постепенно убедимся, что прямые, соединяющие точку O с вершинами данного многоугольника, будут равноделящими его углов, а соответственные отрезки — равны между собой. Отсюда уже следует, что окружность, описанная из точки O радиусом, равным (OA), будет описанной около данного правильного многоугольника. Далее, стороны этого последнего, как равные хорды указанной окружности, равноотстоят от центра; а потому окружность с центром в точке O и с радиусом, равным (OH), где (OH) — высота $\triangle OAB$, будет вписанной в данный многоугольник.

Определение 115. Общий центр окружностей, вписанной и описанной около данного правильного многоугольника, называется его *центром*; радиус описанной окружности называется *радиусом* многоугольника, а радиус вписанной — его *апофемой*. Угол при центре, опирающийся на сторону, называется *центральным* углом правильного многоугольника.

Легко видеть, что для правильного n-угольника этот угол равен: $\frac{360°}{n}$, тогда как угол самого правильного n-угольника равен $180° \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ (теорема 327, определение 114).

Теорема 447. *Правильные одноименные многоугольники подобны, причем отношение подобия равно отношению их радиусов или апофем.* (Теоремы 380 и 378).

Нашей ближайшей целью будет решение задачи (с помощью линейки и циркуля) о вписывании в окружность правильного многоугольника с данным числом сторон. Задачу эту можно решить в следующих случаях.

Весьма просто обстоит дело с квадратом: проводим в окружности два взаимно перпендикулярных диаметра AD и BC. Четыреугольник $ABDC$ будет квадратом (доказательство предоставляется читателю).

Для дальнейшего нужна следующая теорема.

Теорема 448. *Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу.*

Действительно, пусть (AB) есть сторона правильного шестиугольника, вписанного в данную окружность (черт. 130). Тогда

$$\angle AOB = 60°; \quad \angle OAB = \angle OBA = 180° \left(1 - \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} = 60°,$$

так что $\triangle AOB$ равносторонний (теорема 269), и $(AB) = r$.

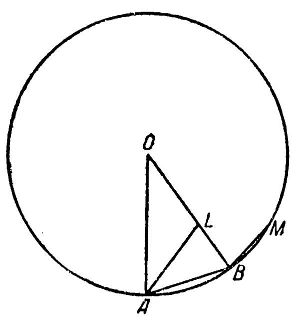
Обратно, если $(AB)=r$, то $\triangle AOB$ равносторонний и $\angle AOB = 60°$, т. е. (AB) уложится в качестве хорды ровно шесть раз, и таким образом получится правильный шестиугольник, вписанный в данную окружность (теорема 443).

Итак, задача о вписывании правильного шестиугольника решается весьма просто.

Соединяя его вершины через одну, получаем правильный треугольник, вписанный в данную окружность.

Теорема 449. *Сторона правильного вписанного десятиугольники равна большей части радиуса, разделенного в крайнем и среднем отношении.*

Пусть (AB) есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность (черт. 132). Тогда $\angle AOB = 36°$ и в равнобедренном $\triangle AOB$ углы при основании будут:



Черт. 132

$$\angle A = \angle B = 72°.$$

Проведем (AL) — биссектрису $\angle A$, так что

$$\angle OAL = \angle BAL = 36°.$$

Тогда $\triangle\triangle$ OLA и BAL будут равнобедренными [последний на том основании, что $\angle ALB = \angle LAO + \angle AOL = 72° = \angle ABL$], так что

$$(AB) = (AL) = (OL),$$

На основании теоремы 423 имеем пропорцию:

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(OL)}{(LB)},$$

или

$$\frac{(OB)}{(OL)} = \frac{(OL)}{(LB)},$$

т. е. $(OL) = (AB)$ есть указанная часть радиуса (см. конец § 36).

Обратно, пусть хорда (AB) есть бóльшая часть радиуса, разделенного в крайнем и среднем отношении. Строим $\triangle AOB$ и на (OB) откладываем $(OL) = (AB)$; точку L соединяем с A.

Теперь нам дана пропорция:

$$\frac{(OB)}{(OL)} = \frac{(OL)}{(LB)},$$

или

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(OL)}{(LB)},$$

откуда следует, что (AL) есть биссектриса $\angle A$ (теорема 424). Переписывая последнюю пропорцию еще таким образом

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(AB)}{(LB)}$$

и вспоминая, что $\angle A = \angle B$, получаем:

$$\triangle OAB \sim \triangle ABL \qquad \text{(теорема 374);}$$

а так как в $\triangle OAB$ имеем $(OA) = (OB)$, то

$$(AB) = (AL).$$

В таком случае

$$(AL) = (OL) \quad \text{и} \quad \angle OAL = \angle AOL.$$

Следовательно, в равнобедренном $\triangle AOB$ угол при основании вдвое больше угла при вершине; теорема 325 сейчас же дает, что

$$\angle AOB = 36^\circ,$$

и дальнейшее очевидно.

Предыдущая теорема дает нам правило для вписывания в окружность (с помощью линейки и циркуля) правильного десятиугольника. Соединяя его вершины через одну, вписываем правильный пятиугольник. Наконец, очевидное равенство

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

показывает, что стороной правильного вписанного пятнадцатиугольника будет хорда (BM) (черт. 132), если (AM) равна радиусу, а (AB) есть сторона правильного вписанного десятиугольника.

Доказательства следующих трех теорем предоставляются читателю.

Теорема 450. Если через a_n обозначим сторону правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r, то:

$$a_3 = r\cdot\sqrt{3},$$
$$a_4 = r\cdot\sqrt{2},$$
$$a_{10} = r\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теорема 451. Если через b_n обозначить сторону правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r, то

$$b_n = \frac{a_n\cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Теорема 452. Если в окружность вписан правильный n-угольник, то можно построить (с помощью линейки и циркуля) правильный $2n$-угольник, вписанный в ту же окружность, причем:

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Замечание. Легко видеть, что для удвоения числа сторон правильного описанного n-угольника можно поступить следующим образом: разделим пополам дуги, заключенные между двумя последовательными точками касания (на черт. 130 изображен правильный описанный шестиугольник

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$; указанными точками деления послужат точки A, B, C, D, E, F); в этих точках проведем к окружности касательные и ограничимся теми их отрезками, которые вырезаются двумя смежными сторонами данного n-угольника.

Задача о вписывании в окружность правильного n-угольника равносильна делению ее на n равных частей. Сопоставляя предыдущие построения, приходим к такому предложению.

Теорема 453. Мы можем с помощью линейки и циркуля разделить окружность на $m \cdot 2^k$ равных частей, где $m = 3, 4, 5, 15$, k — любое целое положительное число или нуль.

Замечание. Есть еще и другие случаи решения задачи с помощью линейки и циркуля; но для любого числа равных частей построения с помощью линейки и циркуля дать нельзя, как это доказывается в высшей математике.

Приступая к изучению симметрии правильных многоугольников, условимся выписывать наименования двух равных многоугольников так, чтобы на соответствующих местах стояли названия соответствующих вершин (см. определение 53). Из понятия о равенстве многоугольников следует, что каждый многоугольник равен самому себе, если каждой его вершине отнесем эту же самую вершину:

$$ABCDE\ldots = ABCDE\ldots$$

Но при ином установлении соответствия между вершинами многоугольник вообще уже не будет равен самому себе. Так $ABCDE\ldots$ вообще не равен многоугольнику $BCDE\ldots A$, ибо стороны (AB) и (BC) вообще не равны друг другу. Иначе обстоит дело с правильными многоугольниками, и в этом именно заключаются их свойства симметрии.

Теорема 454. Если в символе правильного n-угольника произвести всевозможные круговые подстановки, то получим многоугольники, равные данному. Другими словами, правильный многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ равен многоугольникам:

$$A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n,\ A_2A_3\ldots A_{n-1}A_nA_1,\ A_3\ldots A_{n-1}A_nA_1A_2, \ldots,$$
$$A_{n-1}A_nA_1A_2\ldots A_{n-2}, A_nA_1A_2\ldots A_{n-2}A_{n-1}.$$

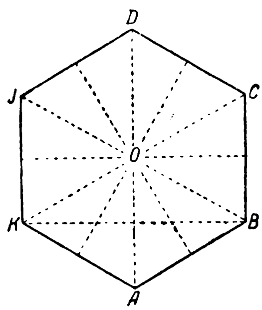
Действительно, так как все стороны и все углы правильного многоугольника равны между собой, то дело сводится к определению 53.

Теорема 455. При всех указанных случаях равенства правильного многоугольника самому себе его центр соответствует самому себе.

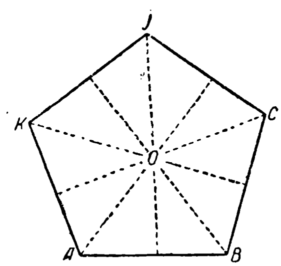
Дело в том, что соответствие можно распространить на все точки двух равных фигур (см. определение 103 при $k=1$), и для центра вопрос ясен, так как на основании теоремы 446 центр описанного круга определяется однозначно, а вершины во всех случаях одни и те же.

Замечание. Прибегая к представлению о движении, можно полученные выше выводы выразить более наглядно; именно, можно сказать, что если правильный n-угольник повернуть (в его плоскости) около центра на угол в $\frac{360°}{n}$ или на любое кратное этого угла, то он совпадет со своим первоначальным положением. Так, это произойдет с правильным шестиугольником при повороте на 60°, и т. д.

Определение 116. Точка O, обладающая свойствами центра правильного многоугольника, указанными в теореме 455, называется центром n-кратной симметрии. Так, правильный треугольник обладает тройной, а правильный шестиугольник шестерной симметрией относительно своего центра. Вообще



Черт. 133



Черт. 134

(если для простоты прибегнуть к „языку движения“) указанным именем называется такая точка любой плоской фигуры, что эта фигура, будучи повернута (в своей плоскости) вокруг нее на угол, равный $\frac{360°}{n}$, совпадает со своим первоначальным положением.

Так, тот центр симметрии, о котором шла речь в определении 96 и теореме 333, является центром двойной симметрии: точка совпадает с соответствующей точкой при повороте на 180°, так что $n=2$.

Теорема 456. *Прямые, соединяющие центр правильного n-угольника с его вершинами или с серединами его сторон, суть оси симметрии (см. определение 52) правильного многоугольника; при n нечетном обе системы осей совпадают, а при n четном они различны.*

Действительно, соединим вершину A правильного многоугольника $ABCD\ldots K$ с его центром O прямой AO (черт. 133 и 134). Легко видеть, что $\triangle ABK$, где K — последняя по порядку вершина, будет равнобедренным, а прямая AO, будучи равноделящей $\angle A$, окажется перпендикуляром к отрезку (BK)

в его середине. Следовательно, точки B и K будут симметричными относительно оси AO (определение 52). Точно так же, из рассмотрения равнобедренного $\triangle ACJ$, где C — третья вершина, а J — вторая от конца, найдем, что точки C и J симметричны относительно AO, и т. д. Перебрав все вершины, останется разложить многоугольник на треугольники, исходя из вершины A, и применить теорему 174. Для прямых, соединяющих точку O с серединами сторон, рассуждение ведется подобным же образом.

Предыдущие соображения показывают, что, если вершину A оставить в стороне, последующие вершины оказываются попарно симметричными относительно оси AO. Поэтому, если n — нечетное, то (за вычетом A) все вершины разобьются на пары. Если возьмем последнюю пару (считая от A), то здесь кончается перебирание вершин, идущее от A в двух различных направлениях, и эта пара определяет уже одну из сторон многоугольника [например, сторона (CJ) на черт. 134]. Указанная сторона, следовательно, окажется перпендикулярной AO и разделенной ею пополам, ибо ее концы симметричны относительно AO.

Таким образом, при n нечетном, прямая AO пройдет через середину противоположной стороны. Если же n четное, то, кроме A, еще одна вершина (именно — диаметрально противоположная A) останется без пары и будет лежать на прямой AO, ибо при $n=2m$ имеем:

$$\frac{360}{2m}\cdot m=180^\circ,$$

и указанные вершины будут лежать на различных лучах этой прямой, исходящих из точки O (точки A и D на черт. 133). Следовательно, прямая AO пройдет еще через одну вершину и не будет содержать середины какой-либо стороны (по свойству выпуклости). Подобные же рассуждения можно провести и для прямых, соединяющих точку O с серединами сторон.

З а м е ч а н и е. Вспоминая сделанное выше условие, можно симметрию многоугольника относительно прямой AO выразить следующими равенствами;

Для случая черт. 133:

$$ABCDJK=AKJDCB;$$

для случая черт. 134:

$$ABCJK=AKJCB.$$

Симметрия последнего многоугольника относительно прямой OJ выражается равенством;

$$ABCJK=BAKJC \text{ и т. д.}$$

В заключение параграфа докажем несколько теорем, которые пригодятся для измерения окружности.

Теорема 457. *Периметр правильного описанного $2n$-угольника меньше периметра правильного n-угольника, описанного около той же окружности.* (Замечание к теореме 452, теорема 177.)

Условимся в следующих обозначениях:

a_n — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r;

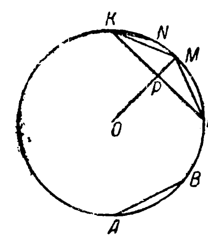
h_n — его апофема;

p_n — его периметр;

p'_n — периметр правильного n-угольника, описанного около той же окружности.

Теорема 458. Существует такое целое положительное число n, что

$$a_n < \varepsilon,$$



Черт. 135

где ε — произвольно заданный отрезок.

Можно ограничиться случаем, когда $\varepsilon \leqslant r$, так как иначе $n=6$ решает вопрос. Берем на данной окружности произвольную точку A (черт. 135) и около нее, как центра, описываем окружность радиусом, равным ε. На основании теоремы 261 эти окружности пересекутся в некоторой точке B. Таким образом, $\smile AB$ стягивается хордой, равной ε. Теперь впишем в данную окружность правильный m-угольник (теорема 445), и пусть $(KL)=a_m$; если $\smile KL < \smile AB$, то $a_m < \varepsilon$ и $n=m$ (определение 72, теорема 230). Если же $\smile KL \geqslant \smile AB$, то удваиваем число сторон правильного вписанного m-угольника (теорема 452) и пусть $(KM)=a_{2m}$; если $\smile KM < \smile AB$, то $a_{2m} < \varepsilon$ и $n=2m$. Если же $\smile KM \geqslant \smile AB$, то переходим к $(KN)=a_{4m}$ и т. д. Из способа удвоения числа сторон явствует, что

$$\smile KM = \frac{\smile KL}{2}, \quad \smile KN = \frac{\smile KL}{2^2}, \ldots$$

На основании теорем 239 и 240 найдется такое число k, что

$$\smile KX = \frac{\smile KL}{2^k} < \smile AB.$$

Тогда

$$a_n < \varepsilon, \text{ где } n = 2^k \cdot m,$$

и это n будет искомым.

Теорема 459. *Существует такое целое положительное число n, что*

$$r - h_n < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданный отрезок.

Возьмем $\triangle OAH$ (черт. 131), где $(AH)=\frac{a_n}{2}$, $(OA)=r$ и $(OH)=h_n$. По известному свойству треугольника, имеем:

$$r-h_n<\frac{a_n}{2},$$

а потому и подавно

$$r-h_n<a_n,$$

но a_n можно сделать меньше ε (теорема 458).

Теорема 460. *Существует такое целое положительное число n, что*

$$p_n'-p_n<\varepsilon,$$

где ε — произвольно заданный отрезок.

Берем два правильных m-угольника, один—вписанный, другой — описанный около данной окружности (теорема 445). На основании теорем 381 и 447 пишем:

$$\frac{p_m'}{p_m}=\frac{r}{h_m},$$

откуда

$$\frac{p_m'-p_m}{p_m'}=\frac{r-h_m}{r} \qquad \text{(теорема 302).}$$

Возьмем далее три отрезка: p_m', ε, r и найдем для них четвертый пропорциональный отрезок (замечание к теореме 367), который обозначим через k_m, так что

$$\frac{p_m'}{\varepsilon}=\frac{r}{k_m}. \qquad (*)$$

Сочетая две последних пропорции, получаем новую:

$$\frac{p_m'-p_m}{\varepsilon}=\frac{r-h_m}{k_m}$$ (переход к числам и обратно с помощью теоремы 301).

Если теперь окажется, что

$$r-h_m<k_m, \text{ то } p_m'-p_m<\varepsilon \text{ и } n=m.$$

В противном случае удваиваем число сторон многоугольников и, подобно предыдущему, имеем:

$$\frac{p_{2m}'-p_{2m}}{\varepsilon}=\frac{r-h_{2m}}{k_{2m}},$$

где k_{2m} определяется из пропорции:

$$\frac{p'_{2m}}{\varepsilon}=\frac{r}{k_{2m}}.\ (**)$$

Сравнивая левые части пропорций (*) и (**), замечаем, что левая часть первой больше левой части второй (теорема 457), а потому

$$\frac{r}{k_m}>\frac{r}{k_{2m}},\ \text{откуда}\ k_{2m}>k_m \quad \text{(теорема 302)},$$

т. е. вспомогательный отрезок увеличивается при удвоении числа сторон наших многоугольников. Если теперь окажется что

$$r-h_{2m}<k_m,\ \text{то и подавно:}\ r-h_{2m}<k_{2m}.$$

Но тогда

$$p'_{2m}-p_{2m}<\varepsilon \quad \text{и} \quad n=2m.$$

В противном случае снова удваиваем число сторон и т. д. Наконец на основании теоремы 459 найдем такое n (где $n=$ $=2^k\cdot m$), что

$$r-h_n<k_m;$$

тогда и подавно

$$r-h_n<k_n.$$

Кроме того, по предыдущему будет иметь место пропорция:

$$\frac{p'_n-p_n}{\varepsilon}=\frac{r-h_n}{k_n},$$

и мы приходим к неравенству:

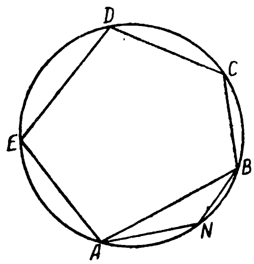
$$p'_n-p_n<\varepsilon.$$

§ 39. Измерение окружности

Главная цель, которая ставится в этом параграфе, — найти *длину окружности*; воспользоваться здесь „способом последовательного откладывания“ единицы длины нельзя, ввиду теоремы 216. Точно так же нельзя принять за единицу измерения какую-нибудь определенную дугу окружности, ибо окружности различных радиусов опять-таки не могут иметь более двух общих точек (теорема 224). Поэтому измерение окружности производится на иных началах. Именно, для этого пользуются или теорией пределов, или (как это будет сделано здесь) *аксиомой непрерывности* с ее следствиями.

Теорема 461. *Для данной окружности существует один и только один отрезок, который больше периметра всякого вписанного в нее выпуклого многоугольника и меньше периметра всякого описанного.*

Будем вписывать в данную окружность и описывать около нее всевозможные (выпуклые) многоугольники и образуем два класса отрезков следующим образом: в I класс помещаем периметры p вписанных многоугольников, а во II класс — периметры p' описанных. Указанное деление на основании теорем 440 и 460 удовлетворяет обоим условиям теоремы 241. Следовательно, существует один и только один отрезок l, удовлетворяющий неравенствам:



Черт. 136

$$p \leqslant l \leqslant p'.$$

Надо теперь доказать, что равенства здесь не может быть. В самом деле, если допустить, что $l=p$ (т. е. l равняется периметру некоторого вписанного многоугольника), то этот отрезок p будет в I классе наибольшим. Значит, тогда существует вписанный многоугольник с наибольшим периметром. Пусть это будет $ABCD\ldots$ (черт. 136). Взяв точку N внутри $\smile AB$ и соединив ее с точками A и B, получим новый вписанный многоугольник $ANBCD\ldots$, периметр которого будет больше периметра первого многоугольника (теорема 177), что противоречит сделанному допущению. Точно так же невозможно равенство $l=p'$, ибо нет описанного многоугольника с наименьшим периметром.

Итак, найденный выше отрезок l удовлетворяет неравенствам

$$p < l < p'.$$

Определение 117. *Под длиной окружности понимают длину отрезка, который больше периметра всякого вписанного в нее многоугольника и меньше периметра всякого описанного.*

Существование и единственность такого отрезка установлены в теореме 461.

Теорема 462. *Длины двух окружностей относятся, как их радиусы.*

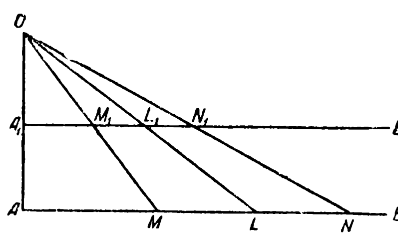
Пусть даны две окружности с радиусами r и r_1 и с центрами в точках O_1 и O_2. Их длины обозначим через l и l_1.

Если $r=r_1$, то нетрудно придти к равенству $l=l_1$, так как оба класса будут составлены тогда из одних и тех же отрезков; поэтому в дальнейшем допустим, что $r > r_1$.

Взяв произвольную точку O и проведя из нее полупрямую, отложим на последней отрезки:

$$(OA)=r \quad \text{и} \quad (OA_1)=r_1.$$

Из точек A и A_1 проведем полупрямые AB и A_1B_1, лежащие по одну сторону от OA и перпендикулярные OA (черт. 137; для удобства чертежа, в горизонтальном направлении принят иной масштаб, чем в вертикальном). На полупрямой AB будем откладывать отрезки, равные периметрам многоугольников, вписанных и описанных около окружности радиуса r; на полупрямой A_1B_1 будем делать то же самое для окружности радиуса r_1.



Черт. 137

Пусть (AM) равен периметру какого-нибудь многоугольника, вписанного в $O_1(r)$. Впишем в $O_2(r_1)$ многоугольник, подобный первому. Возможность этого вытекает из того, что две любые окружности всегда гомотетичны [теорема 402; если наши окружности лежат в различных плоскостях, то одну из них заменим равной окружностью]. Поэтому, построив многоугольник, соответствующий данному в указанной гомотетии, получим подобный ему (теорема 395) и вписанный в O_2 (r_1), ибо его вершины, как соответствующие точкам O_1 (r)—должны лежать на $O_2(r_1)$.

Пусть отрезок (A_1M_1) будет равен периметру этого многоугольника, вписанного в $O_2(r)$. Теорема 381 в связи с тем обстоятельством, что отношение подобия в указанной выше гомотетии равно отношению радиусов, дает пропорцию

$$\frac{(AM)}{(A_1M_1)}=\frac{(OA)}{(OA_1)};$$

а теорема 369 говорит тогда, что прямая MM_1 пройдет через точку O.

Точно так же отложим отрезок (AN), равный периметру какого-нибудь многоугольника, описанного около $O_1(r)$. Опишем около O_2 (r_1) многоугольник, ему подобный, и пусть (A_1N_1) равен его периметру; по предыдущему убедимся, что прямая NN_1 пройдет через точку O. В изложенных рассуждениях мы переходили от O_1 (r) к O_2 (r_1), но точно так же можно проделать и обратный переход.

Отложим теперь на полупрямой AB отрезок $(AL)=l$. На основании определения 117 имеем неравенства:

$$(AM) < l < (AN).$$

Соединим точки O и L, и пусть прямая OL пересекает A_1B_1 в точке L_1. Теорема 370 дает пропорции:

$$\frac{(AL)}{(AM)}=\frac{(A_1L_1)}{(A_1M_1)} \quad \text{и} \quad \frac{(AL)}{(AN)}=\frac{(A_1L_1)}{(A_1N_1)},$$

которые, в связи с вышеуказанными неравенствами и теоремой 302, дают новые неравенства:

$$(A_1M_1) < (A_1L_1) < (A_1N_1).$$

Но тогда определение 117 показывает, что

$$(A_1L_1)=l_1.$$

Наконец, из подобия $\triangle\triangle$ OAL и OA_1L_1 находим:

$$\frac{l}{l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Теорема 463. *Отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное.*

Действительно, из предыдущей пропорции без труда находим:

$$\frac{l}{2r}=\frac{l_1}{2r_1},$$

что и доказывает теорему.

Определение 118. Это постоянное число обозначается буквой π (греческая буква „пи“).

Теорема 464. *Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$.* (Теорема 463, определение 118.)

Возникает вопрос о вычислении π. В высшем анализе доказывается, что это число — иррациональное; его приближенные значения можно найти следующим образом.

Возьмем окружность с радиусом, равным единице длины; впишем в нее и опишем вокруг нее правильные n-угольники. На основании предыдущего имеем неравенства:

$$p_n < 2\pi < p'_n$$

или

$$\frac{1}{2}p_n < \pi < \frac{1}{2}p'_n.$$

Из этих неравенств нетрудно получить еще два таких:

$$\pi-\frac{1}{2}p_n < \frac{1}{2}(p'_n-p_n) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}p'_n-\pi < \frac{1}{2}(p'_n-p_n).$$

Другими словами, если за приближенные значения π примем $\frac{1}{2}p_n$ (с недостатком) или $\frac{1}{2}p_n'$ (с избытком), то ошибка будет $<\frac{1}{2}\cdot(p_n' - p_n)$, а эту разность при достаточно большом n можно сделать сколь угодно малой (теорема 460).

Для вычисления можно взять $n=4$ или $n=6$ (тогда $a_4=\sqrt{2}$ и $a_6=1$) и удваивать число сторон, вычисляя a_{2n} по теореме 452. Так, дойдя до $n=96$, найдем:

$$\pi=3{,}14 \text{ с недостатком и с точностью до } 0{,}005;$$

дойдя до $n=1536$, получим:

$$\pi=3{,}1416 \text{ (с избытком и с точностью до } 0{,}00005).$$

Следует еще отметить приближенное значение Архимеда $\frac{22}{7}$ (с точностью до двух десятичных знаков) и Адриана Меция $\frac{355}{113}$ (с точностью до шести десятичных знаков). В настоящее время известно несколько сотен десятичных знаков числа π.

Определение длины дуги, как части окружности, может быть сделано в общем тем же путем, что и определение длины окружности. Но так как основная мысль этого способа подробно была разъяснена для окружности, то в вопросе о спрямлении дуги мы пойдем более кратким, но зато и более формальным путем, разрешив вопрос с помощью следующего определения.

Определение 119. *Под длиной дуги понимаем число, которое так относится к длине всей окружности, как соответствующий дуге центральный угол относится к полному углу.*

Теорема 465. Если данной дуге соответствует центральный угол α (в градусах) и она принадлежит окружности радиуса r, то ее длина равна:

$$\pi r\cdot\frac{\alpha}{180^\circ}.$$

Действительно, обозначив искомую длину через x, из определения 119 выводим пропорцию:

$$x:2\pi r=\alpha:360^\circ.$$

Замечание. Пользуясь указанной формулой, без труда докажем следующие предложения: 1) длины двух дуг с равными центральными углами относятся, как радиусы, и обратно; 2) длина суммы дуг (в одной окружности) равна сумме длин этих дуг и т. д.

До сих пор мы измеряли углы в градусах; теперь можно ввести другую единицу, которой предпочитают пользоваться в теоретических исследованиях (тогда как измерение в градусах удобно для практических целей).

Определение 120. *Радианом называется угол, которому соответствует дуга, равная по длине радиусу.*

Легко видеть, что радиан в градусах равен: $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Действительно, в формуле для длины дуги полагаем ее длину равной r:

$$r=\pi r\cdot\frac{\alpha}{180^\circ},$$

откуда получается α, т. е. число, измеряющее радиан в градусах. Мы убеждаемся, что радиан не зависит от величины радиуса. Приближенно (с точностью до 1″) величина радиана в градусах (минутах и секундах) равна:

$$57^\circ\ 17'45''.$$

Теорема 466. Если принять радиан за единицу измерения, то угол, измерявшийся в градусах числом α, будет измеряться в радианах числом

$$\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}.$$

В самом деле, переход от одной единицы измерения к другой был разобран в теореме 298. Все дело сводится к определению числа, измеряющего новую единицу в старой.

В рассматриваемом случае это число равно $\frac{180^\circ}{\pi}$, так что прежние числа придется умножить на обратную величину:

$$\frac{\pi}{180^\circ}.$$

Теорема 467. *Длина дуги равна произведению длины радиуса на число, измеряющее соответствующий центральный угол в радианах.* (Теоремы 465 и 466.)

§ 40. Равносоставленность многоугольников

Определение 121. Мы говорим, что многоугольник P разложен на частичные многоугольники $P_1, P_2, \ldots, P_n$, если соблюдены следующие условия:

1) каждая точка многоугольника P принадлежит, по крайней мере, одному из многоугольников $P_1, P_2, \ldots, P_n$;

2) каждая точка каждого из многоугольников $P_1\ P_2, \ldots, P_n$ принадлежит многоугольнику P;

3) многоугольники $P_1, P_2, \ldots, P_n$ не имеют общих точек, за исключением возможных общих точек обвода.

(Некоторые частные случаи разложения были рассмотрены в теоремах 68 и 69.)

При соблюдении вышеуказанных условий говорят также, что P является суммой $P_1, P_2, \ldots, P_n$, и записывают это обычным способом:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Последнее утверждение распространяется и на тот случай, когда P_i не представляет частей многоугольника P, но этот последний разлагается на части, соответственно равные $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

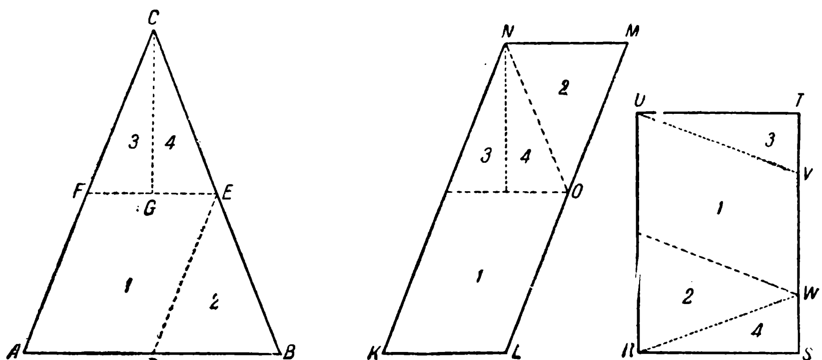
Определение 122. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если они разлагаются на конечное число попарно равных частичных многоугольников. Теорема 175 показывает, что дело всегда можно свести к попарно равным треугольникам. Для обозначения равносоставленности будем употреблять знак $\mathrel{\unicode{x2336}}$, так что равносоставленность многоугольников P_1 и P_2 записывается такой формулой:

$$P_1 \mathrel{\unicode{x2336}} P_2.$$

Легко видеть, что равные многоугольники всегда равносоставлены (теорема 175, определение 122).

Теорема 468. *Суммы равносоставленных многоугольников сами равносоставлены* (определения 121 и 122).

Теорема 469. *Два многоугольника, равносоставленные с одним и тем же третьим многоугольником, равносоставлены между собой.*



Черт. 138

Сначала разберем эту весьма важную для настоящего параграфа теорему на частном примере. На черт. 138 имеем равнобедренный $\triangle ABC$ $[(AB)=6$, высота $(CD)=8]$, параллелограмм $KLMN$ $[(KL)=3$, $(KN)=(AC)$, $\angle NKL=\angle CAB]$ и прямоугольник $RSTU$ $[(RS)=4$, $(RU)=6]$.

Если в треугольнике проведем прерывистую линию (DE), соединяющую середины двух его сторон, а в параллелограмме — линию (NO), где O — середина (LM), оставляя пока без внимания пунктирные линии, то получим следующие разложения на части (теорема 68):

$$\triangle ABC = \text{трапец. } ADEC + \triangle DBE;$$

$$\text{параллелограмм } KLMN = \text{трапец. } KLON + \triangle MON.$$

А так как читатель без труда убедится в равенствах:

$$\text{трапец. } ADEC = \text{трапец. } KLON \text{ и } \triangle DBE = \triangle MON,$$

то

$$\triangle ABC \mathrel{\unicode{x2336}} KLMN.$$

Возьмем снова $\triangle ABC$ и прямоугольник $RSTU$; не будем на этот раз обращать внимание на прерывистые линии, а проведем следующие пунктирные линии: в $\triangle ABC \ldots FE \parallel AB$, $CG \perp FE$, а в прямоугольнике: (RW) и (UV), где $(SW) = (TV) = 1\frac{1}{2}$. Тогда получим разложения:

$$\triangle ABC = \text{трапец.}\, ABEF + \triangle CFG + \triangle CEG;$$

$$\text{прямоуг. } RSTU = \text{трапец. } RUVW + \triangle SWR + \triangle TVU.$$

Нетрудно убедиться, что эти части попарно равны, а потому:

$$\triangle ABC \mathrel{\text{⌶}} RSTU.$$

Итак, $\triangle ABC$ разлагается на части двояким образом: 1) с помощью отрезка (DE) он разлагается на трапецию и треугольник (так же, как $KLMN$), 2) с помощью отрезков (FE) и (CG) он разлагается на трапецию и два треугольника (так же, как $RSTU$).

Проведем теперь в $\triangle ABC$ обе системы отрезков сразу. Тогда наш треугольник подразделится на более мелкие части, как это и указано на чертеже. При этом получится одно и то же разложение, независимо от того, какую систему отрезков проведем сначала, а какую — потом. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Проведем сначала отрезок (DE). Тогда $\triangle ABC$ разлагается на трапецию $ADEC$ и $\triangle DBE$. Если теперь провести и вторую систему отрезков, то $\triangle DBE$, обозначенный № 2, останется незатронутым, а трапеция разложится на параллелограмм № 1 и два треугольника № 3 и 4. Конечно, на такие же самые части можно разложить равную ей трапецию $KLON$, входящую в состав $KLMN$, так что треугольник и параллелограмм окажутся подразделенными на четыре попарно равные части. Вернемся снова к $\triangle ABC$ и проведем в нем сначала вторую систему отрезков, которая разлагает $\triangle ABC$ на трапецию $ABEF$ и два треугольника; если теперь еще провести отрезок (DE), то оба треугольника останутся незатронутыми, а трапеция разобьется на параллелограмм № 1 и треугольник № 2. Конечно, на такие же самые части можно разложить равную ей трапецию $RUVW$, так что треугольник и прямоугольник окажутся подразделенными на те же самые четыре части. Итак, в конце концов, мы разложили параллелограмм и прямоугольник на соответственно равные части, откуда

$$KLMN \mathrel{\text{⌶}} RSTU.$$

Переходим к общему доказательству. Пусть дано, что многоугольник $P_1 \mathrel{\text{⌶}} P$, причем P_1 и P разлагаются на попарно равные частичные многоугольники p_i с помощью системы отрезков № 1 (имеются в виду отрезки, проводимые в P). Пусть, кроме того, $P_2 \mathrel{\text{⌶}} P$, причем P_2 и P разлагаются на попарно равные частичные многоугольники q_k с помощью системы отрезков № 2 (имеются в виду отрезки, проводимые в P). Проведем в многоугольнике P обе системы отрезков сразу. Тогда P разложится на новые, более мелкие части r_m и притом — независимо от того, какую систему отрезков проведем сначала, а какую — потом. Воспользуемся сначала первой системой отрезков; тогда P (равно как и P_1) разбивается на части p_i. Присоединим сюда вторую систему отрезков; тогда P, а значит и совокупность многоугольников p_i, разбивается на многоугольники r_m. Опираясь на повторное применение теоремы 175, можно те многоугольники, на которые сначала было разложено P_1 и которые соответственно равны p_i, разложить на те же самые части r_m. Таким образом, P_1 окажется разложенным на многоугольники r_m. Берем теперь сначала вторую систему отрезков; тогда P (равно как и P_2) разбивается на части q_k. Присоединяем сюда первую систему отрезков, вследствие чего P, а значит и совокупность многоугольников q_k, разлагается на те же самые многоугольники r_m. Далее, те многоугольники, на которые было разложено P_2 и которые соответственно равны q_k, можно также разложить на указанные выше многоугольники r_m.

Итак, в конце концов, и P_1 и P_2 оказались разложенными на те же самые частичные многоугольники r_m, откуда

$$P_1 \boxplus P_2.$$

Замечание Изложенное доказательство в достаточной мере наглядно, но считать его совершенно строгим нельзя. В самом деле, когда мы проводим обе системы отрезков сразу, то надо еще доказать, что получается новое разложение многоугольника P, удовлетворяющее всем условиям определения 121; точно так же надо доказать, что это разложение не зависит от порядка, в котором проводим системы отрезков, и т. п. Вполне строгое изложение можно найти у проф. В. Ф. Кагана („Опыт обоснования евклидовой геометрии", стр. 490—496); но предварительные исследования о разложении многоугольников и о смежных вопросах занимают там около 65 страниц. Таким образом, вполне строгое изложение заняло бы здесь слишком много места и отвлекло бы внимание читателя от весьма важных вопросов настоящего параграфа. Поэтому мы довольствуемся обычным рассуждением, а за более строгим отсылаем к книге проф. Кагана.

Теорема 470. *Параллелограммы с равными основаниями и равными высотами равносоставлены.*

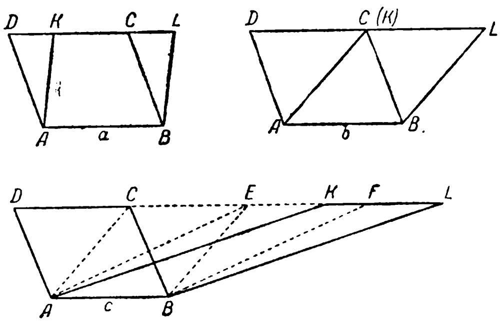
Пусть одним из данных параллелограммов будет $ABCD$ (черт. 139); другой данный, на чертеже не обозначенный, имеет основание, равное (AB), и его высота равна расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. На основании (AB) с той же стороны от него, с какой лежит CD, построим параллелограмм $ABLK$, равный второму из данных (теорема 330). В силу теоремы 344 прямые KL и CD совпадают. Достаточно будет доказать равносоставленность параллелограммов $ABCD$ и $ABLK$ (теорема 469). В зависимости от положения точки K рассуждение разбивается на три части.

1. Точка K лежит внутри отрезка (CD) (черт. 139a). В этом случае точка L не может принадлежать отрезку (CD), так как $(KL)=(CD)$. Следовательно, либо C лежит между D и L, либо D лежит между C и L. Остановимся, для определенности, на первом случае. Но если C лежит между D и L, а K — между C и D, то C лежит между K и L (теорема 18); так что отрезки (AK) и (BC) будут соответственно трансверсалями четырехугольников $ABCD$ и $ABLK$.

Теперь, на основании теоремы 68 и определения 121 получаем разложения:

$$ABCD=\text{трапец. } ABCK+\triangle AKD,$$

$$ABLK=\text{трапец. } ABCK+\triangle BLC.$$



Черт. 139

Но трапеция одна и та же, а треугольники равны (теоремы 329, п. 4; 322), а потому

$$ABCD \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} ABLK.$$

2. Точка K совпадает с одним из концов отрезка (CD) (на черт. 139, b она совпадает с точкой C).

Рассуждение остается по существу тем же самым, только вместо трапеции $ABCK$ теперь имеем $\triangle ABC$.

3. Точка K лежит вне отрезка (CD), и пусть для определенности точка C лежит между D и K (черт. 139, c).

Отложим от точки C на том луче прямой CD, который содержит точку K, отрезок $(CE)=(CD)$. Если точка K принадлежит этому отрезку, то здесь мы останавливаемся, если же нет, то от точки E на том луче, который содержит точку K, откладываем отрезок $(EF)=(CD)$. Если K принадлежит отрезку (EF) (случай чертежа), то здесь останавливаемся; в противном случае продолжаем откладывание отрезков, равных (CD). Начало Архимеда показывает, что после конечного числа построений дойдем до отрезка, содержащего точку K. Соединим теперь точку A с точками C, E и со всеми последующими точками, кроме последней, а точку B — с точками E, F и со всеми остальными.

На основании уже рассмотренных случаев получаем:

$$ABCD \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} ABEC \text{ (п. 2)},$$

$$ABEC \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} ABFE \quad \text{„} \quad \text{„},$$

$$ABFE \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} ABLK \text{ (п. 1)}.$$

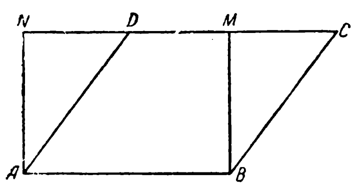
Наконец, повторное применение теоремы 469 приводит к заключению:

$$ABCD \mathrel{\text{⌶}} ABLK.$$

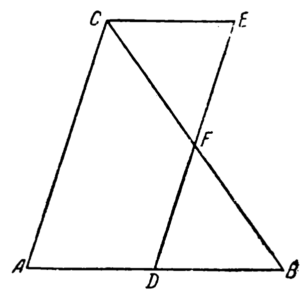
Теорема 471. *Существует прямоугольник, равносоставленный с данным параллелограммом.* (Теорема 470; построение очевидно из черт. 140, где $ABCD \mathrel{\text{⌶}} ABMN$.)

Теорема 472. *Треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим ту же высоту и вдвое меньшее основание, или — то же основание и вдвое меньшую высоту.*

Действительно, пусть дан $\triangle ABC$ (черт. 141). Проведя из середины D основания (AB) прямую, параллельную AC, и из вершины C — прямую, параллельную AB, получим параллело-



Черт. 140



Черт. 141

грамм $ADEC$, который удовлетворяет требованиям теоремы. Прямая DE на основании постулата Паша пересекает отрезок (BC) во внутренней точке F, которая к тому же будет его серединой (теорема 367). Так что получается такое разложение данного треугольника:

$$\triangle ABC = \text{трапец. } ADFC + \triangle DBF.$$

С помощью теоремы 364 (проводя через F прямую, параллельную AB) можно убедиться, что F лежит между D и E, так что

$$ADEC = \text{трапец. } ADFC + \triangle ECF.$$

В оба разложения входит одна и та же трапеция, а что касается треугольников, то у них

$$(BF) = (CF), \quad (BD) = (AD) = (CE), \quad \angle FBD = \angle FCE.$$

Следовательно:

$$\triangle DBF = \triangle ECF,$$

а потому

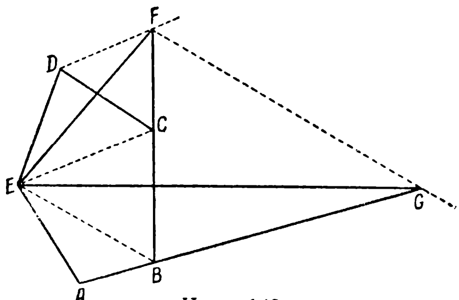
$$\triangle ABC \mathrel{\text{⌶}} ADEC.$$

Вторая часть теоремы доказывается подобным же образом.

Теорема 473. *Треугольники с равными основаниями и равными высотами равносоставлены.* (Теоремы 472, 469.)

Теорема 474. *Существует треугольник, равносоставленный с данным многоугольником.*

Пусть дан выпуклый n-угольник $ABCDE\ldots$ (на черт. 142 взято $n=5$). Проведем диагональ (EC) и через точку D — прямую, параллельную EC; затем продолжаем BC до пересечения с этой прямой в точке F, после чего получается $(n-1)$-угольник $ABFE\ldots$ (читателю предоставляется убедиться, что здесь действительно получается выпуклый многоугольник).



Черт. 142

Данный многоугольник диагональю (EC) разлагается следующим образом (теорема 68):

$$ABCDE\ldots = \triangle ECD + ABCE\ldots.$$

Новый же многоугольник разбивается трансверсалью (EC) на такие части:

$$ABFE\ldots = \triangle ECF + ABCE\ldots.$$

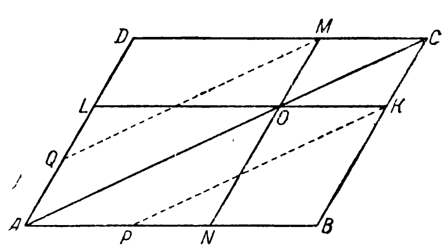
Но

$$\triangle ECD \mathrel{\text{⌶}} \triangle ECF \qquad \text{(теоремы 344, 473)},$$

откуда

$$ABCDE\ldots \mathrel{\text{⌶}} ABFE\ldots \qquad \text{(определение 122)}.$$

Таким образом мы построили $(n-1)$-угольник, равносоставленный с данным n-угольником. Далее переходим к $(n-2)$-угольнику и т. д., пока не дойдем до треугольника, и теорема будет доказана.



Черт. 143

Черт. 142 остается дополнить следующим построением: проводим диагональ (EB), прямую $FG \parallel EB$ и отмечаем точку G пересечения FG с AB; тогда $\triangle AGE$ будет искомым.

Определение 123. Возьмем параллелограмм $ABCD$ (черт. 143) и на его диагонали (AC) отметим какую-нибудь точку O; через точку O проведем прямые KL и MN, соответственно параллельные сторонам параллелограмма. Применяя дважды теорему 68, получим деление данного четыреугольника на четыре параллелограмма; при точке O имеем четыре угла, и диагональ (AC) проходит в двух вертикальных углах (теоремы 47, 41). Следовательно, при точке O имеются два таких параллелограмма, которые лежат в углах, не содержащих (AC). Вот эти-то параллелограммы $OLDM$ и $OKBN$ называются дополнительными (ниже это понятие применяется к прямоугольникам).

Теорема 475. *Дополнительные параллелограммы равносоставлены.*

Имея в виду тот же черт. 143, проведем через точки M и K (которые служат противоположными вершинами одного из недополнительных параллелограммов) прямые, параллельные AC до пересечения в точках Q и P со сторонами (AD) и (AB) (постулат Паша). Теперь имеем:

$$OLDM \between OMQA, \quad OKBN \between OAPK \quad \text{(теорема 470)};$$

в новых же параллелограммах за основание можно принять общую сторону (OA), причем высотами их послужат соответственно высоты $\triangle\triangle$ MOC и KOC, а эти треугольники равны по трем сторонам, откуда нетрудно вывести и равенство их высот. Следовательно:

$$OMQA \between OAPK \qquad \text{(теорема 470)};$$

и теорема 469 приводит к заключению:

$$OLDM \between OKBN.$$

Теорема 476. *Если стороны двух прямоугольников образуют пропорцию, причем стороны одного служат средними ее членами, а стороны другого — крайними, то эти прямоугольники равносоставлены.*

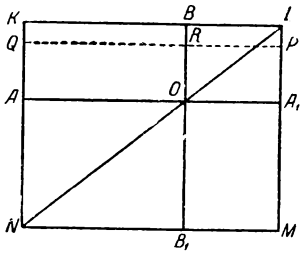
Пусть стороны одного прямоугольника будут a и b, а другого — a_1 и b_1, причем:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{b}.$$

Проведем через произвольную точку O две взаимно перпендикулярные прямые (черт. 144) и на четырех полупрямых, исходящих из этой точки, отложим отрезки:

$$(OA)=a, \quad (OA_1)=a_1, \quad (OB)=b, \quad (OB_1)=b_1;$$

затем построим прямоугольники $OAKB$ и OA_1MB_1, равные данным (теорема 330). Наконец, завершая построение, находим точку пересечения L прямых BK, A_1M и точку пересечения N прямых AK, B_1M. Опираясь на теорему 306, без труда докажем, что $KLMN$ есть прямоугольник. Так как точка O лежит, по построению, между A и A_1, B и B_1, то, по теореме 346, точки A, B, A_1, B_1 будут лежать внутри соответственных сторон прямоугольника $KLMN$. Теперь от данной пропорции переходим к производной:



Черт. 144

$$\frac{a}{a+a_1}=\frac{b_1}{b+b_1},$$

которую при обозначениях чертежа можно переписать так:

$$\frac{(NB_1)}{(NM)}=\frac{(OB_1)}{(LM)}.$$

Отсюда следует (теорема 369), что три точки N, O, L лежат на одной прямой, причем O лежит между L и N (теорема 364), т. е. точка O лежит внутри диагонали (LN), которая проходит вне указанных выше прямоугольников $OAKB$ и OA_1MB_1 (ибо точки N и L не принадлежат к числу их вершин). Но в таком случае эти прямоугольники дополнительны, а потому:

$OAKB \text{⌶} OA_1MB_1$ (теорема 475).

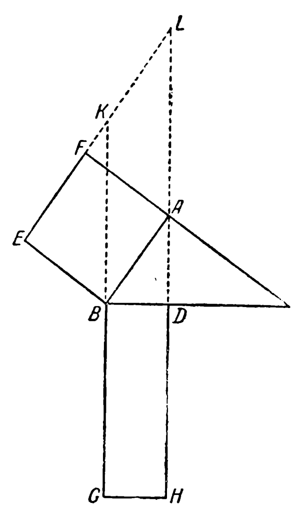
Теорема 477. *Прямоугольник, построенный на гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу, равносоставлен с квадратом, построенным на этом катете.*

На черт. 145 отрезок (BD) есть проекция катета (AB) на гипотенузу (BC); поэтому прямоугольник $BDHG$ [где $(BG)=(BC)$] и квадрат $ABEF$ суть многоугольники, упоминаемые в теореме. На основании теоремы 425 имеем:

$$\frac{(BC)}{(AB)}=\frac{(AB)}{(BD)},$$

и теорема 476 дает

$$BDHG \text{⌶} ABEF.$$



Черт. 145

Приведем еще другое доказательство этой важной теоремы, не основанное на понятии о дополнительных параллелограммах. На черт. 145 продолжим стороны (GB) и (HD) до пересечения с прямой EF в точках K и L (теорема 310). Имеем:

$(BE)=(BA)$, $\angle EBK=\angle ABC$ (теорема 323, оба угла острые),

$$\triangle EBK=\triangle ABC \quad \text{(теорема 165, п. 2)},$$
$$(BK)=(BC).$$

Теперь предыдущие теоремы дают:

$$BGHD \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} BKLA \quad \text{(теорема 344, 470)},$$
$$BKLA \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} BEFA \quad \text{(на том же основании)},$$
$$BGHD \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} BEFA \quad \text{(теорема 469)}.$$

Теорема 478 (теорема Пифагора). *Квадрат, построенный на гипотенузе, равносоставлен с суммой квадратов, построенных на катетах.*

Доказывается двукратным применением теоремы 477.

Замечание. В теореме 430 мы уже имели теорему Пифагора с точки зрения численных соотношений; теорема 478 дает ее в чисто геометрическом виде. Заметим, что все теоремы § 36 можно истолковать в таком же смысле, как это делали древнегреческие геометры.

§ 41. Площади многоугольников

(при помощи аксиомы де-Цольта)

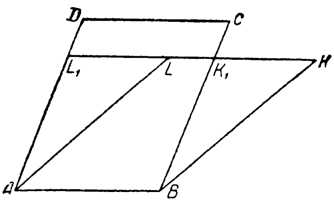
Для того, чтобы завершить учение о равносоставленности многоугольников и перейти к учению о площадях, мы нуждаемся в теореме, обратной для теоремы 470 [это — теорема 479 (см. ниже)], ее значение для разбираемого вопроса выяснится на последующих страницах. Указанное предложение доказывается без труда, если принять аксиому де-Цольта, в силу которой многоугольник не может быть равносоставлен со своей частью. Однако исследования проф. Шатуновского, Гильберта и других ученых показали, что можно не вводить новой аксиомы, а удовольствоваться теми, которые были перечислены в предыдущих параграфах.

В настоящем параграфе (и только в этом параграфе) мы будем опираться на аксиому де-Цольта; в следующем же наметим, как может быть изложено учение о площадях по методу Шатуновского-Гильберта; в частности, там будет доказано названное предложение с помощью системы аксиом, положенных в основу нашего курса.

Аксиома де-Цольта. *Многоугольник не может быть равносоставлен со своей частью.*

Теорема 479. *Равносоставленные параллелограммы с равными основаниями имеют и равные высоты.*

Попробуем допустить, что у таких параллелограммов высоты не равны, и на основании (AB) параллелограмма $ABCD$ с большей высотой построим с той же стороны от AB параллелограмм $ABKL$, равный другому из данных (черт. 146). Так как расстояние прямой KL от AB меньше расстояния CD от AB, то легко убедиться (с помощью теоремы 364), что прямая KL пересечет боковые стороны параллелограмма $ABCD$ соответственно во внутренних точках K_1 и L_1. Тогда имеем:



Черт. 146

$ABK_1L_1 ⌶ ABKL$ (теорема 470),

$ABK_1L_1 ⌶ ABCD$ (теорема 469).

Но ABK_1L_1 составляет часть $ABCD$ (теорема 68), так что получается противоречие с указанной аксиомой. Следовательно, высоты данных параллелограммов равны.

Т е о р е м а 480. *Если два прямоугольника равносоставлены, то стороны их образуют пропорцию, причем стороны одного служат ее средними членами, а стороны другого — крайними.*

Построим прямоугольники, равные данным, расположив их так, как это было сделано при доказательстве теоремы 476 (черт. 144). Соединим прямой точки N и O и докажем, что прямая NO пройдет через точку L (построение точки N и L очевидно). Допустим, что этого не будет; тогда другая точка пересечения прямой NO с обводом прямоугольника $KLMN$ принадлежит либо (LA_1), либо (LB), так как прямая NO входит в параллелограмм OA_1LB. Пусть указанной точкой пересечения будет точка P; проведя прямую $PQ \parallel KL$, получим дополнительные прямоугольники $OAQR$ и OA_1MB_1, так что

$$OAQR ⌶ OA_1MB_1 \qquad \text{(теорема 475).}$$

Но в силу условий теоремы

$$OAKB ⌶ OA_1MB_1,$$

следовательно:

$$OAQR ⌶ OAKB \qquad \text{(теорема 469),}$$

а это противоречит теореме 479. Точно так же отвергается допущение, что точка пересечения принадлежит отрезку (LB); поэтому прямая NO пройдет через точку L. Ссылаясь на теорему 367, пишем:

$$\frac{(NM)}{(NB_1)} = \frac{(LM)}{(OB_1)},$$

откуда

$$\frac{(NM)-(NB_1)}{(NB_1)}=\frac{(LM)-(OB_1)}{(OB_1)},$$

или

$\frac{(OA_1)}{(OA)}=\frac{(OB)}{(OB_1)}$, а это и есть искомая пропорция.

Теорема 481. *Существует один и только один прямоугольник с заданным основанием, который равносоставлен с данным многоугольником.*

Начинаем со следующих построений: данный многоугольник превращаем в равносоставленный с ним треугольник (теорема 474), а этот последний — в равносоставленный параллелограмм (теорема 472). Далее, от параллелограмма переходим к равносоставленному с ним прямоугольнику (теорема 471); наконец, теорема 476 позволяет добиться того, чтобы у этого прямоугольника было наперед заданное основание e.

Действительно, пусть a и b суть стороны полученного выше прямоугольника. Построим четвертый пропорциональный отрезок k так, чтобы:

$$e:a=b:k.$$

Тогда прямоугольник со сторонами a и b будет равносоставлен с прямоугольником, имеющим сторонами отрезки e и k.

Применяя повторно теорему 469, убеждаемся, что для данного многоугольника существует равносоставленный с ним прямоугольник с наперед заданным основанием e. Остается доказать его единственность, другими словами — полную определенность отрезка k (это тем более необходимо, что предыдущие построения содержат некоторые произвольные элементы, так, при пользовании теоремой 474 можно начинать с любой диагонали и т. д.). Пусть, производя построение различными путями, один раз получили прямоугольник с высотою k, а другой раз — с высотою k'. Прежде всего эти прямоугольники будут равносоставленными между собой (теорема 469). Теорема 479 непосредственно дает, что

$$k=k'.$$

Определение 124. В качестве раз навсегда заданного основания вышеуказанных прямоугольников выберем единицу длины e. Тогда прямоугольник с основанием e и равносоставленный с данным многоугольником, называется соотнесенным данному многоугольнику; а высота его k называется отрезком, соотнесенным данному многоугольнику.

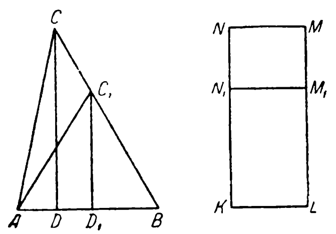
Теорема 482. *Для равносоставленности двух многоугольников необходимо и достаточно равенство соотнесенных им отрезков.*

В самом деле, если $P_1 \mathbin{\text{⌶}} P_2$, то на основании теоремы 469 соотнесенные прямоугольники будут также равносоставленными друг с другом, но тогда $k_1 = k_2$ (теорема 479).

Обратно, если $k_1 = k_2$, то соотнесенные прямоугольники равны (теорема 330), а следовательно, и равносоставлены. Тогда и

$$P_1 \mathbin{\text{⌶}} P_2 \qquad \text{(теорема 469).}$$

Теорема 483. *Если многоугольник разложен на части, то его соотнесенный отрезок тоже можно разложить на части, соответственно соотнесенные частям многоугольника.*



Черт. 147

Пусть многоугольник P, которому соотнесен отрезок k, разложен на части:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Найдем отрезки (теорема 481, определение 124), соотнесенные этим частям, и пусть это будут:

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Обозначим их сумму через k'. Тогда прямоугольник со сторонами e и k' будет равносоставлен с суммой $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ (теорема 468), а следовательно, и с многоугольником P. Но в таком случае

$$k' = k \qquad \text{(теорема 482).}$$

Теорема 484. *Если отрезок, соотнесенный треугольнику, разложен на две части, то данный треугольник можно трансверсально разложить на два треугольника, которым соответственно соотносятся указанные части отрезка.*

Пусть треуг-ку ABC соотнесен отрезок (KN) и прямоугольник $KLMN$ [черт. 147, где $(KL) = e$]; отрезок (KN) точкой N_1 разделен на две части: (KN_1) и (N_1N); при этом отрезок (N_1M_1) делит на две части и прямоугольник $KLMN$. Если принять во внимание теоремы 472, 469, 480, то нетрудно придти к существованию пропорции:

$$\frac{(AB)}{2} : (KL) = (KN) : (CD) \quad (*),$$

где (CD) — высота данного треугольника. Разделим сторону (BC) (в точке C_1) на части, пропорциональные отрезкам (KN_1) и (N_1N), так что

$$\frac{(BC_1)}{(C_1C)} = \frac{(KN_1)}{(N_1N)} \quad (**) \qquad \text{(замечание к теореме 423).}$$

Отсюда получается производная пропорция:

$$\frac{(BC_1)}{(BC_1)+(C_1C)}=\frac{(KN_1)}{(KN_1)+(N_1N)},$$

или

$$\frac{(BC_1)}{(BC)}=\frac{(KN_1)}{(KN)}.$$

Проведем теперь в $\triangle ABC$ трансверсаль (AC_1) и высоту (C_1D_1). В силу теоремы 367 имеем:

$$\frac{(BC_1)}{(BC)}=\frac{(C_1D_1)}{(CD)}.$$

Сопоставляя эту пропорцию с предыдущей, находим:

$$\frac{(KN_1)}{(KN)}=\frac{(C_1D_1)}{(CD)},$$

или, переставляя средние члены,

$$\frac{(KN_1)}{(C_1D_1)}=\frac{(KN)}{(CD)}.$$

Теперь пропорцию (*) можно переписать так:

$$\frac{(AB)}{2}:(KL)=(KN_1):(C_1D_1),$$

откуда следует (теорема 476), что прямоугольник со сторонами $\frac{(AB)}{2}$ и (C_1D_1) равносоставлен с прямоугольником со сторонами (KL) и (KN_1).

Остается снова вспомнить теоремы 472, 469, чтобы придти к выводу:

$$\triangle ABC_1 \mathrel{\text{⌶}} KLM_1N_1,$$

так что этому треугольнику соотнесен отрезок (KN_1).

Возвращаясь к пропорции (* *), выведем из нее другую производную пропорцию:

$$\frac{(BC)}{(CC_1)}=\frac{(KN)}{(NN_1)}$$

и, повторяя предыдущие рассуждения [с той только разницей, что за основание $\triangle ABC$ надо теперь принять (AC) и высоту опускать из точки B], придем к заключению:

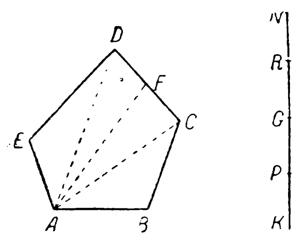
$$\triangle ACC_1 \mathrel{\text{⌶}} NMM_1N_1,$$

так что этому треугольнику соотнесен отрезок (NN_1).

Теорема 485. *Если отрезок, соотнесенный многоугольнику, разделен на две части, то данный многоугольник с помощью трансверсали разлагается на два частичных многоугольника, которым соответственно соотносятся указанные части отрезка.*

Пусть многоугольнику $ABCDE$ соотнесен отрезок (KN) (черт. 148), который точкой G разделен на две части.

С помощью диагоналей из вершины A разлагаем данный многоугольник на треугольники (теорема 69) и на основании теоремы 483 разобьем отрезок (KN) на части (KP), (PR), (RN), соответственно соотнесенные $\triangle\triangle$ ABC, ACD, ADE. Если точка G совпадет с одной из точек деления P, R, то решение вопроса ясно и разложение получается с помощью диагонали.



Черт. 148

Пусть теперь точка G лежит внутри одного из частичных отрезков (PR), который соотнесен $\triangle\, ACD$. На основании теоремы 484 этот треугольник трансверсалью (AF) разлагается на два треугольника, которым соотнесены отрезки (PG) и (GR). Эта же трансверсаль делит данный многоугольник на два частичных многоугольника $ABCF$ и $AFDE$ (теорема 68), причем первой из них будет соотнесен отрезок (KG), а второй — отрезок (GN) [теорема 468 в применении к этим частям и прямоугольникам с основанием e и высотой (KG) или (GN)].

Теорема 486. *Если даны два многоугольника, то либо они равносоставлены, либо один равносоставлен с частью другого.*

Пусть даны многоугольники P_1 и P_2 с соотнесенными отрезками k_1 и k_2.

Если $k_1 = k_2$, то $P_1 \mathrel{\text{⌶}} P_2$ (теорема 482).

Если $k_1 \neq k_2$ и $k_1 > k_2$, то $k_1 = k_2 + k_3$ (теорема 112).

На основании теоремы 485 многоугольник P_1 разлагается на две части, причем одной из них будет соотнесен отрезок k_2; назовем эту часть через P_1'. Тогда

$$P_2 \mathrel{\text{⌶}} P_1' \qquad \text{(теорема 482),}$$

т. е. один из многоугольников равносоставлен с частью другого.

Замечание. Легко видеть, что три возможные здесь случая будут единственно возможными и несовместными.

Определение 125. Понятие о площади многоугольника вводится следующими условиями.

1. *Если* $P_1 \mathbin{\text{⌶}} P_2$, то говорят, что *эти многоугольники имеют одну и ту же площадь*; говорят также, что P_1 и P_2 равновелики.

2. *Если* P_2 *равносоставлен с частью* P_1, то говорят, что *площадь* P_1 *больше площади* P_2 (или площадь P_2 меньше площади P_1).

3. *Если* P_1 *равносоставлен с частью* P_2, то говорят, что *площадь* P_2 *больше площади* P_1 (или площадь P_1 меньше площади P_2).

Площадь многоугольника P обозначается символом $J(P)$.

Теорема 487. Три случая определения 125 — единственно возможны и несовместны (замечание к теореме 486).

Замечание. Таким образом, „одна и та же площадь" есть общее свойство равносоставленных между собой многоугольников; это свойство имеет характер величины (см. ниже). Два многоугольника имеют общую площадь тогда и только тогда, когда они равносоставлены.

Теорема 488. *Между площадями многоугольников и соотнесенными им отрезками существует одно-однозначное соответствие.*

Действительно, если дана площадь, то, значит, дана совокупность всевозможных равносоставленных между собой многоугольников; но всем этим многоугольникам соотносится один и тот же отрезок (теорема 482).

Обратно, если дан отрезок, то всякий многоугольник, которому соотносится этот отрезок (например, прямоугольник с основанием, равным e, и с высотой, равной данному отрезку, а также любой равносоставленный с ним многоугольник), имеет одну и ту же площадь (определение 125, теорема 482).

Теорема 489. *Большей площади соответствует и больший отрезок*, и обратно.

В самом деле, если $J(P_1) > J(P_2)$, то P_2 равносоставлен с частью P_1 (определение 125), и пусть этой частью будет P_1'. Тогда отрезок k_1, соотнесенный P_1, можно разложить на две части, из которых одна, равная k_1', будет соотнесена P_1' (теорема 483), причем, конечно:

$$k_1' < k_1.$$

Так как $P_2 \mathbin{\text{⌶}} P_1'$, то $k_2 = k_1'$ (теорема 482), и окончательно имеем:

$$k_1 > k_2.$$

Обратная теорема доказывается от противного.

Теорема 490. *Площади многоугольников образуют особый класс величин, пропорциональных соотнесенным отрезкам.*

Свойства, характеризующие величину вообще, были перечислены в определении 80. Далее, теорема 488 устанавливает одно-однозначное соответствие между площадями и отрезками. Благодаря этому обстоятельству и предыдущим теоремам, свойства сравнимости, слагаемости и непрерывности с их следствиями (доказанные для отрезков в параграфах 10 и 22), переносятся на площади. Если сюда присоединить еще теорему 303, то наше предложение будет доказано полностью.

Теперь мы получаем право говорить об измерении площадей.

Теорема 491. *Если за единицу площадей принять площадь квадрата со стороной, равной e, то площадь многоугольника измеряется тем же числом, что и соотнесенный ему отрезок.*

В самом деле, квадрату со стороной, равной e, соотносится отрезок e (единица длины), и дело сводится к теореме 305.

Замечание. Вместо слов: „число, измеряющее площадь", очень часто говорят просто: „площадь"; точно так же (как было уже отмечено в § 36), вместо слов: „число, измеряющее сторону прямоугольника", говорят короче: „сторона прямоугольника" и т. п. Этими сокращенными выражениями мы будем пользоваться в последующих теоремах.

Теорема 492. *Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.*

Пусть дан прямоугольник со сторонами a и b (числа, измеряющие эти отрезки с помощью единицы длины e, обозначим через a_0 и b_0). Этому прямоугольнику соотнесен отрезок k, измеряемый числом k_0. Тогда k_0 и есть число, измеряющее данный прямоугольник (теорема 491).

Так как данный прямоугольник равносоставлен с прямоугольником, имеющим сторонами e и k, то

$$k : a = b : e \qquad \text{(теорема 480)},$$

$$b : e = b_0 \qquad \text{(определение 88)};$$

так что

$$k : a = b_0.$$

Другими словами, b_0 есть число, измеряющее k, если a принято за единицу. Но нам дано, что a по отношению к e измеряется числом a_0. Тогда теорема 297 говорит, что k по отношению к e измеряется числом $a_0 b_0$.

Таким образом, получается равенство:

$$k_0 = a_0 b_0.$$

Теорема 493. 1) *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту*;

2) *площадь квадрата равна квадрату его стороны*;

3) *площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту*;

4) *площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.*

Доказательство предоставляется читателю; в каждом случае надо найти равносоставленный прямоугольник и применить теорему 492.

Теорема 494. *Площадь любого многоугольника находится, как сумма площадей треугольников, на которые он разлагается* по какому-либо способу.

Утверждение вытекает из теорем 491 и 483; независимость результата от способа разложения — из теоремы 488.

Теорема 495. 1) Площадь правильного n-угольника равна:

$$\frac{1}{2}p_n \cdot h_n;$$

2) площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус.

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 496. Если a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр, то:

$$J(\triangle) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Действительно, пусть в $\triangle ABC$ (черт. 122)

$$(AB) = c, \quad (BC) = a, \quad (CA) = b, \quad a + b + c = 2p.$$

Будем считать, что $\angle C < d$, и опустим высоту (AD). Тогда

$$J(\triangle) = \frac{1}{2}a \cdot (AD).$$

Далее, имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot (CD) \qquad \text{(теорема 431)},$$

откуда

$$(CD) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

В силу теоремы 430 пишем:

$$(AD)^2 = b^2 - (CD)^2 = [b - (CD)] \cdot [b + (CD)];$$

$$(AD)^2 = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a},$$

$$(AD)^2 = \frac{(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2}.$$

Из того, что $a+b+c=2p$, выводим:

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c),$$
$$a+c-b=2(p-b),$$
$$b+c-a=2(p-a),$$

так что

$$(AD)^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

Подставляя в выражение площади треугольника найденное значение AD, находим искомую формулу.

Теорема 497. *Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон.*

Начнем с двух подобных треугольников:

$$\frac{J(\triangle_1)}{J(\triangle_2)}=\frac{a_1h_1}{a_2h_2}\text{, но }\frac{h_1}{h_2}=\frac{a_1}{a_2}\qquad\text{(теорема 378)},$$

так что

$$\frac{J(\triangle_1)}{J(\triangle_2)}=\frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Возьмем теперь два подобных многоугольника P_1 и P_2. На основании теоремы 380 получаем разложения:

$$P_1=\triangle_1+\triangle_1'+\triangle_1''+\ldots;\qquad P_2=\triangle_2+\triangle_2'+\triangle_2''+\ldots.$$

причем:

$$\triangle_1\backsim\triangle_2,\ \triangle_1'\backsim\triangle_2',\ \triangle_1''\backsim\triangle_2''\ldots$$

На основании предыдущего пишем:

$$\frac{J(\triangle_1)}{J(\triangle_2)}=\frac{J(\triangle_1')}{J(\triangle_2')}=\frac{J(\triangle_1'')}{J(\triangle_2'')}=\ldots=t^2,$$

где t — отношение подобия.

Далее, по свойству равных отношений:

$$\frac{J(\triangle_1)+J(\triangle_1')+J(\triangle_1'')+\ldots}{J(\triangle_2)+J(\triangle_2')+J(\triangle_2'')+\ldots}=t^2$$

или в силу теоремы 494

$$\frac{J(P_1)}{J(P_2)}=t^2.$$

Замечание. Из предыдущего явствует, что понятия: „равносоставленный" и „равновеликий" для многоугольников оказываются эквивалентными: если о двух многоугольниках можно утверждать одно, то можно утверждать и другое. Таким образом, два многоугольника имеют одну и ту же площадь тогда и только тогда, когда оба они составлены из одних и тех же треугольников, но только расположенных различным образом. Для криволинейных фигур это уже не имеет места: равновеликость не влечет за собой непременно равносоставленности.

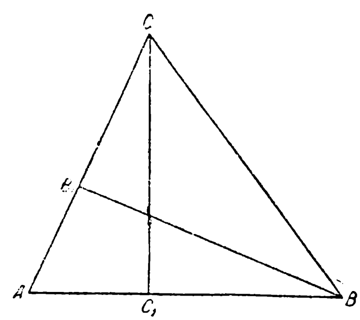
Заметим еще, что теперь в теоремах предыдущего параграфа и в начальных теоремах настоящего можно термин „равносоставленный" заменить на „равновеликий"; например, это можно сделать в теореме Пифагора.

§ 42. Площади многоугольников

(теория Шатуновского-Гильберта)

Достаточно будет развить названное учение до такой степени, чтобы оказалось возможным доказать с помощью аксиом I—XXV добавочную аксиому, положенную в основу рассуждений предыдущего параграфа.

Подобно тому, как в § 41 мы сочетали с каждым многоугольником определенный отрезок, здесь многоугольнику соотносится определенное число. В поисках правила, по которому соотносилось бы определенное число данному треугольнику, докажем следующее предложение.



Черт. 149

Теорема 498. *Произведение стороны треугольника на соответствующую высоту есть число, постоянное для данного треугольника* (о способе выражения см. замечание к теореме 491).

Пусть дан $\triangle ABC$, в котором проведены высоты (CC_1) и (BB_1) (черт. 149). Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC_1 и ABB_1. Так как $\angle A$ у них общий, то

$$\triangle ACC_1 \sim \triangle ABB_1 \quad \text{(теорема 377, п. I)},$$

откуда

$$\frac{(AC)}{(AB)} = \frac{(CC_1)}{(BB_1)},$$

$$(AC) \cdot (BB_1) = (AB) \cdot (CC_1),$$

или, в обычных обозначениях:

$$b \cdot h_b = c \cdot h_c.$$

Точно так же докажем, что и

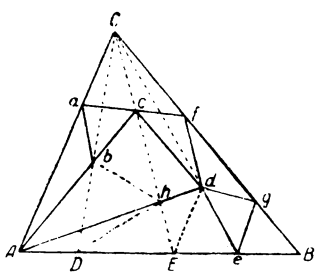
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

Вот это число и можно положить в основу исследования; только вводится еще коэффициент, равный $\frac{1}{2}$, для того, чтобы это число, дающее (как увидим впоследствии) меру площади треугольника, привело нас к обычным формулам.

Определение 126. *Числом треугольника* [обозначение: $N(\triangle)$] *называется число, определяемое по следующему правилу:*

$$N(\triangle)=\frac{1}{2}a\cdot h_a.$$

Легко видеть, что равным треугольникам соотносятся и равные числа. Более сложное рассуждение потребуется для доказательства, что число треугольника равно сумме чисел всех частичных треугольников, на которые он разлагается по какому-либо способу. К решению этого вопроса мы подойдем постепенно.



Черт. 150

Теорема 499. *Если треугольник разложен трансверсально на конечное число частичных треугольников, то его число равно сумме чисел всех частей.* (Здесь необходимо вспомнить определение 18, 19 и теорему 54).

Начнем со случая, когда $\triangle ABC$ трансверсалью (AP) разложен на два треугольника: $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$ (черт. 16). У всех трех треугольников высота (если за вершину принять точку A) общая; обозначим ее через h. Тогда имеем:

$$N(\triangle ABC)=\frac{1}{2}h\cdot(BC)=\frac{1}{2}h\cdot[(BP)+(CP)]=\frac{1}{2}h\cdot(BP)+$$
$$+\frac{1}{2}h\cdot(CP)=N(\triangle ABP)+N(\triangle ACP).$$

Итак, теорема доказана для этого частного случая. Для того, чтобы перейти к общему, достаточно будет вспомнить определение 19.

Теорема 500. *Если треугольник разлагается на конечное число частичных треугольников таким образом, что внутри его и внутри одной из его сторон нет вершин частичных треугольников, то число данного треугольника равно сумме чисел всех его частей.*

Примером такого разложения может служить $\triangle Acd$ на черт. 150; внутри треугольника и внутри стороны (cd) нет вершин частичных треугольников (таких треугольников имеется четыре).

Берем сторону данного треугольника, свободную от вершин частичных треугольников; в то же самое время она должна быть стороной одного из таких треугольников, а третья вершина его должна лежать на одной из двух остальных сторон данного треугольника. Так, на нашем чертеже сторона (cd) служит также стороной $\triangle cdh$, и вершина h лежит внутри (Ad). Полученный частичный треугольник можно, таким образом, отделить от данного с помощью проведения соответствующей трансверсали. Так, трансверсаль (ch) разлагает $\triangle Acd$ на треугольники cdh и Ach (теорема 54).

Отделив один из частичных треугольников, в другой части данного треугольника мы получим разложение, обладающее всеми свойствами первоначального, так как ни внутри этой части, ни внутри трансверсали не может быть вершин частичных треугольников; только в новом треугольнике число частей будет на единицу меньше.

Так, после выделения $\triangle cdh$ нам придется иметь дело с $\triangle Ach$, разложение которого на части обладает теми же свойствами, что и разложение $\triangle Acd$; но только частей этих уже три, а не четыре. Повторив это рассуждение, мы выделим с помощью трансверсали в новом треугольнике еще одну из его частей, и т. д.; так как число частей конечное, то нам понадобится провести конечное число трансверсалей.

Итак, мы убеждаемся, что разложение данного треугольника оказывается трансверсальным (определение 19), и дело сводится к теореме 499.

Теорема 501. *Если данный треугольник произвольным образом разложить на конечное число частичных треугольников* $\triangle_k$, *то*: $N(\triangle)=\Sigma N(\triangle_k)$.

Для пояснения рассуждения будем пользоваться чертежом 150, где треугольники $\triangle_k$ изображены сплошными линиями.

Отметим те вершины частичных треугольников, которые лежат внутри данного треугольника и на одной из его сторон, например, на (AB) (на чертеже это будут точки b, c, d, e); из противоположной вершины C проведем трансверсали, проходящие через все отмеченные точки (на чертеже имеем три трансверсали, изображенные прерывистыми линиями). Эти трансверсали одни, сами по себе, разбивают $\triangle ABC$ на частичные треугольники $\triangle_i$ (на чертеже имеем $\triangle\triangle ACD$, ECD, ECe, eCB).

На основании теоремы 499 имеем:

$$N(\triangle)=\Sigma N(\triangle_i). \qquad (*)$$

В данном $\triangle ABC$ имеются теперь две системы отрезков:

1) система трансверсалей из C, которая разлагает $\triangle ABC$ на $\triangle_i$;

2) система данных отрезков, разлагающих $\triangle ABC$ на $\triangle_k$.

Пусть теперь в данном треугольнике проведены обе системы отрезков сразу. Достигнуть этого можно двояким путем:

сначала провести первую систему отрезков, потом вторую, и наоборот: сначала вторую, потом первую.

Берем $\triangle ABC$ и проводим в нем первую систему отрезков; тогда он трансверсально разлагается на $\triangle_i$. Присоединяем сюда еще вторую систему отрезков; так как внутри $\triangle_i$ и на сторонах, противоположных вершине C, в силу построения не может быть вершин треугольников $\triangle_k$, то отрезки второй системы будут пересекать обводы $\triangle_i$ каждый раз в двух точках, и если одна из них лежит на (AB), то она непременно совпадает с вершиной треугольника $\triangle_i$. Но всякий треугольник прямолинейным отрезком, пересекающим его обвод, разлагается либо на два треугольника, если этот отрезок трансверсаль, либо на треугольник и четыреугольник в общем случае (теорема 68; см. на чертеже примеры этого). Получившиеся четыреугольники диагоналями разобьем на треугольники (на чертеже эти диагонали изображены пунктирными линиями в $\triangle\triangle$ DCE и ECe).

Таким образом, треугольники $\triangle_i$, а вместе с ними и $\triangle ABC$ разлагаются на новые частичные треугольники $\triangle_m$. Легко видеть, что разложение каждого $\triangle_i$ на $\triangle_m$ удовлетворяет условиям теоремы 500, а потому для каждого $\triangle_i$ имеет место указанная теорема.

Складывая, находим:

$$\Sigma N(\triangle_i) = \Sigma N(\triangle_m).$$

Наконец, сопоставляя это равенство с (*), имеем:

$$N(\triangle) = \Sigma N(\triangle_m). \tag{1}$$

Возьмем снова $\triangle ABC$ и проведем в нем сначала вторую систему отрезков, разлагающую его на треугольники $\triangle_k$, а потом присоединим сюда еще первую систему отрезков. Тогда внутри $\triangle ABC$ получится та же самая фигура, что и выше, но теперь уже треугольники $\triangle_k$ подразделяются на более мелкие части с помощью трансверсалей первой системы. Проведя те же самые дополнительные отрезки, мы разложим $\triangle_k$ на те же самые $\triangle_m$ (но только в других сочетаниях); так что совокупность треугольников $\triangle_k$ разлагается на треугольники $\triangle_m$, которые выполняют и данный $\triangle ABC$.[1] Каков же характер этого разложения? Вследствие наших построений, через каждую вершину каждого $\triangle_k$ проходит трансверсаль из точки C [либо одна из сторон (CA) и (CB)]. Начнем с того

---

[1] По поводу некоторых рассуждений настоящего параграфа надо сделать замечание, подобное тому, которое было сделано по поводу доказательства теоремы 469.

частного случая, когда одна из сторон $\triangle_k$ целиком лежит на соответствующей трансверсали (например, $\triangle Ade$). Легко видеть, что вершины треугольников $\triangle_m$ находятся в точках пересечения отрезков первой и второй систем, так что ни внутри рассматриваемого $\triangle_k$, ни внутри его стороны, лежащей на трансверсали, не может быть вершин частичных для него $\triangle_m$. Поэтому, в разбираемом частном случае, разложение $\triangle_k$ на $\triangle_m$ удовлетворяет условиям теоремы 500.

Возьмем теперь общий случай: из трех трансверсалей, проходящих через вершины выбранного $\triangle_k$, одна будет лежать внутри угла, образованного двумя остальными, так как другой случай теоремы 49 здесь невозможен, вследствие того, что все лучи находятся внутри $\angle ACB$ и луч, противоположный какой-либо трансверсали, не может попасть внутрь его (теорема 41). Таким образом, одна из трансверсалей, проходя через вершину рассматриваемого $\triangle_k$, пересекает его противоположную сторону, а потому трансверсально разлагает его на два частичных треугольника [например, трансверсаль CE данного треугольника проходит через вершину c треугольника Acd и пересекает его сторону (Ad) в точке h.

Поэтому указанный треугольник трансверсалью (ch) разлагается на $\triangle\triangle$ Ach и chd]. Для каждого из этих последних треугольников имеет место предыдущий частный случай.

Теперь на основании теорем 499 и 500 можно утверждать, что число каждого треугольника $\triangle_k$ равно сумме чисел треугольников $\triangle_m$, входящих в его состав.

Складывая, получаем равенство:

$$\Sigma N(\triangle_k) = \Sigma N(\triangle_m). \qquad (2)$$

Наконец, сопоставляя (1) и (2), приходим к равенству:

$$N(\triangle) = \Sigma N(\triangle_k),$$

которое и доказывает эту весьма важную для рассматриваемой теории теорему.

Теорема 502. Если многоугольник P двумя различными способами разложен на треугольники $\triangle_i$ и $\triangle_k$, то

$$\Sigma N(\triangle_i) = \Sigma N(\triangle_k).$$

В нашем распоряжении имеются две системы отрезков: одна разлагает P на $\triangle_i$, другая — на $\triangle_k$. Проведем в P обе системы сразу, и если появятся многоугольные части, то диагоналями разобьем их на треугольники. Таким образом, получается третье разложение P на треугольники $\triangle_m$, причем в одной комбинации эти последние дают $\triangle_i$, а в другой — $\triangle_k$. На основании теоремы 501, пишем:

$$\Sigma N(\triangle_i) = \Sigma N(\triangle_m),$$

$$\Sigma N(\triangle_k) = \Sigma N(\triangle_m),$$

откуда

$$\Sigma N(\triangle_i) = \Sigma N(\triangle_k).$$

Определение 127. *Числом многоугольника P* [обозначение $N(P)$] *называется сумма чисел всех треугольников,* на которые он разлагается по какому-либо способу.

Теорема 503. *Равносоставленным многоугольникам соотносятся равные числа* [т. е., если $P_1 \,\text{Ɪ}\, P_2$, то $N(P_1) = N(P_2)$].

Доказательство непосредственно вытекает из сделанных выше определений.

Теорема 504. *Если многоугольник произвольным образом разложен на конечное число частичных многоугольников, то его число равно сумме чисел всех его частей.*

Указанные в теореме части могут быть и треугольниками и многоугольниками; последние с помощью диагоналей тоже разбиваем на треугольники. Таким образом, получается разложение данного многоугольника на треугольники, которые в известных комбинациях образуют также и первоначальные части, и дело сводится к определению 127.

Теорема 505. Если $N(P_1) = N(P_2)$, то $P_1 \,\text{Ɪ}\, P_2$.

Строим треугольник, равносоставленный с P_1 (теорема 474); затем — прямоугольник, равносоставленный с этим треугольником (теоремы 472, 471). Наконец, строим прямоугольник Q_1, равносоставленный с полученным выше и имеющий наперед заданное основание e (теорема 476).

На основании теоремы 469 многоугольник P_1 равносоставлен с прямоугольником Q_1 со сторонами e и k_1. Точно так же P_2 равносоставлен с прямоугольником Q_2 со сторонами e и k_2.

На основании теоремы 503 имеем:

$$N(P_1) = N(Q_1) \text{ и } N(P_2) = N(Q_2).$$

Вычисляем $N(Q_1)$. Разлагая прямоугольник диагональю на два треугольника, находим:

$$N(Q_1) = \frac{1}{2} ek_1 + \frac{1}{2} ek_1 = ek_1 \quad \text{(теорема 504)}.$$

Точно так же

$$N(Q_2) = ek_2.$$

Согласно условию теоремы:

$$ek_1 = ek_2,$$

откуда

$$k_1 = k_2$$

(буквы e, k_1, k_2 обозначают здесь числа). Но если длины отрезков равны, то и сами отрезки равны, а следовательно, и наши прямоугольники равны. А так как равные фигуры равносоставлены, то повторное применение теоремы 469 дает:

$$P_1 \rightleftharpoons P_2.$$

Теорема 506. *Многоугольник не может быть равносоставлен со своею частью.*

Если мы допустим, что многоугольник P равносоставлен со своею частью P_1, то по теореме 503

$$N(P) = N(P_1),$$

а по теореме 504

$$N(P) > N(P_1),$$

т. е. получается противоречие.

Доказав таким образом „аксиому де Цольта", мы достигли главной цели, поставленной в настоящем параграфе.

Наметим в нескольких словах дальнейшее развитие рассматриваемого учения о площадях. Так как $P_1 \rightleftharpoons P_2$ тогда и только тогда, когда $N(P_1) = N(P_2)$, то, введя и здесь определение 125, можно установить одно-однозначное соответствие между площадями многоугольников и соотнесенными им числами. Благодаря этому на площади переносятся свойства величин и доказывается, что площадь многоугольника измеряется как раз его числом. Таким путем получаются обычные формулы для площадей, причем при этом способе основной фигурой является треугольник, а при способе предыдущего параграфа — прямоугольник. Но на треугольники разлагается любой многоугольник, тогда как разложение на прямоугольники вообще невозможно; с этой точки зрения, второй способ имеет преимущество, но он менее нагляден, чем первый.

§ 43. Площадь круга

Измерение площади круга нельзя обосновать на тех же началах, которые были положены в основу измерения площадей многоугольников. Поэтому определение площади круга придется обосновать на соображениях непрерывности, как это было сделано для измерения окружности. Предварительно докажем несколько вспомогательных теорем.

Теорема 507. *Площадь вписанного многоугольника меньше площади описанного* (около той же окружности).

Действительно, из теоремы 435 и 439 вытекает, что вписанный многоугольник будет частью описанного, и дело сводится к определению 125 и теореме 490.

К обозначениям, введенным в § 38, присоединим еще следующие:

J_n — площадь правильного вписанного n-угольника.

J'_n — „ „ описанного „ .

Теорема 508. $J_{2n} = \frac{1}{2} r \cdot p_n$.

Для доказательства вернемся к черт. 135, где (KL) есть сторона правильного вписанного n-угольника, а (KM) и (LM) — стороны правильного вписанного $2n$-угольника (так что $OM \perp KL$). Легко видеть, что

$$J_{2n} = 2n \cdot J(\triangle OKM),$$

$$J(\triangle OKM) = \frac{1}{2}(OM) \cdot (KP) = \frac{1}{4} r a_n.$$

$$J_{2n} = \frac{1}{2} r \cdot n a_n = \frac{1}{2} r \cdot p_n.$$

Теорема 509. Существует такое целое положительное число n, что

$$J'_n - J_{2n} < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданное положительное число.

Действительно, на основании теорем 495 (п. 2) и 508 имеем:

$$J'_n - J_{2n} = \frac{1}{2} r p'_n - \frac{1}{2} r p_n = \frac{1}{2} r \cdot \left(p'_n - p_n\right).$$

Но в силу теоремы 460 существует такое n, что

$$p'_n - p_n < \frac{2\varepsilon}{r},$$

и тогда

$$J'_n - J_{2n} < \varepsilon.$$

Теорема 510. *Для данного круга существует одна и только одна площадь, которая больше площади всякого вписанного многоугольника и меньше площади всякого описанного.*

Будем в данный круг вписывать и около него описывать всевозможные (выпуклые) многоугольники. Разделим их площади на два класса:

в I класс отнесем площади вписанных многоугольников,

во II класс — описанных многоугольников.

Теоремы 507 и 509 показывают, что оба условия начала Кантора выполняются (надо помнить, что в теореме 490 было в числе других предложений доказано и начало Кантора для площадей), а потому существует одна и только одна площадь J, которая не меньше любой площади I класса и не больше любой площади II класса. Но равенство J какой-нибудь площади I или II класса является невозможным. Это доказывается совершенно так же, как соответственное утверждение в теореме 461.

Итак, существует *единственная площадь J, удовлетворяющая условию: площадь вписанного многоугольника $< J <$ площади описанного многоугольника.*

Определение 128. *Площадью круга называется площадь J, о которой шла речь в теореме 510.*

Теорема 511. *Площадь круга равна πr^2.*

Докажем, что число πr^2 удовлетворяет тем же неравенствам, что и площадь J. Возьмем какой-нибудь вписанный многоугольник P, обозначим его стороны через a_i, а расстояния их от центра — через h_i. Предположим сначала, что центр круга лежит внутри многоугольника; разбивая последний на треугольники посредством отрезков, соединяющих центр с вершинами, найдем:

$$J(P) = \frac{1}{2} \cdot \Sigma a_i h_i;$$

но так как

$$h_i < r,$$

$$\text{то } J(P) < \frac{1}{2} r \cdot \Sigma a_i = \frac{1}{2} rp.$$

По определению длины окружности имеем:

$$p < 2\pi r,$$

так что

$$J(P) < \pi r^2.$$

Если центр круга лежит вне многоугольника P или на его обводе, то нетрудно построить другой вписанный многоугольник Q так, чтобы первый был его частью и чтобы центр круга лежал внутри Q. Тогда имеем неравенства:

$$J(P) < J(Q) \quad \text{и} \quad J(Q) < \pi r^2,$$

так что

$$J(P) < \pi r^2.$$

Возьмем теперь какой-нибудь описанный многоугольник P'. Его площадь

$$J(P') = \frac{1}{2} rp' \qquad \text{(теорема 495, п. 2).}$$

Но по определению длины окружности

$$p' > 2\pi r,$$

так что

$$J(P') > \pi r^2.$$

Мы приходим к неравенствам:

площадь вписанного многоугольника $< \pi r^2 <$ площади описанного многоугольника.

Но J удовлетворяет тем же самым неравенствам, и такое число единственно, а потому

$$J = \pi r^2.$$

Переходя к площади сектора, мы этот вопрос изложим так же кратко (и по тем же самым соображениям), как это было сделано для дуги окружности.

Определение 129. *Площадью сектора называется площадь, которая так относится к площади круга, как соответствующий центральный угол — к полному углу.*

Теорема 512. *Площадь сектора равна половине произведения радиуса на длину соответствующей дуги.*

Действительно, если сектор вырезывается центральным углом φ (измеренным в радианах), то в силу определения 129 имеем:

$$\frac{x}{\pi r^2} = \frac{\varphi}{2\pi},$$

откуда площадь сектора, обозначенная через x:

$$x = \frac{1}{2} r^2 \varphi.$$

Если же вспомнить теорему 467, то эту формулу можно переписать так:

$$x = \frac{1}{2} rs,$$

где s — длина соответствующей дуги.

Замечание 1. Здесь мы рассмотрели простейшие фигуры с криволинейным обводом и определили их площади. В высшем анализе доказывается, что такие фигуры вообще образуют класс величин, и потому можно вычислять их площади, основываясь на общих свойствах величин.

Замечание 2. В заключение параграфа упомянем об одной знаменитой древней задаче о квадратуре круга. Под этим понималось требование построить квадрат, равновеликий кругу.

Вычислением с любой степенью точности задача решается без затруднений. Если сторону искомого квадрата обозначить через z, то

$$z^2 = \pi r^2,$$

откуда

$$z = r \cdot \sqrt{\pi}.$$

Но если поставить требование, чтобы сторона искомого квадрата была построена с помощью линейки и циркуля, то задача оказывается невозможной, как это строго доказано средствами высшего анализа.

§ 44. Пирамида, призма, параллелепипед

Выше (в § 8 и 9) были уже изучены некоторые свойства многогранников, относящиеся к геометрии положения. Теперь мы подойдем к ним с точки зрения геометрии меры.

Определение 130. Определение пирамиды было дано выше (определение 30), так что здесь дадим только некоторые дополнения. Высотой пирамиды называется расстояние ее вершины от плоскости основания. Если основанием пирамиды служит правильный многоугольник и основание высоты попадает в его центр, то пирамида называется прямой пирамидой с правильным основанием, или, короче: правильной пирамидой.

Замечание. Последнее название является общеупотребительным, но оно не совсем удачно, так как такая пирамида вовсе не будет правильным многогранником (см. ниже).

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

Теорема 513. *В правильной пирамиде*:

1) *все боковые ребра и боковые грани равны между собой;*

2) *все трехгранные углы при основании равны между собой;*

3) *в многогранном угле при вершине все плоские углы и все двугранные углы равны между собой.*

К определению 130 можно теперь сделать следующее дополнение: высота боковых граней правильной пирамиды называется апофемой.

Теорема 514. *Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:*

1) *боковые ребра и высота делятся на пропорциональные части;*

2) *в сечении получается многоугольник, подобный основанию;*

3) *площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.*

4) *секущая плоскость отсекает от данной пирамиды другую, подобную ей.*

Определение 131. Предыдущее построение дает повод ввести новое определение: та часть данной пирамиды, которая остается после отсечения подобной ей пирамиды (см. п. 4), называется *усеченной* пирамидой; определение обоих оснований, высоты и т. д. непосредственно ясно. Если через середину высоты усеченной пирамиды провести плоскость, параллельную ее основаниям, то получается *среднее сечение*. Если усеченная пирамида получилась из правильной пирамиды, то она сама называется правильной. Как легко видеть, ее грани суть равные равнобочные трапеции; их высота называется *апофемой*.

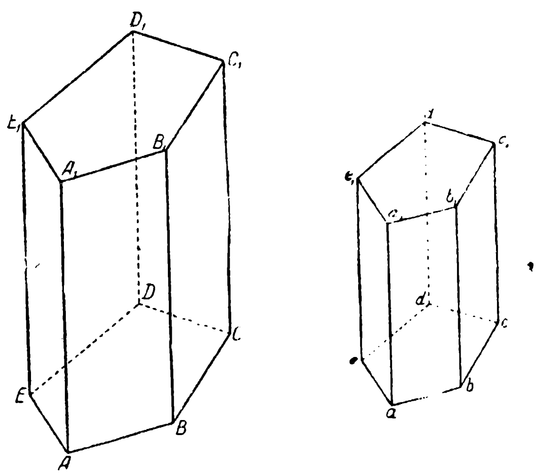
Теперь перейдем к определению другого многогранника, занимающего видное место в элементарной геометрии. Возьмем многоугольник $ABCDE\ldots$ (черт. 151, левая часть) и произвольную точку A_1 вне его плоскости; далее проведем прямую AA_1 и все прямые BB_1, $CC_1\ldots$, ей параллельные. Наконец, через точку A_1 проведем плоскость, параллельную плоскости данного многоугольника. Пусть эта плоскость пересекает указанные параллели в точках B_1, C_1.... Нетрудно убедиться, что эти точки дадут нам выпуклый многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$.... Так как далее $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$,... (теорема 354), то четыреугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1,... суть параллелограммы.

Определение 132. Совокупность многоугольников $ABCDE$..., $A_1B_1C_1D_1E_1$..., ABB_1A_1, BCC_1B_1... образует выпуклую многогранную поверхность (определение 27). Соответствующий многогранник (определение 29) называется *призмой*. Определение ее оснований, высоты и т. п. дается по обычному способу. Если боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания, то призма называется прямой, в противном случае — наклонной. Если у прямой призмы основанием служит правильный многоугольник, то такая призма называется правильной.

Теорема 515. *Во всякой призме:*

1) *боковые ребра равны между собой;*

2) *основания суть равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами.*



Черт. 151

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 516. *Если у двух призм (пирамид) имеется по основанию и боковой грани, соответственно подобных, одинаково наклоненных и одинаково расположенных, то эти многогранники подобны.* („Одинаковое расположение" надо понимать так же, как в теореме 383.)

Действительно, пусть даны две призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ и $abcdea_1b_1c_1d_1e_1$ (черт. 151), у которых:

$ABCDE \backsim abcde$, $ABB_1A_1 \backsim abb_1a_1$, двугранный $\angle AB =$ двугранному $\angle ab$

и, кроме того, имеем одинаковое расположение этих граней. Так как в каждой призме данные грани имеют по общему ребру (AB) и (ab), то в обоих случаях подобия многоугольников имеем одно и то же отношение подобия:

$$\frac{(AB)}{(ab)} = q.$$

Принимая во внимание указанное подобие и одинаковое расположение элементов, пишем:

$\angle ABB_1 = \angle abb_1$, $\angle ABC = \angle abc$, двугранный $\angle AB =$ двугранному $\angle ab$,

а потому

трехгранный $\angle B =$ трехгранному $\angle b$, (теорема 211),

откуда, в свою очередь, выводим:

$\angle CBB_1 = \angle cbb_1$, и двугранный $\angle BC =$ двугранному $\angle bc$.

Кроме того, имеем:

$$\frac{(BC)}{(bc)} = \frac{(AB)}{(ab)} \quad \text{и} \quad \frac{(BB_1)}{(bb_1)} = \frac{(AB)}{(ab)},$$

так что

$$\frac{(BC)}{(bc)} = \frac{(BB_1)}{(bb_1)} = q.$$

Теперь с помощью теоремы 380 нетрудно установить подобие граней BCC_1B_1 и bcc_1b_1 [именно, разложив их на треугольники диагоналями (B_1C) и (b_1c)] с тем же отношением подобия q. Таким образом, у нас оказалась еще пара подобных боковых граней, одинаково наклоненных к основанию.

Повторяя предыдущие рассуждения, получим:

трехгранный $\angle C =$ трехгранному $\angle c$ и $CDD_1C_1 \backsim cdd_1c_1$

и будем продолжать эти рассуждения, пока не переберем всех трехгранных углов, прилежащих к основанию, и всех боковых граней призмы.

Далее, подобие верхних оснований вытекает из теоремы 515 (п. 2), а равенство прилежащих к ним трехгранных углов — из теоремы 213. Наконец, теорема 385 дает искомое подобие. Для пирамид доказательство остается по существу тем же самым.

Теорема 517. *Если у двух призм (пирамид) имеется по основанию и боковой грани, соответственно равных, одинаково наклоненных и одинаково расположенных, то эти многогранники равны.*

Это утверждение получается из предыдущего при $q=1$.

Определение 133. *Площадью поверхности многогранника* (или короче: поверхностью многогранника) *называется сумма площадей всех его граней;* в частности, по отношению к призме, пирамиде и усеченной пирамиде в таком случае говорят о полной поверхности. Боковой поверхностью названных многогранников называют сумму площадей одних боковых граней.

Доказательство следующих двух теорем предоставляется читателю.

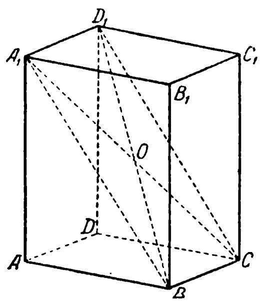
Теорема 518. 1. *Боковая поверхность призмы равна произведению периметра нормального сечения на боковое ребро* (нормальное сечение есть многоугольник, получаемый в сечении призмы плоскостью, перпендикулярной к ребру).

2. *Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро.*

Теорема 519. 1. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна полупроизведению периметра основания на апофему.*

2. *Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению периметра среднего сечения на апофему.*

Определение 134. *Параллелепипед* есть призма, у которой основанием служит параллелограмм (черт. 152). Две его грани называются противоположными, если они не имеют общих точек; далее, два ребра называются противоположными, если по одному из них пересекаются грани, соответственно противоположные тем, которые пересекаются по другому [например, (AB) и (C_1D_1), (BC) и (A_1D_1), и т. д.]; наконец, две вершины называются противоположными, если они служат точками пересечения соответственно противоположных граней [например, A и C_1, B и D_1, и т. д.]. С ребер и вершин название „противоположные" переносится на двугранные и трехгранные углы; отрезки, соединяющие две противоположные вершины, называются диагоналями. Отметим частный случай параллелепипеда, а именно прямой параллелепипед, у которого грань, принятая за основание, перпендикулярна боковым ребрам. Если у прямого параллелепипеда основанием служит прямоугольник, то он называется прямоугольным, а три ребра, сходящиеся в одной вершине, называются его измерениями. Если эти последние равны между собою, то получаем куб.



Черт. 152

Теорема 520. *Во всяком параллелепипеде:*

1) *противоположные грани равны и параллельны,*

2) *противоположные двугранные и трехгранные углы равны;*

3) *диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.*

Остановимся на противоположных гранях BCC_1B_1 и ADD_1A_1 (черт. 152).

Так как

$$BC \parallel AD \quad \text{и} \quad BB_1 \parallel AA_1,$$

то

$$\text{плоскость } B_1BC \parallel \text{плоскости } A_1AD \quad \text{(теоремы 345 и 350).}$$

Далее:

$(BC) = (AD)$, $(BB_1) = (AA_1)$ и $\angle B_1BC = \angle A_1AD$ (для последнего: теоремы 306 и 322), и теорема 330 дает:

$$BCC_1B_1 = ADD_1A_1.$$

Рассмотрим теперь два противоположных трехгранных угла D и B_1. Для них имеем:

$$\angle ADD_1 = \angle BCC_1 = \angle BB_1C_1 \quad \text{(теоремы 322, 329, п. 2).}$$

Точно так же докажем равенства:

$$\angle ADC = \angle C_1B_1A_1 \quad \text{и} \quad \angle CDD_1 = \angle A_1B_1B.$$

Но тогда

$$\text{трехгранный } \angle D = \text{трехгранному } \angle B_1 \qquad \text{(теорема 213),}$$

а отсюда вытекает и равенство противоположных двугранных углов:

$$\text{двугранный } \angle AD = \text{двугранному } \angle B_1C_1, \text{ и т. д.}$$

Наконец, возьмем две диагонали (A_1C) и (BD_1). Соединив еще точки A_1 и B, C и D_1, убедимся, что четыреугольник A_1BCD_1 будет параллелограммом (теорема 331, п. 3). Но в таком случае его диагонали (A_1C) и (BD_1) пересекаются и в точке O пересечения делятся пополам (теорема 329, п. 5). Возьмем еще какую-нибудь диагональ [например, (AC_1)]. По предыдущему она пересекает (A_1C) в ее середине, т. е. пройдет через точку O, в которой и сама разделится пополам.

Теорема 521. *Во всяком прямоугольном параллелепипеде:*

1) *диагонали равны;*

2) *квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.*

Проведем диагональ (BD_1) (черт. 153) в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагональ (BD) его основания.

Теорема Пифагора дает:

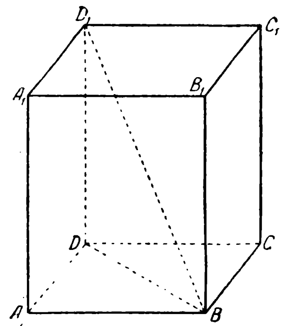
$$(BD_1)^2 = (BD)^2 + (DD_1)^2,$$

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2.$$

Подставляя и заменяя (DD_1) на (AA_1), находим

$$(BD_1)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 + (AA_1)^2.$$

Что касается равенства диагоналей, то оно доказывается с помощью предыдущей формулы или непосредственно из равенства прямоугольных треугольников, причем придется вспомнить теорему 335.



Черт. 153

§ 45. Правильные многогранные углы

Определение 135. *Многогранный угол называется правильным, если все его плоские углы равны между собой и все двугранные углы также равны между собой.*

Замечание. Из теоремы 513 (п. 3) вытекает, что в правильной пирамиде *телесный* угол при вершине будет правильным.

Теорема 522. Если на ребрах правильного k-гранного угла отложить от его вершины S равные отрезки $(SA) = (SB) = (SC) = \cdot\ \cdot\ \cdot$, то получим правильный k-угольник $ABC\ldots$

Для доказательства возьмем k-гранный $\angle S$ на черт. 154, *а* и произведем указанное построение. Легко видеть, что

$$\triangle ASB = \triangle BSC = \triangle CSD = \ldots,$$

откуда

$$(AB) = (BC) = (CD) = \ldots,$$

$$\angle SAB = \angle SBA = \angle SBC = \angle SCB = \angle SCD = \angle SDC = \ldots$$

Если сюда еще присоединить равенство:

двугранный $\angle SB$ = двугранному $\angle SC$ (определение 135),

то получаем:

трехгранный $\angle BASC$ = трехгранному $\angle CDSB$ (теорема 211),

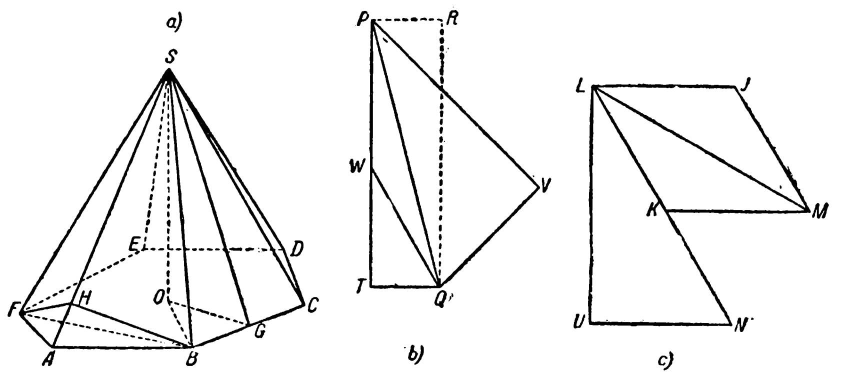
откуда

двугранный $\angle S.BC.A$ = двугранному $\angle S.CB.D$.

Но обе полуплоскости $BC \cdot A$ и $BC.D$ лежат по одну сторону от плоскости BSC (по свойству выпуклого многогранного угла), так что эти полуплоскости должны совпасть. Другими словами, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Продолжая эти рассуждения, придем к выводу, что все точки A, B, C, D, E,.. лежат в одной плоскости.

Далее, прямая AB оставляет все точки C, D, E,... по одну сторону от себя, как это опять-таки вытекает из определения многогранного угла. Поэтому получается выпуклый k-угольник $ABCDE$... Выше было доказано, что его стороны равны между собой. Из равенства трехгранных углов при B и C следует, что

$$\angle ABC = \angle BCD, \text{ и т. д.}$$



Черт. 154

Таким образом, многоугольник $ABCDE$... оказывается правильным.

Теорема 523. *Если $\alpha < \frac{360°}{k}$, где k—целое положительное число $\geqslant 3$, то существует один и только один правильный k-гранный угол, у которого все плоские углы равны α.*

Действительно, теорема 206 показывает, что $\angle\alpha$ должен необходимо выполнять указанное неравенство; сейчас будет установлена его достаточность. С этой целью возьмем в некоторой плоскости правильный k-угольник $ABCD$... (черт. 154, a). Существование такого многоугольника вытекает хотя бы из теоремы 445, но пусть читатель подумает, всегда ли можно его построить с помощью линейки и циркуля.

Сделаем отдельно (черт. 154, b) некоторые вспомогательные построения. Прежде всего построим прямоугольный при T треугольник PQT по катету $(QT) = \frac{(AB)}{2}$ и $\angle QPT = \frac{\alpha}{2}$ (так как $\frac{\alpha}{2} < \frac{180°}{k}$, то этот угол острый). Наш треугольник строится с помощью пунктирных линий, указанных на чертеже, где при данном $\angle QPT = \frac{\alpha}{2}$ имеем:

$$PR \perp PT, \ (PR) = (QT) \ \text{и} \ RQ \parallel PT.$$

Докажем, что его гипотенуза (PQ) будет больше радиуса (OB) нашего правильного многоугольника.

Действительно, этот радиус является гипотенузой $\triangle OBG$ (черт. 154, a), в котором катет $(BG) = \frac{AB}{2}$, а $\angle BOG = \frac{180^\circ}{k}$, как половина центрального угла правильного k-угольника.

Построим теперь

$$\triangle QWT = \triangle BOG,$$

расположив его по ту же сторону от QT, что и $\triangle PQT$ (черт. 154, b). Так как имеем неравенство

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{180^\circ}{k}, \ \text{или} \ \angle QPT < \angle QWT,$$

то

$$\angle PQT > \angle WQT$$

и точка W попадет между P и T. А потому (теорема 168, п. 3)

$$(PQ) > (WQ).$$

Следовательно, можно построить прямоугольный $\triangle PQV$ с гипотенузой (PQ) и с катетом $(QV) = (OB)$ [его построение можно выполнить, описав на (PQ) полуокружность]; другой его катет (PV) необходим для дальнейших построений. В центре O правильного k-угольника $ABCDE\ldots$ восставим к его плоскости перпендикуляр (теорема 185) и отложим на нем отрезок $(OS) = (PV)$. Соединяя точку S с вершинами правильного многоугольника, получим искомый телесный угол $SABCD\ldots$ Прежде всего у нас получится правильная k-угольная пирамида $SABCD\ldots$ (определение 130), и угол при ее вершине будет правильным (замечание к определению 135). Проведя ее апофему (SG), пишем в силу построения:

$$\triangle SOB = \triangle PVQ, \quad \text{откуда} \quad (SB) = (PQ);$$

$$\triangle SGB = \triangle PTQ,$$

так что

$$\angle BSG = \angle QPT = \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, плоские углы построенного правильного k-гранного угла равны α. Остается установить его единственность.

Положим, построен еще другой правильный k-гранный угол S_1, с плоскими углами, равными α (на чертеже не обозначенный). Отложим на ребрах равные отрезки $(S_1A_1)=(S_1B_1)=$ $=(S_1C_1)=\ldots$. Получим правильный k-угольник $A_1B_1C_1\ldots$ (теорема 522).

Легко видеть, что

трехгранный $\angle BASC=$трехгранному $\angle B_1A_1S_1C_1$ (теорема 213), откуда

$$\text{двугранный } \angle SB=\text{двугранному } \angle S_1B_1.$$

Таким образом, в телесных углах S и S_1 все элементы оказываются соответственно равными, так что получается тот же угол.

Следствие. Число ребер и величина плоского угла вполне определяют правильный многогранный угол.

Задача. Построить двугранный угол правильного k-гранного угла с плоскими углами, равными α.

Конечно, задача будет решена, если мы построим нормальное сечение искомого двугранного угла.

Пусть дан охарактеризованный выше многогранный $\angle S$. Отложив $(SA)=(SB)=(SC)=\ldots$ получим правильный k-угольник $ABC\ldots$ (теорема 522; черт. 154, a). Остановившись на двугранном $\angle SA$, через BF (где B и F—смежные с A вершины многоугольника) проведем плоскость, перпендикулярную к SA.

Замечание к определению 60 показывает, что это возможно, так как плоскости ABF и SAO взаимно перпендикулярны (теорема 199). Пусть эта плоскость пересекает грани нашего двугранного угла по прямым BH и FH, так что $\angle BHF$ будет искомым нормальным сечением. Заметим, что точка H вообще лежит внутри (SA) и может лежать на его продолжении лишь при $k=3$ и $\alpha>90°$ (теорема 172).

Итак, $\angle BHF$ вполне определяется как угол при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание равно (BF), а стороны равны высоте $\triangle SAB$, опущенной из точки B. Теорема 192 показывает, что величина отрезка (SA) не повлияет на результат.

Строим (черт. 154, c) $\triangle KLM$ по $\angle LKM$, равному углу правильного k-угольника (построенного выше) и по $(KL)=(KM)=$ $=(AB)$, так что $(LM)=(BF)$; далее строим прямоугольный $\triangle LNU$ по гипотенузе $(LN)=(SB)=(PQ)$ и по $\angle NLU=\alpha$, так что

$$\triangle LNU=\triangle SBH,$$

$$(NU)=(BH)$$

[если $\alpha=90°$ и $k=3$, то искомый двугранный угол равен $90°$; если $\alpha>90°$, то берем $\angle NLU=180°-\alpha$]; наконец, строим $\triangle LMJ$ по (LM) и $(LJ)=(MJ)=(NU)$.

$\angle LJM$ будет искомым нормальным сечением (фигура $JLKM$ на черт. 154, c не будет параллелограммом, ибо $\angle J \neq \angle K$).

Замечание. Эту задачу можно решить вычислением при помощи основных тригонометрических зависимостей. Предлагаем читателю убедиться, что для искомого угла z получается формула:

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{k}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 46. Правильные многогранники

Определение 136. *Многогранник* называется *правильным, если все его грани и телесные углы правильны.*

Теорема 524. *В правильном многограннике все ребра, плоские углы, грани, двугранные и многогранные углы соответственно равны между собой.* (Следить за доказательством можно, например, по черт. 158.)

Возьмем две каких-нибудь грани с общим ребром. В каждой из них все ребра равны между собой, ибо грани суть правильные многоугольники; но одно ребро общее, так что все ребра этих граней равны между собой. Возьмем третью грань, прилежащую к одной из двух первых, и т. д. Перебрав таким образом все грани данного многогранника (теорема 94), убедимся, что все его ребра равны между собой.

Рассмотрим теперь многогранный угол при одной из вершин. Пусть одна из граней, сходящихся при этой вершине, будет правильным m-угольником, а другая—правильным n-угольником.

Так как наш телесный угол правильный, то

$$\frac{2d(m-2)}{m} = \frac{2d(n-2)}{n} \text{ (замечание к определению 115),}$$

откуда

$$m = n,$$

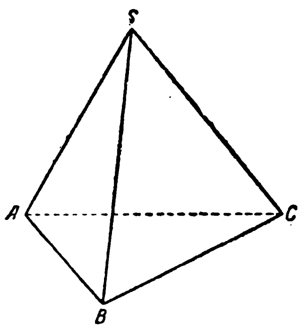
т. е. все многоугольники, сходящиеся при выбранной вершине, будут одноименными. Затем переходим к какой-либо другой вершине одного из этих многоугольников и точно так же докажем одноименность сходящихся в ней граней, и т. д.

Следовательно, все грани одноименны, а потому подобны (теорема 447); но отношение подобия равно 1, ибо все ребра равны, так что все грани равны между собой. Отсюда также следует, что и все плоские углы равны между собой.

Возьмем, наконец, два многогранных угла при двух вершинах, являющихся концами одного и того же ребра. Так как оба угла правильны и один двугранный угол у них общий, то все их двугранные углы равны между собой.

Переходим далее к третьей вершине, соединенной ребром многогранника с одной из двух первых, и т. д. Продолжая эти рассуждения (теорема 94), убедимся, что все двугранные углы правильного многогранника равны между собой. Вспоминая предыдущее, получим равенство всех многогранных углов, откуда следует также, что все они будут одноименными (см. замечание в конце § 20).

Введем для правильного многогранника следующие обозначения: m — число граней, n — наименование каждой грани, v — число вершин, k — наименование телесных углов, r — число ребер.



Черт. 155

Эти пять чисел будем называть числами, характеризующими правильный многогранник.

Теорема 525. *Числа, характеризующие правильный многогранник, могут иметь только пять различных систем значений,* указанных в теореме 97.

Действительно, в правильном многограннике и грани и телесные углы одноименны, а потому имеет место теорема 97.

Теорема 526. *Существует правильный многогранник, характеризуемый числами:*

$$m=4, \quad n=3, \quad v=4, \quad k=3, \quad r=6.$$

Возьмем правильный трехгранный угол, у которого плоские углы равны 60° (теорема 523), и на ребрах его отложим отрезки:

$$(SA)=(SB)=(SC) \qquad \text{(черт. 155);}$$

затем проведем отрезки (AB), (BC), (CA). Не представляет труда убедиться, что $SABC$ есть выпуклая многогранная поверхность, характеризуемая данными числами. $\triangle ABC$ будет правильным на основании теоремы 522, и остальные треугольники будут тоже правильными, так как все они равнобедренные с углом при вершине, равным 60°. Все плоские углы равны между собой и равны 60°, а потому и все трехгранные углы при вершинах A, B, C равны трехгранному углу $SABC$ (теорема 213); отсюда вытекает, что все они правильны.

Итак, мы получили требуемый правильный многогранник.

Этот последний называется правильным тетраэдром или *правильным четырехгранником.*

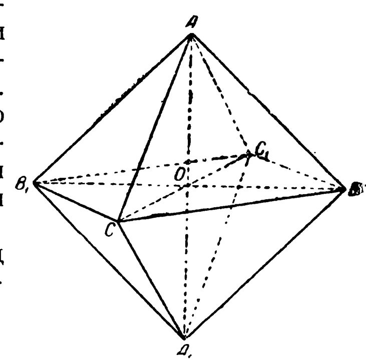
Теорема 527. *Существует правильный многогранник, характеризуемый числами:*

$$m=8, \; n=3, \; v=6, \; k=4, \; r=12.$$

Для построения возьмем три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (черт. 156), и от этой точки отложим на них равные отрезки:

$$(OA)=(OA_1)=(OB)=(OB_1)=(OC)=(OC_1).$$

Каждую из этих шести точек соединим с четырьмя остальными (кроме той, которая лежит на одной прямой с ней и с точкой O). Читатель без труда убедится, что таким образом получается многогранник, характеризуемый данными числами; остается доказать, что он правильный.



Черт. 156

В силу построения имеем ряд равных равнобедренных прямоугольных треугольников:

$$\triangle OAB=\triangle OAC=\triangle OBC= \\ =\triangle OAB_1=\triangle OA_1B_1=\ldots,$$

откуда

$$(AB)=(AC)=(BC)=(AB_1)=(A_1B_1)=\ldots,$$

так что все грани правильные треугольники и все плоские углы равны 60°. Далее:

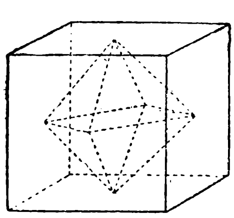
$\angle B_1AB=\angle ABA_1$ (так как четыреугольник ABA_1B_1 есть квадрат).

В связи с только что доказанным имеем:

трехгранный $\angle AB_1CB$ = трехгранному $\angle BACA_1$ (теорема 213), откуда

двугранный $\angle CA$ = двугранному $\angle CB$.

Продолжая эти рассуждения, мы докажем, что при вершине C (равно как и при всякой другой) все двугранные углы равны между собой. Значит, все многогранные углы правильны.


Черт. 157

Полученный таким образом многогранник называется правильным октаэдром или *правильным восьмигранником*.

Теорема 528. *Существует правильный многогранник, характеризуемый числами:*

$$m=6, \quad n=4, \quad v=8, \quad k=3, \quad r=12.$$

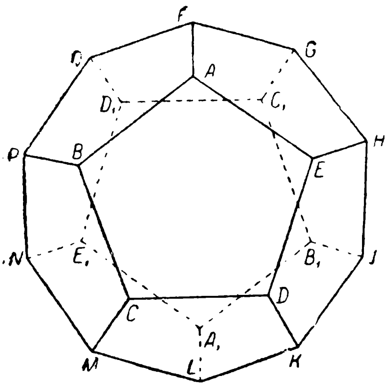
Легко видеть, что это знакомый нам куб [(черт. 157), пунктирные линии пока оставим в стороне]; его грани—квадраты, и все плоские и двугранные углы—прямые.

Куб называется также правильным гексаэдром или *правильным шестигранником.*

Теорема 529. *Существует правильный многогранник, характеризуемый числами:*

$$m = 12,\ n = 5,\ v = 20,\ k = 3,\ r = 30.$$

Начнем с построения правильного трехгранного $\angle ABEF$ (черт. 158), у которого все плоские углы равны 108° (теорема 523), и отложим на его ребрах равные отрезки: $(AB) = (AE) = (AF)$.



Черт. 158

Ломаные BAE, EAF, FAB, у которых отрезки равны, а углы равны углу правильного пятиугольника, дополним до равных правильных пятиугольников $ABCDE$, $AEHGF$, $ABPQF$ (возможность такого дополнения ломаных можно обосновать с помощью теоремы 445 и гомотетичного преобразования).

Таким образом, при точке A получается правильный трехгранный угол, образованный тремя правильными пятиугольниками; его плоские углы равны 108°, а двугранные обозначим через z (эта величина нам известна на основании следствия теоремы 523; см. также конец § 45).

При точках E, F, B также получаются трехгранные углы $EADH$, $FAQG$, $BAPC$; у каждого из них имеется по два плоских угла, равных 108°, а заключенные между последними двугранные углы общи с трехгранным углом при A.

Следовательно:

$$\text{трехгранный } \angle EADH = \angle FAQG = \angle BAPC = \angle ABEF$$

(теорема 211).

Поэтому $\angle HED = 108^\circ$, а раньше мы видели, что $(ED) = (EH) = (AB)$, так что ломаную DEH можно дополнить до правильного пятиугольника $DEHJK$, равного первым трем.

По предыдущему докажем, что

$$\text{трехгранный } \angle DECK = \angle HEJG = \angle ABEF.$$

Отсюда снова $\angle CDK = 108^\circ$.

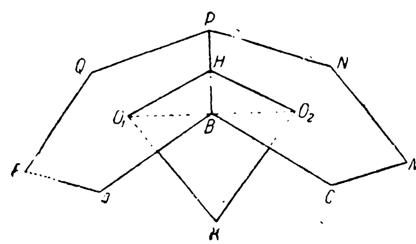
Строим правильный пятиугольник $CDKLM$. При точках K и C получаются два новых трехгранных угла, равных предыдущим.

Теперь у нас получилась ломаная $PBCM$, где

$$\angle PBC = \angle BCM = 108^\circ \text{ и } (PB) = (BC) = (CM).$$

Но возникает вопрос, будет ли эта ломаная плоской.

Из равенства трехгранных углов при точках B и C следует, что двугранный угол при ребре BC в одном из них равен двугранному углу при CB в другом (оба они равны z). Далее полуплоскость $BC.P$ и полуплоскость $CB.M$, согласно изложенному построению, лежат по одну и ту же сторону от плоскости $ABCDE$. Следовательно, они должны совпасть, и ломаную $PBCM$ можно дополнить до правильного пятиугольника $PBCMN$, который замыкает цепь правильных пятиугольников, прилежащих к пятиугольнику $ABCDE$ и равных ему.



Черт. 159

Будем продолжать подобные же построения при свободных пока ребрах фигуры. Строим правильные пятиугольники B_1JKLA_1, A_1LMNE_1, E_1NPQD_1, D_1QFGC_1, C_1GHJB_1, наконец, подобно предыдущему, докажем, что плоская фигура $A_1B_1C_1D_1E_1$ есть тоже правильный пятиугольник, равный остальным. Нетрудно теперь убедиться, что мы построили многогранник, характеризуемый данными числами; правильность его граней и трехгранных углов непосредственно вытекает из самого построения.

Такой многогранник называется правильным додекаэдром или *правильным двенадцатигранником.*

Нам остается рассмотреть последний случай теоремы 97; но для того, чтобы подойти к нему возможно проще, остановимся на одном замечательном соотношении между правильными многогранниками; предварительно докажем одну вспомогательную теорему.

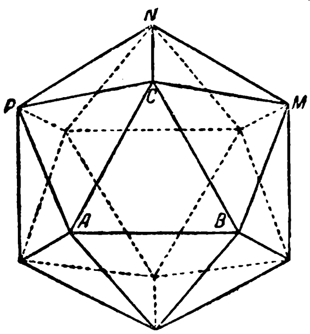
Теорема 530. *Расстояние между центрами двух смежных граней есть величина постоянная для данного правильного многогранника.*

Возьмем две смежных грани какого-нибудь правильного многогранника и соединим их центры O_1 и O_2 отрезком (O_1O_2) (черт. 159); далее соединим точки O_1 и O_2 с серединой H общего ребра. Легко видеть, что (O_1H) и (O_2H) будут апофемами равных правильных многоугольников, а $\angle O_1HO_2$ служит нормальным сечением двугранного угла данного правильного многогранника.

Следовательно, все треугольники, построенные по тому же способу, что и $\triangle O_1HO_2$, будут равны между собой, откуда и вытекает теорема.

Желая подойти к построению последнего правильного многогранника, рассмотрим сначала применение того же способа на более простых примерах. Возьмем куб, отметим центры всех шести его граней и центр каждой грани соединим отрезками с центрами четырех граней, прилежащих к первой (черт. 157). Это построение приведет к правильному октаэдру, вписанному в данный куб (подробности доказательства предоставляются читателю).

Точно так же, если исходить из правильного октаэдра, то указанное построение приведет к вписанному кубу, а из правильного тетраэдра получается опять-таки правильный тетраэдр, вписанный в данный. Такое соотношение между правильными многогранниками называется *взаимностью*. Следовательно, правильный октаэдр и куб взаимны друг с другом, а правильный тетраэдр — с многогранником того же имени. Построив многогранник, взаимный с правильным додекаэдром, мы получим последний случай теоремы 525.



Черт. 160

Теорема 531. *Существует правильный многогранник, характеризуемый числами*:

$$m = 20,\ n = 3,\ v = 12,\ k = 5,\ r = 30.$$

Для построения искомого многогранника возьмем правильный додекаэдр (черт. 158), отметим центры его двенадцати граней и центр каждой грани соединим отрезками с центрами пяти граней, прилежащих к первой. Легко видеть, что при каждой из двенадцати точек получается пятигранный угол. Трем граням додекаэдра, сходящимся в одной вершине, в новой фигуре будет соответствовать треугольник, так как центры этих граней придется соединить друг с другом, и таких треугольников будет столько, сколько имеется вершин у правильного додекаэдра, т. е. 20.

Таким образом, мы построили многогранник того же типа, что изображенный на черт. 160 и характеризуемый данными числами (подробности доказательства предоставляются читателю); остается доказать его правильность.

В силу теоремы 530 все его грани будут равносторонними треугольниками; отсюда, между прочим, вытекает, что все плоские углы равны 60°.

Возьмем какой-нибудь телесный угол, например, при вершине C (черт. 160). Точки A, B, M, N, P лежат в одной плоскости, ибо они находятся с одной стороны и на одинаковом расстоянии от плоскости той грани додекаэдра, для которой точка C служит центром. Равенство расстояний следует из того, что эти расстояния служат катетами равных прямоугольных треугольников, в каждом из которых гипотенуза есть апофема грани, а противолежащий угол равен $180°-z$ (здесь может помочь черт. 159). Кроме того:

$$(CA) = (CB) = (CM) = (CN) = (CP),$$

а потому перпендикуляр из точки C на плоскость $ABMNP$ будет иметь основанием точку, равно удаленную от точек A, B, M, N, P (замечание после определения 60).

Следовательно, равносторонник $ABMNP$ можно вписать в окружность, и он будет правильным многоугольником (теорема 443). Отсюда явствует, что пирамида $CABMNP$ будет правильной; но тогда правильным будет и пятигранный угол при точке C (замечание к определению 135).

Построенный только что многогранник называется правильным икосаэдром или *правильным двадцатигранником.*

Таким образом, доказано существование правильных многогранников для каждого случая теоремы 97; но нельзя еще утверждать единственность этого решения тем более, что построения правильных многогранников были основаны на различных приемах. Указанный вопрос будет освещен последующими теоремами.

Теорема 532. *Два правильных многогранника, характеризуемые одними и теми же числами, всегда подобны.*

Действительно, грани их суть одноименные правильные многоугольники. Следовательно, они подобны и отношение подобия будет одно и то же для всех граней. Далее, их телесные углы имеют одно и то же наименование, а все плоские углы равны между собой. В таком случае телесные углы равны между собой (следствие теоремы 523), и остается сослаться на теорему 385.

Определение 137. *Совокупность многогранников, подобных между собой, называется индивидуальностью многогранников (этот термин введен проф. Е. С. Федоровым).*

Теорема 533. *Существуют лишь пять индивидуальностей правильных многогранников* (теорема 525, 532, определение 137).

Теорема 534. *Внутри правильного многогранника существует точка, равноотстоящая от всех его граней, от всех вершин и от всех ребер.*

Возьмем две смежных грани $ABPQF$ и $BCMNP$ правильного многогранника (черт. 159), соединим их центры отрезком (O_1O_2) и проведем апофемы (O_1H) и (O_2H). Так как плоскость $O_1HO_2 \perp BP$, то плоскость ABP и плоскость CBP обе перпендикулярны плоскости O_1HO_2 (теорема 199). Следовательно, если в точках O_1 и O_2 восставим перпендикуляры к плоскостям соответствующих граней, то оба эти перпендикуляра будут лежать в плоскости O_1HO_2 (теорема 201).

Остановимся на тех лучах этих перпендикуляров, которые направлены от плоскостей граней в сторону точек многогранника. Легко видеть, что на основании теоремы 191 указанные лучи образуют с прямой O_1O_2 острые углы, а потому они пересекаются в некоторой точке K (теорема 312), лежащей внутри двугранного $\angle BP$ (теорема 43 и 52).

Далее имеем:

$$O_1KO_2 = 2d - z \qquad \text{(теорема 327),}$$

где z — двугранный угол многогранника.

$$\angle KO_1O_2 = \angle KO_2O_1 \text{ (как разности равных углов);}$$

$$\angle KO_1O_2 = \angle KO_2O_1 = \frac{z}{2}.$$

Таким образом, отрезок (O_1K) вполне определяется как сторона равнобедренного треугольника, в котором основание равно (O_1O_2) (теорема 530), а угол при основании равен $\frac{z}{2}$.

Возьмем теперь какую-нибудь другую грань, смежную с одной из взятых первоначально (например, с $ABPQF$). Также докажем, что перпендикуляры в их центрах пересекаются в точке K', лежащей по ту же сторону от $ABPQF$, что и точка K, причем $(O_1K') = (O_1K)$, так как (O_1K') определяется тем же способом, что и (O_1K). Следовательно, точка K' совпадает с K.

Продолжая эти рассуждения, мы докажем (теорема 94), что все перпендикуляры, восставленные в центрах граней к их плоскостям, пересекаются в одной и той же точке K. Из предыдущего также видно, что точка K принадлежит всем двугранным углам многогранника, а потому она принадлежит всем телесным углам его (теоремы 70 и 75), а следовательно, лежит внутри многогранника (теорема 80 и 93).

Из предыдущих рассуждений уже явствует, что точка K равноотстоит от всех граней. Если соединить точку K с вершинами многогранника, то легко доказать равенство всех этих отрезков (замечание после определения 60). Наконец, если соединим K с серединой H ребра (BP), то увидим, что $HK \perp BP$, ибо KH лежит в плоскости $O_1HO_2 \perp BP$; кроме того, отрезок (KH) имеет одну и ту же длину для всех ребер, так как он является гипотенузой треугольника, которого катетами служат отрезок (O_1K) и апофема (O_1H).

Следовательно, точка K равноотстоит и от всех ребер.

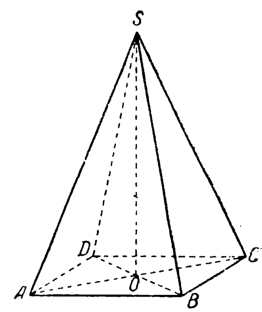
Определение 138. Построенная в предыдущей теореме точка K называется *центром* правильного многогранника.

Теорема 535. *Для данного правильного многогранника существуют: вписанный шар, описанный шар и шар, касающийся всех его ребер в их серединах.*

В самом деле, общим центром всех этих шаров служит точка K, а радиусами — соответственно отрезки: (KO_1), (KA) и (KH) (см. черт. 159).

Понятие о симметрии правильных тел

В теоремах 454—456 и определении 116 было дано понятие о симметрии правильных многоугольников. Теперь мы намерены сделать то же самое для пространственных образов. Вопрос о симметрии имеет не только теоретический интерес, но и практические применения (например, в кристаллографии) и выливается в особый отдел геометрии. Излагать его в таком виде не входит в нашу задачу. Здесь мы ограничимся несколькими указаниями на сущность дела, не облекая их в систематическое изложение.



Черт. 161

Прежде всего условимся выписывать наименования двух равных многогранников так, чтобы буквы, обозначающие соответственные вершины, стояли на местах с одним и тем же порядковым номером (надо вспомнить теорему 385, при $k=1$).

Очевидно, каждый многогранник равен самому себе, если каждой вершине соотнести ее самое; но если хотя бы некоторым вершинам соотнести иные вершины, то равенства, вообще говоря, не будет.

Так, если возьмем четыреугольную пирамиду $SABCD$, то конечно:

$$SABCD = SABCD,$$

но $SABCD$ вообще не равна $SBCDA$, ибо (SA) вообще не равна (SB). Иначе обстоит дело с некоторыми фигурами особого вида.

Остановимся сначала на случае правильной четыреугольной пирамиды $SABCD$ (черт. 161; эта пирамида еще не будет правильным многогранником). Вспоминая теоремы 454 и 513, легко придти к выводу:

$$SABCD = SBCDA = SCDAB = SDABC.$$

Таким образом, правильная четыреугольная пирамида равна самой себе при четырех различных способах установления соответствия между ее вершинами; центр основания O при этом всегда соответствует самому себе (теорема 455), то же самое имеет место и для точки S, так что отрезок (SO) соответствует самому себе.

Далее нетрудно убедиться, что двугранные углы, образованные полуплоскостями $SO.A$, $SO.B$, $SO.C$, $SO.D$, все суть прямые. Все эти данные очень удобно описать посредством представления о движении. Именно говорят, что правильная четыреугольная пирамида $SABCD$ совмещается со своим первоначальным положением при повороте около прямой SO на угол, равный $90°$, или на кратное этого угла. Такую прямую SO называют четверной осью симметрии. Здесь мы приходим к обобщению того понятия об оси симметрии, которое было дано в определении 52 и затем встретилось в теореме 456; там шла речь о двойной оси симметрии, соответствующей повороту на наименьший угол в $180°$.

Чтобы покончить с нашей пирамидой, укажем еще, что она имеет 4 плоскости симметрии (понятие о плоскости симметрии подобно понятию об оси симметрии, которое было дано в определении 52); этими плоскостями симметрии будут SAC, SBD и еще 2 другие, проходящие через точку S и через середины той или другой пары противоположных сторон основания. Следовательно, плоскостями симметрии здесь служат плоскости, соединяющие ось симметрии пирамиды с осями симметрии ее основания (см. теорему 456).

Не представляет труда обобщить эти выводы и заключить, что n-угольная правильная пирамида имеет n-кратную ось симметрии (значит, при повороте около этой оси на угол, равный $\frac{360°}{n}$ или на кратное этого угла, пирамида совмещается сама с собой).

Кроме того, существуют еще n плоскостей симметрии.

Оси и плоскости симметрии суть элементы симметрии; то или другое сочетание их образует вид симметрии.

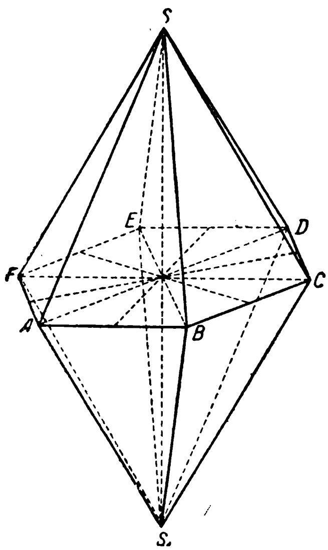
Мы получим более высокий вид симметрии, если перейдем к правильной n-угольной дипирамиде (черт. 162), которую можно себе представить как две равные правильные пирамиды, сложенные своими основаниями.

Совершенно так же, как и выше, убедимся, что прямая SS_1 служит n-кратной осью симметрии; кроме того, дипирамида имеет n двойных осей, которыми служат оси симметрии основания (эти оси изображены на черт. 162 пунктиром). Так, если повернуть данную дипирамиду около прямой FC на $180°$, то точки F и C останутся в покое; A и E, B и D, S и S_1 поменяются местами, а вся дипирамида совместится со своим первоначальным положением. Все это можно выразить и чисто геометрически, именно — с помощью равенства:

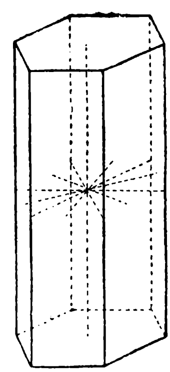
$$SABCDEFS_1 = S_1EDCBAFS.$$

Наконец, имеется $n+1$ плоскость симметрии: плоскость $ABCDEF$ и плоскости, проходящие через n-кратную ось и через каждую из двойных осей. Вообще, соединение плоскостью двух каких-нибудь осей симметрии служит удобным приемом для нахождения плоскостей симметрии; только необходимо каждый раз проверять, действительно ли получилась плоскость симметрии.

Если теперь мы перейдем к правильной n-угольной призме (черт. 163), то получим тот же самый вид симметрии, как в этом нетрудно убедиться. Заметим, что от правильной ди-



Черт. 162


Черт. 163

пирамиды можно перейти к правильной призме (и обратно) с помощью построения, подобного тому отношению взаимности, которое было установлено между правильными многогранниками. Так, соединяя центры обоих оснований призмы с центрами боковых прямоугольников, получим дипирамиду.

Наиболее полные виды симметрии дают нам правильные многогранники.

Начнем с правильного октаэдра (черт. 156), который можно прежде всего рассматривать как правильную четырехугольную дипирамиду и притом с трех различных точек зрения: принимая за вершины C и C_1, B и B_1, A и A_1. Таким образом, получаем 3 четвертных оси: AA_1, BB_1, CC_1 и 6 двойных осей, соединяющих середины двух противоположных ребер октаэдра. Но в правильном октаэдре имеем еще 4 тройных оси, а именно — 4 прямых, соединяющих центры двух противоположных граней (например, одна из них соединяет центры граней ABC и $A_1B_1C_1$); поворот на угол в 120° около каждой из указанных прямых снова совмещает вершины правильных треугольников с первоначальными вершинами октаэдра. Наконец, имеются плоскости симметрии, которые получим, рассматривая тремя различными способами октаэдр как правильную дипирамиду. Что касается куба, то здесь имеется тот же самый вид симметрии, как это вообще следует из соотношения между правильной дипирамидой и соответствующей правильной призмой. Особенно это ясно из черт. 157, который показывает, что, совмещая октаэдр с самим собой, совместим с самим собой и куб; только четверные оси теперь проходят через центры граней, а тройные — через вершины куба.

Правильный тетраэдр (черт. 155) можно рассматривать как правильную треугольную пирамиду, и притом — с четырех различных точек зрения. Таким образом, получаются 4 тройных оси, соединяющие вершины с центрами противоположных граней, а также — 6 плоскостей симметрии, соединяющих оси симметрии какой-либо грани с противоположной вершиной (точнее говоря, таких плоскостей имеется 12, но они попарно совпадают). Но в правильном тетраэдре имеется еще 3 двойных оси, соединяющих середины противоположных ребер.

Прежде чем идти дальше, сделаем одно общее замечание о разыскании элементов симметрии. Так как при совмещении правильного многогранника с самим собой его центр также приходит в первоначальное положение, то каждая ось симметрии должна проходить через этот центр; но в таком случае она пересекает поверхность многогранника в двух точках. Небольшое размышление покажет, что такой точкой может быть или вершина, или середина ребра (в таком случае ось непременно двойная), или центр грани; только каждый раз следует проверить, действительно ли будет осью симметрии полученная таким образом прямая. Плоскости симметрии отыскиваем, соединяя попарно оси симметрии и помня о необходимости проверки.

Переходим теперь к правильному додекаэдру (черт. 158). При некотором напряжении пространственного воображения читатель убедится в следующем:

1) 10 прямых, соединяющих попарно противоположные вершины (например, прямая AA_1), будут тройными осями симметрии;

2) 6 прямых, соединяющих попарно центры противоположных граней, будут пятерными осями симметрии;

3) 15 прямых, соединяющих попарно середины противоположных ребер [например, ребер (AB) и (A_1B_1)], будут двойными осями симметрии.

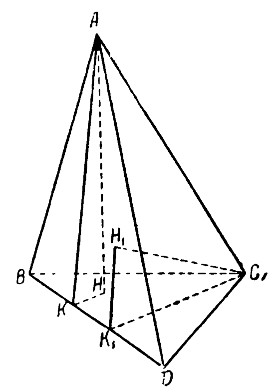
Плоскости симметрии найдем, взяв для каждой тройной оси ближайшие к ней пятерную и двойную оси и соединив их попарно плоскостями.

Что касается правильного икосаэдра (черт. 160), то для него получится тот же самый вид симметрии, что и для правильного додекаэдра, как это следует из самого способа построения икосаэдра; только теперь пятерные оси пройдут через вершины, а тройные — через центры граней.

Этими замечаниями и придется здесь ограничиться.

§ 47. Объемы многогранников

Учение о площадях многоугольников было изложено двумя различными способами. Первый, основанный всецело на понятии о равносоставленности, может быть применен лишь для определения объемов призм, но не применим для многогранников вообще (об этом будет еще сказано ниже). Поэтому здесь мы начнем прямо с метода Шатуновского-Гильберта, а так как его принципиальная основа была достаточно подробно изложена для многоугольников, то здесь мы будем, по возможности, кратки.



Черт. 164

Само по себе понятие равносоставленности можно распространить и на многогранники. Так, определения 121 и 122, теоремы 468 и 469 переносятся на многогранники со следующей заменой терминов:

многоугольник — многогранник,
обвод — поверхность,
треугольник — тетраэдр.

Учение об объемах многогранников придется начать с одной вспомогательной теоремы и с определения, подобных теореме 498 и определению 126.

Теорема 536. *Произведение площади какой-либо грани тетраэдра на высоту, опущенную из противоположной вершины, есть для данного тетраэдра число постоянное.*

Опустим из вершины A на плоскость BCD высоту (AH) (черт. 164), из ее основания H опустим перпендикуляр (HK) на BD и соединим отрезком точки A и K.

В силу теоремы 184

$$AK \perp BD,$$

и потому $\angle AKH$ будет нормальным сечением двугранного угла при $(\overline{BD})$.

Проделаем теперь то же самое построение, исходя из вершины C. Получим $\triangle CK_1H_1$, в котором $\angle CK_1H_1$ будет нормальным сечением того же двугранного угла при BD. На основании теоремы 192 имеем:

$$\angle AKH = \angle CK_1H_1,$$

а потому,

$$\triangle AKH \infty \triangle CK_1H_1 \qquad \text{(теорема 377, п. I)}.$$

Из подобия треугольников выводим:

$$\frac{(AH)}{(CH_1)} = \frac{(AK)}{(CK_1)},$$

$$(AH) \cdot (CK_1) = (CH_1) \cdot (AK),$$

или, умножая на $\frac{1}{2}(BD)$:

$$\left[\frac{1}{2}(BD) \cdot (CK_1)\right] \cdot (AH) = \left[\frac{1}{2}(BD) \cdot (AK)\right] \cdot (CH_1),$$

$$J(\triangle BCD) \cdot (AH) = J(\triangle ABD) \cdot (CH_1).$$

При другом расположении элементов тетраэдра доказательство соответственно видоизменяется.

Определение 139. *Числом тетраэдра называется одна треть произведения площади какой-либо его грани на соответствующую высоту;* число тетраэдра $ABCD$ обозначается символом: $N(ABCD)$.

Замечание. Для целей излагаемой теории, т. е. для превращения многогранников в особый класс величин, можно было бы не вводить в определение 139 численный коэффициент или же ввести какой угодно другой. Вводится же именно $^1/_3$ для того, чтобы впоследствии для объемов получились обычные формулы, практическое значение которых каждому известно.

Легко видеть, что равным тетраэдрам соотносятся равные числа. Больших усилий потребует доказательство свойства слагаемости.

Теорема 537. *Если тетраэдр произвольным образом разложен на конечное число частичных тетраэдров, то соотнесенное ему число равно сумме чисел, соотнесенных всем частям его.*

Сначала предложение доказывается для так называемого трансверсального разложения (здесь нужно вспомнить определение 26, теорему 78 и замечание к ней). Если тетраэдр $ABCD$ посредством трансверсального сечения ABP разложен на два частичных тетраэдра (черт. 22), то не представляет труда убедиться, что

$$N(ABCD) = N(ABCP) + N(ABDP);$$

отсюда сейчас же делается переход к общему случаю трансверсального разложения.

Доказательство для случая произвольного разложения в общем проводится в том же духе, что и доказательство теоремы 501: с помощью проведения конечного числа вспомогательных плоскостей из данного разложения получается дальнейшее подразделение тетраэдра, которое уже оказывается трансверсальным. Подробности доказательства читатель найдет в сборнике Энриквеса „Вопросы элементарной геометрии" (стр. 202 — 203).

Переходя к многограннику вообще, надо начать с такого предложения.

Теорема 538. *Если многогранник двумя различными способами разложен на конечное число тетраэдров $T_к$ и T_i, то*

$$\sum_к N(T_к) = \sum_i N(T_i).$$

Доказывается подобно теореме 502.

Определение 140. *Числом многогранника называется сумма чисел тетраэдров, на которые он разлагается по какому-либо способу.*

Теорема 539. *Если многогранник разложен на конечное число частичных многогранников, то его число равно сумме чисел всех частей.*

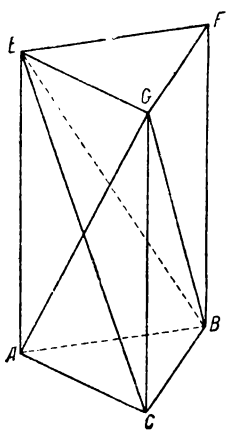
Доказывается путем разложения всех частичных многогранников на тетраэдры (см. теорему 92).

Предыдущие теоремы показывают, что каждому многограннику соотносится определенное число при соблюдении свойства слагаемости. Обратно, если дано какое-нибудь положительное число, то можно построить многогранник, которому соотносится именно это число (особенно просто сделать это для тетраэдра, подбирая соответствующим образом высоту и площадь основания). Но совершенно ясно, что здесь можно получить бесчисленное множество различных многогранников. Однако можно установить одно-однозначное соответствие между числами и известными группами многогранников; тогда можно свойства величин перенести с чисел на многогранники. Мы этого достигаем следующим образом.

Определение 141. Если числа двух многогранников равны между собой, то такие многогранники называются *равновеликими;* о них говорят также, что они имеют один и тот же объем. В таком случае число многогранника называется мерой его объема, а иногда и просто *объемом.*

Отсюда непосредственно вытекает, что равносоставленные многогранники равновелики; но обратного утверждать нельзя: равновеликие многогранники вообще не равносоставлены. Так, равновеликие куб и правильный тетраэдр не могут быть равносоставленными. Доказательство этого предложения читатель найдет в брошюре проф. Кагана „О преобразовании многогранников". В этом пункте имеется существенное различие между многоугольниками и многогранниками; оно объясняет, почему понятие равносоставленности, имеющее такое важное значение для учения о площадях, здесь, в главе об объемах, отступает на второй план.

Теперь уже ясно, что можно установить одно-однозначное соответствие между совокупностями равновеликих между собой многогранников и положительными числами; а потому все свойства величин с последних переносятся на первые.



Черт. 165

Значение величины, присущее данной совокупности равновеликих между собой многогранников, и есть общий всем им объем.

Превратив многогранники в особый класс величин, мы подвели твердое основание под учение об объемах; остается вывести обычные формулы для объемов.

Теорема 540. *Объем пирамиды равен $^1/_3$ произведения площади основания на высоту.*

Для треугольной пирамиды подобное утверждение уже имеется (определения 139 и 141); в случае многоугольной—проведем диагональные плоскости через одно и то же ребро, вследствие чего данная пирамида разобьется на ряд тетраэдров с общей вершиной и с общей высотой; сложив объемы всех этих тетраэдров и взяв за скобки $^1/_3$ высоты, получим требуемое (определения 140 и 141).

Теорема 541. *Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.*

Начнем с треугольной призмы $ABCEFG$ (черт. 165). Разобьем призму на тетраэдры, проведя плоскость ABG и плоскость BEG; тогда получим:

$$N(ABCEFG) = N(GABC) + N(BEFG) + N(GAEB).$$

Далее имеем, обозначая высоту призмы через h:

$$N(GABC) = {}^1/_3 h \cdot J(ABC),$$

$$N(BEFG) = {}^1/_3 h \cdot J(EFG);$$

что же касается до тетраэдра $GAEB$, то он равновелик с тетраэдром $CAEB$, так как у них общее основание и равные высоты (теорема 358); но в этом последнем тетраэдре можно за основание принять $\triangle\ ABC$, а за вершину — точку E. Тогда находим:

$$N(GAEB) = N(EABC) = {}^1/_3 h \cdot J(ABC).$$

Складывая все эти объемы, окончательно получаем:

$$N(ABCEFG) = h\ \ J(ABC).$$

В случае многоугольной призмы, проводим через какое-нибудь боковое ребро диагональные плоскости, разлагающие ее на треугольные призмы; складывая объемы последних, получаем искомое (теорема 539).

Отсюда как следствие выводим:

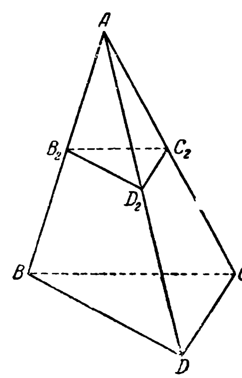
1. *Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.*

2. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.*

3. *Объем куба равен третьей степени его ребра.*

Теорема 542. Если обозначить через Q площадь нижнего и через q — верхнего основания усеченной пирамиды, а через h — ее высоту, то ее объем равен:

$$\frac{1}{3} h \cdot [Q + q + \sqrt{Qq}].$$



Черт. 166

Дополним усеченную пирамиду до полной (черт. 166) и на основании теоремы 539 напишем:

$$N(BCDB_2C_2D_2) = N(ABCD) - N(AB_2C_2D_2).$$

Обозначим высоты этих двух пирамид соответственно через h_1 и h_2, так что

$$h = h_1 - h_2.$$

Вычисляя объем пирамид, получаем:

$$N(BCDB_2C_2D_2) = \frac{1}{3} \cdot [Qh_1 - qh_2].$$

Далее делаем следующие преобразования:

$$N(BCDB_2C_2D_2) = \frac{1}{3} \cdot [Qh_1 - Qh_2 + Qh_2 - qh_2] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [Q(h_1 - h_2) + h_2(Q - q)] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [Qh + h_2(Q - q)].$$

В силу теоремы 514 (п. 3) имеем:

$$\frac{Q}{q} = \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

Переходя от предыдущей пропорции к производной, находим:

$$\frac{Q-q}{q}=\frac{h_1^2-h_2^2}{h_2^2}=h\cdot\frac{h_1+h_2}{h_2^2},$$

так что

$$N(BCDB_2C_2D_2=\frac{1}{3}\left[Qh+qh\cdot\frac{h_1+h_2}{h_2}\right]=\frac{1}{3}h\cdot\left[Q+q+q\cdot\frac{h_1}{h_2}\right];$$

но:

$$\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{\frac{Q}{q}};$$

подставляя, окончательно получаем:

$$N(BCDB_2C_2D_2)=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left[Q+q+\sqrt{Qq}\right].$$

Теорема 543. *Объемы подобных многогранников относятся, как кубы сходственных ребер.*

Докажем сначала эту теорему для тетраэдров.

Пусть даны два подобных тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 166, где изображен лишь один из них). Предполагая, что $(AB)>(A_1B_1)$, отложим на ребре (AB) отрезок $(AB_2)=(A_1B_1)$, и через точку B_2 проведем плоскость, параллельную основанию BCD. Эта плоскость отсечет тетраэдр $AB_2C_2D_2$, подобный тетраэдру $ABCD$ (теорема 514, п. 4). Легко видеть что $AB_2C_2D_2$ и $A_1B_1C_1D_1$ будут также подобны друг другу; но так как эти тетраэдры имеют по равному ребру, то

$$AB_2C_2D_2=A_1B_1C_1D_1.$$

Далее имеем:

$$\frac{N(ABCD)}{N(A_1B_1C_1D_1)}=\frac{N(ABCD)}{N(AB_2C_2D_2)}=\frac{J(BCD)\cdot h}{J(B_2C_2D_2)\cdot h_1},$$

где h и h_1 — соответственные высоты;

$$\frac{J(BCD)}{J(B_2C_2D_2)}=\frac{h^2}{h_1^2}\qquad\text{(теорема 514, п. 3),}$$

$$\frac{N(ABCD)}{N(A_1B_1C_1D_1)}=\frac{h^3}{h_1^3}=\frac{(AB)^3}{(A_1B_1)^3}\qquad\text{(теорема 514, п. 1).}$$

Если же даны два каких-нибудь подобных многогранника, то мы разлагаем их на подобные и одинаково расположенные тетраэдры (теорема 384); применяем к каждой паре подобных тетраэдров уже доказанный случай теоремы и наконец пользуемся известным свойством равных отношений.

§ 48. Тела вращения, их поверхности и объемы

Определение 142. Пусть в плоскости дана какая-нибудь линия и вне этой плоскости дана прямая, ей не параллельная. Геометрическое место прямых, пересекающих данную линию и параллельных данной прямой, называется цилиндрической поверхностью, указанные прямые — ее образующими, а данная линия — направляющей. Если образующие перпендикулярны к плоскости направляющей, то цилиндрическая поверхность называется прямой; если направляющей служит окружность, то — круговой. В дальнейшем прямая круговая цилиндрическая поверхность называется просто цилиндрической; ее осью называется прямая, проходящая через центр направляющей параллельно образующим. (В настоящем параграфе читатель приглашается самостоятельно сделать часть поясняющих чертежей.)

Доказательство двух следующих теорем предоставляется читателю.

Теорема 544. *Цилиндрическая поверхность с осью a и с радиусом направляющей, равным r, есть геометрическое место точек, отстоящих от a на расстоянии, равном r.*

Теорема 545. *Сечение цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси, есть окружность, центр которой лежит на оси, а радиус равен радиусу направляющей.*

Теорема 546. *Плоскость, параллельная оси, пересекает цилиндрическую поверхность или по двум образующим, или по одной, или совсем не имеет с ней общих точек,* в зависимости от того, будет ли ее расстояние от оси меньше, равно или больше радиуса направляющей.

Доказательство без труда сводится к трем случаям, рассмотренным в теореме 247.

Определение 143. Проведем две плоскости, перпендикулярные к оси цилиндрической поверхности. *Совокупность отрезков*, выделяемых ими на образующих и на всех прямых им параллельных и пересекающих направляющую во внутренних точках, называется *цилиндром*. Термины: основания цилиндра, его высота и т. п. понятны сами собой.

Далее делаем следующее построение. Впишем в нижнее основание цилиндра какой-нибудь многоугольник $ABCDE\ldots$, и через его вершины проведем образующие. Эти последние пересекут верхнее основание в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ... Нетрудно видеть, что получается многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, вписанный в верхнее основание, равный первоначально взятому и имеющий с ним соответственно параллельные стороны.

Определение 144. Построенная таким образом прямая призма $ABCDE\ldots A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ называется *вписанной* в цилиндр. Если теперь мы опишем около нижнего основания какой-нибудь многоугольник и, исходя из него, построим призму подобным же образом, то получим *описанную* призму.

Теорема 547. *Сечения цилиндра полуплоскостями, исходящими из оси, суть равные прямоугольники.*

Доказательство предоставляется читателю.

Определение 145. То обстоятельство, что сечения цилиндра плоскостями, перпендикулярными оси, суть окружности, а сечения полуплоскостями, исходящими из оси, суть равные прямоугольники, выражают следующими словами, основываясь на представлении о движении: *цилиндр* есть тело, получаемое при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон; сторона, противоположная указанной, описывает тогда боковую поверхность цилиндра, так что последняя является поверхностью вращения.

Определение 146. Пусть в плоскости дана какая-нибудь линия и вне этой плоскости — некоторая точка. Геометрическое место прямых, соединяющих данную точку со всевозможными точками данной линии, называется *конической поверхностью*, указанные прямые — ее *образующими*, данная точка — *вершиной* (или центром), данная линия — *направляющей*. В центре каждая образующая делится на две полупрямых, соответственно чему коническая поверхность состоит из двух пол. В дальнейшем мы имеем в виду ту из них, которая состоит из полупрямых, идущих из вершины к точкам направляющей. Если направляющей служит окружность, то коническая поверхность называется круговой; если прямая, соединяющая вершину с центром направляющей („ось"), будет перпендикулярна к ее плоскости, то такая поверхность называется *прямой круговой*; в дальнейшем такая поверхность называется просто конической.

Доказательство трех следующих теорем предоставляется читателю.

Теорема 548. *Коническая поверхность есть геометрическое место полупрямых, исходящих из вершины и составляющих с осью равные острые углы.*

Теорема 549. *Сечение конической поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси, есть окружность с центром на оси.*

Теорема 550. *Плоскость, проходящая через вершину, пересекает коническую поверхность или по двум образующим, или по одной или совсем не имеет с ней общих точек* (за исключением вершины), в зависимости от того, будет ли ее угол с осью меньше, равен или больше угла образующих с осью.

Определение 147. Пересечем коническую поверхность плоскостью, перпендикулярной к оси. Совокупность отрезков, соединяющих вершину с точками полученного в сечении круга, называется *конусом*. Термины: образующие, высота, боковая поверхность конуса и т. п. ясны сами собой.

Определение 148. Пирамида, вершина которой помещается в вершине конуса, а основанием служит многоугольник, вписанный в основание конуса или описанный около него, называется соответственно *вписанной* или *описанной* по отношению к конусу.

Теорема 551. *Сечения конуса полуплоскостями, исходящими из оси, суть равные прямоугольные треугольники.*

Доказательство предоставляется читателю.

Определение 149. Свойства конуса, указанные в теоремах 549 и 551, выражают словами: конус есть тело, получаемое при вращении прямоугольного треугольника около одного из катетов; гипотенуза при этом описывает боковую поверхность конуса.

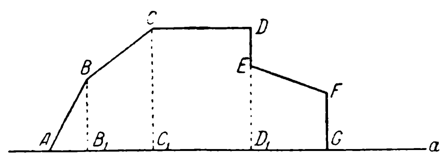
Определение 150. Пересекая конус какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной к оси, называют ту часть его, которая заключается между этой плоскостью и плоскостью основания, *усеченным* конусом. Термины: основания, высота и т. п. ясны сами собой; точно так же ясно, что понимается под усеченными пирамидами, вписанными в усеченный конус или описанными около него

Теорема 552. *Сечения усеченного конуса полуплоскостями, исходящими из оси, суть равные прямоугольные трапеции* („прямоугольный" указывает на то, что одна из боковых сторон перпендикулярна к основаниям).

Доказательство предоставляется читателю.

Определение 151. Последняя теорема дает повод сказать, что усеченный конус есть тело, получаемое вращением прямоугольной трапеции около боковой стороны, перпендикулярной к основаниям; при этом другая боковая сторона описывает боковую поверхность усеченного конуса.

После изложенного можно перейти к общему определению поверхностей и тел вращения. Пусть в некоторой плоскости дана прямая a и некоторая ломаная $ABCDEFG$ (замкнутая или незамкнутая), лежащая по одну сторону от прямой a, за исключением разве некоторых своих вершин, которые могут лежать на самой прямой a (черт. 167). Опустим из вершин ломаной перпендикуляры на ось a. Если взять какую-нибудь сторону ломаной, то в соединении с перпендикулярами из ее концов и с отрезком оси между их основаниями она образует, как легко видеть, одну из следующих фигур: отрезок, параллельный оси, например, (CD), дает прямоугольник; отрезок, наклонный к оси и не имеющий с ней общих точек, например, (BC) или (EF), образует прямоугольную трапецию; отрезок, наклонный к оси и имеющий один из концов на оси, например, (AB), образует прямоугольный треугольник. Если, прибегая к представлениям о движении, допустим, что данная ломаная вращается вокруг оси a, то отрезки первого рода дадут боковые поверхности цилиндров, отрезки второго рода — боковые поверхности усеченных конусов, и отрезки третьего рода — боковые поверхности конусов (см. предыдущие определения). Остались пока в стороне отрезки, перпендикулярные к оси; если такой отрезок имеет один конец на оси, то он опишет круг, например, (FG), если же нет, то он опишет так называемое „круговое кольцо", т. е. часть плоскости, заключенную между двумя концентрическими окружностями.



Черт. 167

Теперь можно дать следующее определение.

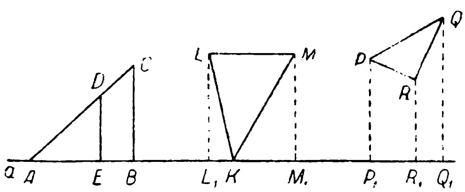
Определение 152. *Поверхностью*, образованной вращением данной ломаной около данной оси, называется сочетание боковых поверхностей цилиндров, конусов и усеченных конусов, кругов и круговых колец — по числу ее сторон и по их положению относительно оси (подробности см. выше).

Пусть теперь в плоскости дан какой-нибудь многоугольник и ось, не содержащая его внутренних точек (например, $\triangle PQR$ на черт. 168). Опустим из вершин многоугольника перпендикуляры на ось и допустим, что данный многоугольник можно рассматривать как известное сочетание (получаемое сложением и вычитанием) прямоугольников, прямоугольных трапеций и треугольников, причем одной из сторон этих фигур служит отрезок оси между основаниями двух перпендикуляров (например $\triangle PQR$ можно получить, если из трапеции P_1Q_1QP отнять суммы трапеций P_1R_1RP и R_1Q_1QR). При указанных условиях даем следующее определение.

Определение 153. *Телом*, образованным вращением данного многоугольника около данной оси, называется *часть пространства*, получаемая совершенно таким же сочетанием цилиндров, конусов и усеченных конусов, каким данный многоугольник получается из прямоугольников, прямоугольных треугольников и трапеций.

Например: если прямоугольный $\triangle ABC$ (черт. 168) разделен перпендикуляром (DE) на $\triangle AED$ и трапецию $BCDE$, то тело, образованное вращением последней около оси a (т. е. усеченный конус), есть та часть пространства, которая получится, если от конуса ABC отнять конус AED. Тело, получаемое вращением $\triangle KLM$ (черт. 168) около оси a, есть та часть пространства, которая останется, если от цилиндра LMM_1L_1 отнять конусы KLL_1 и KMM_1. Наконец, тело от вращения $\triangle PQR$ около оси a (черт. 168) получим, если отнимем от усеченного конуса P_1Q_1QP два других P_1R_1RP и R_1Q_1QC.

Переходим к определению площадей для различных поверхностей вращения (вместо „площадь поверхности" говорят иногда просто „поверхность"); и здесь придется основываться на аксиоме непрерывности и ее следствиях.



Черт. 168

Теорема 553. *Для данного цилиндра существует одна и только одна площадь, которая больше боковой поверхности всякой вписанной призмы и меньше боковой поверхности всякой описанной.*

Пусть дан цилиндр с радиусом основания, равным r, и с высотой, равной h. Впишем в него какую-нибудь призму. Ее высота тоже будет h, а основанием служит многоугольник, вписанный в окружность основания. Обозначив его периметр через p, найдем, что боковая поверхность нашей призмы равна $p \cdot h$ (теорема 518, п. 2). Точно так же боковая поверхность описанной призмы равна $p' \cdot h$, где p' есть периметр некоторого многоугольника, описанного около той же окружности. Так как здесь h — величина постоянная, то сравнение боковых поверхностей вписанных и описанных призм сводится к сравнению периметров их оснований. А мы знаем, что существует один и только один отрезок c (длина окружности), который удовлетворяет неравенствам:

$$p < c < p' \qquad \text{(теорема 461).}$$

Умножая на h, имеем:

$$p \cdot h < c \cdot h < p' \cdot h,$$

и средний член $c \cdot h$ определяет искомую площадь.

Замечание. Эту площадь можно рассматривать как площадь прямоугольника со сторонами c и h; это — так называемая „развертка цилиндра".

Определение 154. *Площадью боковой поверхности цилиндра называется площадь*, о которой шла речь в теореме 553.

Теорема 554. *Боковая поверхность цилиндра равна* $2\pi rh$ (теорема 553, определение 153, теорема 464).

Переходим к конусу и введем следующие обозначения:

r — радиус основания конуса;

h — его высота;

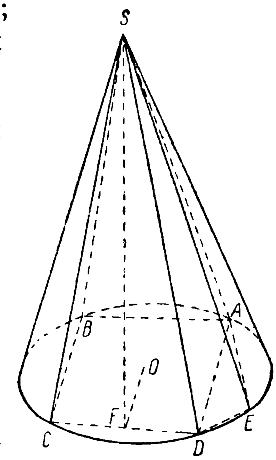
l — образующая;

a_i — сторона многоугольника, вписанного в основание конуса;

b_i — сторона описанного многоугольника;

l_i — высота боковой грани вписанной пирамиды, основанием которой служит сторона a_i;

l'_n — апофема правильной n-угольной вписанной пирамиды.



Черт. 169

Добавим, что в силу теоремы 184 высота боковой грани описанной пирамиды всегда равна образующей.

Теорема 555. 1) Всегда $l_i < l$;

2) l_i возрастает с убыванием a_i;

3) существует такое n, что разность $(l - l'_n)$ будет меньше ε, где ε — произвольно заданный отрезок.

Для п. 1 берем прямоугольный $\triangle SCF$ (черт. 169), где один из катетов равен l_i, а гипотенуза равна l.

Далее мы видим, что основание F высоты (SF) боковой грани вписанной пирамиды всегда будет серединой стороны (CD), ибо $\triangle SCD$ — равнобедренный. Тогда $OF \perp CD$ (теорема 223, п. 2) и (OF) возрастает с убыванием $(CD) = a_i$ (теорема 226, п. 2). Но возрастание (OF) влечет за собой и возрастание $(SF) = l_i$ (см. замечание после определения 60). Здесь, конечно, подразумевается, что основание и вершина конуса остаются неизменными.

Наконец, предполагая, что (CD) есть сторона правильного вписанного n-угольника, из $\triangle SCF$ имеем:

$$l - l'_n < (CF) < (CD),$$

и теорема 458 решает вопрос.

Теорема 556. *Для данного конуса существует одна и только одна площадь, которая больше боковой поверхности всякой вписанной пирамиды и меньше боковой поверхности всякой описанной.*

Для доказательства образуем 2 класса площадей:

в I класс помещаем площади боковых поверхностей вписанных пирамид;

во II класс — площади боковых поверхностей описанных пирамид.

Теперь докажем, что всякая площадь I класса меньше всякой площади II класса.

Действительно, любая площадь I класса может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2}\Sigma a_i \cdot l_i,$$

т. е. как сумма площадей боковых граней некоторой вписанной пирамиды. Точно так же площадь II класса можно выразить так:

$$\frac{1}{2}\Sigma b_i \cdot l.$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{2}\Sigma a_i \cdot l_i < \frac{1}{2}\Sigma a_i l = \frac{1}{2} l \Sigma a_i = \frac{1}{2} lp,$$

$$\frac{1}{2}\Sigma b_i \cdot l = \frac{1}{2} l \cdot \Sigma b_i = \frac{1}{2} lp'.$$

Но так как всегда $p < p'$ (теорема 440), то наше первое утверждение доказано.

Во-вторых, установим, что если дано произвольное положительное число ε, то найдется по такой площади во II и в I классах, что их разность будет меньше ε.

В самом деле, будем искать эти площади среди боковых поверхностей правильных пирамид. На основании теоремы 519 (п. I), пишем:

боковая поверхность правильной n-угольной описанной пирамиды равна $\frac{1}{2}p'_n \cdot l$;

боковая поверхность правильной n-угольной вписанной пирамиды равна $\frac{1}{2}p_n \cdot l'_n$,

так что их разность (обозначим ее через x) равна:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(p'_n \cdot l - p_n \cdot l'_n\right).$$

Делаем следующие преобразования:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(p'_n \cdot l - p_n \cdot l + p_n \cdot l - p_n l'_n\right),$$

$$x = \frac{1}{2} l \left(p'_n - p_n\right) + \frac{1}{2} p_n \left(l - l'_n\right).$$

Так как p_n всегда меньше c, где c — длина окружности, то

$$x < \frac{1}{2} \cdot l \left(p'_n - p_n\right) + \frac{1}{2} c \cdot \left(l - l'_n\right).$$

Взяв n достаточно большим, получим одновременно неравенства:

$$p_n' - p_n < \frac{\varepsilon}{l}, \qquad \text{(теорема 460)}$$

$$l - l_n' < \frac{\varepsilon}{c}, \qquad \text{(теорема 555)},$$

так что

$$x < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Таким образом, оба условия теоремы 241 выполнены, а потому существует одна и только одна площадь Q, удовлетворяющая неравенствам:

площади I класса $\leqslant Q \leqslant$ площадей II класса.

Докажем, что равенства быть не может. Попробуем допустить, что Q равно некоторой площади I класса, например, боковой поверхности пирамиды $SABCD$ (черт. 169). Тогда эта пирамида должна обладать наибольшей боковой поверхностью среди вписанных пирамид. Но возьмем на той дуге AD, которая не содержит точек B и C, какую-нибудь точку E и рассмотрим пирамиду $SABCDE$. Сравним боковые поверхности обеих пирамид. Легко видеть, что дело сводится к сравнению площадей:

$$\triangle SAD \text{ и } \triangle SAE + \triangle SDE.$$

Обозначим высоты этих треугольников по порядку через l_i, l_i^0, l_i^{00}. Так как $(AE) < (AD)$ и $(DE) < (AD)$ (теорема 230, п. 2), то

$$l_i^0 > l_i \text{ и } l_i^{00} > l_i \qquad \text{(теорема 555, п. 2)}.$$

Далее имеем:

$$\triangle SAE + \triangle SDE = \frac{1}{2}\left[(AE)\cdot l_i^0 + (DE)\, l_i^{00}\right] > \frac{1}{2} l_i \left[(AE) + (DE)\right],$$

$$\triangle SAE + \triangle SDE > \frac{1}{2} l_i (AD).$$

Отсюда вытекает, что

боковая поверхность пирамиды $SABCDE >$ боковой поверхности пирамиды $SABCD$,

и мы приходим к противоречию.

Точно так же невозможно допустить, чтобы Q равнялось какой-нибудь площади II класса.

Следовательно, Q удовлетворяет неравенствам:

$$\text{площадь I класса} < Q < \text{площади II класса.}$$

Определение 155. Площадью боковой поверхности конуса называется площадь, о которой шла речь в теореме 556.

Теорема 557. *Боковая поверхность конуса равна* πrl.

Действительно, при доказательстве предыдущей теоремы мы видели, что боковая поверхность вписанной пирамиды меньше $\frac{1}{2}pl$, но $p < 2\pi r$, так что

$$\text{боковая поверхность вписанной пирамиды} < \pi rl.$$

Точно так же было установлено, что боковая поверхность описанной пирамиды равна $\frac{1}{2}p'l$, но $p' > 2\pi r$, так что

$$\text{боковая поверхность описанной пирамиды} > \pi rl.$$

Итак, получаем неравенства:

$$\text{площадь I класса} < \pi rl < \text{площади II класса,}$$

т. е. величина πrl удовлетворяет тем же самым неравенствам, что и Q. А так как по теореме 241 такая величина единственна, то

$$Q = \pi rl.$$

Подобный же ход мысли приводит к определению боковой поверхности усеченного конуса. Поэтому ограничимся высказыванием окончательного вывода.

Обозначая через r_1 и r_2 радиусы оснований, а через l — образующую, имеем теорему:

Теорема 558. *Боковая поверхность усеченного конуса равна:*

$$\pi(r_1 + r_2) \cdot l.$$

Для дальнейшего полезно будет придать последним результатам иную форму, к чему сейчас и перейдем.

Теорема 559. *Боковая поверхность цилиндра, конуса и усеченного конуса равна произведению высоты тела на длину окружности, радиусом которой служит отрезок перпендикуляра, восставленного в середине образующей до пересечения с осью.* (Этот перпендикуляр восставляется в плоскости так называемого „осевого сечения".)

На случае цилиндра, ввиду его очевидности, останавливаться не будем.

Переходя к конусу, возьмем $\triangle ABO$ (черт. 170-а), который получается в сечении полуплоскостью, исходящей из оси (теорема 551); (ED) есть перпендикуляр, о котором говорится в теореме. Так как

$$\triangle AOB \sim \triangle AED,$$

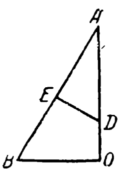
то

$$\frac{(OB)}{(ED)} = \frac{(OA)}{(AE)},$$

или

$$\frac{r}{(ED)} = \frac{h}{\frac{1}{2} l}$$

$$r \cdot l = 2h \cdot (ED).$$

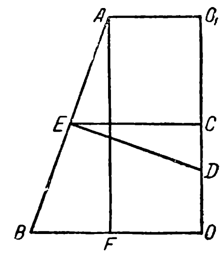


Черт. 170 а

Подставляя выражение $r \cdot l$ в формулу теоремы 557, получаем:

боковая поверхность конуса $=$

$= h \cdot 2\pi (ED)$.



Черт. 170 b

Наконец, возьмем прямоугольную трапецию $ABOO_1$ (черт. 170 b), которая служит осевым сечением для усеченного конуса. Здесь (EC) — средняя линия трапеции, (AF) — ее высота, (ED) — указанный перпендикуляр. Формулу теоремы 558 можно переписать так:

боковая поверхность усеченного конуса $= 2\pi (EC) \cdot l^*$ (теорема 342).

Из подобия $\triangle ABF$ и EDC имеем:

$$\frac{(AF)}{(EC)} = \frac{(AB)}{(ED)},$$

откуда

$$h \cdot (ED) = l \cdot (EC).$$

Подставляя в * вместо $(EC) \cdot l$ выражение $h \cdot (ED)$, находим:

боковая поверхность усеченного конуса $= h \cdot 2\pi (ED)$.

Рассмотрев основные случаи, теперь можно дать общее определение для площади поверхности вращения.

Определение 156. *Под площадью поверхности вращения понимаем сумму площадей всех тех поверхностей, сочетанием которых она образуется* (см. определение 152).

Переходим к объемам тел вращения.

Теорема 560. *Для данного цилиндра существует один и только один объем, который больше объема всякой вписанной призмы и меньше объема всякой описанной.*

Сохраняя прежние обозначения, имеем:

объем вписанной призмы $= h \cdot$ (площадь вписанного многоугольника);

объем описанной призмы $= h \cdot$ (площадь описанного многоугольника).

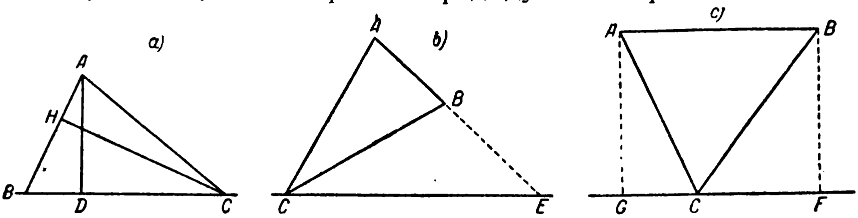
Но из параграфа 43 известно, что

площадь вписанного многоугольника $< J <$ площади описанного многоугольника,

где J площадь круга. Умножая на h, находим:

объем вписанной призмы $< J \cdot h <$ объема описанной призмы, и величина $J \cdot h$ является искомой.

Определение 157. Объемом цилиндра и называется тот объем, о котором шла речь в предыдущей теореме.



Черт. 171

Теорема 561. *Объем цилиндра равен* $\pi r^2 h$.

Тот же ход мысли приводит к следующим двум предложениям.

Теорема 562. *Объем конуса равен* $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Теорема 563. *Объем усеченного конуса равен*

$$\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right).$$

Переходим к общему случаю.

Определение 158. *Объем тела вращения есть определенное сочетание* (получаемое с помощью сложения и вычитания) *объемов цилиндров, конусов и усеченных конусов — именно то самое сочетание, которое образует данное тело* согласно определению 153.

Теорема 564. *Объем тела, получаемого вращением треугольника вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через его вершину, но не содержащей ни одной из его внутренних точек, равен произведению поверхности, образованной стороной, противоположной указанной вершине, на треть высоты, опущенной на эту сторону.*

Придется рассмотреть различные положения треугольника (черт. 171). Одна вершина треугольника всегда лежит на оси (пусть это будет точка C); но может оказаться, что и другая вершина тоже лежит на оси; отсюда получаем следующие случаи.

1. Сторона (BC) целиком лежит на оси (черт. 171, a).

Проводим высоты (AD) и (CH). Опираясь на определение 158, пишем:

$$V = V_{ABD} \pm V_{ACD},$$

где знаки выбираются в зависимости от того, лежит ли точка D между B и C или точка C лежит между B и D. (Другие случаи предоставляется разобрать читателю.) Далее имеем:

$$V = \frac{1}{3}\pi(AD)^2 \cdot (BD) \pm \frac{1}{3}\pi(AD)^2 \cdot (CD),$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(AD)^2 \cdot [(BD) \pm (CD)],$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(AD)^2 \cdot (BC).$$

Вычисляя двояко площадь $\triangle ABC$, получаем:

$$(BC) \cdot (AD) = (AB) \cdot h, \text{ где } h = (CH).$$

Подставляя, находим для V выражение:

$$V = \frac{1}{3} h \pi (AD) \cdot (AB).$$

Но множитель $\pi(AD) \cdot (AB)$ есть величина боковой поверхности конуса, которую образует сторона (AB) своим вращением вокруг оси. Обозначая ее через „поверхность (AB)“, окончательно получаем:

$$V = \frac{1}{3} h \cdot [\text{поверхность } (AB)].$$

2. На оси лежит только вершина C, причем AB не параллельна оси (черт. 171, b), и пусть AB пересекает ось в точке E. Тогда имеем:

$$V = V_{AEC} - V_{BEC} = \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхн. } AE) - \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхн. } BE)$$

(случ. 1), или

$$V = \frac{1}{3} h \cdot [\text{поверхн. } (AB)].$$

3. На оси лежит только вершина C, и AB параллельна оси (черт. 171, c).

Опускаем перпендикуляры (AG) и (BF). На основании определения 158 пишем:

$$V = V_{ABFG} \mp V_{BCF} - V_{ACG},$$

где знаки выбираются в зависимости от того, лежит ли точка C между F и G или F — между C и G (другие случаи предоставляется разобрать читателю).

Вычисляем указанные объемы:

$$V = \pi h^2 \cdot \left[(FG) \mp \frac{1}{3}(FC) - \frac{1}{3}(CG)\right], \text{ где } h = (AG) = (BF);$$

$$V = \pi h^2 \cdot \left[(FG) - \frac{1}{3} \cdot \{(CG) \pm (FC)\}\right];$$

$$V = \pi h^2 \cdot \left[(FG) - \frac{1}{3}(FG)\right];$$

$$V = \frac{2}{3}\pi h^2 \cdot (FG).$$

С другой стороны:

$$\text{поверхн. } (AB) = 2\pi h \cdot (FG) \text{ (теорема 554)},$$

так что, подставляя, окончательно находим:

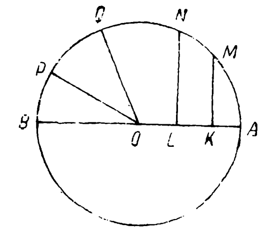
$$V = \frac{1}{3} h \cdot [\text{поверхн. } (AB)].$$

§ 49. Поверхности и объемы шара и его частей

Определение 159. Из теорем 220 и 218 нетрудно вывести, что всякое сечение шара плоскостью, перпендикулярной к данному диаметру, есть круг с центром на этом диаметре; а сечение полуплоскостью, исходящей из данного диаметра, есть полукруг всегда того же радиуса, что и шар. Прибегая к представлению о движении, указанные свойства шара выражают словами: *шар есть тело, получаемое вращением полукруга вокруг его диаметра; поверхность же шара получается вращением полуокружности.*

Определение 160. Пересекая шар двумя параллельными плоскостями, назовем *шаровым поясом* часть шаровой поверхности, заключенную между ними; расстояние между плоскостями называется *высотой*, а получаемые в сечении окружности — *основаниями шарового пояса.* Часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями, называется *шаровым слоем;* предыдущие два термина переносятся и на слой. Если одна из плоскостей станет касательной к шару, то получается соответственно *поверхность шарового сегмента* и *шаровой сегмент.* Пользуясь представлением о движении, можно сказать, что шаровой пояс образуется вращением дуги (например, $\smile MN$ на черт. 172) вокруг диаметра AB, а шаровой слой — вращением части $KMNL$ полукруга; $\smile AM$ вращением образует поверхность шарового сегмента, и т. д.

Шаровым сектором называется тело, образуемое вращением кругового сектора (например, сектора POQ на черт. 172) вокруг диаметра AB; шаровой пояс, образуемый дугой PQ, называется *основанием* сектора. Если один из концов дуги совпадает с концом диаметра (например, круговой сектор POB), то получается частный случай шарового сектора. При желании можно избежать механических представлений и определить шаровой сектор как часть шара, заключенную между боковыми поверхностями двух конусов с вершиной в центре шара.

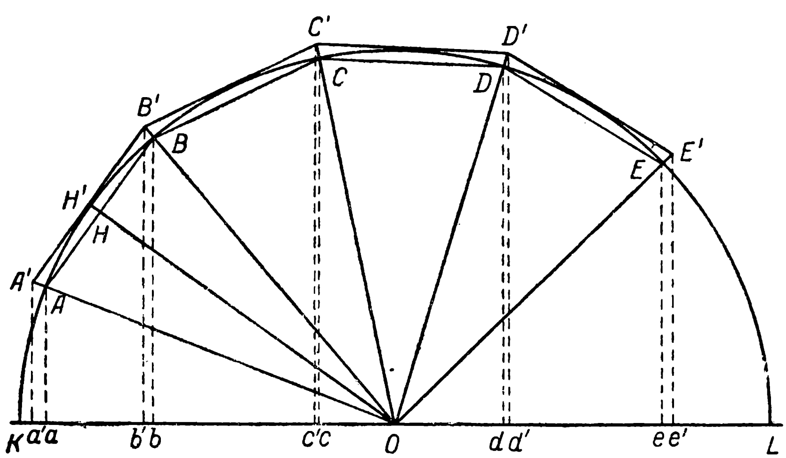


Черт. 172

Для решения задачи настоящего параграфа сделаем следующее построение.

Возьмем полуокружность с центром в O и с радиусом, равным r (черт. 173), и отметим на ней $\smile AE$. Разделим эту дугу на n равных частей (теорема 237, на чертеже $n=4$) и, соединяя последовательно точки деления, получим ломаную $ABCDE$. Исходя из теорем 230 и 405 (следствие), нетрудно доказать, что в этой ломаной все стороны и углы равны между собой; такую ломаную называют правильной. Расстояния сторон ломаной от центра, которые все равны между собой, обозначим через h_n [на чертеже $h_n = (OH)$]. Далее, продолжим (OH) до пересечения с окружностью в точке H', через точку H' проведем касательную к окружности и возьмем ее отрезок $(A'B')$, ограниченный продолжением радиусов (OA) и (OB); то же самое проделаем и для всех остальных сторон ломаной.

Читатель сам убедится, что таким образом получается n-сторонняя описанная ломаная $A'B'C'D'E'$, которая будет также правильной.



Черт. 173

Чтобы закончить построение, опустим из вершин обеих ломаных перпендикуляры на диаметр и обозначим их основания с помощью соответственных малых букв: $a', a, b', b, \ldots$

В связи с сделанным построением укажем некоторые свойства получающихся здесь отрезков.

Нетрудно видеть, что фигуры, связанные с описанной и вписанной ломаными, гомотетичны друг с другом относительно точки O с отношением подобия равного $\frac{r}{h_n}$. Отсюда находим:

$$\frac{(a'e')}{(ae)} = \frac{r}{h_n}. \tag{1}$$

Эта пропорция сейчас же показывает, что

$$(ae) < (a'e'). \tag{2}$$

Так как далее имеем:

$$(a'e') = \frac{r}{h_n} \cdot (ae),$$

где отрезки r и (ae) не меняются при изменении n, а отрезок h_n возрастает вместе с n (теорема 226, п. 2), то

$$(a'e') \text{ убывает с возрастанием } n. \tag{3}$$

Пусть теперь $\smile AE$ вращается вокруг оси KL (для краткости пользуемся „языком движения"). Обе построенные выше ломаные образуют при этом поверхности вращения, которые можно вычислить, согласно определению 156. Обозначим поверхность, образуемую вписанной ломаной, через σ_n, а описанной — через s_n.

Теорема 565. $\sigma_n = 2\pi h_n \cdot (ae)$; $s_n = 2\pi r \cdot (a'e')$.

Действительно, на основании теоремы 559 имеем:

$$\sigma_n = 2\pi h_n \cdot (ab) + 2\pi h_n \cdot (bc) + 2\pi h_n (cd) + 2\pi h_n \cdot (de) = 2\pi h_n \cdot (ae),$$

также — и для s_n.

Теорема 566. 1. σ_n возрастает, s_n убывает с возрастанием n.

2. Всякое σ_n меньше всякого s_m.

3. Существует такое n, что

$$s_n - \sigma_n < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданное положительное число. Пункт I вытекает из того, что (ae) — постоянно, h_n возрастает, $(a'e')$ убывает с возрастанием n.

Пункт II очевиден для случая, когда $n = m$. Если же $n > m$, то имеем:

$$\sigma_n < s_n, \quad s_n < s_m \quad (\text{п. I}),$$

так что

$$\sigma_n < s_m.$$

Если, наконец, $n < m$, то

$$\sigma_n < \sigma_m, \quad \sigma_m < s_m,$$

так что

$$\sigma_n < s_m.$$

Для доказательства п. 3 составляем отношение:

$$\frac{s_n}{\sigma_n} = \frac{r}{h_n} \cdot \frac{(a'e')}{(ae)} = \frac{r^2}{h_n^2} \qquad [\text{см. выше (1)}]$$

и переходим к производной пропорции:

$$\frac{s_n - \sigma_n}{s_n} = \frac{r^2 - h_n^2}{r^2},$$

откуда

$$s_n - \sigma_n = s_n \cdot \frac{(r + h_n)(r - h_n)}{r^2}.$$

В силу п. I имеем:

$$s_n < s_1.$$

Кроме того:

$$r + h_n < 2r,$$

так что получаем неравенство:

$$s_n - \sigma_n < \frac{2s_1}{r} \cdot (r - h_n).$$

Что касается последней разности, то для правильной ломаной, как в этом легко убедиться, имеет место теорема 459. На этом основании существует такое n, что

$$r - h_n < \frac{r \cdot \varepsilon}{2s_1},$$

и тогда

$$s_n - \sigma_n < \varepsilon.$$

Теорема 567. Существует одна и только одна такая площадь, которая больше всякой σ_n и меньше всякой s_n.

Образуем два класса площадей: в I класс относим все σ_n, а во II — все s_n. Предыдущая теорема показывает, что все условия теоремы 241 здесь выполнены. Следовательно, существует одна и только одна такая площадь s, что:

$$\sigma_n \leqslant s \leqslant s_n.$$

Но случай равенства невозможен, так как, если $s = \sigma_{n_0}$, то эта σ_{n_0} будет в I классе наибольшей. Между тем, стоит только взять $n_1 > n_0$, и $\sigma_{n_1} > \sigma_{n_0}$, так что получается противоречие.

Точно так же невозможно равенство $s = s_n$, а потому

$$\sigma_n < s < s_n.$$

Определение 161. Площадью поверхности, описываемой $\smile AE$, и называется площадь s, о которой шла речь в предыдущей теореме.

Теорема 568. $s = 2\pi r \cdot (ae)$.

Действительно,

$$\sigma_n = 2\pi h_n \cdot (ae) < 2\pi r \cdot (ae),$$

$$s_n = 2\pi r \cdot (a'e') > 2\pi r \cdot (ae),$$

так что

$$\sigma_n < 2\pi r \cdot (ae) < s_n.$$

Следовательно, величина $2\pi r\ (ae)$ удовлетворяет тем же неравенствам, что и s. Но такая площадь единственна (теорема 567), а потому:

$$s = 2\pi r \cdot (ae).$$

Рассматривая различные случаи положения точек A и E (черт. 173), получаем следующие выводы.

Теорема 569. *Поверхность шарового пояса или сегмента равна произведению его высоты на длину окружности большого круга*: $s = 2\pi rh$, где h — высота пояса или сегмента.

Теорема 570. *Поверхность шара равна учетверенной площади большого круга*: $s = 4\pi r^2$. [В этом случае надо положить $(ae) = 2r$].

Переходим к объемам.

Снова обращаемся к черт. 173, но только теперь будем рассматривать круговой сектор AOE и два „многоугольных сектора“ $OABCDE$ и $OA'B'C'D'E'$, один — вписанный, а другой — описанный около кругового сектора. Если последний будет вращаться вокруг оси KL, то указанные многоугольники образуют тела вращения, объемы которых можно вычислить по правилу, данному в определении 158. Обозначим эти объемы соответственно через v_n и V_n.

Теорема 571. $v_n = \frac{1}{3} h_n \cdot \sigma_n$; $V_n = \frac{1}{3} r s_n$.

Действительно, v_n можно рассматривать, как сумму объемов тел, происшедших от вращения $\triangle\triangle$ AOB, $BOC, \ldots$ около оси KL. Применяя теорему 564, находим:

$$v_n = \frac{1}{3} h_n \cdot \text{поверхн. } (AB) + \frac{1}{3} h_n \cdot \text{поверхн. } (BC) + \ldots v_n - \frac{1}{3} h_n \cdot \sigma_n.$$

Также выводится и вторая формула.

Теорема 572. 1. v_n возрастает, а V_n убывает с возрастанием n.

2. Всякое v_n меньше всякого V_m.

3. Существует такое n, что

$$V_n - v_n < \varepsilon_1,$$

где ε — произвольно заданное положительное число.

Первые два пункта непосредственно вытекают из формул теоремы 571 и свойств σ_n и s_n. Для третьего пишем:

$$\frac{V_n}{v_n}=\frac{r}{h_n}\cdot\frac{s_n}{\sigma_n}=\frac{r^3}{h_n^3}$$ (см. теорему 566, доказательство п. 3),

$$\frac{V_n-v_n}{V_n}=\frac{r^3-h_n^3}{r^3}.$$

$$V_n-v_n=V_n\cdot\frac{r^2+rh_n+h_n^2}{r^3}\cdot(r-h_n).$$

На основании п. I

$$V_n<V_1,$$

и, кроме того:

$$h_n<r,$$

так что приходим к неравенству:

$$V_n-v_n<\frac{3V_1}{r}\cdot(r-h_n).$$

По замеченному выше найдется такое n, что

$$r-h_n<\frac{r\cdot\varepsilon}{3V_1},$$

и тогда получим:

$$V_n-v_n<\varepsilon.$$

Теорема 573. Существует один и только один объем V, удовлетворяющий неравенствам:

$$v_n<V<V_n.$$

Действительно, образуем два класса объемов: в I класс относим все v_n, а во II — все V_n. Теорема 572 показывает, что условия теоремы 241 здесь выполняются. Следовательно, существует одно и только одно V, удовлетворяющее неравенствам:

$$v_n\leqslant V\leqslant V_n,$$

но в силу теоремы 572 (п. I) равенства быть не может.

Определение 162. Объемом тела, образуемого вращением сектора AOE вокруг оси KL, и называется объем V, о котором шла речь в теореме 573.

Теорема 574. $V=\frac{1}{3}r\cdot s.$

Действительно:

$$v_n = \frac{1}{3} h_n \sigma_n < \frac{1}{3} r \cdot s,$$

$$V_n = \frac{1}{3} r s_n > \frac{1}{3} r s_1,$$

так что величина $\frac{1}{3} r \cdot s$ удовлетворяет тем же неравенствам, что и V, а так как этот объем единственный, то

$$V = \frac{1}{3} r \cdot s.$$

Отсюда нетрудно вывести следующие теоремы.

Теорема 575. *Объем шарового сектора равен* $\frac{2}{3} \pi r^2 h$, где h — высота основания сектора.

Теорема 576. *Объем шара равен* $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Объемы других частей шара можно определить с помощью правила, подобного тому, которое было указано в определении 158. Так, объем сегмента можно найти как разность между объемом сектора и конуса.

Таким путем читатель докажет следующие формулы.

Теорема 577. *Объем шарового сегмента равен*

$$\pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right),$$

где h — высота сегмента.

Теорема 578. *Объем шарового слоя равен*

$$\frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h \left(r_1^2 + r_2^2 \right),$$

где h — высота слоя, а r_1 и r_2 — радиусы его оснований.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ИНВЕРСИЯ (ИЛИ ОБРАЩЕНИЕ)

Читателю известно, какое важное значение имеют преобразования формул в алгебре. Точно так же и в геометрии видное место занимают преобразования одних фигур в другие. С одним таким преобразованием, а именно — с гомотетией, мы познакомились выше, другое изучим в настоящем приложении. В связи со сказанным заметим, что в геометрии термины: „соответствие“ и „преобразование“ — равнозначащи. Так, о двух гомотетичных фигурах можно сказать, что „их точки попарно соответствуют друг другу“, или что „точки одной фигуры преобразуются в точки другой“. То же самое имеет место и при инверсии.

Определение 163. *Гиперболической инверсией* (или обращением) называется преобразование, в силу которого каждой точке M, отличной от определенной точки O, соответствует такая точка M', что точки M и M' лежат на одной и той же полупрямой с вершиной в O, причем их расстояния от этой точки связаны соотношением:

$$(OM)\cdot(OM') = r^2,$$

где r^2 — данное положительное число, называемое степенью инверсии; данная же точка O называется центром инверсии.

Если точки M и M' подчиним условию, чтобы они лежали на противоположных полупрямых, исходящих из точки O, а все остальное оставим без изменения, то получим эллиптическую инверсию.

Теорема 579. *Эллиптическая инверсия* сводится к соединению гиперболической инверсии с симметрией относительно центра инверсии.

Доказательство непосредственно вытекает из определения 163.

Принимая во внимание теорему 579, в дальнейшем мы остановимся на гиперболической инверсии и будем ее называть просто инверсией (или обращением).

Теорема 580. *Обращение есть преобразование взаимное.*

Этим мы хотим сказать, что если при некоторой инверсии точка M преобразуется в точку M', то в силу той же самой инверсии точка M' переходит в точку M. Справедливость утверждения вытекает из того, что в определение 163 обе точки входят совершенно одинаковым образом, так что их можно переставить одну на место другой.

Теорема 581. *Если оставить в стороне точку O, то инверсия есть преобразование одно-однозначное.*

Необходимость выделить точку O вытекает уже из самого определения 163. Пусть M есть какая-нибудь точка, отличная от O; тогда полупрямая OM вполне определяется (теорема 12), равно как и отрезок (OM') из условия:

$$(OM') = \frac{r^2}{(OM)}.$$

Откладывая этот отрезок на полупрямой OM, получим единственную точку M'.

Итак, каждой точке M, отличной от O, соответствует вполне определенная точка M. Обратное утверждение вытекает из теоремы 580.

Определение 164. Если два каких-нибудь геометрических образа переходят друг в друга с помощью инверсии, то они называются *взаимно обратными.*

Теорема 582. *Если данные фигуры имеют общую точку, то и обратные им фигуры имеют общую точку, которая является обратной для первой.*

Действительно, пусть фигуры F_1 и F_2 имеют общую точку M. В силу определения обратных фигур F_1' и F_2' обратная ей точка M' должна лежать и на F_1' и на F_2'; но такая точка M' — единственна (теорема 581), а потому M' должна быть общей точкой для F_1' и F_2'.

Ознакомившись с самыми общими свойствами обращения, остановимся подробнее на инверсии в плоскости, так что в ближайших теоремах все рассматриваемые фигуры будут лежать в одной и той же плоскости.

Определение 165. При обозначениях определения 163, окружность O (r) называется *окружностью инверсии.*

Теорема 583. *Точки окружности инверсии и только эти точки преобразуются при инверсии каждая в самое себя.*

Пусть точка M при инверсии соответствует сама себе, так что

$$(OM)^2 = r^2, \quad \text{или} \quad (OM) = r,$$

т. е. точка M лежит на O (r).

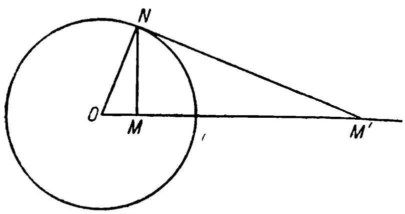
Обратно, для любой точки N этой окружности имеем:

$$(ON) = r, \quad \text{откуда} \quad (ON)\cdot(ON) = r^2,$$

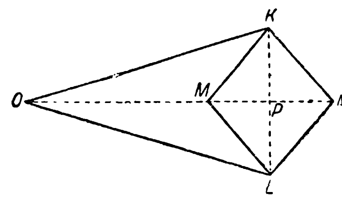
т. е. N преобразуется сама в себя.

Построение обратных точек. Пусть точка O есть центр инверсии, а изображенная на черт. 174 окружность есть окружность инверсии.

Мы уже знаем, что ее точки преобразуются в самих себя. Возьмем сначала точку M внутри окружности. Проведем полупрямую OM и восставим к ней перпендикуляр в точке M, продолжим его до пересечения с окружностью инверсии в точке N; в этой точке проведем касательную к окружности инверсии и продолжим ее до пересечения с полупрямой OM в точке M' (так как $\angle NOM < d$, то существование точки пересечения вытекает из постулата Евклида).



Черт. 174



Черт. 175

Точка M' будет искомой. Действительно, она лежит на полупрямой OM, и теорема 429 дает:

$$(ON)^2 = (OM)\cdot(OM'),$$

или

$$(OM)\cdot(OM') = r^2.$$

Пусть теперь нам дана точка M' вне окружности инверсии. Тогда проделываем предыдущее построение в обратном порядке: из точки M' проводим касательную к окружности, и пусть N есть точка касания; из точки N опускаем перпендикуляр на прямую OM'. Его основание M и будет точкой, обратной для M'.

Действительно, эта точка M лежит внутри (OM') (теорема 172), так что O не лежит между M и M', а потому M и M' принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в точке O.

Далее, теорема 429 снова дает:

$$(OM)\cdot(OM') = r^2.$$

Для построения обратных точек существуют особые приборы. Мы рассмотрим один из них.

Инверсор Поселье. Возьмем четыре стержня равной длины и соединим их шарнирами в точках K, L, M, M' (черт. 175), так что полученный ромб можно „сдвигать“ и „раздвигать". В точках K и L присоединим (тоже шарнирами) еще два равных стержня (OK) и (OL), соединенных, кроме того, в точке O [возьмем $(OK) > (KM)$].

В силу теоремы 178 точки O, M, M' лежат на одной прямой, а именно — на перпендикуляре, восставленном в середине P отрезка (KL).

Так как $(OK) > (KM)$, то $(PO) > (PM)$ (теорема 169), а потому точка O лежит вне отрезка (MM'). Другими словами, точки M и M' лежат всегда на одном и том же луче с вершиной в O.

Далее имеем:

$$(OM) \cdot (OM') = [(OP) - (PM)] \cdot [(OP) + (PM)] = (OP)^2 - (PM)^2.$$

Из $\triangle OKP$:

$$(OP)^2 = (OK)^2 - (KP)^2.$$

Из $\triangle MKP$:

$$(PM)^2 = (KM)^2 - (KP)^2.$$

Так что

$$(OP)^2 - (PM)^2 = (OK)^2 - (KM)^2,$$

и окончательно:

$$(OM) \cdot (OM') = (OK)^2 - (KM)^2,$$

а эта разность есть величина постоянная, ибо отрезки (OK) и (KM) — неизменны.

Из всего изложенного следует, что если закрепить точку O, а точку M заставить описывать какую-нибудь фигуру, то точка M' опишет фигуру, обратную данной при инверсии с центром в O и со степенью равной $(OK)^2 - (KM)^2$.

Теорема 584. *Точки, лежащие внутри окружности инверсии, преобразуются в ее внешние точки и обратно.*

Действительно, основное соотношение $(OM) \cdot (OM') = r^2$ показывает, что при $(OM) < r$, имеем $(OM') > r$, и обратно.

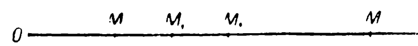
Замечание. Формула $(OM') = \frac{r^2}{(OM)}$ показывает, что нельзя говорить о точке, обратной для точки O (так как невозможно делить на нуль). Однако эта же формула говорит нам, что если точка M неограниченно сближается с точкой O, то точка M' беспредельно удаляется от точки O. Принимая во внимание указанное обстоятельство, условно говорят, что „точке O соответствует бесконечно удаленная точка плоскости".

Теорема 585. *Прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется в самое себя.* При этом, если M и M', M_1 и M_1' суть две пары взаимно обратных точек этой прямой, то

1) при $(OM) < (OM_1)$ имеем: $(OM') > (OM_1')$;

2) $(M'M_1') = r^2 \cdot \dfrac{(MM_1)}{(OM) \cdot (OM_1)}$.

Первое утверждение непосредственно вытекает из определения 163: точка, лежащая на прямой, проходящей через точку O, перейдет в точку, лежащую на этой же прямой, так что наша прямая как целое останется в покое. Но отдельные точки ее перетасовываются, согласно теореме 584; в покое останутся только точки пересечения с окружностью инверсии (теорема 583).



Черт. 176

Далее, из основного соотношения имеем:

$$(OM') = \frac{r^2}{(OM)} \text{ и } (OM_1') = \frac{r^2}{(OM_1)},$$

а потому:

$$\text{при } (OM) < (OM_1) \text{ будет } (OM') > (OM_1') \text{ (черт. 176).}$$

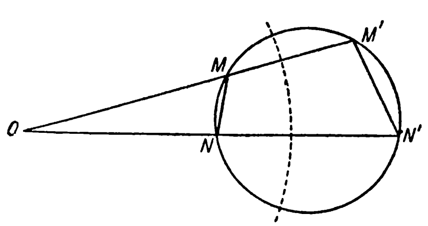
Наконец, вычислим длину отрезка $(M'M_1')$. В случае чертежа имеем:

$$(M'M_1') = (OM') - (OM_1') = r^2 \cdot \left\{\frac{1}{(OM)} - \frac{1}{(OM_1)}\right\} =$$

$$= r^2 \frac{(OM_1) - (OM)}{(OM)\cdot(OM_1)} = r^2 \cdot \frac{(MM_1)}{(OM)\cdot(OM_1)}.$$

Теорема 586. Если M и M', N и N' суть две пары взаимно обратных точек, причем M и N не лежат на одной прямой с точкой O, то

1) эти четыре точки лежат на одной окружности;
2) $\triangle OMN \backsim \triangle ON'M'$,
3) $\angle ONM = \angle OM'N'$ и $\angle OMN = \angle ON'M'$,
4) $(M'N') = r^2 \cdot \dfrac{(MN)}{(OM)\cdot(ON)}$.



Черт. 177

Действительно, так как

$$(OM)\cdot(OM') = (ON)\cdot(ON') = r^2,$$

то

$$\frac{(OM)}{(ON)} = \frac{(ON')}{(OM')},$$

и теорема 428 доказывает п. I (см. черт. 177, где прерывистой линией изображена окружность инверсии).

Ту же самую пропорцию можно переписать так:

$$\frac{(OM)}{(ON')} = \frac{(ON)}{(OM')},$$

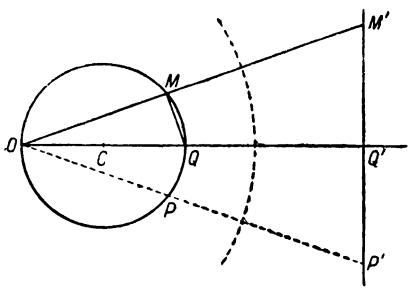
а это, в связи с общим углом при точке O, доказывает подобие $\triangle\triangle$ OMN и $ON'M'$, причем сходственными сторонами служат (OM) и (ON'), (ON) и (OM'). Отсюда сейчас же вытекает равенство углов, упомянутых в п. 3. Наконец, из того же подобия получаем:

$$\frac{(M'N')}{(MN)} = \frac{(OM')}{(ON)},$$

откуда [заменяя (OM')]:

$$(M'N') = r^2 \cdot \frac{(MN)}{(OM)\cdot(ON)}.$$

Теорема 587. *Окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, параллельную касательной к окружности в этой точке*, и обратно: *прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через эту точку.*



Черт. 178

В самом деле, пусть окружность с центром в точке C проходит через точку O (черт. 178) и пусть прямая OC вторично пересекает окружность в точке Q.

Найдем точку Q', обратную для Q (на чертеже это построение не указано); затем возьмем на окружности произвольную точку M и для нее тоже построим обратную точку M'; наконец соединим прямыми M с Q и M' с Q'.

На основании п. 3 теоремы 586 имеем:

$$\angle OMQ = \angle OQ'M'.$$

Но первый угол — прямой (теорема 406), так что

$$M'Q' \perp OQ'.$$

Следовательно, точки, обратные для точек данной окружности, лежат на перпендикуляре к OC, восставленном в точке Q'; очевидно, что $M'Q'$ параллельна касательной к окружности в точке O.

Обратно, пусть дана какая-нибудь прямая, не проходящая через точку O. Опуская из точки O на нее перпендикуляр, назовем буквой Q' его основание. Пусть точка Q будет обратной для Q', а точка M — обратной для какой-нибудь другой точки M' данной прямой.

По предыдущему напишем:

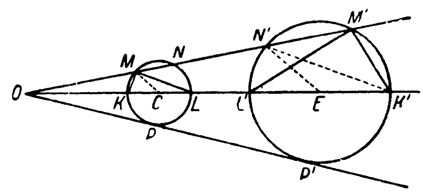
$$\angle OMQ = \angle OQ'M', \text{ но } \angle OQ'M' = d,$$

так что всегда

$$\angle OMQ = d,$$

т. е. геометрическим местом обратных точек будет окружность, имеющая отрезок (OQ) своим диаметром (теорема 406).

Если взаимно обратные окружность и прямая уже построены, то нахождение соответствующих точек становится весьма простым. Так, чтобы найти точку, соответствующую точке P на окружности, достаточно продолжить OP до пересечения с прямой в точке P'.



Черт. 179

Теорема 588. *Две окружности, касающиеся друг друга в центре инверсии, преобразуются в две параллельные прямые*, и обратно.

Предложение вытекает из теоремы 587 в связи с тем обстоятельством, что в точке O у данных окружностей имеется общая касательная.

Теорема 589. *Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в такую же окружность.*

Пусть дана окружность с центром в C, и пусть прямая OC пересекает ее в точках K и L (черт. 179). Возможны два случая:

1. Точки K и L взаимно обратны, так что $(OK) \cdot (OL) = r^2$.

В этом случае каждые две точки, в которых прямая из O пересекает данную окружность, будут взаимно обратными. Так, если подобная прямая пересекает окружность в точках M и N, то по теореме 433 имеем:

$$(OM) \cdot (ON) = (OK) \cdot (OL) = r^2,$$

причем точка O не может лежать между M и N, так как иначе она была бы внутренней точкой для окружности и лежала бы внутри диаметра (KL) и точки K и L не были бы обратными при гиперболической инверсии. Следовательно, точки M и N оказываются взаимно обратными.

Если из точки O проведем касательную OP, то точка касания P будет отвечать самой себе, ибо:

$(OP)^2 = (OK) \cdot (OL) = r^2$ (замечание к теореме 433), $(OP) = r$

и точка P лежит на окружности инверсии (теорема 583).

Таким образом, в разбираемом случае данная окружность, как целое, преобразуется в самое себя; при этом точками касания обеих касательных из O она делится на две дуги, и при инверсии точки одной дуги преобразуются в точки другой.

2. Точки K и L — не взаимно обратны.

Тогда построим точки K' и L', обратные для них; далее берем на данной окружности какую-нибудь точку M и для нее также строим обратную точку M' (на черт. 179 опущены подробности построения, чтобы не усложнять его). Наконец, соединяем отрезками M с K и L, M' с K' и L'.

На основании теоремы 586 (п. 3) имеем:

$$\angle OMK = \angle OK'M'; \quad \angle OML = \angle OL'M',$$

так что

$$\angle OL'M' - \angle OK'M' = \angle OML - \angle OMK,$$

но

$$\angle OML - \angle OMK = \angle KML = d \qquad \text{(теорема 406)},$$

$$\angle OL'M' - \angle OK'M' = \angle K'M'L' \qquad \text{(теорема 324)},$$

откуда

$$\angle K'M'L' = d,$$

и точка M' лежит на окружности, описанной на $(K'L')$, как на диаметре. Легко видеть, что эта новая окружность не проходит через точку O. (Если точка O лежит внутри окружности C, то вместо разностей углов придется брать суммы.)

Когда две взаимно обратные окружности построены, то весьма легко находить точки, соответствующие данным.

Так, чтобы найти точку, соответствующую точке N, продолжаем прямую ON до пересечения со второй окружностью; вообще эта прямая пересекает каждую окружность в двух точках. На основании теоремы 585 (п. 1), если точка N есть более удаленная от O из двух точек пересечения прямой ON с окружностью C, то на окружности E ей соответствует точка N', более близкая к O.

Замечание. Важно отметить, что центры C и E двух взаимно обратных окружностей не будут взаимно обратными точками.

Так, в случае чертежа имеем:

$$(OE) = (OK') - \frac{(K'L')}{2} = \frac{r^2}{(OK)} - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{(KL)}{(OK)\cdot(OL)} \qquad \text{(теорема 585, п. 2)},$$

$$(OE) = \frac{r^2}{(OK)} \cdot \frac{(OL)-(CL)}{(OL)} = r^2 \cdot \frac{(OC)}{(OK)\cdot(OL)},$$

$$(OK)\cdot(OL) = [(OC)-(CL)]\cdot[(OC)+(CL)] = (OC)^2-(CL)^2,$$

$$(OE) = r^2 \cdot \frac{(OC)}{(OC)^2-(CL)^2};$$

Отсюда получаем:

$$(OE)\cdot(OC) = r^2\cdot\frac{(OC)^2}{(OC)^2-(CL)^2} > r^2,$$

так что C и E не могут быть взаимно обратными.

Для уяснения последних теорем советуем читателю проделать ряд примеров на построение обратных фигур, выбирая прямые и окружности в самых различных положениях по отношению к центру инверсии (следует остановиться на случае, когда точка O лежит внутри данной окружности).

Теорема 590. Если прямая и окружность или две окружности касаются в некоторой точке, отличной от центра инверсии, то обратные им фигуры тоже касаются в точке, обратной для первой.

Предложение вытекает из понятия о касании (определение 73 и 77) и из теоремы 582.

Теорема 591. *Центр инверсии есть центр подобия для двух взаимно обратных окружностей.*

В случае черт. 179, когда центр инверсии лежит вне данной (и обратной ей) окружности, доказательство можно обосновать на теореме 590: касательная OP к окружности C будет касательной и к окружности E, а общая касательная PP' пересечет линию центров в центре прямого подобия O (определение 106, теорема 403). Но в том случае, когда центр инверсии лежит внутри данной (и обратной ей) окружности, о касательных говорить нельзя (советуем читателю сделать чертеж для этого случая); поэтому мы приведем доказательство, которое годится для обоих случаев.

Действительно,

$$\angle OLM = \angle OM'L' \quad \text{(теорема 586, п. 3)},$$

$$\angle OK'N' = \angle OM'L' \quad \text{(теорема 405, следствие)},$$

так что

$$\angle OLM = \angle OK'N',$$

$$\angle OCM = \angle OEN' \text{ (как вдвое большие предыдущих)},$$

$$CM \parallel EN' \qquad \text{(теорема 308).}$$

Следовательно, прямая MN' пересечет линию центров в одном из центров подобия взаимно обратных окружностей (см. доказательство теоремы 402).

Легко видеть, что в случае, когда центр инверсии лежит вне обеих окружностей, точки M и N' лежат по одну сторону от прямой CE, а когда точка O лежит внутри обеих окружностей, то M и N' лежат по разные стороны от CE. Так что в первом случае мы имеем прямое подобие, а во втором — обратное (пусть читатель остановится на случае, когда точки O и C совпадают).

Таким образом, точка O является для наших окружностей и центром инверсии и центром гомотетии. Но при инверсии точке M соответствует M' и $N \ldots N'$, а при гомотетии точке M соответствует N' и $N \ldots M'$.

Определение 166. *Угол между прямой и окружностью есть угол между данной прямой и касательной к окружности в точке их пересечения; угол между двумя окружностями есть угол между касательными к ним в точке пересечения.*

Определение 167. Если мы говорим, что две пары прямых пересекаются под теми же углами, то это значит, что острый угол, образованный первой парой, равен острому углу, образованному второй парой (а следовательно, тупой угол равен тупому).

Пользуясь сделанными условиями, можно сказать, что две пересекающиеся окружности в обеих общих точках пересекаются под теми же углами (теоремы 173, 254).

Теорема 592. *Две окружности, проходящие через центр инверсии, пересекаются под теми же углами, что и обратные им прямые.*

Действительно, эти последние прямые параллельны касательным к данным окружностям в центре инверсии (теорема 587), откуда и следует теорема (определения 166 и 167, теорема 322).

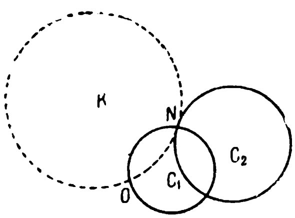
Замечание. Теорема остается в силе, если одну из окружностей заменить прямой, проходящей через O.

Теорема 593. *Две окружности пересекаются под теми же углами, что и фигуры, им обратные.*

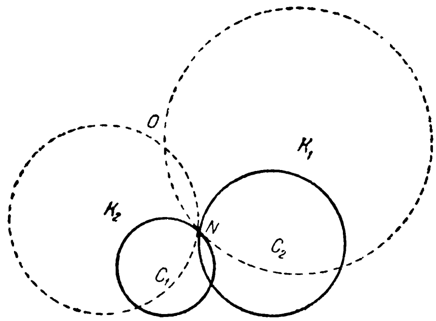
Случай, когда обе окружности проходят через центр инверсии, уже рассмотрен (теорема 592); поэтому начнем с допущения, что только одна из данных окружностей C_1 и C_2 (именно, первая) проходит через точку O (черт. 180). В точке N пересечения данных окружностей проведем к окружности C_2 касательную окружность K, проходящую в то же время через точку O [ее центр находится на пересечении прямой C_2N с перпендикуляром, восставленным в середине отрезка (ON). Что будет, если эти прямые окажутся параллельными?]. Так как окружности C_2 и K имеют в точке N общую касательную, то углы между C_1 и C_2 соответственно равны углам между C_1 и K, но эти последние равны углам между обратными прямыми (теорема 592). Но прямая, обратная для окружности K, будет касательной в точке N' к окружности, обратной для C_2 (теорема 590), а окружность C_1 преобразуется в прямую, пересекающую эту обратную окружность в точке N' (теорема 582). Таким образом, окружности C_1 и C_2 пересекаются под теми же углами, что и обратные им образы.

Пусть теперь ни одна из окружностей C_1 и C_2 не проходит через точку O (черт. 181); в точке N их пересечения проведем касательные к ним окружности K_1 и K_2, проходящие в то же время через точку O.

Легко видеть, что C_1 и C_2 пересекаются под теми же углами, что K_1 и K_2; но эти последние образуют те же углы, что и обратные им прямые (теорема 592); эти же прямые будут



Черт. 180



Черт. 181

касательными в точке N' к окружностям, обратным для C_1 и C_2 (теорема 590), так что они и дают углы между обратными фигурами. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Предоставляем читателю рассмотреть тот случай, когда одна из данных окружностей заменена прямой. Метод доказательства остается тем же самым.

З а м е ч а н и е. Изученная нами инверсия, таким образом, обладает следующими двумя основными свойствами: окружности, вообще говоря, преобразуются в окружности, и величины углов остаются неизменными.

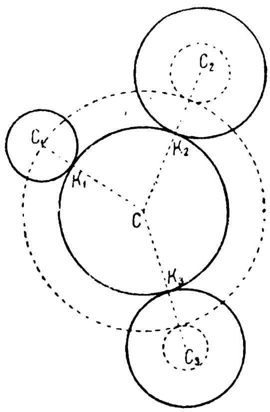
Одно из приложений инверсии заключается в том, что она дает нам хороший способ для решения некоторых задач на построение, позволяя сводить более трудные задачи к более простым. Укажем примеры такого применения инверсии.

З а д а ч а 1. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных окружностей C_1 и C_2.

Произведем инверсию с центром в A (степень ее можно выбрать произвольно, лишь бы только обратные фигуры уместились на чертеже). Данные окружности преобразуются в окружности E_1 и E_2. Строим общие касательные этих двух окружностей (теорема 403) и снова производим ту же самую инверсию. Указанные касательные преобразуются в искомые окружности. Задача вообще имеет 4 решения.

З а д а ч а 2 (задача Аполлония). Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

Пусть даны три окружности: $C_1(r_1)$, $C_2(r_2)$, $C_3(r_3)$ и пусть r_1 — наименьший из трех радиусов (черт. 182). Допустим, что задача решена и что окружность $C(r)$ касается внешним образом всех данных окружностей. Опишем из точки C окружность радиусом, равным $r+r_1$. Легко видеть, что она пройдет через точку C_1 и коснется окружностей $C_2(r_2-r_1)$ и $C_3(r_3-r_1)$.



Черт. 182

Обратно, имея окружность C $(r+r_1)$, мы сейчас же построим искомую $C(r)$; но построение $C(r+r_1)$ сводится к задаче первой, которая уже решена с помощью инверсии. Мы взяли случай внешнего касания ко всем трем данным окружностям; но можно искать окружность, которая касается двух данных внешним образом, а третьей — внутренним, и т. д. Вообще говоря, задача имеет 8 решений.

Переход в пространство трех измерений

От свойств инверсии в плоскости нетрудно перейти к свойствам этого преобразования в пространстве. Так, некоторые теоремы (именно 585 и 586) переносятся без всяких изменений; в остальных придется сделать следующую замену терминов:

окружность — шаровая поверхность,
прямая — плоскость.

Даже прежние чертежи пригодятся, если рассматривать их как сечения шаров известными плоскостями. Некоторых дополнений может потребовать только понятие об угле между двумя пересекающимися шаровыми поверхностями.

II. ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАВЕНСТВА НА ПОНЯТИИ ДВИЖЕНИЯ

В предыдущем изложении мы не пользовались движением как средством для доказательства, только иногда прибегали к „языку движения“, чтобы внести известную наглядность; но все такие вопросы в последующем изложении неизменно подвергались логической обработке. В частности, учение о геометрическом равенстве мы обосновали, не прибегая к понятию движения. Однако многие авторы пользуются движением для изложения этого учения. Поэтому целесообразно дать понятие и о таком пути.

Под *движением* в геометрии понимается не совсем то же самое, что в механике; для последней очень важен непрерывный переход движущегося тела через ряд промежуточных положений, который ведет его от начального положения к окончательному, причем этот переход происходит с течением времени. Между тем, эта сторона дела нас совершенно не интересует, когда мы пользуемся движением для доказательства равенства каких-либо фигур. С геометрической точки зрения *движение* является не чем иным, как *известным преобразованием одной фигуры в другую, преобразованием, обладающим вполне определенными свойствами.*

Став на такую точку зрения, мы вводим после изложения аксиом I и II группы и их следствий новое основное понятие: „движение". Все, что нам нужно знать о нем, выражено в аксиомах, которые будут сейчас перечислены. Заметим, что мы вовсе не стремились здесь дать систему аксиом, обладающую полной независимостью, а выбрали такую, которая наиболее простым путем ведет к цели. Заметим еще, что в этом приложении вводится особая нумерация аксиом и теорем.

Итак, будем основываться на следующих аксиомах:

I. *Движение есть преобразование, которое каждой точке пространства приводит в соответствие точку того же пространства.*

II. *Для каждого движения существует обратное движение.*

III. *Два последовательных движения заменяются одним движением.*

Таким образом движения образуют группу.

IV. *Если точки A, B, C с помощью некоторого движения преобразуются в точки A', B', C' и если C лежит между A и B, то C' лежит между A' и B'.*

Следующая аксиома показывает, чем мы можем располагать, чтобы выбрать вполне определенное движение.

V. *Существует одно и только одно движение, преобразующее данную точку в другую данную точку, определенный луч, исходящий из первой точки,— в определенный луч, исходящий из второй точки, и определенную полуплоскость, исходящую из прямой первого луча,— в определенную полуплоскость, исходящую из прямой второго луча.*

VI. *Существует движение, преобразующее отрезок (AB) в отрезок (BA).*

VII. *Существует движение, преобразующее угол (kh) в угол (hk).*

VIII. *Если при некотором движении вершина луча и сам луч преобразуются в самих себя, то каждая точка этого луча преобразуется в самое себя.*

Прежде всего на основании этих аксиом докажем некоторые другие свойства движения.

1. *Движение есть одно-однозначное преобразование.*

Положим, в противность этому, что различные точки A и B преобразуются обе в одну и ту же точку A'. Мы знаем, что имеется точка C, лежащая между A и B. Тогда соответствующая ей точка C' (I) должна лежать между A' и A' (IV), что невозможно.

Пусть теперь точка A преобразуется в две различные точки A' и B'; тогда обратное движение (II) приведет к противоречию с только что доказанным.

2. *Посредством движения преобразуются: а) отрезок в отрезок, б) прямая в прямую, в) луч в луч, г) плоскость в плоскость, д) полуплоскость в полуплоскость,* причем преобразованные образы определяются элементами, соответствующими тем, которые определяли данные образы.

а) Пусть дан отрезок (AB), и пусть A', B' суть те точки пространства, в которые преобразуются A и B (I). Тогда определение отрезка и аксиома IV доказывают пункт а.

б) Возьмем далее прямую AB, и пусть точки A, B преобразуются в точки A', B'. Так как последние различны (I), то они определяют прямую $A'B'$.

Пусть M есть какая-нибудь точка прямой AB, отличная от A и B, и пусть M' — точка, соответствующая ей при данном движении (I). Мы знаем, что точки A, B, M связаны отношением „между". В силу аксиомы IV таким соотношением связаны и точки A', B', M'. Но отношение „между" имеет место только для точек одной и той же прямой, так что точка M' принадлежит прямой $A'B'$, и следовательно, прямая AB преобразуется в прямую $A'B'$.

в) Если нам дан луч AB, то любая его точка M во всяком случае преобразуется в точку M' прямой $A'B'$ (пункт „б"). Если бы эта точка принадлежала не лучу $A'B'$, а противоположному, то A' лежала бы между B' и M'. Тогда обратное движение привело бы к заключению, что A лежит между B и M (IV), а это противоречит заданию.

г) Возьмем плоскость ABC; определяющие ее точки преобразуются в точки A', B', C', не лежащие на одной прямой, так как в противном случае обратное движение, в связи с пунктом в, привело бы к противоречию с заданием. Следовательно, можно говорить о плоскости $A'B'C'$.

Пусть теперь M есть любая точка плоскости ABC. Если она лежит на прямой AB, то соответствующая ей точка M' лежит на прямой $A'B'$ (пункт „б"), которая всеми своими точками принадлежит плоскости $A'B'C'$. То же самое можно утверждать о всех точках прямых BC и AC.

Рассмотрим далее случай, когда M не лежит на AB. Возьмем внутри отрезка (AB) какую-нибудь точку K. На основании постулата Паша прямая KM или пройдет через точку C или пересечет один из отрезков (BC) и (AC) во внутренней точке L. Прямая KL преобразуется в прямую $K'L'$, целиком принадлежащую плоскости $A'B'C'$, а так как M' должна лежать на $K'L'$ (пункт „б"), то точка M' будет лежать на плоскости $A'B'C'$.

д) Наконец, пусть нам дана полуплоскость $AB.C$ и какая-нибудь ее точка M. На основании пункта „г“ точка M' во всяком случае принадлежит плоскости $A'B'C'$.

Попробуем допустить, что M' лежит не в полуплоскости $A'B'.C'$, а в другой полуплоскости с тем же ребром $A'B'$. Тогда отрезок $(C'M')$ должен пересекать $A'B'$ и обратное движение, в связи с уже доказанным, привело бы к заключению, что отрезок (CM) пересекает AB, что противоречит заданию. Итак, точка M' принадлежит полуплоскости $A'B'.C'$.

3. ***Существует движение, при котором каждая точка пространства преобразуется в самое себя.***

Возьмем какое-нибудь движение (его существование вытекает из аксиомы V) и соединим его с обратным движением (II). Последовательность этих двух движений заменяется одним движением (III), которое обозначим через T_0. В результате двух указанных движений каждая точка пространства возвратится в первоначальное положение, так что T_0 и будет искомым.

Такое движение называется тождественным. Если при некотором движении точки данной фигуры преобразуются в самих себя, то говорят, что эта фигура остается в покое.

4. ***Если при некотором движении три точки, не лежащие на одной прямой, остаются в покое, то каждая точка пространства остается в покое.***

Действительно, пусть точки A, B, C остаются в покое. В таком случае при данном движении преобразуется (2):

точка A — в точку A, луч AB — в луч AB,
полуплоскость $AB.C$ — в полуплоскость $AB.C$.

Этим требованиям, очевидно, удовлетворяет движение T_0, но оно и будет единственно возможным (V).

Доказанной теоремой из наших движений устраняются „отражения“, т. е. такие преобразования, при которых некоторая плоскость остается в покое, а каждая точка пространства переходит в точку, симметричную с ней относительно указанной плоскости.

Изучив основные свойства движения, мы можем перейти к основной цели этого приложения: обосновать учение о геометрическом равенстве на понятии движения. В основной части книги „равенство отрезков“ и „равенство углов“ были введены в качестве основных понятий, и учение о равенстве было построено на основании аксиом XVI—XXIII. Теперь эти понятия надо определить с помощью движения. Далее легко видеть, что если утверждения указанных аксиом будут доказаны с помощью новых аксиом I—VIII, то поставленная здесь цель будет достигнута.

Начинаем с введения общего определения равенства.

Конгруэнтными (совместимо-равными) называются фигуры, преобразующиеся друг в друга посредством некоторого движения.

Такое определение, в связи с теоремой 4 и ее следствием, исключает на ближайшее время из рассмотрения фигуры отраженно-равные; но впоследствии, достаточно развив учение о равенстве, можно будет ввести понятие о симметрии относительно плоскости и заполнить этот пробел.

Переходим к доказательству утверждений аксиом XVI—XXIII.

Аксиома XVI вытекает из нового определения равенства.

Аксиома XVII утверждает, что отрезки:

$$(AB)=(AB) \text{ и } (AB)=(BA);$$

последнее потому, что мы условились считать отрезки (AB) и (BA) тождественными как совокупности точек.

Теорема 3 показывает, что существует движение, преобразующее отрезок (AB) в (AB), так что он конгруэнтен самому себе. Конгруэнтность (AB) и (BA) следует из аксиомы VI. Что касается формул $(kh)=(kh)$ и $(kh)=(hk)$, то они вытекают из теоремы 3 и аксиомы VII.

Далее, свойства взаимности (аксиома XVIII) и переносимости (аксиома XIX) непосредственно следуют из новых аксиом II и III. На очереди стоит аксиома XX, утверждающая возможность однозначно отложить отрезок на данном луче.

Пусть дан отрезок (AB) и луч ON. На основании новой аксиомы V существует движение T_1, которое преобразует

точку A — в точку O,
луч AB — в луч ON и

определенную полуплоскость с ребром AB—в определенную полуплоскость с ребром ON.

Произвольный выбор полуплоскости показывает, что, кроме движения T_1, существует еще бесконечное множество других, удовлетворяющих первым двум условиям. При движении T_1 точка B переходит в некоторую точку B' данного луча (2, п. „б"), так что

$$(OB')=(AB).$$

Возьмем какое-нибудь другое движение T_2, удовлетворяющее тем же двум условиям, что и T_1. При его посредстве B преобразуется в некоторую точку B'' луча ON, так что

$$(OB'')=(AB).$$

Рассмотрим теперь третье движение T_3, которое равносильно последовательному производству двух следующих движений: обратного для T_1 и движения T_2 (II, III). Вспоминая сказанное выше, нетрудно придти к выводу, что T_3 преобразует

точку O — в точку O,
луч ON — в луч ON,
точку B' — в точку B''

(преобразования полуплоскостей здесь интереса не представляют). Но теперь новая аксиома VIII показывает, что точка B'' совпадает с точкой B', и однозначность откладывания отрезка доказана.

Условия теоремы XXI говорят, что существует движение, преобразующее точки A и C в точки A', C'. Тогда и точка B переходит в такую точку B'', что C' лежит между A' и B'' (I, IV). Следовательно, точки B'' и B' принадлежат одному и тому же лучу с вершиной в C'; а так как, кроме того:

$$(CB)=(C'B') \qquad \text{(по данному)},$$
$$(CB)=(C'B'') \quad \text{(по определению равенства)},$$

то уже доказанное утверждение аксиомы XX показывает, что B'' совпадет с B'.

Отсюда вытекает, что вышеуказанное движение переводит точки A, B в точки A', B', так что

$$(AB)=(A'B').$$

Утверждение аксиомы XXII вытекает из новой аксиомы V и нашего определения конгруэнтности; единственность движения устанавливает единственность луча h_1.

Наконец, переходим к аксиоме XXIII. На основании новой аксиомы V берем движение T, которое преобразует

точку A — в точку A',
полупрямую AB — в полупрямую $A'B'$,
полуплоскость $AB.C$ — в полуплоскость $A'B'.C'$.

Тогда уже доказанные утверждения аксиом XX и XXII и условия аксиомы XXIII позволяют заключить, что точка B перейдет в B', луч AC — в луч $A'C'$, точка C — в C'. Отсюда вытекает, что движение T преобразует $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$ (2, а), а это доказывает даже больше, чем требуется аксиомой XXIII.

Итак, утверждения всех прежних аксиом равенства выведены из новых аксиом движения, и можно считать, что задача обоснования геометрического равенства на понятии движения в основном разрешена.

III. УПРАЖНЕНИЯ

Собственно говоря, в систематическом курсе геометрии было бы возможно совсем обойтись без задач или упражнений, так как для этой цели имеются вполне подходящие сборники. Но, принимая во внимание, что целью автора было дать возможно строгое построение геометрии, является желательным усилить усвоение этой стороны дела путем самостоятельной работы читателя. Имея сказанное в виду, я счел целесообразным приложить к курсу небольшое число упражнений, причем старался выбрать наиболее интересные вопросы и притом такие, которые наилучшим образом способствовали бы приобретению навыков в строгом доказательстве геометрических предложений.

В течение курса неоднократно предлагалось, в виде упражнения, доказать то или другое предложение. Подобный же характер в общем носят и следующие вопросы.

1. В каком многоугольнике число диагоналей равно числу сторон?

2. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, будет меньше по крайней мере одной из двух остальных сторон. Когда он будет меньше обеих?

3. Какие значения должен иметь угол при вершине равнобедренного треугольника для того, чтобы его сторона была меньше, равна или больше основания?

4. Смотря по тому, будет ли медиана треугольника больше, равна или меньше половины соответствующей стороны, угол при выбранной вершине будет острым, прямым или тупым, и обратно.

5. Построить треугольник, если указаны середины его сторон.

6. Трансверсаль треугольника, проходящая через середину медианы, делится этой точкой в отношении 3 : 1.

7. Найти геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух данных прямых есть величина постоянная.

8. Сумма расстояний какой-нибудь внутренней точки равностороннего треугольника от его сторон есть величина постоянная (см. задачу № 7).

9. Биссектриса и высота треугольника, проведенные из одной и той же вершины, образуют угол, равный полуразности двух остальных углов треугольника.

10. Три окружности, имеющие своими диаметрами стороны треугольника, попарно пересекаются на сторонах этого треугольника.

11. Высоты треугольника служат биссектрисами углов другого треугольника, образованного их основаниями (см. задачу № 10).

12. Точка пересечения высот треугольника делит каждую высоту на части, произведение которых есть для данного треугольника величина постоянная (см. задачу № 10).

13. Через точку, данную внутри угла, провести такую прямую, чтобы отрезок ее между сторонами угла делился пополам в данной точке.

14. В прямоугольном треугольнике диаметр вписанного круга равен разности между суммой катетов и гипотенузой.

15. Соединив середины смежных сторон любого четыре-

угольника (плоского или неплоского), получим параллелограмм. В каком случае получится прямоугольник?

16. Параллелограммы, вписанные в прямоугольник так, что их стороны параллельны его диагоналям, имеют один и тот же периметр.

17. Равноделящие углов параллелограмма в пересечении друг с другом образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам данного параллелограмма.

18. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

19. Длина медианы, проведенной из вершины A треугольника ABC, равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \text{ (см. задачу № 18).}$$

20. Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолженных ее боков лежат на одной прямой.

21. Если две хорды, пересекаясь, обе делятся пополам в точке пересечения, то эти хорды—диаметры.

22. Найти геометрическое место середины хорд, проходящих через точку, данную внутри окружности.

23. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся всегда в данном отношении (окружность Аполлония).

24. Проведем к окружности две касательные в конце какого-нибудь диаметра. Тогда отрезок любой касательной, заключенный между двумя данными, виден из центра под прямым углом.

25. Если дано несколько прямых, пересекающихся попарно, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.

26. Найти геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от двух данных точек, лежащих вне этой плоскости.

27. Нормальное сечение двугранного угла есть наименьший из углов, образованных одной из его сторон с прямыми другой грани.

28. Можно ли в сечении острого двугранного угла плоскостью получить прямой угол?

29. Существует одна и только одна прямая, пересекающая две данные скрещивающиеся прямые и параллельная третьей прямой, скрещивающейся с двумя первыми.

30. Найти геометрическое место середин отрезков, ограниченных двумя данными скрещивающимися прямыми.

31. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости.

32. Плоскости, делящие пополам двугранные углы трехгранного угла, пересекаются по одной и той же прямой.

33. Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов трехгранного угла и перпендикулярные к соответствующим граням, пересекаются по одной и той же прямой.

34. Перпендикуляры, восставленные к граням тетраэдра в центрах описанных кругов, пересекаются в одной и той же точке.

35. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке, в которой они делятся пополам.

36. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1.

37. Точки задач № 35 и 36 совпадают (см. задачу № 6).

38. Пересечь куб плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

39. Сумма плоских углов выпуклого многогранника равна $4d(v-2)$, где v — число его вершин (вспомнить теорему Эйлера).

40. Середины ребер правильного тетраэдра суть вершины правильного октаэдра.

41. Определить в треугольнике такую точку, чтобы, соединив ее с вершинами, разбить треугольник на три равновеликие части.

42. Если прямоугольник равновелик квадрату, то периметр прямоугольника больше периметра квадрата.

43. Превратить данный треугольник в другой равновеликий с ним, у которого одна сторона и прилежащий к ней угол имели бы заданные значения.

44. Превратить треугольник в равновеликий с ним ромб, сторона которого имела бы заданную длину.

45. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

46. Разделить данный четыреугольник на две равновеликие части с помощью отрезка, исходящего из вершины.

47. Приближенно принималось, что площадь равностороннего треугольника со стороною равной a равна:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)\cdot a^2;$$

какую ошибку делали при этом?

48. Превратить правильный шестиугольник в равновеликий ему правильный восьмиугольник.

49. С помощью каких равных правильных многоугольников можно заполнить плоскость?

50. Построить треугольник по трем высотам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложения

Редактор *Б. И. Крельштейн* Технический редактор *М. Е. Зендель*
Корректор *А. А. Морозова*

Подписано к печати 16/VII 1949 г. М 17078 Печ. л. 20 Уч.-изд. л. 20,09
Тираж 25000 экз. Зак. 1314

Тип. № 2 Управления издательств и полиграфии Исполкома Ленгорсовета

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
47	3 сверху	$ABCDE,\ A_1B_1C_1D_1E_1$	$ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$
74	1 снизу	$\angle A_1O_1B_1$	$\angle A_1O_1B_2$
76	15 сверху	построение. Согласно	построение согласно
95	3 снизу	$\angle AOB > d$	$\angle AOB_1 > d$
141	7 и 12 снизу	e	l
185	9 сверху	A_1	A_1'
185	17 сверху	$(A_1'B')$	$(A_1'B_1')$
190	25 сверху	фигуру F	фигуру F_1
191	8 снизу	$\frac{(O'M')}{(O'M)}$	$\frac{(O'M_1')}{(O'M)}$
211	10 снизу	OKC	OKC_1
215	12 снизу	$a_{10} = r \cdot \sqrt{\frac{5-1}{2}}.$	$a_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$
223	13 снизу	$O_2(r)$	$O_2(r_1)$
284	7 сверху	R_1Q_1QC	R_1Q_1QR
296	8 снизу	$..v_n - \frac{1}{3} h_n \cdot \sigma_n.$	$...;\ v_n = \frac{1}{3} h_n \cdot \sigma_n.$
300	17 сверху	M	M'

Богомолов—геометрия. Заказ 1314.

7р. 60к.