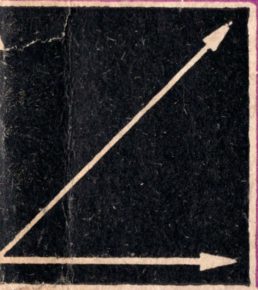
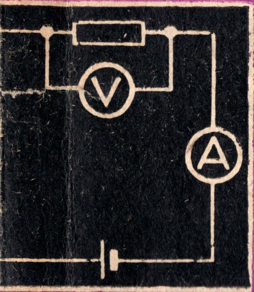


ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ

≈



В. П. ДЕМКОВИЧ,

Н. Я. ПРАЙСМАН

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

Москва 1967

Предисловие В. М. Брадиса

Ознакомившись по просьбе В. П. Демковича и Н. Я. Прайсмана с их трудом «Приближенные вычисления в школьном курсе физики», я с большим удовлетворением убедился, что разработанные мною еще в двадцатых годах текущего века правила рационализации школьных вычислений, завоевавшие себе к настоящему времени прочное место в курсе математики средней школы, получают все большее признание также среди методистов и учителей физики.

В настоящее время, как и в прошлом, часто звучат настойчивые требования о более значительном сближении школьных курсов математики и физики. Уверен, что настоящая книга двух авторов, из которых один — физик, другой — математик, будет способствовать этому сближению с большой выгодой для работы нашей средней школы.

$\frac{6-5}{165-66}$

От авторов

В политехнической подготовке учащихся немаловажную роль играет повышение вычислительной культуры, в частности приобретение прочных навыков в вычислениях с приближенными числами.

Несмотря на введение элементов приближенных вычислений в курс математики, большинство расчетов с приближенными числами в физических задачах учащиеся нередко выполняют по правилам точных вычислений.

В преподавании физики приближенные вычисления до сих пор остаются делом новым. Объясняется это, в частности, тем, что многие учителя физики недостаточно знакомы с приближенными вычислениями.

Данное пособие представляет собой попытку сообщить учителю физики минимум сведений о приближенных вычислениях и методике их применения.

В пособии, помимо теоретического материала, помещены упражнения для его практического закрепления. На все упражнения даны ответы или решения.

Методические рекомендации авторов книги были проверены при изучении темы «Приближенные вычисления» на уроках математики в ряде школ г. Кировограда, а также при решении задач и выполнении лабораторных работ по физике в школах Ленинского района Ленинграда.

Авторы выражают свою глубокую признательность В. М. Брадису, В. У. Грибанову, Л. Ф. Пичурину и Б. С. Зворыкину за ряд принципиальных замечаний и советов, направленных на улучшение книги.

Все замечания по пособию авторы просят направлять редакции физики издательства «Просвещение»: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

ВВЕДЕНИЕ

Основу техники вычислений составляют правила арифметики, изучаемые школьниками на протяжении шести лет. С более сложными вычислениями учащиеся знакомятся в старших классах.

Однако нередки случаи нерациональных и даже неверных вычислений, выполняемых учащимися при решении задач и проведении лабораторных работ по физике.

Приведем пример. Учащиеся решали задачу: «Вычислить вес стального бруса (прямоугольного параллелепипеда), размеры которого 30,6; 23,7 и 16,4 *см*. Удельный вес стали (по таблице) равен 7,80 *Г/см*^{3}». Вычисления при этом выполняли так:

$$30{,}6\ см \cdot 23{,}7\ см = 725{,}22\ см^2;$$

$$725{,}22\ см^2 \cdot 16{,}4\ см = 11893{,}608\ см^3;$$

$$7{,}80\ Г/см^3 \cdot 11893{,}608\ см^3 = 92770{,}1424\ Г.$$

Эти вычисления имеют два существенных недостатка. Первый из них состоит в том, что вычисления получились очень громоздкими, отняли у учащихся много усилий и времени — около 12 минут. Но, может быть, имело смысл выполнять столь сложные и утомительные вычисления для получения ответа с большой точностью? Анализ решения задачи показывает, что это не так. Второй недостаток как раз и состоит в том, что вычисления были проведены без всякого учета реальной точности заданных чисел. При столь неточных исходных данных невозможно, да и вряд ли нужно, определять вес предмета в 90 *кГ* с точностью до десятитысячных долей грамма.

Как же выполнять вычисления в подобных задачах? По-видимому, результаты вычислений следует округлять. Однако неясно, как их округлять, сколько цифр сохранять в результатах; следует ли при этом выполнять округление и в промежуточных действиях, чтобы без потери точности сделать все вычисления более простыми.

Ответ на эти вопросы дают правила приближенных вычислений, в частности правила подсчета цифр.

Основная заслуга в разработке элементарного метода приближенных вычислений, получившего название *метода подсчета цифр,* принадлежит советскому методисту, проф. В. М. Брадису, который на основании идей акад. А. Н. Крылова выработал и обосновал систему правил, обеспечивающих получение результата с вполне достаточной точностью и притом с минимальной затратой времени.

Применив при решении рассмотренной задачи правило умножения приближенных чисел, учащиеся выполнили те же вычисления значительно проще, причем ответ был получен с разумной точностью, по образному выражению И. Н. Кавуна, без «нелепых хвостов ненужных цифр»[1]:

$$30{,}6\ \textit{см}\cdot 23{,}7\ \textit{см}\approx 725\ \textit{см}^2;$$
$$725\ \textit{см}^2\cdot 16{,}4\ \textit{см}\approx 11\,900\ \textit{см}^3;$$
$$7{,}80\ \textit{Г}/\textit{см}^3\cdot 11\,900\ \textit{см}^3\approx 92\,800\ \textit{Г}=92{,}8\ \textit{кГ}.$$

На выполнение вычислений потребовалось значительно меньше времени — около 5 минут. Экономия времени, достигнутая путем рационализации вычислений, позволила при решении задачи больше внимания уделить вопросам физики.

«Вычисляя с достаточной, но не излишней точностью, можно значительно повысить производительность труда. Недопустимо вычислять с большим числом знаков, если исходные данные этого не позволяют или существо задачи этого не требует. Для ускорения вычислений ненужные цифры числа необходимо отбрасывать (с учетом правил округления), помня, что один лишний знак в

---

[1] И. Н. Кавун — видный советский методист-математик, профессор Ленинградского педагогического института им. А. И. Герцена (умер в 1935 г.).

компонентах при умножении и делении на настольных малых машинах снижает производительность труда на 15—30%».

Эти слова принадлежат доктору технических наук Е. Г. Ларченко и касаются вычислений в практической геодезии [1].

Применение правил приближенных вычислений в условиях школы чрезвычайно важно и по другим, чисто психологическим соображениям. Известно, что учащиеся в громоздких вычислениях допускают много ошибок и неохотно занимаются вычислительной работой. Дело усложняется еще и тем, что отсутствие критериев для оценки точности результата вычислений либо способствует неразумной погоне за каждым лишним десятичным знаком в ответе, либо вынуждает к произвольным округлениям. В обоих случаях возникает неуверенность в правильности полученного результата.

Таким образом, повышение культуры приближенных вычислений учащихся имеет не только учебное, но и воспитательное значение.

Значение приближенных вычислений в преподавании физики не ограничивается рационализацией вычислительной работы при решении задач. Не меньшее значение имеют приближенные вычисления при выполнении лабораторных и практических работ, о чем речь пойдет в дальнейшем.

---

[1] См.: Е. Г. Ларченко. Пятизначеные таблицы для решения геодезических задач. Госгеолтехиздат, 1963, стр. 6.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

При решении задач и выполнении лабораторных работ по физике мы постоянно сталкиваемся с различными значениями физических величин, полученными в результате измерения, счета или найденными в таблицах. В большинстве случаев числовые данные в физических задачах — числа приближенные. В условиях задач могут встретиться и точные числа, например результаты счета небольшого числа предметов, некоторые физические константы и др. В сомнительных случаях в учебниках и задачниках даны указания, являются ли данные числа точными или приближенными. Для обозначения приближенного числа употребляют знак приближенного равенства $\approx$; читают так: «приближенно равно» (не следует читать: «приблизительно равно»). Для обозначения точных чисел используют слово «точно», которое пишут в скобках сразу после числа, например: 3,2968 (точно). Чаще никаких обозначений не вводят и характер чисел определяют по смыслу.

Выяснение характера числовых данных — важный подготовительный этап при решении любой задачи. Проводимые ниже указания могут помочь в распознавании точных и приближенных чисел.

К *точным числам* относятся:

1. Значения ряда переводных множителей перехода от одних единиц измерения к другим.

1 *м*=1000 *мм*; 1 *ч*=3600 *сек*; 1 *дж*=10^7 *эрг* и т. п. Многие переводные множители измерены и вычислены со столь высокой (метрологической) точностью, что практически их относят сейчас к точным числам.

Однако если значение переводного множителя округлено, то оно становится числом приближенным, на-

пример: 1 *кал*=4,1868 *дж* (точно)$\approx$4,2 *дж* или 1 *кГ*=
=9,80665 *н* (точно)$\approx$9,8 *н*.

2. Масштабные множители. Если, например, известно, что масштаб равен 1 : 10 000, то эти числа — точные. Так же если указано, что в 1 *см* — 40 *км*, то числа 1 и 40 — точные.

3. Тарифы и цены, встречающиеся при решении физических задач. Например, стоимость одного киловатт-часа электроэнергии — 4 коп. — число точное.

4. Условные значения величин.

Примеры:

абсолютный нуль температуры	—273,15 °С;
нормальное атмосферное давление	760 *мм рт. ст.*;
теплота сгорания условного топлива	7000 *ккал/кг*;
потенциал Земли	0;
показатель преломления вакуума	1.

5. Коэффициенты и показатели степени, встречающиеся в физических и математических формулах:

$$s=\frac{gt^2}{2}; \quad \eta=\frac{A_п}{A}\cdot 100\%; \quad V=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ и т.п.}$$

6. Результаты счета предметов (но не всегда). Прежде всего, точным числом является результат счета сравнительно небольшого количества предметов. Так, количество аккумуляторов в батарее, количество ламп в радиоприемнике, число зубцов на фрезе — числа точные. Точным числом может выражаться и результат счета значительного количества объектов, например количество бутылок молока, выпущенных заводом и подсчитанных фотоэлектрическим счетчиком. Подробнее о признаках точности или приближенности результатов счета речь будет идти ниже.

7. Заданные значения величин. Отметим, что иногда в интересах физики числа, заданные в условиях задач и являющиеся по сути числами приближенными, предлагается считать условно точными. В ряде случаев это помогает уяснить функциональную зависимость между величинами, обратить внимание на физическую сторону задачи и т. п. Например, в задаче «Найти периоды колебаний маятников длиной 1 и 4 *м*» числа 1 и 4 можно считать точными.

К *приближенным числам* относятся:

1. Некоторые математические величины: корни и логарифмы чисел; значения тригонометрических функций, а также отношение длины окружности к диаметру — число π; основание натуральных логарифмов — число e и некоторые другие.

2. Результаты измерений.

Некоторые основные константы: скорость света в вакууме, гравитационная постоянная, ускорение силы тяжести, заряд и масса электрона и др.

Табличные значения физических величин: плотности веществ, коэффициенты трения, модули упругости, температуры плавления и кипения, диэлектрические проницаемости и др.

Результаты измерений, выполненных на заводах, фабриках, в колхозах, на транспорте, в учебных заведениях, в быту и пр.

Числа, полученные при измерениях на графиках, диаграммах и т. п.

3. Проектные данные также являются числами приближенными, так как их задают с некоторыми отклонениями, которые нормируются ГОСТами. Например, по стандарту размеры кирпича: длина — 250 *мм*$\pm$6 *мм*; ширина — 120 *мм*$\pm$4 *мм*; толщина — 65 *мм*$\pm$3 *мм*.

К этой же группе приближенных чисел относятся размеры, взятые с чертежа.

4. Результаты счета предметов. Как уже отмечалось, результат счета предметов может быть числом и точным и приближенным. Как же узнать, является ли результат счета точным числом или приближенным?

Достаточным признаком приближенности результата счета является наличие разных ответов при повторных подсчетах. Например, подсчитывая несколько раз количество деревьев на определенном участке леса или сада, мы каждый раз получаем иной результат. Объясняется это несколькими причинами: неудобством счета, неопределенностью границ участка и т. п.

Приближенным числом выражается число жителей большого города. Это связано, прежде всего, с непрерывной изменяемостью численности населения. Яркий образ, помогающий учащимся уяснить приближенный характер результата счета количества жителей, приводит проф. И. К. Андронов в книге «Арифметика дробных чисел и основных величин»[1].

«Представим себе, что каждый житель соединен с воображаемым счетчиком так, что каждый родившийся автоматически включается в счетчик, каждый умерший выключается; поднявшийся над городом или выбывший за городскую черту мгновенно выключается, а спустившийся на землю города или прибывший в городскую черту моментально включается в этот счетчик. Что будет происходить со счетчиком?

В оконцах счетчика появляются цифры первых 7 разрядов отсчитанного числа.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
VII	VI	V	IV	III	II	I

Что мы будем наблюдать на таком воображаемом счетчике, отражающем численность населения большого города в данный момент?

В оконцах VII и VI цифры не изменяются.

В оконце V цифры медленно изменяются.

В оконце IV цифры меняются быстро.

В конце III цифры меняются так быстро, что их трудно рассмотреть.

В оконцах II и I ничего разобрать нельзя, так как цифры меняются с огромной скоростью».

Как видим, уже цифра тысяч (IV оконце) может несколько измениться, пока мы производим запись числа. Поэтому число жителей большого города обычно записывают с точностью до тысяч. Например, количество жителей Москвы в 1965 году составляло 6427 тыс.[2]. Последняя цифра этого числа — сомнительная.

Приведем пример приближенного подсчета из курса физики.

В лабораторной работе «Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости» нужно подсчитать

---

[1] И. К. Андронов. Арифметика дробных чисел и основных величин. Учпедгиз, 1955, стр. 150—151.

[2] См.: Малый атлас мира. Главное управление геодезии и картографии Государственного геологического комитета СССР. М., 1965.

число капель, падающих из конца бюретки. Подсчет выполняют трое учащихся, причем за одно и то же время они получают различные результаты, например:

1-й подсчет — 114 капель;
2-й подсчет — 120 капель;
3-й подсчет — 105 капель.

Для дальнейших вычислений берут среднее арифметическое трех результатов:

$$\frac{114+120+105}{3}=113.$$

Результат счета предметов является числом приближенным и в тех случаях, когда подсчет проводят косвенным путем. Так, количество рыбы в данном водоеме не может быть определено в результате непосредственного подсчета. Однако существует способ косвенного подсчета. В данный водоем выпускают, например, 100 меченых рыб. Через некоторое время определяют количество меченых рыб в улове. Допустим, что на 50 пойманных рыб оказалось 3 меченых. Запас рыбы в пруду мы находим из пропорции $x:50=100:3$, откуда $x\approx1700$ рыб. При повторном подсчете количество рыб в пруду может оказаться несколько иным. Ясно, что число 1700 — приближенное.

Приближенными числами являются также результаты косвенного подсчета количества молекул, ионов и других частиц в заданном объеме.

5. Приближенные числа появляются также при округлении чисел и при различных вычислениях с точными и приближенными числами. Об этом речь пойдет ниже.

М е т о д и ч е с к и е з а м е ч а н и я. С понятиями точного и приближенного числа учащиеся подробно знакомятся на уроках арифметики. Однако среди примеров точных и приближенных чисел, рассматриваемых на уроках математики, сравнительно мало таких, которые непосредственно касаются физики.

Учителю физики следует выработать у учащихся правильное представление о приближенном числе применительно к материалу курса физики.

Учащиеся должны прочно усвоить способы определения характера числового значения физической величины. Дело в том, что в тех случаях, когда все значения величин в задаче являются числами точными, задача решается по правилам точных вычислений. В тех же случаях, когда среди заданных чисел имеются приближенные, задача решается по правилам приближенных вычислений, то есть с применением правил подсчета цифр.

Упражнения

1. Указать, какие из приведенных чисел — точные, какие — приближенные:

1) плотность воды (4 °C) . . . . 1 *г/см*^{3};
2) скорость звука (0 °C) . . . . 332 *м/сек*;
3) удельная теплоемкость воздуха . . . . . 1,0 *кдж/кг·град*;
4) точка кипения воды . . . . 100 °C;
5) число Авогадро . . . . 6,02·10^{26}*кмоль*$^{-1}$;
6) атомная масса кислорода . . . . 16.

2. Найти точные и приближенные числа в условиях следующих задач:

1) В зубчатой передаче у ведущего колеса 10 зубцов, а у ведомого — 40. Сколько оборотов сделает ведомое колесо за время, в течение которого ведущее колесо сделает 1 оборот?

2) У паровой машины бронзовый золотник, длина и ширина которого соответственно 200 и 120 *мм*, испытывает давление 120 *ат*. Найти силу, необходимую для перемещения золотника по чугунной поверхности цилиндра. Коэффициент трения 0,10.

3) Определить сопротивление нити накала электрической лампы по следующим маркировочным данным: «220 *в*, 60 *вт*».

3. Какие ответы получим при решении следующих задач — точные или приближенные — и почему?

1) Какова скорость свободно падающего тела в конце 15-й секунды, считая промежуток времени указанным точно?

2) Какова окружная скорость шкива, если его диаметр 300 *мм*, а угловая скорость 10 *об/сек*? Данные считать точными.

3) Определить величину силы F (рис. 1). Масштаб: 1 *см* — 5 *кГ*.

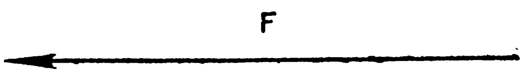


Рис. 1.

4) Две силы по 1 *кГ* (точно) каждая действуют на тело по взаимно перпендикулярным направлениям. Найти равнодействующую.

5) Определить коэффициент трения покоя для тела, находящегося на наклонной плоскости, если тело начинает равномерно скользить по наклону при $\operatorname{tg}\alpha=0{,}675$, где α — угол наклона плоскости,

§ 2. ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округлением числа называют уменьшение количества цифр числа путем отбрасывания одной или нескольких последних цифр. При округлении приближенного числа результат, естественно, тоже получается приближенным. При округлении точных чисел в подавляющем большинстве случаев получается приближенное число. Исключение составляет случай, когда отбрасывают один или несколько нулей в конце десятичной дроби, например 45,700=45,7.

Существует три способа округления: округление с избытком, округление с недостатком и округление с поправкой.

При округлении с избытком цифру последнего справа разряда, сохраняемого в числе, всегда увеличивают на единицу; например, $67{,}48 \approx 67{,}5$ или $3{,}521 \approx 3{,}53$ и т. д.

В следующих примерах округление числовых значений может быть по смыслу задачи выполнено только с избытком.

1) При подготовке «опыта Торричелли» было подсчитано, что для заполнения трубки необходимо иметь 24 *см*³ ртути. Это число можно округлить до 30 *см*³, но не до 20 *см*³, так как в последнем случае трубка не будет заполнена ртутью полностью и опыт не получится.

2) При подсчете первой космической скорости полученный результат можно округлять только с избытком, так как превышение скорости изменит лишь форму орбиты спутника (вместо окружности получится эллипс), а занижение скорости приведет к тому, что спутник не выйдет на орбиту и вернется на Землю.

При округлении с недостатком цифра последнего разряда, сохраняемого в числе, всегда остается без изменения; например, $67{,}48 \approx 67{,}4$ или $3{,}521 \approx 3{,}52$ и т. д.

Примеры округления с недостатком:

1) При расчете поршня цилиндра значение диаметра следует округлять с недостатком, так как при округлении с избытком поршень может не войти в цилиндр.

2) Напряжение в электрической сети 127 *в* часто округляют до 120 *в*. Округление с недостатком производят потому, что понижение напряжения — явление более вероятное, вследствие перегрузки сети и падения напряжения на подводящих проводах.

Округление с избытком или недостатком применяют сравнительно редко. В большинстве случаев для уменьшения погрешности при округлении применяют основное правило округления — *округление с поправкой.*

Если первая отброшенная цифра равна 5 или больше 5, то последнюю из сохраняемых цифр увеличивают на единицу; если первая отброшенная цифра меньше 5, то последнюю из сохраняемых цифр оставляют без изменения [1].

Замечание. Выполняя округление целых чисел, отброшенные цифры заменяют нулями. Как правило, округленные целые числа записывают с помощью множителя 10^n, например, $264\,213 \approx 264\,000 = 2{,}64 \cdot 10^5$.

В процессе преподавания физики наиболее частыми случаями округления с поправкой являются:

а) Округление чисел, взятых из математических и физических таблиц, в которых эти числа даны с очень высокой точностью.

Примеры: $\sqrt{2} = 1{,}4142135 \approx 1{,}41$;
$\sin 60° = 0{,}8660254 \approx 0{,}87$.

Теплота сгорания бензина по справочнику 11 250 *ккал/кг*, а в учебнике физики — 11 000 *ккал/кг.*

Значение удельной теплоты плавления льда 79,77 *ккал/кг* округлено в учебниках до 80 *ккал/кг.*

Известное значение температуры 4° С, при которой вода обладает максимальной плотностью, является округленным значением числа 3,98° С.

б) Округление переводных множителей для единиц измерения (некоторые из них — числа точные, а некоторые — приближенные с высокой точностью).

Примеры: 1 *кГм* = 9,80665 *дж* (точно) ≈ 9,8 *дж*;
1 *л. с.* = 735,499 *вт* ≈ 735 *вт.*

Как видим, во всех приведенных примерах выполнено округление с поправкой.

в) Рассмотрим еще один пример округления чисел. В разделе «Строение атома» рассматривают массовое число, которое является округленным значением атомного веса элемента.

---

[1] Правило четной цифры при округлении в настоящее время не применяется.

Примеры:

Элементы	Атомный вес	Массовое число
Цинк	65,38	65
Стронций	87,63	88
Золото	197,0	197

Как видим, при определении массового числа выполняют округление с поправкой (в последнем случае — с нулевой погрешностью).

В дальнейшем, говоря об округлении чисел, мы обычно и будем иметь в виду округление с поправкой.

Методические замечания. С вопросом об округлении чисел учащиеся впервые знакомятся в V классе на уроках арифметики. Наиболее сложным для них является случай округления целых чисел. Дело в том, что, округляя число, например, до тысяч, учащиеся часто забывают заменять последние три цифры нулями, что является грубой ошибкой.

На уроках физики начиная с VI класса следует постепенно приучать учащихся к записи округленных целых чисел при помощи множителя 10^n.

Обратим внимание еще на один интересный случай округления. Иногда округление производят с избытком до разряда, в котором стоит цифра 9. Например, $2{,}96 \approx 3{,}0$. В числе может быть несколько девяток, например, скорость света в вакууме равна 299 793 *км/сек*. При округлении до сотен тысяч получаем 300 000 *км/сек*. Еще один пример:

$\sin 87° = 0{,}9986 \approx 1{,}00$ (при округлении до сотых).

Рассмотренные случаи округления обычно вызывают у учащихся затруднения, которые можно преодолеть рассуждая, например, так: округление числа до сотых в последнем примере означает увеличение числа 0,99 на одну сотую, что и приводит к результату 1,00.

Упражнения

4. Почему нужно округлить следующие числа и как: с избытком, недостатком или с поправкой?

1) Показание бытового электросчетчика — 0342,9 *квт · ч.*

2) Подсчитали, что электропроводку нужно выполнить медным проводом сечением 1,76 *мм*^{2},

3) Расчет показал, что в качестве защитного сопротивления нужно использовать лампу мощностью 65 *вт.*

4) В сеть нужно включить предохранитель на 8 *а*

5. Как округлены следующие числа: с избытком, недостатком или с поправкой?

1) Ускорение силы тяжести 9,8 *м/сек*^{2}$\approx$10 *м/сек*^{2}.

2) 1 *л. с.*=735,944 *вт*$\approx$736 *вт.*

3) Морская миля=1,852 *км*$\approx$1,8 *км.*

4) Экваториальный радиус Земли равен 6380 *км*$\approx$6400 *км*=$=6{,}4\cdot10^3$ *км.*

5) Скорость звука в воздухе (0° C) 331,63 *м/сек*$\approx$332 *м/сек.*

6) Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}854304\cdot10^{-12}$ *ф/м*$\approx$ $\approx 8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м.*

7) Магнитная постоянная $\mu_0=1{,}256637\cdot10^{-6}$ *гн/м*$\approx1{,}26\cdot10^{-6}$ *гн/м.*

6. Округлить с поправкой следующие числа:

1) до единиц: плотность урана 19,1 *г/см*^{3}; удельную теплоту плавления свинца 5,9 *кал/кг*;

2) до десятков: критическую температуру воды 374° С; точку плавления свинца 327° С;

3) до сотен: теплоту сгорания дров 2550 *ккал/кг*; число Фарадея 96 496 *к/г·экв*;

4) до тысяч: скорость света в вакууме 299 793 *км/сек;*

5) до десятых: коэффициент трения дерева по земле 0,71; показатель преломления стекла: а) легкий крон 1,57, б) тяжелый флинт 1,80; удельное сопротивление ртути 0,958 $\frac{ом\cdot мм^2}{м}$;

6) до сотых долей: плотность ртути (0° С) 13,5955 *г/см*^{3}; число Авогадро $6{,}02322\cdot10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$.

§ 3. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ. ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ЧИСЛА. ПРИНЦИП КРЫЛОВА — БРАДИСА.

Приближенные значения величин, полученные в процессе счета, измерения или вычисления, могут быть найдены с различной точностью.

Количественной характеристикой точности обычно является указание погрешности приближенного числа.

Рассмотрим прежде всего понятие об абсолютной погрешности.

Абсолютной погрешностью приближенного числа называется разность между точным значением числа x и его приближенным значением a.

При $a<x$ абсолютная погрешность $x—a$ положительна и при $a>x$ — отрицательна.

В большинстве случаев точное значение числа x бывает неизвестно. Поэтому чаще пользуются понятием *границы абсолютной погрешности*, удовлетворяющей неравенству:

$$|x-a| \leqslant \Delta a.$$

Пример. Число 13,6 получено округлением с поправкой. Точное значение числа неизвестно, однако совершенно очевидно, что абсолютная погрешность не превышает 0,05 (иначе не было бы округления с поправкой). Следовательно, границей абсолютной погрешности можно считать число 0,05. Записывают это так: 13,6(±0,05).

Скобки, в которых заключают указанные границы абсолютной погрешности, часто опускают, так что запись 13,6±0,05 означает то же самое.

В этих записях двойной знак ± означает, что отклонение приближенного числа от точного возможно в обе стороны.

В таблицах числовые значения приведены без указания погрешности, но так как эти числа округлены с поправкой, то граница абсолютной погрешности каждого табличного значения равна половине единицы последнего разряда.

Примеры. Плотность меди равна 8,9(±0,05) *г/см*^{3}; теплота сгорания спирта равна 30(±0,5) *Мдж/кг*; tg 30°=0,5774(±0,00005).

В качестве границы абсолютной погрешности берут по возможности меньшее число. Пример. При измерении длины отрезка мы убедились, что ошибка, допущенная нами, не превышает 0,5 *см*, но тем более она не превышает 1 или 5 *см*. Каждое из этих чисел может считаться границей абсолютной погрешности; однако нужно указывать наименьшую из них, так как, чем меньше граница абсолютной погрешности, тем точнее выражается приближенное значение числа.

Для упрощения терминологии границу абсолютной погрешности в дальнейшем мы будем иногда называть абсолютной погрешностью или просто погрешностью.

На практике часто применяют выражения типа: «с точностью до 0,01», «с точностью до сантиметра» и т. п. При этом обычно имеют в виду, что абсолютная погрешность соответственно равна 0,01; 1 *см* и т. д.

Относительная погрешность. Абсолютную погрешность применяют для сравнения точности приближенных значений величин одного порядка и одной размерности. Если числа имеют различный порядок, то для сравнения их точности понятие абсолютной погрешности оказывается недостаточным.

Например, значение тока в первой лампочке $1(\pm 0{,}5)$ *а*, а во второй — $10(\pm 0{,}5)$ *а*. Абсолютные погрешности обоих чисел одинаковы, однако совершенно очевидно, что погрешность 0,5 *а* при значении тока 1 *а* — велика — 50% измеряемой величины; для тока же 10 *а* погрешность 0,5 *а* составляет лишь 5%.

Совершенно непригодно понятие абсолютной погрешности для сравнения точности значений величин с неодинаковой размерностью. Дело в том, что абсолютная погрешность является величиной именованной, и поэтому бессмысленно ставить вопрос о том, например, какое измерение более точное: измерение длины с точностью до 1 *см* или измерение массы с точностью до 1 *г*.

Для сравнения точности любых приближенных чисел применяют понятие относительной погрешности, точнее — границы относительной погрешности.

Относительной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому числу. Таким образом, относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta a}{a},$$

где a — приближенное значение числа.

Иногда за относительную погрешность принимают отношение абсолютной погрешности к точному значению числа: $\delta = \frac{\Delta a}{x}$. Так как числа a и x мало отличаются друг от друга, то практически различие в определениях относительной погрешности не существенно.

Как отношение однородных величин, относительная погрешность — отвлеченное число. Относительную погрешность часто выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\%.$$

Пример. В лабораторной работе по определению ускорения силы тяжести ученик получил результат: $g = 1005$ *см/сек*^{2}.

Сравним это число с табличным:

$$\delta=\frac{\Delta g}{g}=\frac{1005-981}{1005}\cdot 100\% \approx 2{,}4\% .$$

Таким образом, относительная погрешность числа 1005 *см/сек*^{2} равна 2,4%.

Пользуемся случаем сказать, что сравнивать полученный результат с табличным вполне допустимо, однако оценивать качество работы учащихся на такой основе было бы принципиально неправильно, вследствие различия в условиях измерения.

Значащие цифры приближенного числа. В книге В. М. Брадиса дано такое определение значащих цифр: «Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля, цифры, и нулей, стоящих в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр»[1].

Примеры. 1. Электрохимический эквивалент водорода — 0,01045 *мг/к*. В этом числе четыре значащие цифры.

2. Теплота сгорания дров — 2500 *ккал/кг*. Если это число задано с точностью до сотен, то два нуля — незначащие (поставлены взамен неизвестных цифр).

3. Удельное сопротивление цинка — 0,060 *ом·мм*^{2}*/м*. Это число задано с точностью до тысячных, поэтому последний нуль значащий; в числе — две значащие цифры.

Отметим, что нуль, записанный в конце десятичной дроби,— всегда значащая цифра (иначе этот нуль просто не писали бы). Так, в числе 20,40 *м*, полученном в результате измерения с точностью до сантимеров,— четыре значащие цифры. При этом важно обратить внимание на то, что равенство 20,40 *м*=20,4 *м*, безусловно, правильное для точных чисел, не является правильным для чисел приближенных. Дело в том, что число 20,4 (читается 20 целых и 4 десятых) задано с точностью до десятых, а число 20,40 (читается 20 целых и 40 сотых) — с точностью до сотых.

Приведенное равенство является примером характерной ошибки учащихся, склонных в ряде случаев применять известные им свойства точных чисел к числам приближенным.

---

[1] В. М. Брадис. Средства и способы элементарных вычислений. Учпедгиз, 1954.

Рассмотрим теперь **целое** приближенное число с нулями справа. При определении количества значащих цифр этот случай — наиболее сложный, так как нуль в конце целого числа может быть в одних случаях значащей цифрой, в других — незначащей.

Например, число 3500, заданное с точностью до единиц, имеет четыре значащие цифры. Если же то же число задано с точностью до сотен, то нули справа не будут значащими цифрами, и число 3500 будет иметь всего две значащие цифры.

Более того, возможен и такой случай, когда в одном и том же целом числе некоторые нули справа являются значащими, а некоторые — нет. Например, в значении скорости света $c = 300\,000$ *км/сек* первые три цифры (3,0,0) — значащие; последние три (нули) — незначащие. Дело в том, что более точно скорость света равна 299 793 *км/сек*, что после округления до тысяч $299\,793 \approx \approx 300\,000$ дает погрешность, приближенно равную 200 *км/сек*.

Как же записывать незначащие нули? Незначащие нули в конце целого приближенного числа можно отмечать каким-нибудь знаком, хотя бы таким $\sim$. Например, в числе $80\underset{\sim}{0}$ первый нуль — значащий, второй — незначащий [1].

Лучше вообще не записывать незначащих нулей. Для этого существуют два способа:

1) Переход к кратным единицам измерения. Например, вместо $92\,8\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0}$ *Г* будем писать 92,8 *кГ*. На этом же приеме основана и такая часто применяемая запись: $300\,0\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0}$ *км/сек* = 300 тыс. *км/сек*.

2) Замена незначащих нулей множителем 10^n, где показатель степени n может быть положительным и отрицательным целым числом. Так, например, если число 1 570 000 имеет четыре значащие цифры, условимся записывать его так: $1\,570\,000 = 1570 \cdot 10^3$, или $1\,570\,000 = 1{,}570 \cdot 10^6$. Последняя форма записи, когда запятая поставлена после первой слева значащей цифры, называется *нормальной* и является предпочтительной.

[1] Применение указанного условного обозначения ($\sim$) для незначащих нулей не является общепринятым, но, по мнению авторов, введение его было бы целесообразно.

Примеры: плотность воздуха 0,00129 $г/см^3 = 1{,}29 \cdot 10^{-3}$ $г/см^3$; скорость света в вакууме 300 000 $км/сек = 3{,}00 \cdot 10^5$ $км/сек$.

Приведем еще ряд примеров физических величин, записанных в нормальной форме:

масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ *кг*;
число Фарадея	$9{,}65 \cdot 10^7$ *к/кг·экв*;
число Авогадро	$6{,}02 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$;
заряд электрона	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$*к*.

Рассмотренные способы позволяют, как правило, отказаться от записи незначащих нулей в конце целых приближенных чисел; если же нули сохранены, следует считать их значащими. В редких исключениях будем применять значок $\sim$, о котором говорилось выше.

Верные и сомнительные цифры приближенного числа. Рассмотрим классификацию значащих цифр приближенного числа, играющую важную роль в вычислениях по методу подсчета цифр.

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры приближенного числа называют *верными*.

Очевидно, верными будут все значащие цифры приближенного числа, полученного в результате округления с поправкой.

Например, плотность ртути 13,5955 $г/см^3$. Округлим число до 13,60 $г/см^3$. Все цифры числа 13,60 верны, так как абсолютная погрешность округления $\Delta = 13{,}60 - 13{,}5955 = 0{,}0045$ ($г/см^3$), что меньше 0,005.

По той же причине можно сказать, что во всех таблицах числа записаны верными цифрами.

При измерениях нередко получают числа, все значащие цифры которых верны. Например, при измерении длины стержня линейкой с ценой деления 1 *мм* абсолютная погрешность не превышает 0,5 *мм*. Поэтому в результате измерения — 56($\pm$0,5) *мм*—обе цифры верные.

В то же время при измерениях, и особенно при вычислениях, результат может иметь погрешность, превышающую половину единицы последнего разряда. Например, при измерении силы трения динамометром Бакушинского с ценой деления 10 *Г* получен результат 120($\pm$5) *Г*. Цифра 0 в числе 120 не является верной, так как абсолютная погрешность больше 0,5 — половины единицы последнего разряда. Принято говорить, что в подобных случаях последняя цифра приближенного числа — сомнительная.

Итак, если в приближенном числе все значащие цифры, кроме последней, являются верными, но абсолютная погрешность числа превышает половину единицы последнего разряда, то цифра этого разряда называется *сомнительной*.

Пример: $x=75{,}3(\pm 0{,}2)$. Здесь цифры 7,5 — верные, цифра 3 — сомнительная ($\Delta > 0{,}05$).

Говоря об абсолютной погрешности числа 75,3, равной 0,2, имеют в виду фактически границу абсолютной погрешности. В действительности абсолютная погрешность числа 75,3 может быть меньше 0,2. Более того, может быть доказано, что при измерениях и вычислениях малые значения погрешности более вероятны, чем большие. Именно поэтому в приближенном числе сохраняют одну сомнительную цифру.

Основное правило записи приближенных чисел, которое служит теоретическим обоснованием целесообразности сохранения сомнительной цифры, было впервые сформулировано А. Н. Крыловым и известно под названием *принципа Крылова:*

«Результат всякого вычисления и измерения выражается числом. Условимся писать эти числа так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и при этом не более как на одну единицу».

Приняв это правило за основу, заметим, что строгое следование принципу Крылова вызывает ряд трудностей.

Принцип Крылова всегда может быть соблюден при округлении чисел. При любом округлении (а не только при округлении с поправкой) абсолютная погрешность не будет превышать единицы последнего разряда. Например, при округлении с избытком $2{,}453 \approx 2{,}46$ абсолютная погрешность равна 0,007, что меньше 0,01, и число 2,46 записано в полном соответствии с принципом Крылова.

Принцип Крылова в приведенной выше формулировке соблюдается в большинстве случаев при непосредственных измерениях. (Вопрос о погрешностях измерений подробно рассмотрен в главе III.)

При вычислениях с приближенными числами соблюсти принцип Крылова во всех случаях, к сожалению, невозможно, так как, например, уже сумма трех слагаемых, данных каждое с точностью до целых, то есть имеющих абсолютные погрешности меньшие 0,5, может иметь абсолютную погрешность до $0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$.

Нужно, однако, иметь в виду, что в рассмотренном примере число 1,5 является границей абсолютной погрешности суммы. Сама абсолютная погрешность в подавляющем большинстве случаев будет значительно меньше своей предельной величины. Подобное обстоятельство имеет место и при других действиях с приближенными числами.

Именно поэтому В. М. Брадис предложил пользоваться принципом Крылова со следующим уточнением: сомнительную цифру сохраняют и в том случае, когда погрешность числа превосходит единицу последнего разряда, но при этом малые значения погрешности более вероятны, чем большие.

С таким уточнением принцип Крылова получил название *принципа Крылова—Брадиса.*

Таким образом, в числе, записанном по принципу Крылова—Брадиса, абсолютная погрешность может достигать 2—3 единиц последнего разряда (а иногда принимать и бóльшие значения), если только показано, что малые значения абсолютной погрешности более вероятны, чем большие.

Предложенный В. М. Брадисом вероятностный подход к формулировке принципа Крылова имеет большое значение как в обосновании правил подсчета цифр, так и в практическом их применении.

Все цифры приближенного числа, следующие за верными и одной сомнительной цифрой, называют *неверными.* Например, в числе 24,37 (± 1) цифра 2 — верная, цифра 4 — сомнительная, а последние 3 и 7 — неверные (их не следует и писать). По принципу Крылова—Брадиса число следует записать так: 24.

Как видим, чтобы иметь представление о характере цифр приближенного числа, достаточно знать погрешность этого числа.

Остановимся еще на одном способе оценки точности приближенного числа, который применяют при обработке результатов измерений, а также для обоснования правил подсчета цифр. Речь идет об оценке точности с помощью средней квадратической погрешности.

Пусть в результате некоторого измерения или вычисления получено приближенное число $a(\pm\Delta a)$, причем известно, что любые значения абсолютной погрешности из промежутка $[-\Delta a, \Delta a]$ одинаково вероятны.

Так как все значения погрешности перечислить невозможно, выберем произвольное натуральное число n и рассмотрим такие значения абсолютной погрешности:

$$0;\quad \pm\frac{\Delta a}{n};\quad \pm\frac{2\Delta a}{n};\ \cdots;\ \pm\frac{(n-1)\Delta a}{n};\ \pm\Delta a. \tag{1}$$

Для характеристики точности приближенного числа a рассмотрим среднее арифметическое квадратов чисел ряда (1). Этим самым мы как бы придаем больший «вес» бо́льшим погрешностям. Так как в строке (1) $2n+1$ чисел, то среднее арифметическое квадратов равно:

$$\frac{0^2+2\left(\frac{\Delta a}{n}\right)^2+\cdots+2(\Delta a)^2}{2n+1}=\frac{2(\Delta a)^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^2(2n+1)}.$$

Чтобы получить ту же размерность, какую имеет величина a, извлекаем квадратный корень:

$$\frac{\Delta a\sqrt{2}}{n}\sqrt{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2n+1}}. \tag{2}$$

Но абсолютная погрешность числа a может принимать не только значения (1), но и любые значения между $-\Delta a$ и Δa. Поэтому в качестве характеристики точности числа a принимают предел выражения (2):

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a\sqrt{2}}{n}\sqrt{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2n+1}}.$$

Полученное число σ и называют средней квадратической погрешностью числа a.

Для вычисления σ применим формулу суммы квадратов последовательных чисел натурального ряда:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a\sqrt{2}}{n}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(2n+1)}}=\Delta a\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{6n}}=$$

$$=\frac{\Delta a\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{\Delta a}{\sqrt{3}}.$$

Итак, $\sigma=\frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$.

Как видим, средняя квадратическая погрешность числа a в $\sqrt{3}$ раз меньше абсолютной погрешности Δa.

Роль средней квадратической погрешности хорошо выясняется на таком примере.

Пусть в результате некоторого измерения или вычисления получено число $a=278$, причем абсолютная погрешность равна $\Delta a=1{,}5$. Так как абсолютная погрешность больше единицы, то цифра 8 в этом числе сомнительна. Однако одну сомнительную цифру в приближенном числе целесообразно сохранить. Объясняется это тем, что средняя квадратическая погрешность меньше единицы

$$\left(\sigma=\frac{1{,}5}{\sqrt{3}} \approx 0{,}87\right).$$

В то время, как величина абсолютной погрешности учитывает только наиболее неблагоприятный случай, когда погрешность принимает максимальное значение, оценка точности с помощью средней квадратической погрешности дает возможность принять во внимание, что значения погрешности, близкие к максимальной, встречаются на практике сравнительно редко.

Как мы увидим ниже, понятие средней квадратической погрешности применяют для обоснования правил подсчета цифр. При этом используют принцип Крылова—Брадиса со следующим уточнением: цифра приближенного числа считается сомнительной, если средняя квадратическая погрешность не превышает единицы соответствующего разряда.

Методические замечания. 1. Термин «точность» часто правильно применяют для качественной характеристики результатов вычислений или измерений. Например, «точность измерения длины микрометром выше, чем штангенциркулем».

Уместно говорить, что число 9,81 записано с точностью до сотых, число 9,8 — с точностью до десятых, а число 10 — с точностью до единиц, что число 9,81 точнее числа 9,8 и т. д.

Правильны выражения: расстояние между двумя городами измеряют с точностью до километра; температуру медицинским термометром — с точностью до десятых долей градуса и т. д.

В приведенных примерах речь не идет об абсолютной погрешности чисел; здесь говорится о разряде, в котором находится последняя цифра каждого числа. Последнее в какой-то мере тоже может служить характеристикой точности.

2. Из вопросов, изложенных в этом параграфе, программа арифметики предусматривает изучение погрешности и значащих цифр. Знакомятся учащиеся также с понятиями верной и сомнительной цифры.

Учителю физики целесообразно напомнить определение этих понятий, показать применение их на физическом материале.

Изучение принципа Крылова не является обязательным, но учащимся следует иметь представление о том, что последняя значащая цифра приближенного числа может быть сомнительной.

Упражнения

7. Число 1376 округлено до 1400. Найти абсолютную и относительную погрешности округления.

8. В школе 728 учащихся. Это число округлили до 700. Найти абсолютную и относительную погрешности округления.

9. Табличное значение плотности золота 19,3 *г/см*^{3}. Найти абсолютную и относительную погрешности числа.

10. Ускорение силы тяжести $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}. Найти относительную погрешность числа.

11. Размеры бруска $10\times20\times40$ *мм*. Абсолютная погрешность каждого размера $\pm0{,}5$ *мм*. Какова относительная погрешность каждого размера?

12. Скорость света в вакууме 299 792,5($\pm$0,4) *км/сек*; скорость звука в воздухе 331,63($\pm$0,04) *м/сек*. Что измерено с большей точностью?

13. Длина отрезка при измерении с точностью до десятых дециметра равна 1,8 *дм*, при измерении с точностью до миллиметра — 180 *мм*. Во сколько раз второе измерение точнее первого?

14. Плотность (*г/см*^{3}) воды — 1,00; спирта — 0,80; молока — 1,03; ртути — 13,60; глицерина — 1,26. Сколько значащих цифр в каждом числе?

15. В наборе имеются гири 500; 200; 200; 100 и 50 *г*. Какие нули в этих числах — значащие или незначащие?

16. Не изменяя точности чисел, записать:
170 *мм* в сантиметрах,
250 *мл* в литрах,
600 *в* в киловольтах.

17. Округлить следующие приближенные числа:

а) До двух значащих цифр: 7,82; 7,98; 1,96; 1,00; 0,0302; 0,999.

б) До трех значащих цифр: 87 856; 19 995; 78,625; 0,006798; 0,1199.

в) До четырех значащих цифр: 60 002 480; 87,99567; 0,000678078; 0,007800456; 0,00679987.

18. В следующих числах последний нуль справа — незначащий. Путем перехода к кратным единицам записать эти числа без незначащих нулей: 200 *см*; 1400 *м*, 1500 *мл*, 60 *н*, 220 *в*, 4500 *ом*.

19. В следующих числах все нули справа незначащие. Путем перехода к кратным единицам измерения записать числа без незначащих нулей: 7800 *дж*, 9 200 000 *дж*, 6 600 000 *ом*, 1 120 000 *квт*.

20. Следующие числа выразить в основных единицах системы СИ и подсчитать количество незначащих нулей: 12 *км*; 0,050 *км*^{2}; 50,0 *т*; 1,60 *Мн*; 6,60 *кв*,

21. Теплота сгорания *(ккал/кг)* торфа — 3600, спирта — 7000, бензина — 11 000. Числа даны с точностью до сотен. Сколько значащих цифр в каждом числе? Записать числа в нормальной форме.

22. Записать в нормальной форме следующие приближенные числа: плотность *(г/см³)* азота — 0,00125; гелия — 0,00018; водорода — 0,00009.

23. Показания счетчика электроэнергии в начале и в конце срока измерения следующие:

00720	01247

Одна цифра справа — десятые доли киловатт-часа. 1) Сколько значащих цифр в каждом числе? Какие из них являются верными? 2) Ответьте на те же вопросы, если десятые доли киловатт-часа принято отбрасывать без округления.

24. Показатель преломления бензина $n=1{,}5014(\pm 0{,}0001)$. Сколько в этом числе верных и сомнительных цифр?

25. Число Фарадея $F=9{,}65\cdot 10^7$ *к/кг·экв* имеет абсолютную погрешность $\Delta=50\cdot 10^3$ *к/кг·экв*. Сколько в этом числе верных и сомнительных цифр?

26. Измерив свой рост, ученик записал результат: 152 *см*. Соответствует ли запись принципу Крылова—Брадиса?

27. Результаты двух лабораторных работ были записаны так:

$d=7{,}48(\pm 0{,}2)$ *Г/см³*;

$k=0{,}322(\pm 0{,}01)$ *мг/к*.

Записать результаты по принципу Крылова—Брадиса.

28. Число $3000(\pm 100)$ по принципу Крылова—Брадиса разные ученики записали так: $3{,}0\cdot 10^3$; $3\cdot 10^3$; $30\cdot 10^2$.

Верна ли каждая из этих записей?

ГЛАВА II

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

§ 4. ТРИ ОСНОВНЫХ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вычисления с приближенными числами, хотя и основаны на обычных правилах арифметики, имеют свои особенности и составляют поэтому предмет отдельного раздела математики, иногда называемого арифметикой приближенных вычислений. Выполнить приближенное вычисление — это значит найти результат вычисления, оценить его точность и провести округление результата в соответствии с его точностью.

Известны три основных метода приближенных вычислений:

метод абсолютной и относительной погрешностей;

метод границ;

метод подсчета цифр.

Первые два метода позволяют вычислить погрешность результата и поэтому носят название методов строгого учета погрешностей. Вычисления по методу подсчета цифр, как мы увидим ниже, не предусматривают непосредственной оценки погрешности результата.

Рассмотрим характеристику каждого метода.

Метод абсолютной и относительной погрешностей (его часто называют методом границ погрешностей) состоит в определении погрешности результата по специальным правилам и формулам. Этот метод не включен пока в программу по математике средней школы.

Основной недостаток метода границ погрешностей в школьных условиях — громоздкость этого метода, необходимость запоминания большого количества формул, обоснование которых достаточно сложно даже для учащихся старших классов.

Напомним основные правила вычисления абсолютной и относительной погрешности.

Для действия первой ступени (сложения и вычитания) правило вычисления абсолютной погрешности следующее:

Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей данных чисел:

$$\Delta(a_1 \pm a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2 .$$

Пример 1. Батарея состоит из трех конденсаторов, соединенных параллельно. $C_1 = 10(\pm 1)$ *мкф*, $C_2 = 2(\pm 0{,}2)$ *мкф*, $C_3 = 2(\pm 0{,}2)$ *мкф*. Найти электроемкость батареи C.

Решение:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 10 + 2 + 2 = 14 \ (\textit{мкф});$$

$$\Delta C = \Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3 = 1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4 \ (\textit{мкф}) \approx 2 (\textit{мкф}).$$

Погрешность обычно выражают однозначным числом и всегда округляют с избытком. Итак,

$$C = 14(\pm 2) \ \textit{мкф} .$$

Для действия второй ступени (умножения и деления) удобнее вычислять относительную погрешность.

Относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей данных чисел:

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b \quad \text{и} \quad \delta \frac{a}{b} = \delta a + \delta b .$$

Пример 2. Определить удельный вес материала по следующим данным: вес предмета, изготовленного из этого материала, $P = 1{,}85(\pm 0{,}01)$ *кГ*, объем $V = 250(\pm 5)$ *см*^{3}.

Решение: $d = \frac{1850}{250} \approx 7{,}4$ (*Г*/*см*^{3}).

Пользуясь правилом вычисления относительной погрешности частного, получаем: $\delta d = \delta P + \delta V = \frac{0{,}01}{1{,}85} + \frac{5}{250} \approx$ $\approx 0{,}00541 + 0{,}02 \approx 0{,}0255 = 2{,}55\% \approx 3\%$. При этом все округления выполняют с избытком.

Абсолютная погрешность результата равна: $\Delta d = \delta d \cdot d = 0{,}0255 \cdot 7{,}4 \approx 0{,}189 \approx 0{,}2$. Таким образом, $d = 7{,}4(\pm 0{,}2)$ *Г*/*см*^{3}.

В более сложных случаях, когда в одном и том же примере над приближенными числами выполняют действия разных ступеней, оценка точности результата оказывается значительно более трудоемкой.

Рассмотренный метод применим для оценки погрешности ответа при решении задач, если в этом имеется необходимость, а также для оценки погрешностей результатов лабораторных работ. К этому вопросу мы вернемся в главе IV.

Метод границ — второй метод строгого учета погрешностей.

При методе границ каждое вычисление, связанное с решением задачи, необходимо производить дважды: первый раз для нахождения числа, заведомо меньшего искомого точного результата — нижней границы (НГ), второй раз — числа, заведомо большего искомого — верхней границы (ВГ). В качестве окончательного результата принимают полусумму границ: $a=\frac{\text{НГ}+\text{ВГ}}{2}$. При этом абсолютная погрешность равна полуразности границ $\Delta a=\frac{\text{ВГ}-\text{НГ}}{2}$.

Приводим правила вычисления НГ и ВГ для четырех арифметических действий:

$$\text{НГ}(x+y)=\text{НГ}x+\text{НГ}y; \quad \text{ВГ}(x+y)=\text{ВГ}x+\text{ВГ}y;$$

$$\text{НГ}(x-y)=\text{НГ}x-\text{ВГ}y; \quad \text{ВГ}(x-y)=\text{ВГ}x-\text{НГ}y;$$

$$\text{НГ}(xy)=\text{НГ}x\cdot\text{НГ}y; \quad \text{ВГ}(xy)=\text{ВГ}x\cdot\text{ВГ}y;$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}.$$

Расмотрим те же примеры, которые были решены выше методом погрешностей.

1. Так как $C_1=10(\pm 1)$, то $9<C_1<11$, то есть НГ $C_1=9$; ВГ $C_1=11$.

Аналогично НГC_2=НГC_3=1,8; ВГC_2=ВГC_3=2,2.

Для удобства вычисления границ обычно составляют таблицу:

	НГ	ВГ
C_1	9	11
C_2	1,8	2,2
C_3	1,8	2,2
C	12,6	15,4

$$C=\frac{12{,}6+15{,}4}{2}=\frac{28}{2}=14\ (\textit{мкф});$$

$$\Delta C=\frac{15{,}4-12{,}6}{2}=\frac{2{,}8}{2}=1{,}4\approx 2\ (\textit{мкф});$$

$$C=14(\pm 2)\ \textit{мкф}.$$

Полученный ответ совпадает с тем, который мы получили, вычисляя по методу погрешностей.

2. Составляем таблицу для вычисления НГ и ВГ:

	нг	вг
P	1840	1860
V	245	255
d	7,2	7,6

Пользуясь формулами вычисления НГ и ВГ частного, получаем:

$$\text{НГ}d=\frac{\text{НГ}P}{\text{ВГ}V}=\frac{1840}{255}\approx 7{,}21\,;$$

$$\text{ВГ}d=\frac{\text{ВГ}P}{\text{НГ}V}=\frac{1860}{245}\approx 7{,}59\,.$$

После округления до десятых (при этом округление НГ всегда производят с недостатком, а округление ВГ — с избытком) получаем:

$$7{,}2<d<7{,}6\,,$$

откуда

$$d=\frac{7{,}2+7{,}6}{2}=7{,}4\ (\Gamma/\text{см}^3)\,;$$

$$\Delta d=\frac{7{,}6-7{,}2}{2}=0{,}2\ (\Gamma/\text{см}^3)\,,$$

$$\text{то есть } d=7{,}4(\pm 0{,}2)\ \Gamma/\text{см}^3\,.$$

Как видим, и в этом примере результаты, полученные обоими методами, совпадают.

Метод границ применим для оценки погрешностей результата при решении задач (если в этом есть необходимость) и при выполнении лабораторных работ. Для его применения знание приведенных выше формул не обязательно. Отыскание НГ и ВГ сводится к применению известных учащимся еще из курса арифметики предложений об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов. В старших классах обоснование метода границ легко проводится при помощи основных свойств неравенств и действий с неравенствами.

К методу границ мы еще вернемся в четвертой главе.

Метод подсчета цифр. Рассмотренные нами два метода строгого учета погрешностей позволяют найти абсолютную и относительную погрешности результата, что на практике далеко не всегда обязательно.

Как уже отмечалось, во многих случаях достаточно определить число значащих цифр, заслуживающих доверия, без специального вычисления погрешностей, что значительно упрощает ход вычислений. Метод приближенных вычислений, который позволяет оценить точность результата по количеству цифр в нем, носит название метода подсчета цифр.

Применение этого метода основано на том, что количество значащих цифр приближенного числа определяет относительную погрешность: чем больше значащих цифр в числе, тем меньше его относительная погрешность. Если равны относительные погрешности, то количество значащих цифр в приближенных числах будет одинаковым. Если в данном числе оставить дополнительно одну значащую цифру, то относительная погрешность числа уменьшится в 10 раз.

Метод подсчета цифр представляет собой стройную систему, в которой все арифметические действия выполняют обычными общеизвестными способами и лишь результаты действий округляют по специальным очень простым правилам — правилам подсчета цифр.

Эти правила позволяют в подавляющем большинстве случаев получать результаты, записанные в соответствии с принципом Крылова—Брадиса. Правила подсчета цифр подробно рассмотрены в § 5—10 этой главы.

§ 5. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Правило I. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков*[1].

Пример:

$$6{,}28+13{,}1+5{,}482=24{,}862\approx 24{,}9\,.$$

В результате сохранили один десятичный знак (по правилу округления).

Хотя абсолютная погрешность суммы неизвестна, мы можем сделать вполне определенные выводы о характере цифр полученного числа: цифры 2 и 4 — верные, цифра 9 может быть сомнительной. Как видим, полученная

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 162.

сумма 24,9 записана в полном соответствии с принципом Крылова—Брадиса.

Сделаем следующее замечание о применении знаков точного и приближенного равенства. Фактически все равенства в вычислениях с приближенными числами имеют приближенный характер. Однако для удобства знак приближенного равенства ($\approx$) будем применять, как правило, только в тех случаях, когда производится округление. В тех же случаях, когда действие выполнено формально точно, будем условно употреблять знак точного равенства ($=$).

Задача 1. Найти равнодействующую шести сил, действующих на одну точку тела по одной прямой и в одном и том же направлении, если: $F_1=2{,}81$ *н*; $F_2=3{,}35$ *н*; $F_3=4{,}48$ *н*; $F_4=5{,}04$ *н*; $F_5=6{,}50$ *н*; $F_6=7{,}34$ *н*.

Решение: $R=2{,}81+3{,}35+4{,}48+5{,}04+6{,}50+7{,}34=$ $=29{,}52$ (*н*).

Очевидно, все цифры суммы 29,52, кроме последней,— верные. Выясним, следует ли сохранить в результате цифру сотых.

Пусть, например, абсолютная погрешность каждого слагаемого равна 0,005. Тогда абсолютная погрешность суммы равна $6 \cdot 0{,}005=0{,}03$. Несмотря на это, цифру сотых в сумме следует сохранить. Дело в том, что при вычислении абсолютной погрешности суммы имелось в виду, что все погрешности слагаемых имеют одинаковый знак. В действительности же абсолютные погрешности слагаемых могут частично компенсировать друг друга, что приводит к значительному уменьшению погрешности окончательного результата. Как видим, маловероятно, что абсолютная погрешность суммы достигает своей предельной величины (0,03). Более вероятно, что погрешность суммы будет значительно меньше (порядка 0,01—0,02), и в соответствии с принципом Крылова—Брадиса цифру сотых в сумме следует сохранить, считая ее сомнительной цифрой.

Рассмотренный нами вероятностный характер результатов, получаемых по методу подсчета цифр, имеет решающее значение в практике элементарных приближенных вычислений.

Правило 1 для сложения равноточных приближенных чисел можно применять тогда, когда количество слагаемых сравнительно невелико (не более 12). В физических задачах обычно имеют дело с небольшим числом слагаемых, и поэтому правило 1 всегда применимо.

Задача 2. Электрическая цепь состоит из пяти последовательно соединенных проводников сопротивлением $r_1=3{,}865$ *ом*; $r_2=4{,}45$ *ом*; $r_3=0{,}60$ *ом*; $r_4=2{,}0$ *ом*; $r_5=5{,}9$ *ом*. Вычислить общее сопротивление проводников.

Решение: $R=3{,}865+4{,}45+0{,}60+2{,}0+5{,}9=$
$=16{,}815\ (ом)\approx 16{,}8\ (ом)$.

Как видим, точность ответа по количеству десятичных знаков определяется точностью наиболее грубого слагаемого, в нашем примере — чисел 2,0 и 5,9, имеющих только по одному десятичному знаку.

Заметим, что при сложении приближенных чисел разной точности правило 1 практически применимо для любого числа слагаемых.

Задача 3. Электрическая цепь состоит из лампы сопротивлением 305 *ом* и соединительных проводов сопротивлением 0,37 *ом*. Найти общее сопротивление цепи.

Решение: $R=305+0{,}37=305{,}37\ (ом)\approx 305\ (ом)$.

Приведенный пример сложения весьма характерен. Правила приближенных вычислений показали, что при определении общего сопротивления подобной цепи сопротивление проводов можно не учитывать. Такие примеры встречаются в физических задачах довольно часто. Учителю физики необходимо обратить на это внимание учащихся, подчеркнув, что правила приближенных вычислений помогают в некоторых случаях решать вопросы чисто физического характера.

Некоторые трудности могут возникнуть при сложении целых приближенных чисел, заданных с различной точностью. Рассмотрим пример.

Найти сумму приближенных чисел, записанных в нормальной форме:

$$x=2{,}740\cdot 10^5+2{,}14\cdot 10^4+8{,}6\cdot 10^6.$$

Проще всего это вычисление выполнить так: вынести множитель 10 в наибольшей степени (в данном случае 10^6) за скобки:

$$x=10^6(0{,}2740+0{,}0214+8{,}6)=10^6\cdot 8{,}8954\approx 8{,}9\cdot 10^6.$$

Сумму десятичных дробей вычисляют по правилу 1.

Следует отметить, что сложение чисел, заданных с точностью различного порядка, встречается довольно редко. Это, несомненно, имеет глубокий физический смысл — нелепо, например, складывать длину отрезка пути, измеренную с точностью до 1 *км*, с длиной отрезка, измеренной с точностью до 1 *см*.

В следующих задачах рассмотрим вычитание приближенных чисел.

Задача 4. Собственная скорость лодки, плывущей против течения, 2,50 *м/сек*, скорость течения 1,4 *м/сек*. Найти результирующую скорость лодки.

Решение: $v = 2{,}50 - 1{,}4 \approx 1{,}1$ (*м/сек*).

Точность ответа по количеству десятичных знаков соответствует точности наиболее грубого данного.

Однако основной характеристикой точности приближенного числа является количество значащих цифр. При сложении и вычитании приближенных чисел количество значащих цифр результата может иногда отличаться от количества значащих цифр исходных данных.

Задача 5. Две силы 0,860 и 0,855 *кГ*, приложенные к одной точке тела, действуют по одной прямой. Найти равнодействующую, если силы направлены в одну сторону; в противоположные стороны.

Решение: $R_1 = 0{,}860 + 0{,}855 = 1{,}715$ (*кГ*);

$$R_2 = 0{,}860 - 0{,}855 = 0{,}005 \text{ (кГ)}.$$

В первом случае по количеству значащих цифр ответ точнее исходных данных, т. е. произошло «повышение точности»; во втором случае ответ менее точен, чем исходные данные, т. е. произошла «потеря точности».

Особого внимания заслуживает последнее явление. Об этом подробнее будет сказано в дальнейшем.

Методические замечания. 1. Правила подсчета цифр учащиеся изучают в курсе арифметики VI класса. В курсе физики целесообразно вспомнить эти правила и закрепить при решении задач и выполнении лабораторных работ. Согласованность во времени легко может быть достигнута.

2. Применение правила 1 для сложения и вычитания приближенных целых чисел связано с записью целых чисел в нормальной форме и алгебраическими преобра-

зованиями, которые могут затруднить учащихся VI—VII классов.

Чтобы избежать этих затруднений, можно применить другое правило, а именно:

Правило I-а. *При сложении и вычитании приближенных чисел в полученном результате нужно отбрасывать по правилам округления цифры тех разрядов справа, в которых нет значащих цифр хотя бы в одном из данных приближенных чисел*[1].

Это правило применимо во всех случаях сложения и вычитания. Заданные числа могут быть целыми или десятичными дробями, одинаковой или различной точности. Отдельные слагаемые могут быть точными числами.

Рассмотрим примеры применения правила I-а.

$$1)\quad \begin{array}{r} 32\underset{\sim}{0} \\ 13\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0} \\ +4060 \\ 70\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0} \\ \hline 12680 \approx 127\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0} \end{array} \qquad\qquad 2)\quad \begin{array}{r} 0{,}184 \\ 120{,}71 \\ +\ 215 \\ 62{,}0 \\ \hline 397{,}894 \approx 398 \end{array}$$

3. Как уже отмечалось, при вычитании близких чисел происходит «потеря точности». Это явление в физических задачах встречается при применении формул, содержащих разность величин, например: $V=V_1-V_2$; $R=F_1-F_2$; $a=\frac{v-v_0}{t}$; $Q=cm(t_2-t_1)$ и др.

Кроме того, с «потерей точности» мы можем встретиться в лабораторных работах при измерениях. Например, при определении объема тела мензуркой ($V=V_2-V_1$), при взвешивании с тарой ($P=P_1-P_2$) и пр.

«Потеря точности» — явление нежелательное. Чтобы не было «потери точности», необходимо выбирать компоненты разности так, чтобы они не были числами, близкими друг к другу; если возможности выбора нет, то в отдельных случаях можно избежать «потери

[1] См.: В. У. Грибанов. Приближенные вычисления в средней школе. «Просвещение», 1964, стр. 25.

точности» путем алгебраических преобразований. Например, если требуется найти значение $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, где $a=5{,}3$ (точно) и $b=5{,}2$ (точно), то, взяв по таблице квадратных корней $\sqrt{a}\approx2{,}302$ и $\sqrt{b}\approx2{,}280$, получим для x приближенное значение 0,022, имеющее лишь две значащие цифры. Но предварительное преобразование (умножение и деление на $\sqrt{a}+\sqrt{b}$) приводит к вычислению значения $x=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{0{,}1000}{4{,}582}$, которое можно получить (применяя рассмотренное ниже, в § 6, правило деления точного числа на приближенное) уже не с двумя, а с четырьмя надежными значащими цифрами: $x=0{,}1000:4{,}582\approx0{,}02184$.

Рассмотрим кратко вопрос об обосновании правила 1.

Один из приемов обоснования правил подсчета цифр основан на вычислении средней квадратической погрешности результата (см. § 3). Пользуясь уточнением понятия сомнительной цифры, введенным в конце § 3, сформулируем принцип Крылова—Брадиса в форме, пригодной для теоретического обоснования правила подсчета цифр.

В приближенных числах, полученных в результате вычисления, все цифры, кроме последней, должны быть верны, и только последняя цифра может быть сомнительной, причем средняя квадратическая погрешность не должна превышать единицы разряда последней цифры.

Таким образом, для обоснования любого правила подсчета цифр, в том числе правила 1, надо вычислить среднюю квадратическую погрешность результата и показать, что средняя квадратическая погрешность не превышает единицы последнего разряда.

Пусть дано n приближенных слагаемых, имеющих κ верных десятичных знаков каждое. Так как абсолютная погрешность каждого слагаемого равна $\frac{0{,}5}{10^{\kappa}}$, то средняя квадратическая погрешность $\sigma(a)$ каждого слагаемого равна $\frac{0{,}5}{\sqrt{3}\cdot10^{\kappa}}$ (см. § 3).

Можно показать[1], что средняя квадратическая погрешность $\sigma(s)$ суммы n равноточных слагаемых равна $\sigma(s)=\sigma(a)\sqrt{n}$. Тогда

$$\sigma(s)=\frac{0{,}5\sqrt{n}}{\sqrt{3}\cdot10^{\kappa}}=\frac{1}{\sqrt{12}\cdot10^{\kappa}}\cdot\sqrt{n}\,.$$

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 120—121.

Для того чтобы в сумме можно было сохранить k десятичных знаков, средняя квадратическая погрешность $\sigma(s)$ должна быть меньше либо равна $\frac{1}{10^k}$, то есть $\frac{1}{\sqrt{12}\cdot 10^k}\cdot\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{10^k}$, откуда $n\leqslant 12$.

Итак, правилом 1, строго говоря, можно пользоваться в том случае, когда число слагаемых не превышает 12.

В случае сложения чисел разной точности максимальное число слагаемых, для которого можно пользоваться правилом 1, всегда больше 12.

Упражнения

29. Сопротивление внешней части электрической цепи равно 58 *ом*. Найти общее сопротивление цепи, если сопротивление внутренней части составляет 0,45 *ом*; 0,65 *ом*.

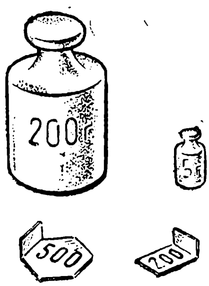


Рис. 2.

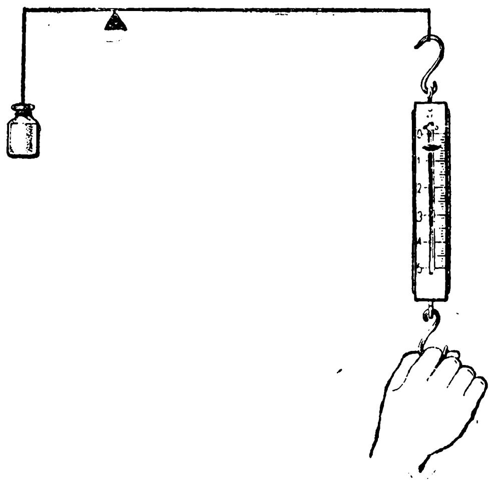


Рис. 3.

30. Параллельно соединены три конденсатора: 0,5; 1,0 и 1,2 *мкф*. Найти общую емкость батареи конденсаторов.

31. При измерении массы тела на чашку весов были поставлены следующие гири (рис. 2). Какова масса тела?

32. Гирю 1 *кГ* (рис. 3) уравновесили силой 0,5 *кГ*. Найти силу давления на точку опоры рычага.

33. Масса внутреннего сосуда в калориметре 44 *г*, а с водой 230,7 *г*. Какова масса воды в сосуде?

34. Два реостата сопротивлением 16 ($\pm 1,6$) и 10 ($\pm 0,3$) *ом* соединены последовательно. Найти их общее сопротивление.

35. На тело действуют вдоль одной прямой четыре силы: $F_1 = 7,5$ *кн*; $F_2 = -0,85$ *кн*; $F_3 = 1,0$ *кн*; $F_4 = -10$ *кн*. Найти равнодействующую R.

36. В водоеме на глубине 10 *м* давление воды равно $1,0 \cdot 10^3$ *Г/см²*. Найти общее давление на этой глубине, с учетом атмосферного давления, равного 1033 *Г/см²*.

37. Водоизмещение судна $1,0 \cdot 10^4 T$, вес его $3,5 \cdot 10^3$ *Т*. Определить грузоподъемность судна.

38. Электрический заряд на первом шаре равен $1,2 \cdot 10^{-8}$ *к*, а на втором $1,75 \cdot 10^{-7}$ *к*. Шары соединены проволокой. Найти величину их общего заряда.

39. Каково давление воздуха в сосуде *А* (рис. 4), если атмосферное давление 756 *мм рт. ст.*, а манометр заполнен ртутью?

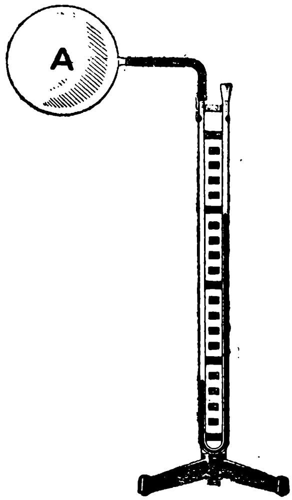


Рис. 4.

§ 6. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Правило II. *При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр*[1].

Задача 6. Ток в проводнике равен 1,5 *а*. Какое количество электричества протекает через поперечное сечение проводника за 25 *сек*?

Решение: $q = 1,5 a \cdot 25\ сек = 37,5\ к \approx 38\ к$

Так как оба приближенных сомножителя имеют по две значащие цифры, то в соответствии с правилом II сохраняем в ответе две значащие цифры, применяя округление.

Можно показать, что абсолютная погрешность числа 37,5 около двух единиц. Следовательно, уже вторая значащая цифра этого числа сомнительная, а последняя

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 162.

цифра в числе 37,5 неверная и поэтому должна быть отброшена, что и было сделано при решении задачи.

Задача 7. Наблюдатель услышал гром через 5,2 *сек* после того, как увидел молнию. На каком расстоянии от него вспыхнула молния? Скорость звука принять равной 346 *м/сек*.

Решение: $s = 346\ м/сек \cdot 5{,}2\ сек = 1799{,}2\ м \approx 18\tilde{0}\tilde{0}\ м$

В числе 346 — три значащие цифры, а в числе 5,2 — две. Применяя правило II, сохраняем в произведении две значащие цифры. Поэтому оба нуля справа в числе 1800 — незначащие. Ответ можно записать или в нормальной форме $s \approx 1{,}8 \cdot 10^3\ м$, или в кратных единицах $s \approx 1{,}8\ км$.

Задача 8. Э. д. с. щелочного аккумулятора 1,25 *в*. Какова э. д. с. батареи, составленной из трех последовательно соединенных аккумуляторов?

Решение: $E \approx 1{,}25\ в \cdot 3 = 3{,}75\ в$.

Особенность этого примера состоит в том, что второй сомножитель — число точное. В подобных случаях точность произведения определяется исключительно точностью приближенного сомножителя.

Задача 9. За какое время свет проходит расстояние от Солнца до Земли, равное $1{,}50 \cdot 10^8\ км$, если скорость света $3{,}00 \cdot 10^5\ км/сек$?

Решение: $t = \dfrac{1{,}50 \cdot 10^8}{3{,}00 \cdot 10^5} = 500\ (сек)$.

Так как заданные числа, а следовательно, и ответ имеют по три значащие цифры, то оба нуля справа в числе 500 значащие, то есть ответ получен с точностью до секунды. При этом цифра единиц может быть сомнительной.

Задача 10. Определить давление, производимое грузом 5,48 *кГ*, если площадь опоры его равна 15 $см^2$.

Решение: $p = \dfrac{5{,}48}{15} \approx 0{,}365 \approx 0{,}37\ (кГ/см^2)$.

Так как менее точное число — делитель — имеет две значащие цифры, то в частном сохраняем две значащие цифры, выполнив округление.

Следует учесть, что при умножении находят все цифры произведения и только после этого выполняют округление, при делении приближенных чисел достаточно вычислить столько цифр, сколько требуется по правилу II и одну лишнюю цифру (для правильного округления результата).

Задача 11. Шесть лампочек соединены параллельно. Чему равно сопротивление этого соединения, если сопротивление каждой лампочки 30 *ом*?

Решение: $R=\frac{30}{6}=5{,}0$ (*ом*).

Число 30 *ом* имеет две значащие цифры, число 6 — точное, следовательно, ответ должен иметь две значащие цифры, и поэтому он записан в виде 5,0 *ом*, а не 5 *ом*. Точные числа на значность результата не влияют.

Задача 12. Чему равен период колебания камертона, если частота колебаний 16 *гц*; 440 *гц*?

Решение: $T_1=\frac{1}{16}\approx 0{,}062$ (*сек*);

$$T_2=\frac{1}{440}\approx 0{,}00228 \text{ (сек)}.$$

В обоих примерах количество значащих цифр ответа определяется количеством значащих цифр делителя, так как делимое (число 1) — точное число.

Мы рассмотрели различные случаи применения правила II для умножения и деления приближенных чисел. Интересным применением этого правила является определение количества значащих цифр при переходе от одних единиц измерения к другим.

Задача 13. Сколько секунд в приближенном числе 27 *мин*?

Решение: $t=27\cdot 60=1620\approx 16\underset{\sim}{0}\underset{\sim}{0}$ (*сек*).

Так как число 60 — точное, а число 27 имеет две значащие цифры, то в соответствии с правилом II ответ также должен иметь две значащие цифры (оба нуля справа — незначащие).

Задача 14. Выразить в градусах приближенное число 346′.

Решение: $\alpha=\frac{346'}{60'}\approx 5{,}77^\circ$.

Ответ записан в соответствии с правилом II.

Методические замечания. 1. Правило умножения и деления обычно усваивается учащимися лучше правила сложения и вычитания. Важно только, чтобы учащиеся хорошо ориентировались в определении количества значащих цифр. При этом следует обратить внимание на различие в формулировках двух первых правил: в то время как в правиле I речь идет о подсчете количества десятичных знаков, в правиле II речь идет о подсчете количества значащих цифр.

2. Как мы видели, точные данные не влияют на результат подсчета цифр при определении значности ответа. В связи с этим анализу данных должно уделяться достаточное внимание.

3. Нередки случаи, когда деление приближенных чисел удается выполнить без остатка. Учащиеся склонны думать, что результат такого деления — число точное. Такую ошибку следует предвидеть и предупредить.

4. Некоторые трудности может вызвать умножение и деление десятичных дробей с нулями справа. Необычность записи ($2{,}0\times3{,}00$ или $\frac{15{,}0}{7{,}00}$) иногда ставит учащихся в тупик: они просто не знают, что делать с записанными нулями.

Учитель должен разъяснить учащимся, что, подставляя числа в формулу, нужно обязательно писать их полностью, со всеми значащими нулями справа. Важно также подчеркнуть, что в вычислениях эти нули не участвуют, но их следует учитывать при определении количества значащих цифр в ответе.

Остановимся на вопросе об обосновании правила II, ограничившись при этом рассмотрением умножения приближенных чисел одинаковой точности

Пусть приближенные числа a и b имеют по κ значащих цифр, причем абсолютная погрешность каждого сомножителя равна 0,5 единицы κ-й значащей цифры. Если предположить, что в каждом числе запятая стоит после первой значащей цифры, то абсолютная погрешность каждого сомножителя равна $0{,}5\cdot\frac{1}{10^{\kappa-1}}$.

Можно показать [1], что при этих условиях средняя квадратическая погрешность $\sigma(a\cdot b)$ произведения ab равна

$$\sigma(a\cdot b)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{10^{\kappa-1}}.$$

Так как $1\leqslant a<10$ и $1\leqslant b<10$, то $1\leqslant ab<100$. Другими словами, произведение ab может иметь до запятой две или одну значащую цифру.

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 123—124.

В первом случае, то есть при $10 \leqslant ab < 100$, число $\frac{1}{10^{k-2}}$ есть единица k-й значащей цифры произведения. Для того чтобы можно было пользоваться правилом II, должно выполняться условие: $\sigma(a, b) \leqslant \frac{1}{10^{k-2}}$. Проверим его. Так как $1 \leqslant a < 10$ и $1 \leqslant b < 10$,

$$\text{то } a^2+b^2 < 200 \text{ и } \sigma(a \cdot b) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{10^{k-1}} <$$

$$< \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{3} \cdot 10^{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot 10^{k-2}} < \frac{1}{10^{k-2}}.$$

Итак, в рассматриваемом случае в произведении всегда можно сохранять столько же значащих цифр, сколько их имеют сомножители, то есть правило II справедливо.

Во втором случае, когда $1 \leqslant ab < 10$, единица k-й значащей цифры произведения равна $\frac{1}{10^{k-1}}$. Для того чтобы результат, полученный по правилу II, удовлетворял принципу Крылова—Брадиса, должно выполняться условие $\sigma(a \cdot b) \leqslant \frac{1}{10^{k-1}}$, то есть

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{10^{k-1}} \leqslant \frac{1}{10^{k-1}}, \text{ откуда } a^2+b^2 < 12.$$

Как видим, в этом случае правилом II, строго говоря, можно пользоваться только при условии $a^2+b^2 \leqslant 12$. Если же $a^2+b^2 > 12$, средняя квадратическая погрешность произведения будет несколько больше единицы последнего разряда. Можно, однако, подсчитать, что средняя квадратическая погрешность произведения в большинстве случаев лишь немного превышает единицу последнего разряда (порядка 1,2—1,5). Только для значений a или b, близких к 1, средняя квадратическая погрешность принимает бо́льшие значения (но не больше 2,9). Такие случаи встречаются в вычислительной практике очень редко. Поэтому можно считать, что правило II применимо во всех случаях умножения равноточных приближенных чисел.

Аналогично доказывается целесообразность применения правила II для умножения неравноточных приближенных чисел, а также для деления приближенных чисел.

Упражнения

40. Велосипедист двигался 7,0 *сек* со скоростью 8,0 *м/сек*. Найти пройденный путь.

41. Какова длина дороги, если при средней скорости 50 *км/ч* автомобиль проходит все расстояние за 3,0 *ч*?

42. Какое количество теплоты израсходовано для плавления 100 *г* льда, взятого при 0° С? Удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*.

43. Силу тяги 5 *кГ* выразили в единицах СИ:

$$5 \cdot 9{,}8 = 49 (н).$$

Найти ошибку в записи результата.

44. Сколько весят 125 *см*^{3} воды? Удельный вес воды принять равным 1,0 *Г/см*^{3}; 1,00 *Г/см*^{3}.

45. Пассажирский поезд весом 600 *Т* отходит от станции с ускорением 0,5 *м/сек*^{2}. Какова сила тяги? Трение не учитывать.

46. Какое количество серебра выделилось при электролизе раствора азотносеребряной соли, если через электролит прошло 10 *к* электричества? $к = 1{,}118$ *мг/к*.

47. В учебниках физики в связи с опытом Торричелли приводят такой расчет атмосферного давления:

$$p = dh = 13{,}6 \cdot 76 = 1033{,}6 \ (Г/см^2)$$

Правильно ли записан результат вычисления?

48. Вычислить частоту колебаний ультрафиолетового излучения с длиной волны в вакууме 0,25 *мк*.

49. Подвижной блок с учетом трения дает выигрыш в силе ≈ 2 раза. Какой силой можно поднять груз 52 *кГ* с помощью этого блока?

50. Сколько нужно сжечь спирта, чтобы выделилось 1,0 *ккал*? $q = 7000$ *ккал/кг* (с точностью до сотен).

51. Фокусное расстояние объектива телескопа 6800 *мм*, а окуляра — 40 *мм*. Найти увеличение телескопа.

52. Определить массу молекулы воды, если масса грамм-молекулы воды 18 *г*, а число Авогадро $N = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$.

53. Расстояние между двумя железнодорожными станциями 16,6 *км*. За какое время распространяется звук от одной станции до другой по воздуху? по рельсам? Скорость звука в стали 5500 *м/сек*, в воздухе 332 *м/сек*.

§ 7. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

При решении различных физических задач часто приходится возводить в квадрат и извлекать квадратный корень из приближенных чисел. Реже встречаются возведение в куб и извлечение кубического корня. С возведением в степень и извлечением корня при более высоких показателях мы имеем дело сравнительно редко. Поэтому правила подсчета цифр для этих действий формулируют лишь для возведения в квадрат и куб, а также для извлечения квадратного и кубического корня.

Правило III. *При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число*[1].

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 162.

Например, $1{,}6^2=2{,}56\approx 2{,}6$.

Так как число 1,6 имеет две значащие цифры, то и степень должна иметь две значащие цифры.

Рассмотрим задачу, в которой применяется возведение приближенного числа в квадрат.

Задача 15. Во сколько раз увеличится количество теплоты, выделяемое в электронагревателе, при увеличении тока в 1,5 раза; в 2,0 раза; в 4 раза?

Решение. Так как количество теплоты прямо пропорционально квадрату тока, то

$$n_1=1{,}5^2=2{,}25\approx 2{,}3 \text{ (раза)};$$

$$n_2=2{,}0^2=4{,}0 \text{ (раза)};$$

$$n_3=4^2=16\approx 2\underset{\sim}{0} \text{ (раз)}.$$

В последнем примере нуль в конце числа — незначащая цифра. Поэтому в данном случае ответ лучше сформулировать так: количество теплоты увеличится приближенно в два десятка раз (а не в 16 раз, как было бы при точном значении числа 4).

Аналогично применяется правило III для возведения приближенного числа в куб. Например, $2{,}1^3=9{,}261\approx 9{,}3$.

Нужно иметь в виду, что при вычислении куба погрешность превышает погрешность квадрата, и поэтому последняя цифра результата менее надежна.

Можно показать, что при возведении приближенного числа в более высокую степень (четвертую, пятую и т. д.) правило III не применимо: результат имеет меньше значащих цифр, чем основание степени.

Рассмотрим извлечение корня из приближенного числа.

Правило IV. *При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное приближенное число*[1].

Задача 16. Во сколько раз увеличится период колебания маятника, если длину его увеличить в 3,2 раза; 4,2 раза; 8,0 раз; 16 раз?

---

[1] В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 162.

Решение. Период колебания маятника пропорционален квадратному корню из длины маятника. Поэтому

$$n_1=\sqrt{3,2}\approx 1,8 \text{ (раза)};$$
$$n_2=\sqrt{4,2}\approx 2,1 \text{ (раза)};$$
$$n_3=\sqrt{8,0}\approx 2,8 \text{ (раза)};$$
$$n_4=\sqrt{16}\approx 4,0 \text{ (раза)}.$$

Последний результат требует пояснения. Так как число 16 имеет две значащие цифры, то и $\sqrt{16}$ должен по правилу IV иметь две значащие цифры. Поэтому $\sqrt{16}=4,0$, а не 4.

Результаты, получаемые по правилу IV, являются значительно более надежными, чем результаты возведения в степень. Более того, последняя цифра квадратичного и особенно кубического корня более надежна, чем последняя цифра заданного подкоренного числа.

Упражнения

54. Возвести в квадрат следующие приближенные числа: 0,40; 12,0; 3,14; 85; 350; 6370.

55. Извлечь квадратный корень из приближенных чисел: 81; 50; 400; 9,8; 0,25.

§ 8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ПОДСЧЕТА ЦИФР

Решение задач в несколько действий

В предыдущих параграфах были рассмотрены основные правила подсчета цифр для четырех арифметических действий, а также для возведения в степень и извлечения корня. При этом в каждой задаче выполнялось одно действие. В более сложных задачах решение сводится к последовательному выполнению нескольких действий.

При решении задач в несколько действий, кроме основных правил, применяют дополнительные правила подсчета цифр, позволяющие уменьшить погрешность окончательного результата или же упростить вычисления.

Правило запасной цифры

Правило V. *При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила (I—IV).*

Примечание. В окончательном результате эту «запасную цифру» отбрасывают [1].

Рассмотрим применение правила запасной цифры в задаче.

Задача 17. Сколько электрической энергии расходуется в лампочке «2,5 *в*; 0,29 *а*» за 1,2 *мин*?

Решение: $W = UIt = 2{,}5 \cdot 0{,}29 \cdot 72$.

Вычисляя первое произведение по правилам II и V, мы должны сохранить в результате две значащие цифры и третью — запасную: $2{,}5 \cdot 0{,}29 = 0{,}72\underline{5}$.

Для учета запасную цифру следует подчеркивать. Тогда $W = 0{,}72\underline{5} \cdot 72 = 52{,}\underline{2} \approx 52$ (*дж*).

В окончательном результате запасную цифру отбрасывают по правилу округления.

Что же дает применение запасной цифры? Легко проверить, что без запасной цифры результат получили бы другой — 53 *дж*, менее точный. Таким образом, применение правила запасной цифры, едва заметно усложняя вычисления, часто уменьшает погрешность окончательного результата.

Правило запасной цифры применяют и в тех случаях, когда над приближенными числами выполняют действия разной ступени.

Задача 18. Вагонетка скатывается по наклонной горке с начальной скоростью 2,6 *м/сек* и ускорением 0,65 *м/сек*^{2}. Какой путь пройдет вагонетка за 4,8 *сек*?

Решение:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad s = 2{,}6 \cdot 4{,}8 + \frac{0{,}65 \cdot 4{,}8^2}{2}.$$

Первое промежуточное действие:

$$2{,}6 \cdot 4{,}8 = 12{,}48 \approx 12{,}\underline{5} \ (м).$$

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 165.

В результате мы сохранили запасную цифру.

Несколько более сложно вычислять второе слагаемое:

$$\frac{0{,}65\cdot 4{,}8^2}{2}\approx 0{,}32\underline{5}\cdot 23{,}\underline{0}\approx 7{,}4\underline{8}.$$

В этом вычислении правило запасной цифры применено три раза: при делении на точное число 2, при возведении в квадрат и при умножении.

Итак, $s\approx 12{,}\underline{5}+7{,}4\underline{8}=19{,}\underline{9}8\approx 20$ ($м$).

При вычислении суммы применено правило 1. Так как цифра десятых в первом слагаемом запасная, то окончательный результат округлили до целых.

З а д а ч а 19. Потенциал φ большой капли воды, полученной от слияния $n=1{,}65\cdot 10^3$ мелких капель с потенциалом $\varphi_0=1{,}2\cdot 10^{-4}$ $в$ каждая, можно вычислить по формуле: $\varphi=\varphi_0\sqrt[3]{n^2}$. Найти потенциал большой капли.

Р е ш е н и е:

$$\varphi=1{,}2\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{1{,}65^2\cdot 10^6}\approx 1{,}2\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{2{,}72\underline{3}\cdot 10^6}=$$

$$=1{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 10^2\cdot\sqrt[3]{2{,}72\underline{3}}\approx 1{,}2\cdot 1{,}39\underline{6}\cdot 10^{-2}\approx$$

$$\approx 1{,}6\underline{8}\cdot 10^{-2}\approx 1{,}7\cdot 10^{-2}\,(в).$$

Так как число капель является приближенным, то при отыскании по таблице квадратов числа $1{,}65^2$ пользуемся, как и при любом вычислении с приближенными числами, правилом запасной цифры: $1{,}65^2\approx 2{,}72\underline{3}$. Точно так же мы поступили при вычислении по таблице кубического корня из приближенного числа $2{,}72\underline{3}$:

$$\sqrt[3]{2{,}72\underline{3}}\approx 1{,}39\underline{6}.$$

Заметим, что правилом запасной цифры пользуются также в тех случаях, когда при решении задач находят значения величин по таблицам: при отыскании корня из приближенного числа, логарифма и т. п. Каждое отыскание числа по таблице рассматривается как отдельное действие.

Правило предварительного округления более точных данных

При решении задач встречается немало приближенных и точных данных, представляющих собой многозначные числа. Например,

электрохимический эквивалент серебра . .	1,118 *мг/к*;
масса протона	$1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ *кг*;
давление насыщенного пара (200°С)	11 661 *мм рт. ст.*;
нормальное атмосферное давление	101 325 *н/м²* и др.

С такими числами вычисления затруднительны и рационализировать их можно, применив правило предварительного округления.

Правило VI. *Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой степени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлять, сохраняя лишь одну лишнюю цифру*[1].

Рассмотрим применение этого правила при решении следующей задачи:

Задача 20. Плотность ртути при 0° С равна 13,5955 *г/см³*. Определить массу ртути объемом 25 *см³*.

Решение: $m = 13{,}5955 \cdot 25$.

В соответствии с правилом VI сохраняем в первом сомножителе три значащие цифры. Тогда $m \approx 13{,}6 \cdot 25 = 340$ (*г*) $= 0{,}34$ (*кг*).

Вычисление без применения этого правила более сложно, но дает тот же результат:

$$m = 13{,}5955 \cdot 25 = 339{,}8875\ (г) \approx 34\underset{\sim}{0}\ (г) \approx 0{,}34\ (кг).$$

Если округлить более точное число без лишней цифры, результат будет менее точным:

$$m \approx 14 \cdot 25 = 350\ (г) = 0{,}35\ (кг).$$

Правило предварительного округления применяют, в частности, тогда, когда мы используем данные из справочных таблиц, например:

Задача 21. Вычислить скорость свободно падающего тела, если падение продолжалось 5 *сек*; 5,0 *сек*; 5,00 *сек*.

---

[1] См.: В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 166.

Решение: $v = gt$. По таблице находим $g = 9{,}80665$ *м/сек*^{2}. Для получения первого ответа нужно взять значение g с двумя значащими цифрами — 9,8 *м/сек*^{2}, второго — 9,81 *м/сек*^{2} и третьего—9,807 *м/сек*^{2}

Тогда $v_1 = 9{,}8 \cdot 5 = 49 \approx 50$ (*м/сек*);

$v_2 = 9{,}81 \cdot 5{,}0 = 49{,}05 \approx 49$ (*м/сек*);

$v_3 = 9{,}807 \cdot 5{,}00 = 49{,}035 \approx 49{,}0$ (*м/сек*).

Правило вычислений с наперед заданной точностью

Во всех ранее рассмотренных правилах подсчета цифр было установлено, какую точность результата можно получить, имея исходные данные с некоторой точностью.

Не меньший интерес, особенно для физики, представляет собой обратная задача: с какой точностью нужно иметь исходные данные, чтобы получить результат с наперед заданной точностью. Ответ на этот вопрос дает следующее правило:

Правило VII. *Если окончательный результат надо получить с некоторой наперед заданной точностью, а данные можно брать с произвольной точностью, то в этих данных следует брать по стольку цифр, сколько нужно для получения результата с одной лишней цифрой. В окончательном результате эта лишняя цифра отбрасывается*[1].

Другими словами, чтобы при сложении и вычитании приближенных чисел получить результат с точностью до единицы некоторого разряда, нужно компоненты этих действий взять с точностью на один разряд больший.

Что касается остальных действий, то для получения результата с n значащими цифрами нужно компоненты взять с $n+1$ значащей цифрой.

В окончательном результате лишнюю цифру отбрасывают по правилу округления.

Рассмотрим применения правила VII на примерах.

Пример 1. Вычислить сумму чисел

$$s = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{7}{9} + \frac{2}{11}$$

с точностью до сотых.

[1] См: В. М. Брадис. Как надо вычислять? «Просвещение», 1965, стр. 77.

Чтобы получить в сумме 2 десятичных знака, берем в каждом слагаемом 3 знака после запятой:

$$s \approx 0{,}667+0{,}200+0{,}286+0{,}778+0{,}182=2{,}113 \approx 2{,}11 .$$

Легко проверить, что, взяв слагаемые с двумя десятичными знаками, мы получим другой, менее точный результат: $s \approx 2{,}12$.

Пример 2. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 1 (точно). Найти длину окружности с двумя значащими цифрами.

Решение. $l=\pi\sqrt{2}$. В соответствии с правилом VII берем приближенные значения сомножителей с тремя значащими цифрами:

$$\pi \approx 3{,}14 ; \quad \sqrt{2} \approx 1{,}41 .$$

Тогда

$$l \approx 3{,}14 \cdot 1{,}41=4{,}4274 \approx 4{,}4 .$$

И в этом случае ответ будет менее точным, если взять сомножители с двумя значащими цифрами: $3{,}1 \cdot 1{,}4 \approx 4{,}3$.

Рассмотрим более сложные задачи, в которых применяются все ранее рассмотренные правила подсчета цифр.

Задача 22. Электрический двигатель с полезной мощностью 0,204 *квт* вращает лопатки в сосуде, вмещающем 4,50 *л* воды. Из-за трения лопаток о жидкость вода нагревается. На сколько градусов повысится температура воды за 5 *мин* (с точностью до секунды)? К. п. д. передачи не учитывать. Считать, что сосуд теплоизолирован.

Решение. Обозначив через Δt° приращение температуры за время $t=5$ *мин*$=300$ *сек*, имеем:

$$\Delta t^\circ=\frac{Nt}{mc},$$

где мощность двигателя $N=0{,}204$ *квт*$=204$ *вт*, масса воды $m=4{,}50$ *кг*, а удельная теплоемкость воды

$$c=4{,}19 \cdot 10^3 \frac{дж}{кг \cdot град} .$$

Тогда

$$\Delta t^\circ=\frac{204 \cdot 300}{4{,}50 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3} .$$

Применяя правило II для умножения, а также правило запасной цифры, получим:

$$\Delta t^\circ = \frac{6{,}120\cdot 10^4}{1{,}88\underline{6}\cdot 10^4} \approx 3{,}21\underline{2}\ \textit{град}.$$

В окончательном результате запасную цифру отбрасываем:

$$\Delta t^\circ = 3{,}21\ \textit{град}.$$

З а д а ч а 23. Танк весом $P=5{,}0\cdot 10^5$ *н* идет по вогнутому мосту со скоростью $v=45$ *км/ч*. Радиус кривизны моста $R=0{,}60$ *км*. Найти силу давления танка на середину моста.

Р е ш е н и е: Обозначим силу давления танка через F. Тогда

$$F = P + \frac{mv^2}{R} = P + \frac{Pv^2}{gR}.$$

Здесь $v=45$ *км/ч* $= \frac{45\cdot 10^3}{3600}$ *м/сек*, причем число 3600 —точное. Поэтому

$$v \approx 12{,}\underline{5}\ \textit{м/сек},$$

где цифра 5 — запасная.

Числа $P=5{,}0\cdot 10^5$ *н*, $R=0{,}60$ *км* $=6{,}0\cdot 10^2$ *м* и $g\approx 9{,}8$ *м/сек*^{2} имеют по две значащие цифры.

Тогда

$$F = 5{,}0\cdot 10^5 + \frac{5{,}0\cdot 10^5\cdot 12{,}5^2}{9{,}8\cdot 6{,}0\cdot 10^2}.$$

Вычислим отдельно числитель и знаменатель дроби, пользуясь при этом правилами III, II и V.

$$5{,}0\cdot 10^5\cdot 12{,}\underline{5}^2 = 5{,}0\cdot 15\underline{6}\cdot 10^5 = 78\underline{0}\cdot 10^5;$$

$$9{,}8\cdot 6{,}0\cdot 10^2 = 58{,}\underline{8}\cdot 10^2.$$

В этих произведениях третья значащая цифра — запасная.

Выполнив деление, получим результат с двумя значащими цифрами и одной запасной:

$$\frac{78\underline{0}\cdot 10^5}{58{,}\underline{8}\cdot 10^2} \approx 13{,}\underline{3}\cdot 10^3.$$

Наконец,

$$F \approx 5{,}0 \cdot 10^5 + 13{,}\underline{3} \cdot 10^3 = (5{,}0 + 0{,}13\underline{3}) \cdot 10^5 \approx 5{,}1 \cdot 10^5\ (н).$$

Сложение выполнено в соответствии с правилом I. Так как этот результат окончательный, запасную цифру не пишут.

Рассмотрим две задачи, которые приводят к решению уравнений.

Задача 24. Сколько граммов свинца и олова содержится в сплаве, если масса куска сплава 301 *г*, а объем 30,0 *см*³? Плотность свинца 11,4 *г/см*³, плотность олова 7,30 *г/см*³.

Решение. Обозначив массу свинца через m_1, легко составить следующее уравнение:

$$\frac{m_1}{11{,}4} + \frac{301 - m_1}{7{,}30} = 30{,}0.$$

После приведения к общему знаменателю получаем:

$$(11{,}4 - 7{,}30)m_1 = 301 \cdot 11{,}4 - 30{,}0 \cdot 7{,}30 \cdot 11{,}4.$$

Вычисление коэффициентов уравнения:

$$11{,}4 - 7{,}30 = 4{,}1\underline{0}.$$

$$301 \cdot 11{,}4 - 30{,}0 \cdot 11{,}4 \cdot 7{,}30 \approx 343\underline{0} - 342 \cdot 7{,}30 \approx$$

$$\approx 3430 - 250\underline{0} = 93\underline{0}.$$

Таким образом, число m_1 удовлетворяет уравнению:

$$4{,}1\underline{0}m_1 = 93\underline{0},$$

$$\text{откуда } m_1 = \frac{930}{4{,}1\underline{0}} \approx 22\underline{7}\ (г).$$

Масса олова равна

$$m_2 = 301 - 22\underline{7} = 7\underline{4}\ (г).$$

Отбрасывая запасные цифры, получаем:

$$m_1 = 23\underset{\sim}{0}\ г = 0{,}23\ кг; \quad m_2 = 7\underset{\sim}{0}\ г = 0{,}07\ кг.$$

Задача 25. С отвесного обрыва упал камень. Человек, стоящий у того места, с которого упал камень, услышал звук через 4,0 *сек*. Найти глубину обрыва. Число g взять равным 10 *м/сек*².

Решение. Обозначим через t время падения камня, а через $t_{зв}$ — время распространения звука. Так как путь, пройденный звуком, равен расстоянию, пройденному камнем, то

$$vt_{зв}=\frac{gt^2}{2},$$

где v — скорость звука. Так как $t+t_{зв}=4{,}0$, получаем уравнение:

$$vt_{зв}=\frac{g(4{,}0-t_{зв})^2}{2}.$$

Значение v берем равным 332 *м/сек*, а значение $g=10$ *м/сек*^{2} в соответствии с условием задачи. Такое значение числа g в целях упрощения часто применяют в физических задачах. Так как погрешность этого числа не превышает 0,2 *м/сек*^{2}, то число 10 *м/сек*^{2} имеет две верные значащие цифры. Тогда $\frac{g}{2}=\frac{10}{2}=5{,}0$ (*м/сек*^{2}).

Полученное выше квадратное уравнение запишется так:

$$332t_{зв}=5{,}0(4{,}0-t_{зв})^2.$$

Приводим это уравнение к нормальному виду:

$$5{,}0t_{зв}^2-(332+5{,}0\cdot 2\cdot 4{,}0)t_{зв}+5{,}0\cdot 4{,}0^2=0.$$

Как и в предыдущей задаче, вычисление коэффициентов уравнения выполняем, пользуясь правилами подсчета цифр:

$$332+5{,}0\cdot 2\cdot 4{,}0=332+40{,}\underline{0}=372;$$
$$5{,}0\cdot 4{,}0^2=80.$$

Таким образом, число $t_{зв}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$5{,}0t_{зв}^2-372t_{зв}+80=0.$$

Корень этого уравнения равен:

$$t_{зв}=\frac{186-\sqrt{186^2-80\cdot 5{,}0}}{5{,}0}.$$

(Второе значение $t_{зв}$ не удовлетворяет условию задачи, так как $t_{зв}<4$.)

По правилам подсчета цифр постепенно получаем:

$$186^2=34596\approx 346\underline{0}\underset{\sim}{0}\quad \text{(правило III)};$$

$$80\cdot 5{,}0=40\underline{0}\quad \text{(правило II)};$$

$$346\underline{0}\underset{\sim}{0}-40\underline{0}=342\underline{0}\underset{\sim}{0}\quad \text{(правило I-а)};$$

$$\sqrt{34\underline{2}\underset{\sim}{0}0}=184{,}\underline{9}\quad \text{(правило IV)};$$

$$186-184{,}\underline{9}=1{,}\underline{1}\quad \text{(правило I-а)};$$

$$1{,}\underline{1}:5{,}0=0{,}2\underline{2}\quad \text{(правило II)}.$$

Итак, $t_{зв}\approx 0{,}22$ *сек.*

Ответ $t\approx 0{,}22$ *сек* не окончательный, поэтому в нем сохранена запасная цифра.

Для вычисления глубины обрыва пользуемся формулой пути равномерного движения:

$$h=v_{зв}t_{зв}=332\cdot 0{,}2\underline{2}=7\underline{3},\underline{0}4\approx 7\underset{\sim}{0}\ (м).$$

В полученном ответе только одна значащая цифра, то есть искомая глубина обрыва определена с точностью до десятков метров. Уменьшение количества значащих цифр объясняется вычитанием близких чисел 186 и 184,9.

Для того чтобы в этой задаче получить более точный ответ, надо знать более точное значение $t+t_{зв}$.

Методические замечания. 1. Мы рассмотрели дополнительные правила подсчета цифр: правило запасной цифры и правило предварительного округления. В обоих правилах речь идет о целесоообразности сохранения одной лишней цифры.

Обратим внимание на некоторые особенности в применении этих правил на практике.

В правиле запасной цифры лишняя цифра в промежуточных вычислениях (она называется запасной) не является верной. Запасная цифра не учитывается при подсчете количества значащих цифр. Отмечая запасную цифру специальным значком, мы как бы подчеркиваем, что она пишется временно, с целью уменьшения погрешности ответа, а в окончательном результате должна быть отброшена.

Что касается лишней (дополнительной) цифры, которую мы сохраняем по правилу предварительного округления в более точных данных, то она является верной и должна учитываться при подсчете количества значащих цифр.

2. Правило запасной цифры затрудняет учащихся шестых классов, и поэтому многие учителя математики и физики не применяют этого правила, оставляя изучение его на последующие классы. В результате учащиеся приобретают навыки, от которых их потом трудно отучить. Не ставя себе целью выработку у учащихся шестых классов прочных навыков, применять правило запасной цифры следует начиная именно с шестого класса.

3. При вычислении дробных выражений учащиеся часто применяют сокращение дроби, что при точных числах дает некоторую экономию. Выполняя сокращение дроби в вычислениях с приближенными числами, нужно иметь в виду, что сокращение дроби — это фактически деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же точное число. Поэтому при сокращении дроби надо применять правило деления приближенного числа на точное (правило II).

Нетрудно убедиться, что сокращение дроби не приводит к существенной рационализации вычислений, а нередко усложняет их. Поэтому можно рекомендовать в вычислениях с приближенными числами сокращение дробей не выполнять. В целесообразности рекомендации можно убедиться, решив задачу № 62 из упражнения к данному параграфу и выполнив вычисления с сокращением дроби и без сокращения.

4. В физике имеется ряд формул, в которых правая часть представляет собой алгебраическую сумму обратных величин, например формула проводимости разветвления $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$; формула емкости конденсаторов при последовательном соединении $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$; формула линзы $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d}$. При вычислениях по этим формулам целесообразно в большинстве случаев каждое слагаемое представить десятичной дробью; для этого надо разделить числитель на знаменатель, а еще лучше — воспользоваться значениями обратных ве-

личин из таблиц В. М. Брадиса (таблица II) или из стабильного задачника по физике (в приложении).

Нередко учащиеся в подобных вычислениях приводят дроби к общему знаменателю. Достаточно решить задачу № 63 из упражнений к данному параграфу, чтобы убедиться в нерациональности такого способа вычисления.

5. Нередко учащиеся производят проверку результата вычисления по известным правилам: сложение — вычитанием; умножение — делением; проверку корня уравнения — подстановкой в уравнение и т. д. В приближенных вычислениях такая проверка, без сомнения, носит приближенный характер. Проверка будет более точной, если для нее брать не окончательный результат вычисления, а предварительный с запасной цифрой (не округленный). Рекомендуется решить задачу № 65 из упражнения к этому параграфу.

Упражнения

56. Какую силу необходимо приложить при поднятии груза по наклонной плоскости, если вес груза 52 *кГ*, длина наклонной плоскости 1,7 *м*, а высота 0,86 *м*? Трение пренебрегаемо мало.

57. Какое количество теплоты израсходовано на нагревание 2,0 *кг* воды от 15,5 до 80° С? $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ *дж/кг · град.*

58. Девочка массой 35 *кг* качается на качелях с длиной веревок 1,8 *м*. Какова сила натяжения веревок в момент, когда качели проходят положение равновесия со скоростью 2,5 *м/сек*?

59. Сани скатываются с горы с начальной скоростью 1,25 *м/сек* и ускорением 0,50 *м/сек*^{2}. Какой путь пройдут сани точно за 1 *сек*; 2 *сек*; 3 *сек*?

60. Определить период колебания маятника длиной 1,00 *м*.

61. С какой силой давит атмосфера на площадку 50 *м*^{2}? Атмосферное давление нормальное — 101 325 *н/м*^{2}.

62. У часов-ходиков гиря весом 0,82 *кГ* опускается за 24 *ч* на 120 *см*. Определить мощность гири-двигателя.

63. Проводники сопротивлением 2,7; 3,5 и 4,2 *ом* соединены параллельно. Найти их общее сопротивление.

64. Тело массой 5,00 *кг* движется равномерно по окружности радиуса 2,0 *м* с угловой скоростью 8,6 *рад/сек*. Найти центростремительную силу.

65. Длины плеч рычага (весом которого можно пренебречь) $AO = 2{,}0$ *дм*; $OB =$

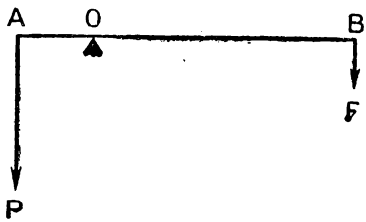


Рис. 5.

$=7{,}0$ *дм* (рис. 5). К точке A подвешен груз $P=5{,}0$ *кГ*. Какую силу надо приложить к точке B, чтобы рычаг находился в равновесии? Произвести проверку решения.

66. Лыжник спускается с горы длиной 128 *м*. Сколько времени займет спуск, если ускорение равно 0,40 *м/сек*^{2}, а начальная скорость 6,0 *м/сек*?

§ 9. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ И ЛОГАРИФМЕТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ

Применение таблиц логарифмов и логарифмической линейки — важное средство рационализации вычислений.

В школе широко применяют таблицы логарифмов с четырьмя десятичными знаками (четырехзначные таблицы логарифмов)[1], а также логарифмическую линейку, заменяющую таблицы логарифмов с тремя знаками. Для удобства в стабильном сборнике таблиц В. М. Брадиса помещена таблица функции 10^x для определения числа по его логарифму (ее часто называют таблицей антилогарифмов)[2].

Если заданные числа точные, то в принципе логарифмы этих чисел могут быть записаны с произвольной точностью. Практически логарифмы точных чисел в условиях школы записывают с четырьмя десятичными знаками.

Для приближенных чисел количество цифр десятичного логарифма определяется не только тем, какими таблицами располагают, но и точностью исходных данных. При этом можно пользоваться таким правилом:

Правило VIII. *В значении десятичного логарифма приближенного числа сохраняют столько десятичных знаков, сколько значащих цифр имеет заданное число.*

Например, $\lg 2{,}43 \approx 0{,}386$; $\lg 12{,}1 \approx 1{,}083$; $\lg 0{,}65 \approx \bar{1}{,}81$; $\lg 7{,}5 \cdot 10^4 \approx 4{,}88$.

Аналогичное правило существует для определения числа по заданному значению логарифма.

Правило IX. *При определении числа по заданному значению десятичного логарифма сохраняют в числе*

---

[1] См.: В. М. Брадис. Четырехзначные математические таблицы. «Просвещение», 1965, табл XIII.

[2] См.: В. М. Брадис. Четырехзначные математические таблицы. «Просвещение», 1965, табл. XIV.

столько значащих цифр, сколько десятичных знаков имеет мантисса логарифма.

Примеры: $\lg x = 2{,}07$ (два десятичных знака); $x \approx 120 = 1{,}2 \cdot 10^2$ (две значащие цифры);

$\lg x = 0{,}0324$; $x \approx 1{,}077$; $\lg x = \bar{1}{,}0074$; $x \approx 0{,}1017$; $\lg x = 4{,}93$; $x \approx 8{,}5 \cdot 10^4$.

В каждом из рассмотренных примеров количество значащих цифр числа x равно количеству десятичных знаков в мантиссе логарифма.

Рассмотрим задачи, при решении которых, наряду с другими правилами подсчета цифр, применяются правила VIII и IX.

Задача 26. Масса M вещества, сохраняющаяся в процессе радиоактивного распада за время t, может быть вычислена по формуле $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — начальная масса вещества, а T — период полураспада. Сколько радиоактивного вещества останется по истечении 14 *ч*, если период полураспада равен 48 *ч*, а первоначальное количество вещества равно 135 *г*? Считать, что время определено с точностью до минут.

Решение. Так как числа 14 и 48 *ч* заданы с точностью до минут, то число $t = 14$ *ч* $= 14 \cdot 60$ *мин* $= 840$ *мин* имеет три, а число $T = 48$ *ч* $= 48 \cdot 60$ *мин* $= 2880$ *мин* — четыре значащие цифры.

Тогда

$$M = 135 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{840}{2880}} \approx 135 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}2917}.$$

При делении числа 840 на число 2880 сохраняем три значащие цифры (правило II) и одну запасную цифру (правило V).

Для вычисления полученного выражения находим $\lg M$: $\lg M = \lg 135 - 0{,}2917 \cdot \lg 2$.

Так как число 2 — точное, то его логарифм может быть записан с произвольной точностью. Применяя правило VI, берем в значении $\lg 2$ на одну значащую цифру больше, чем имеет число 0,2917, то есть $\lg 2 \approx 0{,}3010$. Число 135 имеет три значащие цифры. По правилу VIII число $\lg 135$ надо взять с тремя десятичными знаками, но так как этот результат является промежуточным, сохраняем запасную цифру: $\lg 135 \approx 2{,}130\underline{3}$. Таким образом,

$$\lg M = 2{,}130\underline{3} - 0{,}291\underline{7} \cdot 0{,}3010 \approx 2{,}130\underline{3} - 0{,}0878\underline{0} = 2{,}042\underline{5}\,.$$

Этот результат еще не окончательный, поэтому запасную цифру сохраняем. Пользуясь таблицей функции 10^x, находим:

$$M \approx 110{,}\underline{3}\,.$$

Так как число $2{,}042\underline{5}$ имеет три десятичных знака (четвертая цифра $\underline{5}$ запасная), то по правилу IX в числе M сохраняем три значащие цифры: $M \approx 110$ *г*.

Задача 27. Какую скорость приобретает корпус ракеты массой $M = 0{,}20$ *т*, израсходовав $m = 10$ *т* горючего при скорости истечения $u = 2{,}85$ *км/сек*?

Решение. По формуле Циолковского

$$v = 2{,}3026u \cdot \lg\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Вычислим, прежде всего, $\lg\left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

Так как числа $m = 10$ *т* и $M = 0{,}20$ *т* имеют по две значащие цифры, то и число $\frac{m}{M} = \frac{10}{0{,}20} = 50$ имеет две значащие цифры. Пользуясь правилом VIII и правилом запасной цифры, имеем: $\lg 51 \approx 1{,}70\underline{8}$.

Тогда $v = 2{,}3026 \cdot 2{,}85 \cdot 1{,}708 \approx 2{,}30\underline{3} \cdot 2{,}85 \cdot 1{,}70\underline{8} \approx$ $\approx 6{,}55\underline{8} \cdot 1{,}70\underline{8} \approx 11{,}2\underline{0} = 11{,}2$ *км/сек* (вторая космическая скорость).

Правила VIII и IX применимы в любых вычислениях, где приходится находить логарифмы чисел, заданных в условии, или же пользоваться логарифмами для рационализации вычислений.

В тех случаях, когда при помощи таблиц логарифмов (или логарифмической линейки) вычисляют одночленное выражение, можно пользоваться также следующим правилом подсчета цифр:

Правило X. *При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков, на 1 большим.*

В окончательном результате последнюю значащую цифру отбросить[1].

Можно показать, что при вычислении одночленного выражения применение правила X эквивалентно вычислениям по правилам VIII и IX (с применением правила запасной цифры).

Методические замечания. 1. В физических задачах данные в большинстве случаев приведены с точностью в две-три значащие цифры, что позволяет при вычислениях пользоваться логарифмической линейкой. Линейку следует предпочесть таблице логарифмов, так как линейка позволяет выполнить вычисления быстрее.

2. Нужно иметь в виду, что, пользуясь логарифмической линейкой, результат следует округлять по правилам подсчета цифр, чтобы точность результата соответствовала точности исходных данных.

Иногда утверждают, что логарифмическая линейка автоматически обеспечивает результат по правилам подсчета цифр. Такое утверждение ошибочно. Например, при делении приближенных чисел 9,8 : 4,5 по линейке получаем 2,18, а по правилу подсчета цифр надо 2,2.

3. Пользуясь линейкой, мы можем применить правило запасной цифры только в том случае, когда данные имеют одну-две значащие цифры. Невозможность применения запасной цифры в остальных случаях несколько ухудшает результат вычислений.

Упражнения

67. Найти десятичные логарифмы следующих приближенных чисел 24; 245; 6,27; 1,934; 0,35; 0,007; $2{,}75 \cdot 10^3$; $6{,}50 \cdot 10^5$.

68. Найти число по данному значению его десятичного логарифма: 0,53; 2,314; 3,7; $\bar{1},041$; $\bar{3},42$; 6,3021; 0,0048.

69. На какой высоте h летит самолет, если давление атмосферы на этой высоте $p=400$ *мм рт. ст.*, а у поверхности земли давление p_0 — нормальное? Задача решается по формуле

$$h=1{,}8\cdot 10^4 \lg \frac{p_0}{p} \ (\text{м}).$$

70. Относительная доля радиоактивного углерода ${}_6C^{14}$ в старом куске дерева составляет 0,0416 долю его в живых растениях. Каков возраст этого куска дерева? Период полураспада ${}_6C^{14}$ равен 5570 лет. Задача решается по формуле $M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — начальная масса вещества, а T — период полураспада.

[1] См. В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 166.

§ 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Количество значащих цифр в значении тригонометрической функции приближенного угла зависит от того, с какой точностью задан угол. В процессе измерений углы могут быть получены с точностью до градусов или с точностью до минут, секунд и даже еще точнее. Однако в задачах из школьного курса физики углы обычно заданы с точностью до градусов. Поэтому при решении задач, требующих применения тригонометрии, можно рекомендовать пользоваться таким правилом подсчета цифр:

Правило XI. *Если угол задан с точностью до градусов, то в значении тригонометрической функции следует сохранять две значащие цифры.*

Это правило применимо в большинстве случаев. Редкими исключениями пренебрегаем.

Примеры: $\sin 15° \approx 0{,}26$; $\cos 73° \approx 0{,}29$;
$\operatorname{tg} 18° \approx 0{,}32$; $\operatorname{tg} 52° \approx 1{,}3$; $\operatorname{ctg} 20° \approx 2{,}7$.

Рассмотрим несколько примеров применения правила XI в физических задачах.

Задача 28. Световой луч падает в воздухе на поверхность некоторой среды. Найти показатель преломления среды, если угол падения равен 18°, а угол преломления 12°.

Решение:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \text{ где } \alpha = 18°,\ \gamma = 12°.$$

Так как углы 18° и 12° заданы с точностью до градусов, то в значениях синуса этих углов надо сохранить по две значащие цифры. Как уже отмечалось, отыскание значения синуса по таблице должно рассматриваться как отдельное действие. Поэтому в промежуточных результатах надо взять запасные цифры:

$$n = \frac{\sin 18°}{\sin 12°} \approx \frac{0{,}309}{0{,}20\underline{8}} \approx 1{,}4\underline{9} \approx 1{,}5.$$

Задача 29. Вычислить работу силы 1 *н* (точно) на пути 24,98 *м*, если угол между направлением силы и направлением перемещения равен 55°.

Решение: $A = Fs \cos \alpha$.

По условию $F = 1$ *н* (точно); в числе $s = 24{,}98$ *м* четыре значащие цифры, а по правилу XI, применяя запасную цифру, можно записать: $\cos \alpha = \cos 55° \approx 0{,}57\underline{4}$. Тогда

$$A = 1 \cdot 24{,}98 \cdot 0{,}57\underline{4}.$$

Так как число $0{,}57\underline{4}$ имеет только две значащие цифры, можно для упрощения вычислений предварительно округлить число 24,98 до трех значащих цифр:

$$A = 25{,}0 \cdot 0{,}57\underline{4} = 14{,}35 \approx 14 \ (\text{дж}).$$

Задача 30. Найти коэффициент трения покоя для тела, находящегося на наклонной плоскости, если тело начинает скользить вниз при угле наклона 48°.

Решение: $k = \operatorname{tg} \alpha$,
где угол $\alpha = 48°$. По правилу XI

$$k = \operatorname{tg} 48° \approx 1{,}1.$$

Задача 31. На мачте висит лампа силой света 1118 *св*. Какова освещенность почвы в точке, удаленной на расстояние 22 *м* от лампы, если угол падения лучей в эту точку равен 56°?

Решение:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos\alpha, \text{ то есть}$$

$$E = \frac{1118}{22^2} \cos 56°.$$

Число 1118 *св* целесообразно предварительно округлить: $1118 \approx 112\underline{0}$. Тогда

$$E \approx \frac{1120}{48\underline{4}} \cos 56° \approx 2{,}3\underline{1} \cdot 0{,}55\underline{9} = 1{,}2\underline{8}129 \approx 1{,}3 \ (\text{лк}).$$

Мы рассмотрели ряд примеров вычисления значений тригонометрических функций углов, заданных с точностью до градусов.

В физических задачах бывает необходимость найти значение угла по известному значению тригонометрической функции. Наиболее точно угол определяется по тангенсу и котангенсу.

Не останавливаясь на этих вопросах подробно, сформулируем правило подсчета цифр, позволяющее находить углы с точностью до градусов. В большинстве случаев это правило оказывается достаточным для решения задач из школьного курса физики.

Правило XII. *Если значение тригонометрической функции имеет не менее двух значащих цифр, то значение соответствующего угла записывают с точностью до градусов.*

Примеры: $\sin\alpha=0{,}12$; $\alpha\approx 7^\circ$;
$\cos\beta=0{,}084$; $\beta\approx 84^\circ$;
$\operatorname{tg}\gamma=0{,}716$; $\gamma\approx 36^\circ$;
$\operatorname{tg}\varphi=1{,}8$; $\varphi\approx 61^\circ$.

Рассмотрим задачу, в которой применяются правила XI и XII.

Задача 32. Найти угол преломления солнечных лучей, падающих на поверхность воды под углом 65° к горизонту.

Решение. Значение показателя преломления берем с тремя значащими цифрами (правило VI): $k=1{,}33$. Поэтому $\sin\gamma=\frac{\sin(90^\circ-65^\circ)}{1{,}33}=\frac{\sin 25^\circ}{1{,}33}\approx\frac{0{,}42\underline{3}}{1{,}33}\approx 0{,}31\underline{8}$.

В значении $\sin 25^\circ\approx 0{,}42\underline{3}$ последняя цифра запасная. Результат $\sin\gamma\approx 0{,}31\underline{8}$ является промежуточным, поэтому запасную цифру пока сохраняем. Так как $\sin\gamma$ имеет две значащие цифры, то в соответствии с правилом XII значение угла берем из таблицы с точностью до градусов: $\gamma\approx 19^\circ$.

Методические замечания. 1. Правило XI верно для подавляющего большинства острых углов, наиболее часто встречающихся на практике, то есть для «средних углов», отличающихся как от углов, близких к прямому, так и от малых углов.

2. Правило XI применимо в том случае, когда угол задан с точностью до градусов. Если угол задан с большей точностью, нужно иметь в виду такое дополнение к правилу X: в тех случаях, когда угол задан с точностью до десятков минут или с точностью до минут, в значении тригонометрической функции надо сохранять соответственно на одну или две значащие цифры больше, чем рекомендует правило XI.

Примеры: $\sin 54^\circ 24'\approx 0{,}8131$; $\cos 17^\circ 30'\approx 0{,}9\tilde{5}4$;

$\operatorname{tg} 18^\circ 1\tilde{0}'\approx 0{,}328$; $\operatorname{tg} 50^\circ 12'\approx 1{,}200$.

Таким образом, если в какой-либо задаче угол задан с точностью до минут и результат желательно получить не с двумя, а с бóльшим числом значащих цифр, учитель может сообщить учащимся указанное выше дополнение к правилу XI.

3. При вычислениях с тригонометрическими функциями целесообразно пользоваться и методом границ (см. § 4). Применение этого метода основано на том, что по границам изменения угла легко найти нижнюю и верхнюю границы каждой тригонометрической функции.

Ограничимся рассмотрением острых углов. Для этих углов синус является функцией возрастающей, то есть большему значению угла соответствует большее значение синуса. Например, если

$$25^\circ < \alpha < 26^\circ, \text{то } \sin 25^\circ < \sin\alpha < \sin 26^\circ.$$

Аналогично находят нижнюю и верхнюю границы тангенса.

Функции косинус и котангенс, наоборот, с увеличением острого угла уменьшаются. Поэтому если

$$25^\circ < \alpha < 26^\circ, \qquad \text{то } \cos 25^\circ > \cos\alpha > \cos 26^\circ.$$

При решении задач будем пользоваться также правилами отыскания границ для арифметических действий. Рассмотрим вычисления по методу границ в задаче 28.

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \text{ где } \alpha = 18^\circ, \ \gamma = 12^\circ.$$

Будем считать, что угол имеет абсолютную погрешность 30′.

Тогда $\quad 17^\circ 30' < \alpha < 18^\circ 30'$ и $11^\circ 30' < \gamma < 12^\circ 30'$.

Напомним еще раз, что большему острому углу соответствует большее значение синуса. Поэтому

$$\sin 17^\circ 30' < \sin\alpha < \sin 18^\circ 30' \text{ и } \sin 11^\circ 30' < \sin\gamma < \sin 12^\circ 30'.$$

Применяем правило вычисления НГ и ВГ частного (см. § 4),

$$\frac{\sin 17^\circ 30'}{\sin 12^\circ 30'} < \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} < \frac{\sin 18^\circ 30'}{\sin 11^\circ 30'};$$

то есть

$$\frac{0{,}3007}{0{,}2164} < \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} < \frac{0{,}3173}{0{,}1994},$$

или

$$1{,}38 < n < 1{,}59.$$

При округлении границ нужно иметь в виду, что округление НГ всегда выполняют с недостатком, а округление ВГ — с избытком, сохраняя при этом в границах одну-две несовпадающие цифры.

Таким образом, $\quad n = \frac{1{,}38 + 1{,}59}{2} = \frac{2{,}97}{2} = 1{,}485,$

причем $\Delta n = \frac{1,59-1,38}{2} = \frac{0,21}{2} = 0,105.$

Округлив значение n до десятых (при этом абсолютная погрешность увеличится на 0,015), получаем окончательно:

$$n = 1,5(\pm 0,12).$$

Этот результат совпадает с ответом, полученным выше на основании правила X.

Как отмечалось в § 4, вычисления удобно располагать в таблице:

$$n = \frac{1,38+1,59}{2} = \frac{2,97}{2} = 1,485;$$

$$\Delta n = \frac{1,59-1,38}{2} = \frac{0,21}{2} = 0,105;$$

$$n = 1,5(\pm 0,12).$$

	НГ	ВГ
α	17°30′	18°30′
$\sin\alpha$	0,3007	0,3173
γ	11°30′	12°30′
$\sin\gamma$	0,1994	0,2164
$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$	1,38	1,59

Упражнения

71. Заполнить таблицу, полагая заданные углы числами приближенными:

№	Углы	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
1	2°			
2	12°			
3	28°			
4	49°			
5	76°			
6	87°			

72. Повторить упражнение 71, но значения тригонометрических функций записать с запасной цифрой.

73. Заполнить таблицу, полагая заданные значения тригонометрических функций числами приближенными:

№	$\sin\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\mathrm{tg}\,\alpha$	α
1	0,064		0,081		0,18	
2	0,27		0,213		0,75	
3	0,48		0,37		1,38	
4	0,51		0,52		2,5	
5	0,973		0,71		3,7	
6	0,99		0,998		4,5	

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ШКОЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 11. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА И ИХ ПОГРЕШНОСТИ

Средства измерений делятся на меры и измерительные приборы.

Меры — это тела или устройства, предназначенные для измерений и воспроизводящие одно или несколько значений данной физической величины (измерительная линейка, рулетка, гиря, мензурка, катушка электрического сопротивления и т. д.).

Измерительные приборы — устройства, предназначенные для измерений и имеющие части, которые воспринимают измеряемую величину и преобразуют ее в показание (весы, штангенциркуль, термометр, амперметр и т. п.).

Номинальное значение меры — то значение, которое на ней указано (гиря 200 *г*, мензурка вместимостью 250 *мл* и пр.).

Действительное значение меры — значение, полученное в результате измерения с помощью более совершенных методов и средств измерения (с помощью образцовой меры).

Рассмотрим вопрос о погрешностях мер и измерительных приборов.

Погрешностью меры (основной) называют разность между номинальным и действительным значением меры.

Погрешностью измерительного прибора (основной) называют разность между измеренным значением величины и ее действительным значением (измеренным образцовым прибором).

Под *поправкой* понимают число, равное погрешности по абсолютной величине, но взятое с противоположным знаком. Для исключения погрешности достаточно прибавить поправку (с учетом ее знака) к номинальному значению меры или показанию прибора.

В школьной практике в измерениях по физике поправки обычно не вносят, за исключением поправок на погрешности от неисправности измерительных средств. Таковы поправки на смещение нулевой точки термометра, погнутость стрелки амперметра и т. д. Допустим, например, что стрелка амперметра при отсутствии тока устанавливается не на нулевой отметке, а на отметке 0,1 *а*. Тогда погрешность равна $+0{,}1$ *а*, а поправка $-0{,}1$ *а* и при показании 1,4 *а* результат отсчета $I=1{,}4+$ $+(-0{,}1)=1{,}3$ (*а*).

Допустимые погрешности мер и измерительных приборов — предельные погрешности, абсолютные или относительные, установленные ГОСТами. Допустимые погрешности в большинстве случаев имеют двойной знак, то есть могут быть направлены как в одну, так и в другую сторону.

Приведенная погрешность измерительного прибора — погрешность, выраженная в процентах от диапазона шкалы A:

$$\gamma=\frac{\Delta}{A}\cdot 100\% .$$

Зная приведенную погрешность, можно найти предельную абсолютную погрешность для любого показания прибора

$$\Delta=\frac{\gamma A}{100}.$$

Например, если у амперметра с пределом измерения 2 *а* приведенная погрешность составляет $\pm 4\%$, то предельная абсолютная погрешность любого показания

$$\Delta=\pm\frac{4\cdot 2}{100}=\pm 0{,}08\ (a).$$

По точности измерительные приборы делят на классы.

Классом точности измерительного прибора (для всех стрелочных приборов, таких, как манометр, вольтметр и др.) называют число, равное приведенной погрешности. Класс точности прибора обычно указывают в аттестате и на циферблате прибора. Существуют стрелочные приборы следующих классов: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Чем меньше номер класса, тем точнее прибор.

Чувствительностью измерительного прибора (порогом чувствительности) называют наименьшее значение измеряемой величины, вызывающее заметное изменение показаний прибора.

В следующей таблице приведена чувствительность школьных лабораторных весов при различных нагрузках:

Нагрузка	Чувствительность
200 *Г*	200 *мГ*
100 *Г*	100 *мГ*
20 *Г*	10 *мГ*

Рассмотрим допустимые погрешности мер и измерительных приборов, встречающихся в школьных кабинетах физики (табл. 1 и 2). В таблице 2 указан также класс точности некоторых измерительных приборов.

Таблица 1

Допустимые погрешности мер

№ п/п	Меры	Номинальное значение	Цена деления *c*	Допустимая погрешность	
				в единицах измерения	в цене деления *c*
1	Измерительная стальная линейка, ГОСТ 427-56	300—1000 *мм*	1 *мм*	от ±0,1 до ±0,2 *мм*	от ±0,1 *c* до ±0,2 *c*
2	Рулетка измерительная металлическая, тип РСК и РЖ, ГОСТ 7502-61	1 *м*	1 *мм*	±0,4 *мм*	± 0,4 *c*
3	Цилиндры измерительные, ГОСТ 1770-64[1]	100 *мл* 250 *мл* 500 *мл*	1 *мл* 5 *мл* 5 *мл*	±1 *мл* ±2,5 *мл* ±5 *мл*	±*c* ±0,5 *c* ±*c*
4	Мензурки конические, ГОСТ 1770-64	50 *мл* 100 *мл* 250 *мл*	5 *мл* 10 *мл* 25 *мл*	±2,5 *мл* ±5 *мл* ±5 *мл*	±0,5 *c* ±0,5 *c* ±0,2 *c*
5	Бюретки прямые, ГОСТ 1770-64	25—50 *мл*	0,1 *мл*	±0,05 *мл*	±0,5 *c*

[1] По школьной терминологии — мензурки цилиндрические.

Продолжение

№ п/п	Меры	Номинальное значение	Цена деления c	Допустимая погрешность	
				в единицах измерения	в цене деления c
6	Гири 4-го класса[1] (для технических анализов обычной точности), ГОСТ 7328-61	100 *г* 50 *г* 20 *г* 10 *г* 5 *г* 2 *г* 1 *г*	— — — — — — —	±0,04 *г* ±0,03 *г* ±0,02 *г* ±0,012 *г* ±0,008 *г* ±0,006 *г* ±0,004 *г*	
7	Набор сопротивлений (школьный)	1 *ом* 2 *ом* 4 *ом*	— — —	±0,03 *ом* ±0,06 *ом* ±0,12 *ом*	
8	Магазин сопротивлений штепсельный (школьный)	10 *ом* 20 *ом* 20 *ом* 50 *ом*	— — — —	±0,15 *ом* ±0,3 *ом* ±0,3 *ом* ±0,75 *ом*	

[1] Встречающиеся в школах гири 2-го класса имеют погрешности очень незначительные, и ими можно пренебречь.

Методические замечания. 1. С понятиями и терминами, рассмотренными в § 11, можно постепенно знакомить учащихся VI—X классов, однако знания строгих определений требовать не следует.

2. Таблицы 1 и 2 составлены авторами на основе ГОСТов, каталогов, аттестатов и описаний, прилагаемых к приборам. Таблицы не охватывают, конечно, всего многообразия приборов, которые могут встретиться в той или иной школе. Необходимые дополнения к таблицам легко сделать, используя соответствующую документацию. Такие таблицы (увеличенные по размерам) целесообразно вывесить в кабинете физики для сведения учащихся. Можно также сделать соответствующие пометки на самих измерительных приборах и мерах.

Таблица 2

Допустимые погрешности измерительных приборов

№ п/п	Измерительные приборы	Предел измерения	Цена деления c	Точность: класс	Точность: приведенная погрешность	Допустимая погрешность: в единицах измерения	Допустимая погрешность: в цене деления c
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Штангенциркуль типа ШЦ, ГОСТ 166-51	150 *мм*	0,02 *мм*	—	—	±0,02 *мм*	± *c*
		200 *мм*	0,05 *мм*	—	—	±0,05 *мм*	± *c*
		300 *мм*	0,1 *мм*	—	—	±0,1 *мм*	± *c*
2	Микрометр типа МК, ГОСТ 6507	25 *мм*	0,01 *мм*	—	—	±4 *мк*	±0,4 *c*
3	Динамометр Бакушинского	400 *Г*	10 *Г*	—	—	±5 *Г*	±0,5 *c*
4	Весы лабораторные с указателем положения равновесия, класса 2 *в*, ГОСТ 798-53	200 *г*	—	—	—	±0,1[1] *г*	—
5	Весы ручные, ГОСТ 359-54[2]	100 *г*	—	—	—	±0,05 *г*[1]	—
6	Секундомер, тип С-1, ГОСТ 5072-62	от 10 *сек* до 6 *ч*	0,2 *сек*	—	—	±1 *сек* за время 30 *мин*	—
7	Секундомер электрический демонстрационный школьный	12 *сек*	0,01 *сек*	—	—	±0,005 *сек*	±0,5 *c*
8	Барометр ртутный чашечный МД-21, ГОСТ 7466-53	680—1110 *мб* и 810—1110 *мб*	1 *мб*	—	—	±0,3 *мб*	±0,3 *c*
9	Барометр-анероид школьный БР-52	720—780 *мм рт. ст.*	1 *мм рт. ст.*	—	—	±3 *мм рт. ст.*	±3 *c*

[1] При наибольшей допустимой нагрузке.
[2] Типа аптекарских.

Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8
10	Манометр жидкостный с U-образной трубкой, школьный	40 *см*	1 *см*	—	—	±0,2 *см*	±0,2 *с*
11	Гигрометр волосной в круглой оправе МВК	30—100%	1%	—	—	±5%	±5 *с*
12	Термометры ртутные лабораторные, ГОСТ 215-57	от—30 до 1° С	1° С	—	—	±1°	±*с*
		от 0 до 100° С	0,5° С			±1°	±2 *с*
		»	1° С	—	—	±1°	±*с*
		»	2° С	—	—	±2°	±*с*
13	Термометры жидкостные (нертутные), ГОСТ 9177-59	от—20 до +100° С	1° С	—	—	±1°	±*с*
14	Амперметр лабораторный (школьный) с равномерной шкалой	2 *а*	0,1 *а*	—	±4%	±0,08 *а*	±0,8 *с*
15	Амперметр типа ПМ-70, постоянного тока	1 *а*	0,02 *а*	1,5	±1,5%	±0,015 *а*	±*с*
		2 *а*	0,05 *а*	1,5	±1,5%	±0,03 *а*	±0,6 *с*
		5 *а*	0,1 *а*	1,5	±1,5%	±0,075 *а*	±0,75 *с*
		10 *а*	0,2 *а*	1,5	±1,5%	±0,15 *а*	±0,75 *с*
		20 *а*	0,5 *а*	1,5	±1,5%	±0,3 *а*	±0,6 *с*
16	Вольтметр лабораторный (школьный) с равномерной шкалой	4 *в*	0,2 *в*	—	±4%	±0,16 *в*	±0,8 *с*
17	Вольтметр типа ПМ-70, постоянного тока	15 *в*	0,5 *в*	1,5	±1,5%	±0,225 *в*	±0,5 *с*
		30 *в*	1,0 *в*	1,5	±1,5%	±0,45 *в*	±0,5 *с*
		50 *в*	1,0 *в*	1,5	±1,5%	±0,75 *в*	±0,75 *с*
		75 *в*	2,0 *в*	1,5	±1,5%	±1 *в*	±0,5 *с*
		150 *в*	5,0 *в*	1,5	±1,5%	±2,25 *в*	±0,5 *с*
18	Счетчик электрический СО (однофазный) при активной нагрузке, ГОСТ 6570	Измеренная энергияя *w*			±1%	0,01 *w*	—
					±2%	0,02 *w*	—
					±2,5%	0,025 *w*	—

Упражнения

74. Верно ли показание динамометра (рис. 6), если у гирьки отклонение от номинала пренебрегаемо мало? Вычислить поправку.

75. Номинальная масса груза по механике — 100 *г*. Поверка на школьных лабораторных весах показала результат — 98,6 *г*. Какова погрешность изготовления груза?

76. На школьных лабораторных весах поверена номинальная масса гири в 20 *г*. Результат поверки с максимальной точностью — 19,98 *г*. Какова погрешность измерения? В пределах точности взвешивания соответствует ли результат номиналу?

77. Приведенная погрешность школьного демонстрационного амперметра (рис. 7) составляет ±5%. Какова предельная абсолютная погрешность показания прибора?

78. Приведенная погрешность лабораторного вольтметра равна ±4% (рис. 8). Чему равна предельная абсолютная и относительная погрешности для результатов измерения 1,0 и 6,4 *в*?

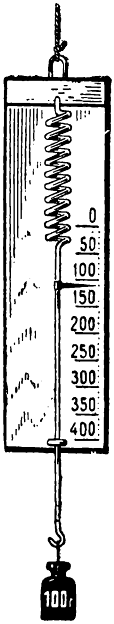


Рис. 6.

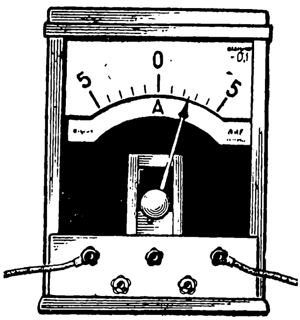


Рис. 7.

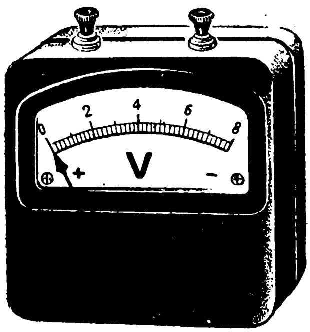


Рис. 8.

79. Имеется вольтметр класса 2,5 (рис. 9). Запишите показание вольтметра с указанием предельной абсолютной погрешности.

80. Верно ли измеряет ваттметр, показывающий $P=600$ *вт*, если вполне исправные приборы того же класса показывают $U=120$ *в*, $I=6{,}0$ *а* и $\cos\varphi=0{,}83$?

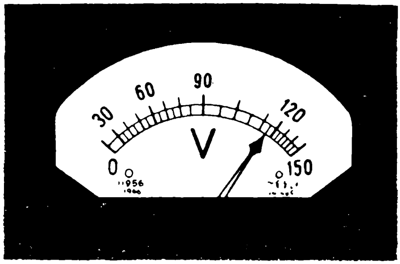


Рис. 9.

§ 12. ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ ПОГРЕШНОСТИ

Измерения классифицируют по различным признакам.

По способу получения числового результата все измерения делят на прямые и косвенные.

Прямые измерения — это измерения, результат которых получают непосредственно с помощью меры или измерительного прибора: $x=A$.

Результат *косвенных измерений* определяют на основе прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью: $x=F\ (A,\ B,\ C,\ \ldots)$.

Так, например, к прямым измерениям относится измерение массы m на весах или объема V с помощью мензурки; к косвенным — измерение плотности $\rho=\frac{m}{V}$.

По области применений измерения делят на технические и лабораторные. *Технические* измерения производят сравнительно грубыми приборами без учета погрешностей, *лабораторные* измерения — более точными приборами, при этом учитывают погрешности.

Измерения отличаются по точности. *Точность измерений* обычно ставят в зависимость от цены деления шкалы меры или измерительного прибора. Под выражением «измерение произведено с точностью до 1 *см*» или «с точностью до сантиметров» следует понимать, что цена деления на шкале примененного измерительного средства 1 *см* и последним разрядом в численном значении результата являются целые сантиметры.

Как отмечалось выше (гл. I, § 3), выражение «с точностью до 1 *см*» означает также, что абсолютная погрешность измерения не превышает 1 *см*. То обстоятельство, что смысловое значение одного и того же выражения двояко, является недостатком терминологии. Метрологи об этом знают; сейчас принимают меры к устранению недочетов в терминах.

Чем меньше цена деления на шкале прибора, тем меньше абсолютная погрешность результата измерения, однако между ценой деления и абсолютной погрешностью нет численного равенства (если не принимать во внимание случайных совпадений). Это объясняется тем, что точность измерения зависит не только от цены деления, но и от других причин, которые будут рассмотрены ниже.

Погрешности измерения бывают систематические и случайные.

Систематические погрешности — это погрешности, которые при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по вполне определенному закону.

Под *случайными погрешностями* понимают погрешности, принимающие при повторных измерениях различные взаимно не связанные положительные и отрицательные значения.

Как те, так и другие погрешности появляются в результате несовершенства средств и методов измерения (включая и особенности наблюдателя).

По происхождению систематические погрешности делят на следующие группы:

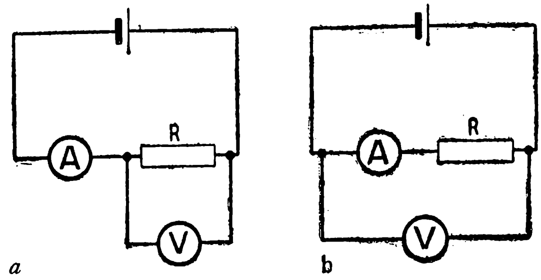


Рис. 10.

1. Погрешности метода. Они возникают вследствие несовершенства избранного метода измерения и наличия некоторых упрощений и допущений. Примером служит погрешность метода измерения электрического сопротивления при помощи амперметра и вольтметра (рис. 10). В этом случае сопротивление определяют по формуле закона Ома $R = \frac{U}{I}$, где U — падение напряжения на сопротивлении R, а I — ток в нем. Однако включаемый в цепь амперметр (рис. 10, *a*) измеряет не ток в сопротивлении R, а сумму токов в сопротивлении R и вольтметре, а вольтметр (рис. 10, *b*) измеряет падение напряжения не на сопротивлении R, а на участке, в который входит и сопротивление R и амперметр.

Погрешность измерения с помощью этого метода может быть довольно значительной. Однако в ряде случаев ее удается уменьшить. Например, в рассмотренном примере методическая погрешность будет небольшой и вполне допустимой, если взять вольтметр, сопротивление которого значительно больше R, и амперметр, сопротивлением значительно меньшим R.

2. Инструментальные погрешности. Среди них различают основные — это погрешности мер и измерительных приборов (см. § 11) и дополнительные, возникающие вследствие износа, старения и неисправности средств измерения.

Основные инструментальные погрешности не могут быть устранены, и на них в условиях школы невозможно ввести поправки. Учащимся следует учитывать их в своей работе. Дополнительные инструментальные погрешности могут быть устранены (приборы можно выверить и исправить) или, как об этом уже говорилось ранее, можно ввести на них поправки.

3. Погрешности, связанные с неправильной установкой приборов. Некоторые приборы требуют вертикальной, некоторые — горизонтальной установки. Если в лабораторной работе измерительный прибор установлен неправильно и это осталось незамеченным, то результат измерения будет искажен, а погрешность останется неучтенной. Если же неправильная установка прибора своевременно обнаружена, то следует установить прибор правильно и погрешность исключить.

Необходимо, чтобы учащиеся строго соблюдали правила установки измерительных приборов.

4. Погрешности, обусловленные внешними неблагоприятными влияниями на средства и объекты измерения (температура, атмосферное давление, влажность воздуха, посторонние магнитные и электрические поля и т. д.).

Так, например, все измерительные приборы, применяемые в школе, дают верные показания только при температуре 20° С. Отклонение от этой нормы искажает результаты измерений и требует введения поправок в результаты измерений.

При любых измерениях всякие посторонние влияния следует устранять перед началом и в процессе работы.

5. *Погрешности отсчета* — это случайные погрешности, появляющиеся в основном вследствие округления показаний измерительных приборов до заданной точности. Отсчет показаний производят по шкале следующим образом:

а) Если стрелка-указатель совпала с каким-либо штрихом (рис. 11, *а*), то за результат отсчета принимают число, соответствующее этому штриху — 12.

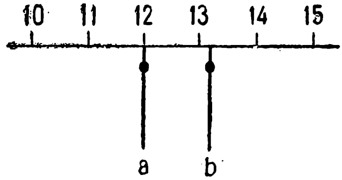


Рис. 11.

b) Если стрелка установилась в промежутке между штрихами (рис. 11, *b*), то за результат отсчета принимают тот числовой штрих, к которому стрелка ближе — 13. В этом же случае за результат отсчета может быть принята также середина интервала между штрихами, независимо от того, к какому из штрихов стрелка ближе — 13,5.

Во всех случаях возможная погрешность отсчета равна половине цены деления: $\Delta_0 = \frac{c}{2}$.

Возможен отсчет долей деления на глаз. При таком отсчете за цену деления принимают цену доли, а ее половину — за погрешность отсчета. Цифра, отсчитанная на глаз, в численном значении результата будет сомнительной.

Секундомер (карманного типа) — единственный прибор, применяемый в школьной практике, для которого возможная погрешность отсчета равна не полцены деления, а всей цене деления — 0,2 *сек*. Объясняется это тем, что секундная стрелка секундомера движется по шкале от штриха к штриху скачками. Невозможность остановки стрелки между штрихами и приводит к возможной погрешности, равной цене деления.

Школьные лабораторные весы не имеют шкалы. Отсчет производят путем суммирования номинальных значений гирь, находящихся в чашке.

Если при измерении массы достигнуто «точное» равновесие весов, то за результат отсчета принимают массу гирь в чашке; если равновесие весов не достигнуто, то это признак того, что либо «не хватает гирь» (масса тела больше массы гирь в наборе), либо отсутствуют гири мелкого номинала. В первом случае становится невозможным измерение, во втором — удовлетворяются положением весов, близким к равновесию. Например, при измерении на весах оказалось, что масса тела больше 57 *г*, но меньше 58 *г*. За результат отсчета принимают число 57 *г*, т. к. при этом весы ближе к равновесию. Измерение произведено с точностью до граммов. Абсолютная погрешность отсчета не более 0,5 *г*.

При измерении с максимально возможной точностью погрешность отсчета на весах не более половины числа, выражающего чувствительность весов при данной нагрузке.

Случайные погрешности. Иногда повторные измерения одной и той же величины дают несколько отличающиеся друг от друга результаты. О таких измерениях говорят, что они не обладают воспроизводимостью. При этом расхождения заметно превышают погрешности, которых можно ожидать при применении данных средств и методов измерения. Они указывают на наличие в измерении случайных погрешностей.

Примеры. При повторных измерениях значительных расстояний рулеткой получают несовпадающие результаты. Причиной расхождения может быть, например, неодинаковое натяжение ленты.

Такое же расхождение результатов возможно при повторных измерениях толщины проволоки микрометром. Причина — неодинаковость толщины проволоки по всей длине.

За результат измерения в таких случаях принимают среднее арифметическое результатов отдельных измерений. Например, среднее арифметическое расстояний, измеренных рулеткой,

$$l_{ср}=\frac{45+43+42+42+44}{5}=\frac{216}{5}=43{,}2\approx 43 \ (м).$$

В качестве погрешности среднего арифметического обычно принимают среднее отклонение отдельных результатов от среднего арифметического. В рассмотренном примере отклонения результатов от среднего (по абсолютной величине) равны: 2 *м*; 0 *м*; 1 *м*; 1 *м*; 1 *м*. Тогда среднее отклонение

$$\Delta l_{ср}=\frac{2+0+1+1+1}{5}=1 \ (м).$$

В рассмотренном случае значение случайной погрешности (1 *м*) значительно превышает погрешность, вызванную действием источников систематической погрешности (инструментальная погрешность рулетки с длиной ленты 10 *м* не более $\pm 2,5$ *мм*). Поэтому за погрешность измерения принимаем случайную погрешность.

Однако возможны случаи, когда систематическая (инструментальная) погрешность будет больше случайной и за погрешность измерения нужно брать систематическую погрешность. Приведем пример. Пусть измерили пять раз длину пластинки штангенциркулем и получили:

$$l_1 = l_3 = l_4 = l_5 = 25{,}6 \text{ мм} \quad \text{и} \quad l_2 = 25{,}5 \text{ мм};$$

$$l_{\text{ср}} = \frac{25{,}6 \cdot 4 + 25{,}5}{5} = 25{,}58 \text{ (мм)};$$

$$\Delta l_{\text{ср}} = \frac{0{,}02 \cdot 4 + 0{,}08}{5} = \frac{0{,}16}{5} \approx 0{,}03 \text{ (мм)}.$$

Инструментальная же погрешность штангенциркуля равна 0,1 *мм*, и именно ее, как бо́льшую, мы и должны принять в качестве погрешности измерения.

Суммарная погрешность измерения. На основе сказанного ранее можно сделать вывод, что в школьных измерениях можно оценивать следующие погрешности: инструментальную погрешность $\Delta_и$, погрешность отсчета Δ_0, а также случайную погрешность $\Delta_с$. Источники остальных погрешностей могут и должны быть исключены.

Полная погрешность измерения Δ равна сумме составляющих погрешностей.

При этом возможны следующие случаи:

1) $\Delta = \Delta_и + \Delta_0$ — Источников случайных погрешностей нет, а погрешности $\Delta_и$ и Δ_0 близки по значению.

Вообще говоря, следовало бы в данном случае суммарную погрешность вычислять как среднюю квадратическую (см. § 3), однако в школе это вряд ли возможно.

2) $\Delta = \Delta_и$ — Источников случайных погрешностей нет, а погрешность отсчета пренебрегаемо мала по сравнению с инструментальной погрешностью. (Этот случай возможен тогда, когда доли деления оцениваем на глаз.)

3) $\Delta=\Delta_0$ — Источников случайных погрешностей нет, а инструментальная погрешность пренебрегаемо мала по сравнению с погрешностью отсчета. (С этим случаем встречаемся при измерении длины линейкой, измерении массы на весах и др.)

4) $\Delta=\Delta_c$ — Случайная погрешность больше погрешностей инструментальной и отсчета: результат измерения получен методом среднего арифметического.

5) $\Delta=0$ — Измерение произведено с нулевой погрешностью.

Измерение с нулевой погрешностью возможно в следующих случаях: а) погрешность измерения находится за пределами требуемой точности измерения. Например, при измерении напряжения с точностью до десятков вольт погрешностью в 1 *в* пренебрегают; b) в результат измерения введены поправки и погрешность исключена; c) достигнута компенсация погрешностей по знаку. Например, массу воды m находят как разность двух масс — массы стакана с водой m_1 и массы пустого стакана m_2:

$$m=(m_1+\Delta m)-(m_2+\Delta m),$$

где Δm — систематическая погрешность измерения массы на весах. Так как после раскрытия скобок Δm окажется один раз со знаком плюс, а второй — со знаком минус, то погрешности скомпенсируются[1]. В связи с этим учащиеся могут подумать, что имеется возможность точного измерения физических величин. Фактически, в рассмотренных выше примерах приближенное значение измеренной величины близко к действительному значению этой величины, то есть к тому значению, которое может быть получено образцовым прибором, но точное значение величины, конечно, получено быть не может. Кроме того, сохраняется случайная погрешность отсчета, которой пренебрегаем.

[1] Хотя численное значение систематической погрешности (постоянной по значению и знаку) остается неизвестным.

Запись результатов прямых измерений. Если запись результатов прямых лабораторных измерений сопровождать указанием погрешностей, то при этом необходимо придерживаться следующих правил:

1. Погрешность всегда округляют с избытком до одной значащей цифры ($\Delta=0{,}17\approx0{,}2$) или до двух, если вторая цифра 5 ($0{,}152\approx0{,}15$). С бо́льшим количеством цифр погрешности записывают только в ответственных измерениях высокой точности.

2. Численное значение результата измерения всегда округляют или уточняют так, чтобы его последняя цифра оказалась в том же разряде, что и цифра погрешности.

Примеры:

$$1)\quad 1{,}42(\pm0{,}1)=1{,}4(\pm0{,}1);$$
$$2)\quad 39(\pm0{,}5)=39{,}0(\pm0{,}5).$$

Смысл произведенных преобразований заключается в следующем: в первом примере в числе 1,42 цифра 4 сомнительная, так как она находится в том же разряде, что и значащая цифра погрешности, но тогда цифра 2 неверная и ее отбрасывают по правилу округления. В результат измерения цифра 2 попала случайно в процессе отсчета долей деления на глаз (без достаточных оснований для такого отсчета). При записи конечного результата допущенную ошибку обнаруживают и исправляют.

Во втором примере число 39 записано без сомнительной цифры, так как цифра погрешности стоит в разряде десятых. Пренебрегать же сомнительной цифрой не всегда следует. После уточнения показания прибора сомнительную цифру можно восстановить и записать в результат (в нашем случае она оказалась нулем).

О погрешностях результатов косвенных измерений. Так как косвенное измерение величины сводится к вычислению значения функции $x=F(A, B, C)$, где A, B, C — результаты прямых измерений, то для учета погрешностей косвенного измерения применяют один из трех способов учета погрешностей, о которых говорилось выше (гл. II, § 4):

1) нестрогий учет погрешностей по методу подсчета цифр;

2) строгий учет погрешностей по методу границ;

3) строгий учет погрешностей по методу границ погрешностей.

Подробному рассмотрению этих методов и их применению в школьных лабораторных работах, многие из которых представляют собой косвенные измерения, посвящена следующая глава (§ 13—15).

Упражнения

81. С какой точностью можно измерять: школьной метровой линейкой? рулеткой с длиной стальной ленты 10 *м*?

82. Записать результаты измерений длины стержней (рис. 12), если первый раз отсчет производили с точностью до 1 *мм*, а второй — до 1 *см*. Определить в каждом результате количество верных и сомнительных цифр.

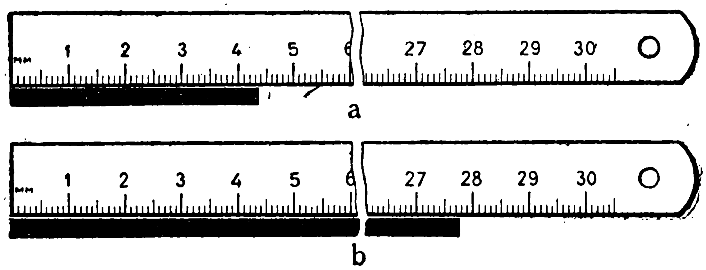


Рис. 12.

Измерение какого из стержней позволило получить результат с меньшей относительной погрешностью? Во сколько раз?

83. При помощи одной и той же мензурки измерены объемы большой и маленькой гири. Какой из двух результатов измерения оказался с большей относительной погрешностью?

84. Цена деления основной линейки штангенциркуля и нониуса 1 и 0,9 *мм* соответственно. Какова точность измерения этим штангенциркулем?

85. Цена деления на основной линейке штангенциркуля равна 1 *мм*, нониус при длине 49 *мм* имеет 50 делений. С какой точностью можно производить измерения этим штангенциркулем?

86. Произвести отсчет по шкалам штангенциркуля (рис. 13) и записать результат измерения.

87. У микрометра три шкалы: на цилиндрической части скобы сверху, снизу и на кромке барабана. Отсчеты по микрометру на рисунке 14 следующие: *а* — 6,86 *мм*, *б* — 6,84 *мм*, *в* — 6,825 *мм*. С каких шкал считаны цифры каждого числа? Имеются ли среди этих цифр верные, сомнительные, неверные цифры?

88. Погнутая стрелка амперметра при отсутствии тока устанавливается не на нуле, а на отметке 0,1 *а*. Найти вызванную этим обстоятельством дополнительную погрешность отсчета и определить поправку.

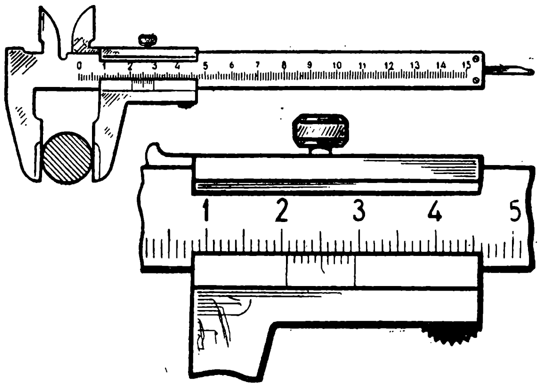


Рис. 13.

89. Как определить дополнительную погрешность, если перед измерением не постучать по стеклу барометра-анероида? Сделайте это. Какой будет такая погрешность — систематической или случайной?

90. Почему мензурка, жидкостный манометр, электрический счетчик и многие другие приборы дают неверные показания, если их устанавливать не вертикально?

91. На рисунке 15 изображена собранная учеником электрическая цепь. Где допущена ошибка? Какой характер в связи с этим будет иметь погрешность измерения: случайный или систематический?

92. Все меры и измерительные приборы работают нормально при температуре 20° С. Какой знак будет у дополнительной погрешности, если в мензурку для измерения объема наливать горячую воду?

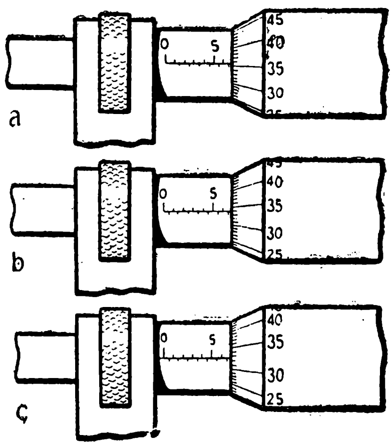


Рис. 14.

93. Почему в лабораторной работе амперметр и вольтметр электромагнитной

системы нужно располагать на расстоянии не менее 10 *см* друг от друга?

94. Для определения силы трения при движении бруска по доске можно применить динамометр или груз на нити, переброшенный через блок. Какой метод измерения лучше и почему?

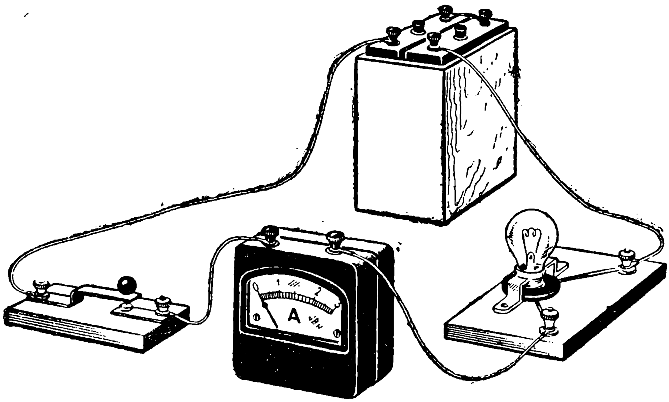


Рис. 15.

95. На рисунке 16 изображены шкалы ртутных термометров. Определить цену деления на каждой шкале, если числовые отметки даны в градусах. Какова возможная погрешность отсчета по каждой шкале?

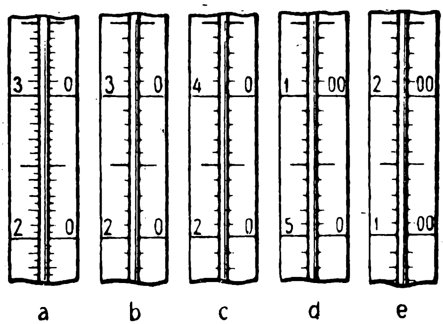


Рис. 16.

96. На рисунке 17 изображен секундомер. Какова цена деления на циферблатах секундной и минутной стрелки? Прочесть показание секундомера. Какова погрешность отсчета по каждой шкале? Для чего концы стрелок секундомера подогнуты к циферблату?

97. Почему стальные измерительные линейки точнее чертежных деревянных линеек? Для чего некоторые чертежные линейки имеют скошенные края?

98. В каком случае мы можем допустить большую погрешность отсчета, пользуясь толстой или тонкой измерительной линейкой?

99. При измерении массы тела на лабораторных весах, оказалось, что оно «точно» уравновешено гирей 200 *г*. Какова погрешность отсчета?

100. Какой будет погрешность отсчета при измерении веса тела динамометром Бакушинского, если цена деления на шкале 10 *Г*, а измерение производят с точностью до 1) 10 *Г*, 2) 5 *Г* (на глаз)?

101. Электрическое сопротивление катушки измеряли пять раз. Результаты в омах следующие:

8,370; 8,369; 8,371; 8,375; 8,368.

Вычислить средний результат измерения. Можно ли его считать удовлетворяющим принципу Крылова — Брадиса?

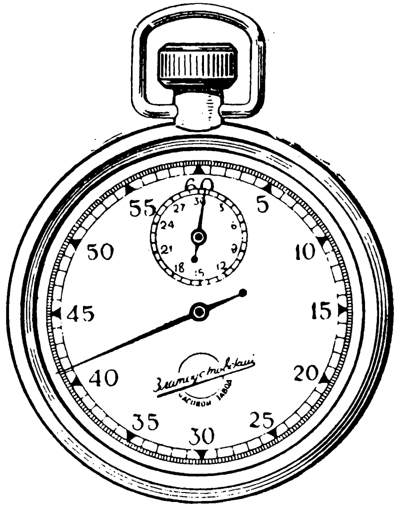


Рис. 17.

102. При измерении атмосферного давления барометром-анероидом приборная погрешность составляет ± 3 *мм рт. ст.*, возможная погрешность отсчета $\pm 0{,}5$ *мм рт. ст.* и температурная погрешность ± 1 *мм рт. ст.* Какова полная погрешность измерения? Записать результат измерения, если стрелка прибора установилась на отметке 756 *мм рт. ст.*

103. При определении влажности воздуха гигрометром Ламбрехта точку росы рекомендуется находить как среднее арифметическое двух температур — в момент появления росы на зеркальной поверхности прибора — t_1^0 и исчезновения росы — t_2^0.

На чем основана эта рекомендация?

104. Измерить массу тела на рычажных весах можно двойным взвешиванием — на левой и на правой чашке весов. Полусумма результатов $\frac{m_л + m_п}{2}$ и будет искомым значением массы. Докажите, что такой способ измерения массы возможен и на неуравновешенных весах. Является ли такое измерение прямым или косвенным?

ГЛАВА IV

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ ПО ФИЗИКЕ

§13. РАСЧЕТЫ ПО МЕТОДУ ПОДСЧЕТА ЦИФР В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

Рассмотренные в главе II правила подсчета цифр следует применять не только при решении задач, но и при выполнении лабораторных работ. На это имеется прямое указание в объяснительной записке к ныне действующей программе по математике для восьмилетней школы: «...совершенствование навыков приближенных вычислений проводится в процессе их применения при изучении математики и смежных дисциплин... при выполнении лабораторных работ по физике, химии и т. д.».

В лабораторных работах метод подсчета цифр рационализирует вычислительную работу учащихся, освобождая больше времени для эксперимента. Кроме того, метод обеспечивает получение результата с точностью, соответствующей точности исходных данных, а принцип Крылова—Брадиса позволяет оценить погрешность конечного результата, хотя и недостаточно строго.

При выполнении лабораторных работ с приближенными вычислениями по методу подсчета цифр придерживаются следующих правил:

1. Измеряют и записывают каждый результат измерения в соответствии с принципом Крылова—Брадиса: в каждом числе все цифры, кроме последней, должны быть верными, лишь последняя цифра может быть сомнительной.

2. При соблюдении предыдущего условия все вычисления выполняют по правилам подсчета цифр.

3. Погрешность окончательного результата оценивают в 2—3 единицы последнего разряда. При этом следует иметь в виду, что малые погрешности результата более вероятны, чем большие, что вытекает из общей теории метода подсчета цифр.

Ниже на примере показано, как выполняются измерения и вычисления по методу подсчета цифр в лабораторной работе.

Рассмотрим лабораторную работу.

Определение плотности вещества, из которого сделан брусок.

Измерения:

длина $l=42$ *мм*;

ширина $b=24$ *мм*;

высота $h=12$ *мм*;

масса $m=15$ *г*.

Вычисления:

Объем $V=l\cdot b\cdot h=42\cdot 24\cdot 12=$

$$=12\,096\approx 12\,100 \text{ мм}^3=12,\underline{1} \text{ см}^3;$$

$$\text{Плотность } \rho=\frac{m}{V}=\frac{\overline{1}5}{12,\underline{1}}=1,2\underline{3}\approx 1,\underline{2}(г/см^3)$$

Рассмотрим вопрос о том, как надо выполнять измерения, чтобы полученные числа удовлетворяли принципу Крылова—Брадиса, согласно которому погрешность каждого результата измерения не должна превышать 2—3 единицы последнего разряда. Покажем, что необходимо соблюдать следующее условие:

Отсчет по шкале производить по ближайшему к стрелке штриху, либо оценивать доли деления на глаз.

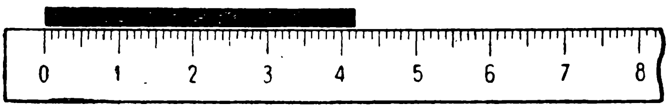


Рис. 18.

Нетрудно видеть, что при соблюдении вышеуказанного условия принцип Крылова—Брадиса будет соблюдаться.

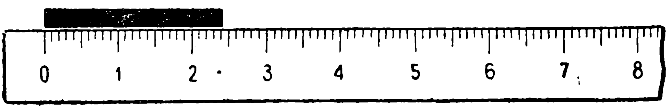


Рис. 19.

Для этого проследим подробно, как были выполнены измерения в работе по определению плотности.

1. Линейные размеры бруска измеряли миллиметровой линейкой. На рисунке 18 показано измерение длины

бруска: левый его конец совмещен с нулевой отметкой шкалы, правый конец точно совпал с отметкой 42. Результат: длина $l = 42$ *мм*.

На рисунке 19 показано измерение ширины бруска. Правый его конец оказался в промежутке между отметками 24 и 25, но ближе к отметке 24. Результат отсчета взяли с недостатком: ширина $b = 24$ *мм*.

На рисунке 20 показано измерение высоты бруска. Правый его конец оказался в промежутке между отметками 11 и 12, но ближе к отметке 12. Результат отсчета взяли с избытком: высота $h = 12$ *мм*.

Погрешность каждого измерения не более полцены деления, или 0,5 *мм*.

2. Массу бруска на весах измеряли с точностью до граммов: $m = 15$ *г*. Миллиграммовый разновес не при-

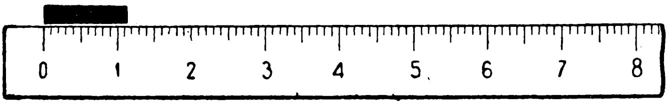


Рис. 20.

меняли по следующим соображениям: в лабораторных работах стремятся к тому, чтобы все результаты измерений были равноточны по количеству значащих цифр. Такая тенденция объясняется тем, что точность конечного результата работы никогда не может быть больше точности наиболее грубого данного при любой точности остальных. Так как линейные размеры бруска измерены с точностью до двух значащих цифр, то не имело большого смысла затрачивать время и усилия для того, чтобы с помощью миллиграммового разновеса получать больше двух цифр для значения массы [1].

Может возникнуть вопрос, сколько значащих цифр вообще целесообразно получать при измерениях в лабораторных работах? Отметим, что при любых измерениях в школьных условиях рекомендуется избегать результатов с одной значащей цифрой или с количеством цифр более трех. У чисел с одной значащей цифрой велика относительная погрешность, что неблагоприятно сказывается на конечном результате лабораторной работы.

[1] Сохранение одной лишней цифры можно практиковать. Это, хотя и незначительно, улучшит конечный результат работы.

Числа с количеством цифр более трех не позволят при вычислениях применять логарифмическую линейку.

Две-три значащие цифры в каждом результате измерения вполне достаточны. Такие результаты, как правило, удовлетворяют и потребностям практики.

Получения результатов измерений с двумя-тремя значащими цифрами достигают легко, например, измеряя длину миллиметровой линейкой, массу — на весах. При работе с остальными приборами объекты и режим измерений подбирают так, чтобы отсчет приходился на вторую половину шкалы.

Все вычисления в работе по определению плотности бруска сделаны по правилам подсчета цифр.

Мы имели на это право потому, что результаты прямых измерений удовлетворяли принципу Крылова—Брадиса.

В данной работе правила подсчета цифр в малой мере способствовали рационализации вычислений, однако в более сложных работах рационализация весьма ощутима.

Конечный результат работы (1,2 *г/см*^{3}) записан без указания погрешности. В лабораторных работах к погрешности измерений добавляются погрешности вычислений и поэтому погрешность конечного результата работы больше погрешности результата любого измерения. Возникает сомнение, что в связи с этим конечный результат не удовлетворяет принципу Крылова—Брадиса и оценить его погрешность даже нестрого не представляется возможным.

Это не совсем так. Дело в том, что погрешность каждого прямого измерения достигает 2—3 единиц разряда последней значащей цифры очень редко; как правило, погрешность значительно меньше. Это позволяет предположить, что погрешность конечного результата, хотя и больше погрешности результата любого прямого измерения, но меньше 2—3 единиц разряда последней значащей цифры.

Как видим, нестрогий учет погрешности конечного результата работы на основе принципа Крылова—Брадиса вполне возможен.

Методические замечания. 1. Принцип Крылова—Брадиса учащиеся на уроках арифметики не изучают. Этот термин можно не вводить и на уроках физики. Однако из курса арифметики VI класса учащимся известны понятия абсолютной и относительной погрешности. Используя эти знания, можно на ряде примеров показать, что абсолютная погрешность результата любого школьного измерения не превышает двух-трех единиц разряда последней значащей цифры. Это и послужит основой для нестрогого учета погрешностей в лабораторных работах.

2. Не исключено, что погрешность результатов некоторых измерений превысит 2—3 единицы разряда последней значащей цифры. Это может произойти при работе с неисправными приборами, при несоблюдении правил измерения, при наличии грубых ошибок и явных промахов со стороны учащихся. При этом результаты измерений будут искажены, а превышающие норму погрешности не учтены.

В связи с этим следует:

систематически проверять все измерительные приборы, сравнивая их показания с показаниями заведомо исправных приборов; неисправные приборы нужно исправлять или списывать;

знакомить учащихся с правилами измерений и следить за выполнением этих правил.

3. Если результат измерения вычислен как среднее арифметическое отдельных результатов повторных измерений, то он будет удовлетворять принципу Крылова—Брадиса при таких условиях:

все результаты повторных измерений равноточны;

результаты отдельных измерений отличаются между собой только одной или двумя последними цифрами;

среднее арифметическое вычислено по правилам подсчета цифр (при этом условии среднее арифметическое будет округлено до того же разряда, что и заданные результаты прямых измерений).

Попутно отметим, что метод среднего арифметического для результатов косвенных измерений не применим, так как результаты косвенных измерений, как правило, неравноточны.

4. Метод подсчета цифр применим не только в лабораторных работах VI—VIII классов, но и в работах IX—X классов, а именно в тех работах, в которых метод строгого учета погрешностей окажется очень сложным.

5. Метод подсчета цифр целесообразно применять во всех классах в демонстрационном эксперименте.

Упражнения

105. Измеряем длину отрезка *AB* линейкой (рис. 21). Какой результат получим: с одной или двумя значащими цифрами?

106. Придется ли применять миллиграммовый разновес, если требуется измерить с точностью до трех значащих цифр массу пустой пробирки; внутреннего сосуда калориметра с водой?

107. Какую электрическую лампочку следует дать учащимся для лабораторной работы по определению мощности, рассчитанную на 0,28 *а* или на 0,75 *а* (при одном и том же напряжении)? При какой лампе результат работы будет получен с меньшей относительной погрешностью?

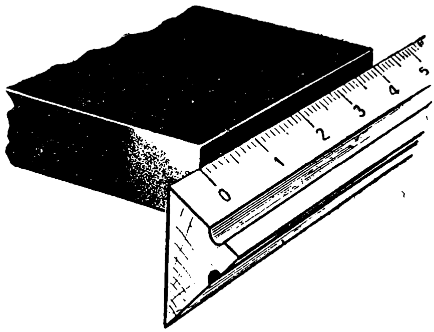


Рис. 21.

108. В работе по определению объема твердого тела начальный уровень воды в мензурке соответствовал 55 $см^3$, а конечный — 64 $см^3$. Каков объем тела? Соответствует ли точность результата точности исходных данных? Как повысить точность результата?

109. В работе по определению коэффициента трения получены следующие данные.

Вес тела	Сила тяги
140 *Г*	30 *Г*
240 *Г*	50 *Г*
340 *Г*	70 *Г*

Измерения производили динамометром Бакушинского. Записаны ли результаты по принципу Крылова—Брадиса? Значащие или незначащие нули в этих числах?

110. В работе по проверке закона Бойля—Мариотта получены следующие результаты для $Vp=c$: 1) 172 403, 2) 171 962, 3) 172 307.

Подтвердился ли закон, если давление *p* и объем *V* в каждом случае измеряли с точностью до трех значащих цифр?

§ 14. РАСЧЕТЫ ПО МЕТОДУ ГРАНИЦ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

В объяснительной записке к ныне действующей программе по физике в средней школе (стр. 6) сказано: «При подготовке учащихся к первой лабораторной работе дается понятие о погрешностях измерения и об одном из способов их вычисления. В дальнейшем этим методом пользуются постоянно».

Следовательно, в IX—X классах нужно ввести приближенные вычисления со строгим учетом погрешностей.

Строгих методов учета погрешностей два: метод границ и метод границ погрешностей. Рассмотрим сначала метод границ, кратко изложенный в главе II (§ 4).

Метод границ рекомендуют для применения в школе многие методисты. Среди них математики: В. М. Брадис[1], В. У. Грибанов[2], В. Г. Прочухаев[3]; физики А. А. Покровский, Б. С. Зворыкин[4], В. А. Фетисов[5], С. Е. Каменецкий[6]. В. М. Брадис считает способ границ «наилучшим по строгости и доступности способом учета погрешностей».

При выполнении лабораторных работ по методу границ придерживаются следующих правил:

1. Измеренные величины записывают числами с указанием границ измеренного значения величины. Например, если $I=2{,}4(\pm 0{,}1)$ *а*, то $2{,}3 \leqslant I \leqslant 2{,}5$. Здесь 2,3 *а* — нижняя граница — НГ, а 2,5 *а* — верхняя граница — ВГ значения тока. При определении границ учитывают все составляющие погрешности измерения.

2. Заполняют таблицу, в первую графу которой вносят буквенные обозначения всех измеренных величин, а также буквенные выражения всех предстоящих действий. Далее вычисляют и вносят в таблицу НГ и ВГ всех величин и результатов действий. При этом пользуются следующими правилами нахождения НГ и ВГ.

$$\text{НГ}(x+y)=\text{НГ}x+\text{НГ}y\,; \quad \text{ВГ}(x+y)=\text{ВГ}x+\text{ВГ}y\,;$$
$$\text{НГ}(x-y)=\text{НГ}x-\text{ВГ}y\,; \quad \text{ВГ}(x-y)=\text{ВГ}x-\text{НГ}y\,;$$

---

[1] В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 73.

[2] В. У. Грибанов Приближенные вычисления в средней школе. «Просвещение», 1964, стр. 72.

[3] В. Г. Прочухаев. Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся средней школы. Учпедгиз, 1961, стр. 92.

[4] А. А. Покровский и Б. С. Зворыкин. Фронтальные лабораторные занятия по физике в средней школе. Учпедгиз, 1956, стр. 75.

[5] В. А. Фетисов. Лабораторные работы по физике. Учпедгиз, 1961, стр. 8.

[6] С. Е. Каменецкий. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ: «Физика в школе», 1962, № 1, стр. 49.

$$\text{НГ}(xy)=\text{НГ}x\cdot\text{НГ}y; \qquad \text{ВГ}(xy)=\text{ВГ}x\cdot\text{ВГ}y;$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \qquad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y};$$

$$\text{НГ}(x^n)=(\text{НГ}x)^n; \qquad \text{ВГ}(x^n)=(\text{ВГ}x)^n;$$

$$\text{НГ}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{\text{НГ}x}; \qquad \text{ВГ}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{\text{ВГ}x}.$$

Границы заданного значения тригонометрической функции находят, исходя из того, что погрешность ее не более половины единицы последней сохраняемой значащей цифры.

Границы тригонометрической функции заданного приближенного угла определяют на основании свойств монотонности тригонометрических функций (об этом кратко было сказано в § 10).

Для синуса и тангенса, возрастающих в первой четверти, НГ и ВГ острого угла вычисляют так:

$$\text{НГ}(\sin x)=\sin(\text{НГ}x); \qquad \text{ВГ}(\sin x)=\sin(\text{ВГ}x);$$

$$\text{НГ}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}(\text{НГ}x); \qquad \text{ВГ}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}(\text{ВГ}x).$$

Для косинуса и котангенса формулы вычисления НГ и ВГ выглядят иначе, так как эти функции в первой четверти убывают:

$$\text{НГ}(\cos x)=\cos(\text{ВГ}x); \qquad \text{ВГ}(\cos x)=\cos(\text{НГ}x);$$

$$\text{НГ}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg}(\text{ВГ}x); \qquad \text{ВГ}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg}(\text{НГ}x).$$

3. Если значения НГ и ВГ приходится округлять, то НГ всегда округляют с недостатком, а ВГ — с избытком.

4. Напомним также, что приближенное значение окончательного результата вычисления по методу границ находят как полусумму его границ:

$$a=\frac{\text{НГ}x+\text{ВГ}x}{2},$$

а его погрешность — как полуразность границ:

$$\Delta a=\frac{\text{ВГ}x-\text{НГ}x}{2}.$$

5. Конечный результат записывают так:

$$x=a(\pm\Delta a).$$

При этом значение погрешности округляют с избытком до одной значащей цифры (редко — до двух значащих цифр), а числовое значение ответа уточняют или округляют так, чтобы последняя цифра была в том же разряде, что и цифра погрешности.

Рассмотрим применение указанных правил в нескольких лабораторных работах.

I. Определение плотности жидкости.

Измерения:
объем $V=12(\pm 1)$ *см*^{3};
масса $m=15(\pm 0{,}5)$ *г*.

В этой работе объем жидкости V определен при помощи мензурки с ценой деления 1 *см*^{3}. При этом уровень жидкости в мензурке совпал с отметкой 12 *см*^{3}. Погрешность измерения объема $\Delta=\Delta_и+\Delta_0=1$ *см*$^3+0=$ $=1$ *см*^{3}. Поэтому $V=12(\pm 1)$ *см*^{3}.

Измерение массы m произведено с точностью до граммов. Погрешность измерения приравнена погрешности отсчета 0,5 *г*, так как инструментальная погрешность (ввиду ее незначительности) не учтена. Таким образом, $m=15(\pm 0{,}5)$ *г*.

Определяем НГ и ВГ объема и массы. Так как $V=$ $=12(\pm 1)$ и $m=15(\pm 0{,}5)$, то $11\leqslant V\leqslant 13$ и $14{,}5\leqslant m\leqslant 15{,}5$.

Поэтому границы заданных величин равны:

$$\text{НГ}V=11; \qquad \text{ВГ}V=13;$$
$$\text{НГ}m=14{,}5; \qquad \text{ВГ}m=15{,}5.$$

Плотность $\rho=\frac{m}{V}$.

	НГ	ВГ
m	14,5	15,5
V	11	13
$\rho=\frac{m}{V}$	1,11	1,41

$$\text{НГ}\rho=\frac{\text{НГ}m}{\text{ВГ}V}=\frac{14{,}5}{13}\approx 1{,}11;$$
$$\text{ВГ}\rho=\frac{\text{ВГ}m}{\text{НГ}V}=\frac{15{,}5}{11}\approx 1{,}41;$$
$$\rho=\frac{\text{НГ}\rho+\text{ВГ}\rho}{2}=\frac{1{,}11+1{,}41}{2}=1{,}26;$$
$$\Delta\rho=\frac{\text{ВГ}\rho-\text{НГ}\rho}{2}=\frac{1{,}41-1{,}11}{2}=0{,}15.$$

Итак, $\rho=1{,}26(\pm 0{,}15)$ *г/см*^{3}.

Ответ можно округлить до десятых. При округлении погрешность увеличится на $1{,}3-1{,}26=0{,}04$. Тогда $\Delta\rho=0{,}15+0{,}04=0{,}19\approx 0{,}2$ (*г/см*^{3}). Окончательно $\rho=$ $=1{,}3(\pm 0{,}2)$ *г/см*^{3}. Рассмотрим еще одну лабораторную работу.

II. Определение электрохимического эквивалента меди.

Измерения:

ток $I=1{,}8(\pm 0{,}1)$ *а*;
время $t=900(\pm 2)$ *сек*;
масса катода до опыта $m_1=28\,360(\pm 5)$ *мг*;
масса катода после опыта $m_2=28\,870(\pm 5)$ *мг*.

В этой работе измерение массы катода произведено с большой точностью — с пятью значащими цифрами: $m_1=28\,360(\pm 5)$ *мг*, $m_2=28\,870(\pm 5)$ *мг*, так как в вычислениях необходимо произвести вычитание (m_2-m_1), а при этом возможна «потеря точности» (до трех цифр). Погрешность измерения приравнена 5 *мг* (половина чувствительности весов), инструментальная погрешность не учтена из-за ее незначительности.

Время t измерено секундомером карманного типа: $t=900(\pm 2)$ *сек*; составляющие погрешности: погрешность отсчета — 0,2 *сек*, инструментальная погрешность — 1 *сек* и погрешность, обусловленная неточным совпадением пуска и остановки секундомера с началом и концом опыта — 0,4 *сек*; всего 1,6 *сек* ≈ 2 *сек*.

Ток измерен амперметром с ценой деления 0,1 *а*. Стрелка установилась на отметке 1,8 *а*. Погрешность отсчета 0,05 *а*, инструментальная погрешность 0,05 *а*, погрешность измерения $\Delta=0{,}05\ a+0{,}05\ a=0{,}1\ a$. Результат измерения $I=1{,}8(\pm 0{,}1)$ *а*.

На основании полученных данных об измеренных величинах находим их границы и производим вычисления электрохимического эквивалента $k=\frac{m_2-m_1}{It}$:

	НГ	ВГ
m_2	28 865	28 875
m_1	28 355	28 365
m_2-m_1	500	520
I	1,7	1,9
t	898	902
It	1 520	1 720
$k=\frac{m_2-m_1}{It}$	0,29	0,35

$$НГ(m_2-m_1)=НГm_2-ВГm_1=$$
$$=28\,865-28\,365=500\,;$$

$$ВГ(m_2-m_1)=ВГm_2-НГm_1=$$
$$=28\,875-28\,355=520\,;$$

$$НГ(It)=НГI\cdot НГt=$$
$$=1{,}7\cdot 898\approx 1520\,;$$

$$ВГ(It)=ВГI\cdot ВГt=$$
$$=1{,}9\cdot 902\approx 1720\,;$$

$$\text{НГ}k = \frac{\text{НГ}(m_2 - m_1)}{\text{ВГ}(It)} = \frac{500}{1720} = 0{,}29\,;$$

$$\text{ВГ}k = \frac{\text{ВГ}(m_2 - m_1)}{\text{НГ}(It)} = \frac{520}{1520} \approx 0{,}35\,.$$

Как и ранее, все значения НГ округлены с недостатком, а ВГ — с избытком.

$$k = \frac{\text{НГ}k + \text{ВГ}k}{2} = \frac{0{,}29 + 0{,}35}{2} = 0{,}32\,;$$

$$\Delta k = \frac{\text{ВГ}k - \text{НГ}k}{2} = \frac{0{,}35 - 0{,}29}{2} = 0{,}03\,.$$

Таким образом, $k = 0{,}32(\pm 0{,}03)$ *мг/к.*

III. Определение ускорения силы тяжести при помощи маятника.

Измерения:

длина $l = 139{,}5(\pm 0{,}5)$ *см*;
время $t = 69(\pm 0{,}2)$ *сек*;
число колебаний $n = 29$ (точно).

Длина маятника измерена при помощи двухметровой металлической рулетки. За результат отсчета принята середина интервала между числовыми отметками 139 и 140, т. е. 139,5 *см*. Погрешность отсчета 0,5 *см*, инструментальной погрешностью пренебрегаем.

Измерение времени, в течение которого маятник совершил 29 колебаний, проведено секундомером дважды: $t = 69(\pm 0{,}2$ *сек*$)$.

Ускорение силы тяжести $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Находим НГ и ВГ для периода $T = \dfrac{t}{n}$. Так как

$$68{,}8 \leqslant t \leqslant 69{,}2,$$

то

$$\frac{68{,}8}{29} \leqslant \frac{t}{n} \leqslant \frac{69{,}2}{29}.$$

Таким образом, $2{,}37 \leqslant T \leqslant 2{,}39$.

Деление произведено до первой несовпадающей цифры (7 и 9).

$$\text{НГ}T = 2{,}37\,;\quad \text{ВГ}T = 2{,}39.\ \text{откуда}$$

$$T = 2{,}38(\pm 0{,}01)\ \textit{сек}\,.$$

Дальнейшие вычисления записываем в таблице, причем за НГ и ВГ числа π берем соответственно 3,141 и 3,142, а для числа l НГ и ВГ известны из условия: НГl=139, ВГl=140.

	НГ	ВГ
π	3,141	3,142
π^2	9,866	9,873
$4\pi^2$	39,46	39,50
l	139	140
$4\pi^2 l$	5480	5530
T	2,37	2,39
T^2	5,61	5,72
$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$	958	986

$$\text{НГ}g=\frac{\text{НГ}(4\pi^2 l)}{\text{ВГ}(T^2)}=\frac{5480}{5,72}\approx 958;$$

$$\text{ВГ}g=\frac{\text{ВГ}(4\pi^2 l)}{\text{НГ}(T^2)}=\frac{5530}{5,61}\approx 986.$$

$$g=\frac{958+986}{2}=\frac{1944}{2}=972;$$

$$\Delta g=\frac{986-958}{2}=\frac{28}{2}=14.$$

Итак, $g=972(\pm 14)$ *см/сек²*.

Значение g надо округлить до десятков: $972\approx 970$. Это округление может привести к увеличению погрешности на две единицы: $14+2=16\approx 20$. Поэтому окончательный ответ записываем так:

$$g=970(\pm 20)\ см/сек^2.$$

М е т о д и ч е с к и е з а м е ч а н и я. 1. В некоторых лабораторных работах в IX—X классах метод границ может оказаться делом довольно сложным, например в работах по определению удельной теплоты. Такие работы лучше проводить с применением метода подсчета цифр.

2. Метод границ может найти себе применение и в восьмилетней школе.

Как уже отмечалось (см. § 4), обоснование метода границ в младших классах можно проводить на основании предложений об изменении результатов

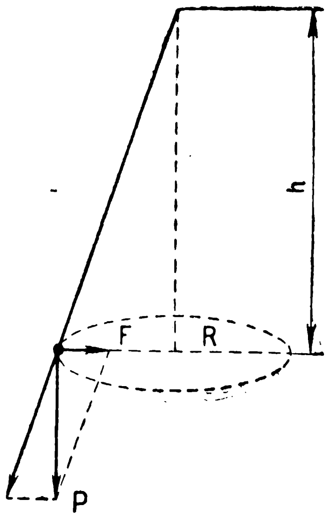


Рис. 22.

арифметических действий в зависимости от изменения. компонентов, а в старших классах — при помощи действий с неравенствами. Для извлечения корня и неалгебраических операций используют свойства возрастания или убывания функций. Обоснование метода границ целесообразно проводить на уроках арифметики и алгебры.

Упражнения

111. При определении фокусного расстояния собирающей линзы получены следующие результаты измерений: $d=11(\pm 0{,}5)$ *см*, $f=21(\pm 0{,}5)$ *см*. Применив метод границ, найти фокусное расстояние линзы F.

112. В лабораторной работе проверяют формулу центростремительной силы $F=\frac{PR}{h}$ при вращении конического маятника (рис. 22). Результаты измерений: $P=28(\pm 1)$ *Г*; $R=17(\pm 0{,}5)$ *см*; $h=52(\pm 0{,}5)$ *см*. Применив метод границ, вычислить значение центростремительной силы F.

§ 15. РАСЧЕТЫ ПО МЕТОДУ ГРАНИЦ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

Метод границ погрешностей — второй метод строгого учета погрешностей — широко применяется при обработке результатов измерений в лабораторных работах в высших учебных заведениях.

Метод границ погрешностей рекомендован для школы и освещен проф П. А. Знаменским в его руководствах по лабораторным занятиям [1].

Применению этого метода в школах мешало до сих пор то обстоятельство, что обоснование некоторых формул требовало от учащихся знаний из математического анализа. В связи с введением элементов математического анализа в школьный курс математики метод границ погрешностей становится перспективным в двух последних старших классах.

Лабораторные работы с применением метода границ погрешностей выполняют по следующим правилам:

1. Результат каждого измерения записывают числом с указанием границы абсолютной погрешности; при этом учитывают составляющие погрешности.

---

[1] См.: П. А. Знаменский. Лабораторные занятия по физике в средней школе. Ч. I. Учпедгиз, 1955.

2. Результат каждого действия сопровождают указанием границы абсолютной погрешности. В ряде случаев, однако, сначала вычисляют относительную погрешность, а по ней — границу абсолютной погрешности.

3. Для вычисления границ погрешностей применяют формулы, сведенные в таблицу. Выводы формул не приведены: их можно найти во многих учебниках, руководствах, справочниках.

В таблице применены такие обозначения:

A — результат действия;

x и y — компоненты действия;

ΔA — граница абсолютной погрешности результата действия;

$\delta=\frac{\Delta A}{A}$ — относительная погрешность результата действия;

Δx и Δy — границы абсолютных погрешностей компонентов.

№	A	ΔA	$\delta=\frac{\Delta A}{A}$	№	A	ΔA	$\delta=\frac{\Delta A}{A}$
1	$x+y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\Delta x+\Delta y}{x+y}$	6	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}$
2	$x-y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\Delta x+\Delta y}{x-y}$	7	$\sin x$	$\cos x\cdot\Delta x$	$\mathrm{ctg}\,x\cdot\Delta x$
3	xy	$x\Delta y+y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	8	$\cos x$	$\sin x\cdot\Delta x$	$\mathrm{tg}\,x\cdot\Delta x$
4	$\frac{x}{y}$	$\frac{x\Delta y+y\Delta x}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	9	$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$nx^{n-1}\,\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$	10	$\lg x$	$\frac{0{,}4343\Delta x}{x}$	$\frac{0{,}4343\Delta x}{x\lg x}$

В более сложных случаях необходимо применять общий принцип нахождения абсолютных погрешностей — вычисление полного дифференциала функции нескольких независимых переменных.

Порядок вычисления погрешностей зависит от вида функции: в случаях 3, 4, 5, 6 удобнее начинать с расчета относительной погрешности; в случаях 1, 2, 7, 8, 9, 10 — с расчета абсолютной погрешности.

4. Конечный результат работы записывают с указанием абсолютной и относительной погрешностей.

Рассмотрим некоторые лабораторные работы, выполненные с применением метода границ погрешностей. (Для сравнения возьмем те же работы, которые описаны в § 14.)

I. Определение плотности жидкости.

$$V=12(\pm 1)\ см^3;\ m=15(\pm 0,5)\ г;\ \rho=\frac{m}{V}=\frac{15}{12}=1,25\ (г/см^3).$$

Вычисление погрешностей:

относительная погрешность результата (формула 4):

$$\delta=\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta V}{V}=\frac{0,5}{15}+\frac{1}{12}=\frac{7}{60}.$$

Граница абсолютной погрешности:

$$\Delta\rho=\delta\cdot\rho=\frac{7\cdot 1,25}{60}\approx 0,15\ (г/см^3).$$

Окончательно,

$$\rho=1,25(\pm 0,15)\ г/см^3 \text{ или } \rho=1,3(\pm 0,2)\ г/см^3.$$

Так как 0,2 составляют 16% от 1,3, то ответ можно записать и так:

$$\rho=1,3\ г/см^3(\pm 16\%).$$

Результат получен тот же, что и по методу границ.

II. Определение электрохимического эквивалента меди.

$$I=1,8(\pm 0,1)\ а;\quad t=900(\pm 2)\ сек;$$
$$m_1=28\,360(\pm 5)\ мг;\quad m_2=28\,870(\pm 5)\ мг;$$
$$k=\frac{m_2-m_1}{It}=\frac{28\,870-28\,360}{1,8\cdot 900}=\frac{510}{1620}\approx 0,314.$$

При вычислении погрешности находим сначала границу абсолютной погрешности разности $m=m_2-m_1$ (формула 2):

$$\Delta m=\Delta(m_2-m_1)=\Delta m_2+\Delta m_1=5+5=10\ (мг).$$

Далее удобнее вычислять относительную погрешность (формулы 3 и 4):

$$\delta=\frac{\Delta k}{k}=\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}=\frac{10}{510}+\frac{0,1}{1,8}+$$
$$+\frac{2}{900}\approx 0,02+0,056+0,003=0,079\approx 0,08.$$

Граница абсолютной погрешности результата

$$\Delta k=\delta\cdot k=0,08\cdot 0,314\approx 0,025.$$

Округляя значение $k=0,314$ до сотых, получаем окончательно:

$k=0,31(\pm 0,03)$ *мг/к*, или $k=0,31$ *мг/к* $(\pm 10\%)$.

По методу границ мы получили $0,32(\pm 0,03)$; при погрешности 0,03 это расхождение не является существенным.

III. Определение ускорения силы тяжести.

$l=139,5(\pm 0,5)$ *см*; $T=2,38(\pm 0,01)$ *сек*.

Численное значение результата

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}=\frac{4\cdot 3,14^2\cdot 139,5}{2,38^2}\approx 971\,.$$

Вычисляем относительную погрешность результата. Отметим, прежде всего, что точный коэффициент 4 на величину относительной погрешности не влияет. Относительная погрешность числа $\pi\approx 3,14$ равна $\frac{\Delta\pi}{\pi}=\frac{0,002}{3,14}$, так как более точное значение числа π равно 3,1416 и $\Delta\pi=3,1416-3,14=0,0016\approx 0,002$.

Применяя формулы 3, 4 и 5, получаем такое значение относительной погрешности ответа:

$$\delta=\frac{\Delta g}{g}=2\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta T}{T}=2\cdot\frac{0,002}{3,14}+\frac{0,5}{139,5}+$$

$$+2\cdot\frac{0,01}{2,38}\approx 0,0013+0,0036+0,0085=0,0134\,.$$

Граница абсолютной погрешности результата равна:

$$\Delta g=\delta\cdot g=0,0134\cdot 971\approx 13.$$

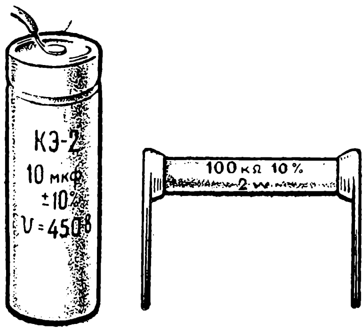
Полученное значение g надо округлить до десятков: $971\approx 970$. Абсолютная погрешность увеличится на 1. Итак, $g=970(\pm 14)$ *см/сек*^{2}, или, округляя значение погрешности до одной значащей цифры, $g=970(\pm 20)$ *см/сек*^{2}.

Методические замечания. 1. Применение метода границ погрешностей выходит за рамки существующих школьных программ по математике и физике. Однако вполне возможно на примере одной-двух несложных лабораторных работ познакомить учащихся с указанным методом.

2. При вычислениях результата и особенно погрешности целесообразно применять логарифмическую линейку.

Упражнения

113. Записать емкость конденсатора и значение радиосопротивления (рис. 23 *a*, *b*) тремя способами с помощью границ, с помощью границ погрешностей и приближенным числом по принципу Крылова—Брадиса.



a b

Рис. 23.

114. В лабораторной работе по определению коэффициента поверхностного натяжения жидкости $\sigma = \frac{mg}{n\pi D}$ (методом капель) получены следующие результаты измерений: масса воды $m = 8{,}35(\pm 0{,}02)$ *г*, количество капель $n = 100$, диаметр трубки $D = 0{,}35(\pm 0{,}02)$ *см*. Найти значение σ по методу границ погрешностей.

СВОДКА ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ФОРМУЛ И ПРАВИЛ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

1. *Точные и приближенные числа.* При решении задач и выполнении лабораторных работ необходимо различать, какие данные точные, какие — приближенные. К точным числам относятся значения переводных и масштабных множителей, тарифы и цены, условные значения величин, коэффициенты и показатели степени. Приближенные числа получаются в результате измерения, округления или вычисления. При счете могут получаться как точные, так и приближенные числа. Достаточным признаком приближенности результата счета является наличие разных ответов при повторных подсчетах.

2. *Округлением числа* называется уменьшение количества цифр путем отбрасывания одной или нескольких последних цифр.

3. *Способы округления:* округление с избытком (цифра последнего сохраняемого разряда увеличивается на единицу), с недостатком (цифра последнего сохраняемого разряда остается без изменения) и округление с поправкой.

4. *Основное правило округления* (округление с поправкой). Если первая отброшенная цифра равна 5 или больше 5, то последнюю из сохраняемых цифр увеличивают на единицу; если первая отброшенная цифра меньше 5, то последнюю из сохраняемых цифр оставляют без изменения.

5. *Значащими цифрами числа* называют все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры, и нулей, стоящих в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.

6. Незначащие нули в конце целых приближенных чисел, как правило, не пишут. Их заменяют множителем 10^n или переходят к кратным единицам измерения. В редких случаях применяют знак $\sim$ для подчеркивания незначащих нулей.

7. *Абсолютной погрешностью приближенного числа* называют разность между точным и приближенным его значением.

8. *Границей абсолютной погрешности* называют число, большее или равное абсолютной погрешности, взятой по абсолютной величине.

Примечание. Так как на практике абсолютная погрешность чаще всего неизвестна, то обычно пользуются понятием границы абсолютной погрешности, которую для простоты иногда называют просто абсолютной погрешностью.

9. *Относительной погрешностью* называют отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому числу.

10. *Верные цифры приближенного числа.* Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры приближенного числа называют верными.

11. *Сомнительная цифра приближенного числа.* Если в приближенном числе все значащие цифры, кроме последней, верные, но абсолютная погрешность числа превышает половину единицы последнего разряда, то цифру этого разряда называют сомнительной.

12. *Правило записи приближенных чисел* (принцип Крылова). «Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти числа так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительная и притом не более как на одну единицу».

Примечание. Сомнительную цифру сохраняют и в том случае, когда погрешность числа превосходит единицу последнего разряда, но при этом малые значения погрешности более вероятны, чем большие. С таким уточнением правило записи приближенных чисел называется принципом Крылова—Брадиса.

13. *Сложение и вычитание приближенных чисел.* При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Примечание. Часто более удобно пользоваться таким правилом: при сложении и вычитании приближенных чисел в полученном результате нужно отбрасывать по правилам округления цифры тех разрядов справа, в которых нет значащих цифр хотя бы в одном из данных приближенных чисел.

14. *Умножение и деление приближенных чисел.* При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

15. *Возведение в степень.* При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

16. *Извлечение корня.* При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное приближенное число.

17. *Применение таблицы логарифмов.* В значении десятичного логарифма приближенного числа сохраняют столько десятичных знаков, сколько значащих цифр имеет заданное число.

18. *Применение таблицы антилогарифмов.* При определении числа по заданному значению десятичного логарифма сохраняют в числе столько значащих цифр, сколько десятичных знаков имеет мантисса логарифма.

19. *Вычисление одночлена в помощью таблиц логарифмов и логарифмической линейки.* При вычислении посредством логарифмов одночлена следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков, на 1 большим. В окончательном результате последнюю значащую цифру отбрасывают.

20. *Вычисление промежуточных результатов.* При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила подсчета цифр.

Примечание. В окончательном результате эту «запасную цифру» отбрасывают.

21. *Предварительное округление более точных данных.* Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях I ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

22. *Вычисления с наперед заданной точностью.* Если окончательный результат надо получить с некоторой наперед заданной точностью, а данные можно брать с произвольной точностью, то в этих данных следует брать по стольку цифр, сколько нужно для получения результата с одной лишней цифрой. В окончательном результате эту лишнюю цифру отбрасывают.

23. *Отыскание нижней и верхней границ числа (НГ и ВГ) по заданной границе абсолютной погрешности.* Если $x=a(\pm\Delta a)$, то есть $a-\Delta a \leqslant x \leqslant a+\Delta a$, то $\text{НГ}x=a-\Delta a$, $\text{ВГ}x=a+\Delta a$.

24. *Определение приближенного значения и его абсолютной погрешности по заданным границам.* Если $\text{НГ}x=l$, $\text{ВГ}x=L$, то есть $l\leqslant x\leqslant L$, то за приближенное значение результата берут число $a=\dfrac{l+L}{2}$, а за абсолютную погрешность — число $\Delta a=\dfrac{L-l}{2}$.

25. *Вычисление границ числа для основных операций с приближенными числами:*

$$\text{НГ}(x+y)=\text{НГ}x+\text{НГ}y; \qquad \text{ВГ}(x+y)=\text{ВГ}x+\text{ВГ}y;$$

$$\text{НГ}(xy)=\text{НГ}x\cdot\text{НГ}y; \qquad \text{ВГ}(xy)=\text{ВГ}x\cdot\text{ВГ}y;$$

$$\text{НГ}(x-y)=\text{НГ}x-\text{ВГ}y; \qquad \text{ВГ}(x-y)=\text{ВГ}x-\text{НГ}y;$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \qquad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y};$$

$$\text{НГ}(x^n)=(\text{НГ}x)^n; \qquad \text{ВГ}(x^n)=(\text{ВГ}x)^n;$$

$$\text{НГ}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{\text{НГ}x}; \qquad \text{ВГ}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{\text{ВГ}x};$$

$$\text{НГ}(\sin x)=\sin(\text{НГ}x); \qquad \text{ВГ}(\sin x)=\sin(\text{ВГ}x);$$

$$\text{НГ}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}(\text{НГ}x); \qquad \text{ВГ}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}(\text{ВГ}x);$$

$$\text{НГ}(\cos x)=\cos(\text{ВГ}x); \qquad \text{ВГ}(\cos x)=\cos(\text{НГ}x);$$

$$\text{НГ}(\lg x)=\lg(\text{НГ}x); \qquad \text{ВГ}(\lg x)=\lg(\text{ВГ}x).$$

Примечание. НГ всегда округляют с недостатком, а ВГ — с избытком.

26. Формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

№	A	ΔA	$\delta = \frac{\Delta A}{A}$	№	A	ΔA	$\delta = \frac{\Delta A}{A}$
1	$x+y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\Delta x+\Delta y}{x+y}$	6	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}$
2	$x-y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\Delta x+\Delta y}{x-y}$	7	$\sin x$	$\cos x\cdot\Delta x$	$\operatorname{ctg} x\cdot\Delta x$
3	xy	$x\Delta y+y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	8	$\cos x$	$\sin x\cdot\Delta x$	$\operatorname{tg} x\cdot\Delta x$
4	$\frac{x}{y}$	$\frac{x\Delta y+y\Delta x}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$nx^{n-1}\cdot\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$	10	$\lg x$	$\frac{0{,}4343\Delta x}{x}$	$\frac{0{,}4343\Delta x}{x \lg x}$

Примечания. 1. Порядок вычисления погрешностей зависит от вида функции: в случаях 3, 4, 5, 6 удобнее начинать с расчета относительной погрешности, в случаях 1, 2, 7, 8, 9, 10 — с расчета абсолютной погрешности.

2. Абсолютную и относительную погрешности всегда округляют с избытком до одной (иногда — до двух) значащей цифры.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. 1) 1 *г/см*^{3} как установленная единица измерения плотности воды — число точное; если же 1 *г/см*^{3} — результат измерения, то это число приближенное. 2) Приближенное. 3) Приближенное. 4) Как постоянная точка шкалы термометра — число точное; как результат измерения — число приближенное. 5) Приближенное. 6) Точное. 2. 1) Все точные. 2) Все приближенные. 3) Приближенные. 3. 1) Приближенный, так как $v=gt$, где $g=9{,}8$ *м/сек*^{2} — число приближенное. 2) Приближенный, так как $v=2\pi Rn$, где $\pi=3{,}14$ — число приближенное. 3) Приближенный. 4) Приближенный, так как $R=F\sqrt{2}\approx 1{,}41$ *кГ*. 5) Приближенный. 4. 1) Согласно правилам десятые доли киловатт-часа отбрасывают (округление с недостатком). 2) Ближайший стандарт 2,0 *мм*^{2} (округление с избытком). 3) Ближайший стандарт 60 *вт* (округление с недостатком). 4) Ближайший стандарт 10 *а* (округление с избытком). 5. 1) С поправкой. 2) С избытком 3) С недостатком. 4)—7) С поправкой. 7. 24; 1,7%. 8. 28; 4%. 9. 0,05 *г/см*^{3}; 0,27%. 10. $\approx$0,05%. 11. 5%; 2,5%; 1,25%. 12. Скорость света. 13. В 10 раз. 14. Три; две; три; четыре; три. 15. Значащие. 16. 17,0 *см*; 0,250 *л*; 0,600 *кв*. 18. 2,0 *м*; 1,40 *км*; 1,50 *л*; 0,06 *кн*; 0,22 *кв*; 4,50 *ком*. 19. 7,8 *кдж*; 9,2 *Мдж*; 6,6 *Мом*; $1{,}12\cdot 10^3$ *Мвт*. 20. 12 000 *м*; 50 000 *м*^{2}; 50 000 *кг*; 1 600 000 *н*; 6600 *в*. 21. Две; две; три; $3{,}6\cdot 10^3$ *ккал/кг*; $7{,}0\cdot 10^3$ *ккал/кг*; $1{,}10\cdot 10^4$ *ккал/кг*. 22. $1{,}25\cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}; $1{,}8\cdot 10^{-4}$ *г/см*^{3}; $9\cdot 10^{-5}$ *г/см*^{3}. 23. 1) Три; четыре; все значащие, кроме последней. 2) Все цифры, кроме нулей,— значащие и верные. 24. Верных — четыре; сомнительных — одна. 25. Три цифры — верные. 26. Да. 27. 7,5 *Г/см*^{3}; 0,32 *мг/к*. 28. Верная; неверная; верная, но без соблюдения нормальной формы. 29. $\approx$58 *ом*; $\approx$59 *ом*. 30. 2,7 *мкф*. 31. 205,7 *Г*. 32. 1,5 *кГ*. 33. $\approx$187 *г*. 34. 26 *ом*. 35. ≈ -2 *кн*. 36. $\approx$2,0 *кГ/см*^{2}. 37. $\approx 6{,}5\cdot 10^3$ *Т*. 38. $1{,}87\cdot 10^{-7}$ *к*. 39. 99 *см рт. ст*. 40. 56 *м*; 41. 150 *км*. 42. 8,0 *ккал*. 43. $\approx$50 *н*. 44. $\approx$130 *Г*; 125 *Г*. 45. $3\cdot 10^5$ *н*. 46. $\approx$11 *мг*. 47. Нет; нужно писать: $13{,}60\cdot 76=1034$ (*Г/см*^{2}). Число 76 *см* — точное. 48. $1{,}2\cdot 10^{15}$ *гц*. 49. $\approx$30 *кГ*. 50. $\approx$0,14 *г*. 51. 170. 52. $3{,}0\cdot 10^{-23}$ *г*. 53. 50,0 *сек*; 3,02 *сек*. 54. 0,16; 144; $\approx$9,86; $\approx$7200; $\approx 1{,}23\cdot 10^6$; $\approx 4{,}06\cdot 10^7$. 55. 9,0; $\approx$7,1; 20,0; $\approx$3,1; 0,50. 56. $P_1=\frac{Ph}{l}=$

$= \dfrac{52 \cdot 0{,}86}{1{,}7} \approx \dfrac{44{,}7}{1{,}7} \approx 26{,}3 \approx 26$ (*кГ*). **57.** $Q = cm(t_2 - t_1) = 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0(80 - 15{,}5) = 8{,}38 \cdot 64{,}5 \cdot 10^3 \approx 5{,}41 \cdot 10^5$ (*дж*) $\approx 5{,}4 \cdot 10^5$ (*дж*) $= 0{,}54$ (*Мдж*). **58.** $F = P + \dfrac{mv^2}{R} = 35 \cdot 9{,}81 + \dfrac{35 \cdot 6{,}25}{1{,}8} = 343 + \dfrac{219}{1{,}8} = 343 + 122 = 465 \approx 470$ (*н*) $= 0{,}47$ (*кн*). **59.** $s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$;

$s_1 = 1{,}25 \cdot 1 + \dfrac{0{,}50 \cdot 1}{2} = 1{,}25 + 0{,}25 = 1{,}50$ (*м*); $s_2 = 1{,}25 \cdot 2 + \dfrac{0{,}50 \cdot 4}{2} = 2{,}50 + 1{,}0 = 3{,}5$ (*м*); $s_3 = 1{,}25 \cdot 3 + \dfrac{0{,}50 \cdot 9}{2} = 3{,}75 + 2{,}25 = 6{,}00 = 6{,}0$ (*м*).

60. $T = 2 \cdot 3{,}142 \cdot \sqrt{\dfrac{1{,}00}{9{,}81}} = 6{,}284 \cdot \sqrt{0{,}1019} = 6{,}284 \cdot 0{,}3192 \approx 2{,}006 \approx 2{,}01$ (*сек*). **61.** 5,1 *Мн*. Число 101 325 предварительно округляем до трех значащих цифр (третья — запасная): 101 325 $н/м^2$ = 101 000 $н/м^2$.

62. $N = \dfrac{PH}{t}$; $N = \dfrac{0{,}82 \cdot 1{,}20}{24 \cdot 3600} = \dfrac{0{,}984}{8{,}64 \cdot 10^4} \approx 0{,}000011$ *кГм/сек*.

63. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{2{,}7} + \dfrac{1}{3{,}5} + \dfrac{1}{4{,}2} \approx 0{,}370 + 0{,}286 + 0{,}238 = 0{,}894$; $R \approx 1{,}1$ *ом*.

64. $F = mR\omega^2 = 5{,}00 \cdot 2{,}0 \cdot 8{,}6^2 = 10{,}0 \cdot 74{,}0 = 740$ (*н*) $= 0{,}74$ (*кн*).

65 $P \cdot AO = F \cdot OB$; $5{,}0 \cdot 2{,}0 = F \cdot 7{,}0$; $F = \dfrac{5{,}0 \cdot 2{,}0}{7{,}0} \approx 1{,}43$ (*кГ*) $\approx 1{,}4$ (*кГ*).

Проверка: $P \cdot AO = 5{,}0 \cdot 2{,}0 = 10$;
$F \cdot OB = 1{,}4 \cdot 7{,}0 = 9{,}8$.

При сохранении запасной цифры равенство моментов подтверждается с большей точностью $1{,}43 \cdot 7{,}0 = 10{,}01 \approx 10$. **66.** ≈ 14 *сек*.

67. 1,38; 2,389; 0,797; 0,2865; $\bar{1},54$, $\bar{3},8$; 3,439; 5,813. **68.** 3, 4; 206; $5 \cdot 10^3$; 0,110; 0,0026; $2{,}004 \cdot 10^6$; 1,011. **69.** $5{,}0 \cdot 10^3$ *м*. **70.** $0{,}0416 = 0{,}5^{\frac{t}{5570}}$;

$\lg 0{,}0416 = \dfrac{t}{5570} \lg 0{,}5$; $\bar{2},6191 = \dfrac{t}{5570} \bar{1},6990$; $-1{,}3809 = -0{,}3010 \times \dfrac{t}{5570}$; $t = \dfrac{1{,}3809 \cdot 5570}{0{,}3010} \approx 25550$ (лет).

71.

№	Углы	sin α	cos α	tg α
1	2°	0,03	1,0	0,03
2	12°	0,21	0,98	0,21
3	28°	0,47	0,88	0,53
4	49°	0,75	0,66	1,2
5	76°	0,97	0,24	—
6	87°	1,0	0,05	—

73.

№	sin α	α	cos α	α	tg α	α
1	0,064	4°	0,081	85°	0,18	10°
2	0,27	16°	0,213	78°	0,75	37°
3	0,48	29°	0,37	68°	1,38	54°
4	0,51	31°	0,52	59°	2,5	68°
5	0,973	77°	0,71	45°	3,7	75°
6	0,99	82°	0,998	4°	4,5	77°

74. Поправка $=-10$ *Г*. **75.** $+1,4$ *г*. **76.** $\pm 0,05$ *г*; да. **77.** $\pm 0,25$ *а*. 78. $\Delta = \pm 0,32$ *в*; $\delta = \pm 32\%$; $\delta_2 = \pm 5\%$. **79.** 115 (± 4) *в*. **80.** $P = 120 \cdot 6,0 \cdot 0,83 = 597,6 \approx 600$ *вт*; верно. **81.** 1) До 1 *см*; 2) до 1 *мм*.

82. 44 *мм*; 278 *мм*; 4 *см*; 28 *см*; 1 — верная, 1 — сомнительная; 2 — верные, 1 — сомнительная; 1 — верная; 2 — верные; длинный стержень измерен точнее $\approx$ в 6 раз. **83.** Второй, так как $\delta = \frac{\Delta V}{V}$; δ обратно пропорциональна объему V при $\Delta V = \text{const}$. **84.** 0,1 *мм*. 85. 0,02 *мм*. 86. 20,6 *мм*. 87. 6 и 8 — верные; 6, 4 и 2 — сомнительные, цифра 5 мало надежна. 88. $\Delta = +0,1$ *а*; поправка $= -0,1$ *а*. **89.** $\Delta = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 — результаты измерения: p_1, если не постучать и p_2, если постучать; случайной. **90.** Указателем у мензурки и манометра является уровень жидкости, который по отношению к шкале должен дать прямой угол; при наклоне это не получается. При наклоне электросчетчика — неуравновешенность механизма. **91.** Амперметр установлен вертикально, а нужно горизонтально; систематический. **92.** Минус. **93.** Чтобы ослабить взаимное влияние магнитных полей **94.** Метод динамометра хуже, так как колебания указателя приводят к неопределенности отсчета.

95.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
c	0,5	1	2	5	10
Δ	0,25	0,5	1	2,5	5

96. 0,2 *сек*; 1 *мин*; для уменьшения ошибки от параллакса. **97.** На стальных точнее можно нанести шкалу; для уменьшения ошибки от параллакса 98. Толстой (от параллакса). **99.** $\Delta =$ половине чувствительности весов, либо 0,5 *г*, если измерять с точностью до граммов. **100.** а) $\Delta_1 = \pm 5$ *Г*; в) $\Delta_2 = \pm 2,5$ *Г*. **101.** 8,371 *ом*; Да, так как $\Delta R = 0,002$. **102.** 756 ($\pm 4,5$) *мм рт. ст.* (если не вводить поправок).

103. $t^0 = \frac{(t^\circ_2 + \Delta t^\circ) + (t^\circ_1 - \Delta t^\circ)}{2} = \frac{t^\circ_2 - t^\circ_1}{2}$ (исключена погрешность Δt° от инертности термометра — запаздывания в показаниях).

104. $m = \frac{(m_л + \Delta m) + (m_{пр} - \Delta m)}{2}$ (погрешности Δm от неуравновешенности весов компенсируются по знаку). Прямое. **105.** С двумя — 4,0 *см*. **106.** 1) Да; 2) нет. **107.** 0,75 *а* (меньше относительная погрешность). **108.** 9 *см*^{3} (потеря точности); заменить данное тело на тело большего объема **109.** Да; незначащие. **110.** Да. **111.** 7,25 ($\pm 0,75$) *см*. **112.** 9,2 ($\pm 0,7$) *Г*. **113.** 1) $9 \leqslant C \leqslant 11$; $90 \leqslant R \leqslant 110$; 2) $C = 10$ (± 1) *мкф*; $R = 100$ (± 10) *ком*; 3) $C \approx 10$ *мкф*; $R = 100$ *ком* $= 1,0 \cdot 10^2$ *ком*. **114.** 74 (± 5) *дин/см*.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Андронов И. К. и Брадис В. М. Арифметика. Учпедгиз, 1962, гл. XII.

Брадис В. М. Средства и способы элементарных вычислений. Учпедгиз, 1954.

Брадис В. М. Как надо вычислять? «Просвещение», 1965.

Брадис В. М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Изд. АПН РСФСР, 1962.

Галанин Д. Д., Горячкин Е. Н. и др. Физический эксперимент в школе. Т. II. Учпедгиз, 1935.

Грибанов В. У. О вычислениях на занятиях по физике. «Физика в школе», 1952, № 5.

Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе. «Просвещение», 1964.

Демкович В. П. и Грибанов В. У. О приближенных вычислениях (ответы на вопросы учителей). «Физика в школе», 1964, № 5.

Дубнов Я. С. Измерение отрезков. Физматгиз, 1962.

Знаменский П. А. Лабораторные занятия по физике. Ч. I, Учпедгиз, 1955, стр. 92—133.

Иванов А. Г., Бурдун Г. Д. и др. Измерительные приборы в машиностроении. «Машиностроение», 1964.

Каменецкий С. Е. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. «Физика в школе», 1962, № 1.

Кипнис И. М. и Прайсман Н. Я. О культуре приближенных вычислений на уроках физики. «Физика в школе», 1962, № 4.

Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Собрание трудов. Ч. III. Изд. АН СССР, 1949.

Маликов С. Ф. и Тюрин Н. И. Введение в метрологию. Изд. стандартов, 1965.

Медведев П. Е. Как и чем производятся физические измерения. Учпедгиз, БССР, Минск, 1959.

Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, 1962.

Покровский А. А. и Зворыкин Б. С. Фронтальные лабораторные занятия по физике в средней школе. Учпедгиз, 1956.

Прочухаев В. Г. Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся средней школы. Учпедгиз, 1961.

Тюрин Н. И. В поисках точности. Физматгиз, 1960.

Фетисов В. А. Лабораторные работы по физике (VIII—X классы). Учпедгиз, 1961.

Хабиб Р. А. Приближенные вычисления в курсе физики восьмилетней школы. «Физика в школе», 1961, № 5.

Шамаш С. Я. Домашние измерительные работы по физике. «Просвещение», 1964.

Шевченко И. Н. Начальные сведения о приближенных вычислениях. Изд. АПН РСФСР, 1958.

Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. Гостехиздат, 1953.

ГОСТы на измерительные приборы: 215-57; 302-41; 359-54; 427-56; 1770-64; 5072-62; 6507-60; 7328-61; 7502-61; 8711-60; 9177-59.

Физический энциклопедический словарь. Тт. 1—4, Изд-во «Сов. энциклопедия», 1960—1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Демкович Венедикт Порфирьевич
Прайсман Наум Яковлевич

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ

Редактор *А. Ф. Раева.*
Обложка художника *Б. М. Рябышева.*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев.*
Технический редактор *Е. В. Иванова.*
Корректор *Л. А. Козлова*

Сдано в набор 14/VI—1966 г. Подписано к печати 6/I—1967 г. 84×108¹/₃₂. Типографская № 2. Печ. л. 5,88 (3,5). У.-изд. л. 5,71. Тираж 75 тыс. экз. А—17447. Цена 15 коп.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Типография им. Смирнова Смоленского облуправления по печати. г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2. Заказ 4478.

Цена 15 коп.