Для кофейников

Робин Жаме

Вы сказали «математика»?

Из дома в город – всюду математика

Для кофейников

Робин Жаме

Вы сказали «математика»?

Из дома в город – всюду математика

Перевод с французского Е.В. Петровской
под редакцией Е.С. Ивановой

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2019

УДК 51
ББК 22.1
Ж26

Ж26 Жаме Р.
Вы сказали «математика»?
Из дома в город – всюду математика
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2019. – 176 с., ISBN 978-5-94836-559-6

Если вы думаете, что математика ограничивается только расчетами и геометрическими фигурами, линейкой и циркулем, то будете удивлены: эту науку интересует всё! Книга предлагает взглянуть на мир глазами математика.

Как жонглировать и не сбиваться? Что такое монохорд Пифагора и решето Эратосфена? Как поживают кролики Фибоначчи? Почему мыльные пузыри круглые? Как только математик задумывается над предметом, тот немедленно становится объектом математического исследования.

Вы все еще думаете, что математика – это трудно, скучно и бесполезно? Вот небольшая, простая, легко читаемая веселая книга, которая поможет преодолеть предубеждение к математике, стимулировать любопытство и желание учиться!

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-94836-559-6
ISBN 978-2-10-070707-2 (фр.)

Вы сказали математика?

Из дома в город — всюду математика

Робин Жаме

Новая редакция

Перевод с французского Е.В. Петровской

DUNOD

Palais DÉCOUVERTE

Авторы благодарят союз Математиков из Дворца Открытий (и в особенности Гийома Реи) за вклад в создание книги

Иллюстрации
Обложка и иллюстрации в книге: Рашид Мараи

Стр. 86: «Арифметика» из книги «Жемчужина философии» (1503), Грегор Рейш
Стр. 143: Вид на Бостон, © Marcio Jose Bastos Silva / Shutterstock.com
Стр. 144: «Прибытие в Сен-Дени императора Карла IV» (около 1460), Жан Фуке
Стр. 148: «Художник, рисующий лютню» (1525), Альбрехт Дюрер

В самом центре Парижа, в западном крыле Большого дворца, расположился Дворец открытий, который с момента основания в 1937 году следует одному принципу: показать как делается наука, чем она живет – с помощью выставок, эффектных опытов и рассказов команды аниматоров, которые в доступной форме объясняют фундаментальные законы астрономии, химии, физики, математики, наук о жизни, о Земле... Дворец открытий использует все доступные средства, чтобы поделиться своей страстью к науке, пробудить к ней интерес посетителей и возможно найти будущих ученых.

Содержание

Предисловие ... 7

1. Будь в форме на кухне! ... 8

Плитка и конечные элементы ... 9
Классификация конечных элементов ... 14
Еда – это не игрушки? ... 18

2. В кресле ... 35

От игр к математике ... 35
Человек против машины ... 48
А вы любите ириски? ... 56

3. Числа «а-ля натюрель» ... 62

Фигурные числа ... 62
Простые числа ... 68
Кролики Фибоначчи ... 77
В городе ... 87

4. Камень-ножницы-бумага! ... 89

Оригами против линейки и циркуля ... 96
Свернуть, развернуть ... 103

5. Большой беспорядок в городе ... 109

Графы вновь и вновь ... 109
Математики в городе! ... 124

6. С точки зрения искусства 136

Новые стихи 136
История перспективы 142
Музыка смягчает нравы 153
Как жонглировать и не сбиваться? 157

Хотите узнать больше? 162

Алфавитный указатель 164

Предисловие

Гуляя по мосту, архитектор задумывается о том, почему была выбрана именно такая форма, инженер отмечает, из каких материалов построен мост, музыкант тестирует акустику, чтобы понять, какой концерт лучше организовать на этом мосту. Фотограф прикидывает удачные ракурсы для съемки, художник вычисляет часы, когда дневной пейзаж особенно красив, историк рассуждает о роли данного моста в эпоху, когда он был возведен, искусствовед задумывается над стилем декораций.

А математик? Он размышляет о том, насколько сложно точно описать течение воды, он задумывается, какая математическая кривая была использована в создании арки моста, изучает декорации и замечает банальную или необычную симметрию.

Эта книга предлагает взглянуть на мир глазами математика. И если вы думаете, что данная наука ограничивается только расчетами и геометрическими фигурами, линейкой и циркулем, вы будете удивлены: математику интересует все! Лучше всех охарактеризовал математиков их знаменитый американский коллега Уильям Терстон, получивший Филдсовскую премию, самую престижную награду в этой дисциплине: «Математика – это то, что делают математики, математики занимаются исследованиями в математике». Конечно, как только математик задумывается над предметом, тот немедленно становится объектом математического исследования. Предупреждаем: окунувшись в это, вы будете видеть математику повсюду, вы не сможете воспринимать мир как раньше!

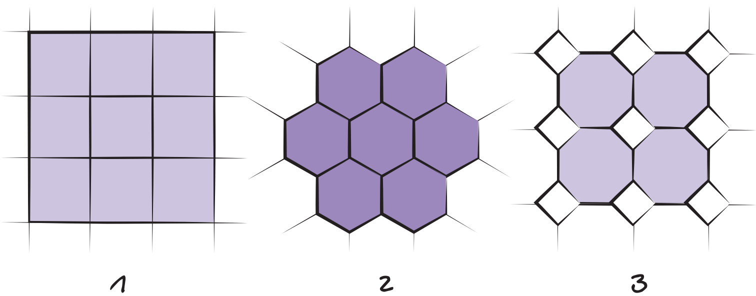
1

Будь в форме на кухне!

Кухня, наполненная предметами разнообразных форм, утварью и продуктами, способна вдохновить любого математика, даже сонного! Да и математикам не свойственно быть сонными, ведь кофе очень популярен у этих «забавных зверьков». Знаменитый математик Пал Эрдеш по этому поводу утверждал следующее: «Математик – это машина для превращения кофе в теоремы».

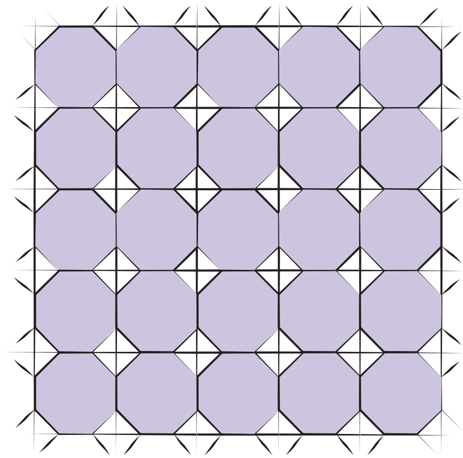
Плитка и конечные элементы

Отправляйтесь на кухню: наверняка у вас замощен плиткой пол, рабочая зона, стены. В ванной комнате вы, скорее всего, тоже обнаружите плитку. Всё, что от нее требуется, – это равномерно, без промежутков покрывать поверхность. В математике это называется «конечный элемент паркета». В основном используют одну или две повторяющиеся формы: одинаковые квадраты, или же глиняную плитку в форме шестиугольников, зачастую красного цвета. Также часто встречается плитка-брусчатка, состоящая из комбинации восьмиугольников и перевернутых квадратов.



Примеры конечных элементов

Может показаться, что модель номер 3 целиком состоит из квадратов: как если бы это были «квадраты без углов», а в промежутках – маленькие белые квадраты, расположенные по диагонали.



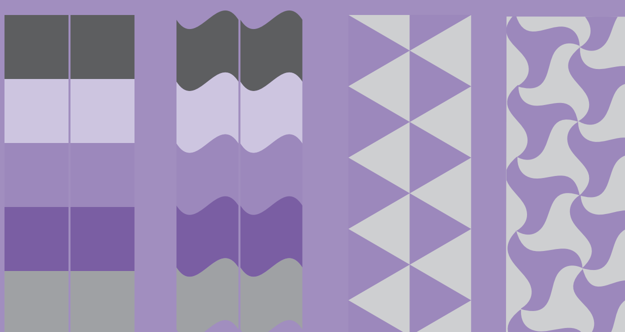
Наложение плитки из квадратов и брусчатки из восьмиугольников с квадратами. Поразительное сходство!

В то же время конечный элемент под номером 2 из шестиугольников не похож на два других. Разные, но в то же время похожие друг на друга объекты? Научное сходство – та еще штука: нужно найти способ верно классифицировать виды конечных элементов. Идея в том, чтобы детально их изучить, дабы классифицировать. Это нужно для того, чтобы впоследствии можно было легко объяснить, почему конкретные виды конечных элементов более похожи между собой, и чтобы иметь возможность тут же определить новый вид в конкретное семейство... И старания не прошли даром! Взгляните на улицы, музеи, художественные книги, старинные и новые здания, гобелены: где бы вы ни находились в мире, конечные элементы повсюду!

Домашнее задание

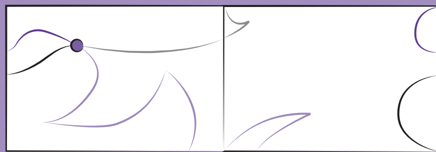
Создайте свои собственные конечные элементы

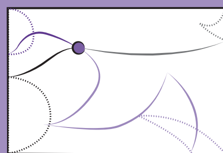
Ярче и пестрее, чем у вас на кухне. Попрактикуйтесь в создании конечных элементов паркета!
Вы можете видоизменить любой классический конечный элемент паркета, заменив прямые края на волнистые:



Волнистые квадраты и треугольники, но ими все еще можно замостить поверхность...

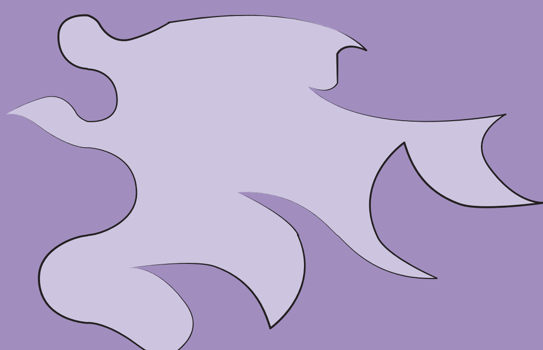
Существует «техника конверта»:
1. Возьмите два одинаковых прямоугольных листа и приклейте их друг к другу по краю (или возьмите готовый закрытый конверт, откуда и пошло название техники).
2. Отметьте точку на одной из сторон конверта. Соедините эту точку с каждой вершиной прямоугольника, начертив четыре линии так, чтобы они могли перейти в любой момент на другую сторону листа. Маленькое замечание: эти линии не должны пересекаться.



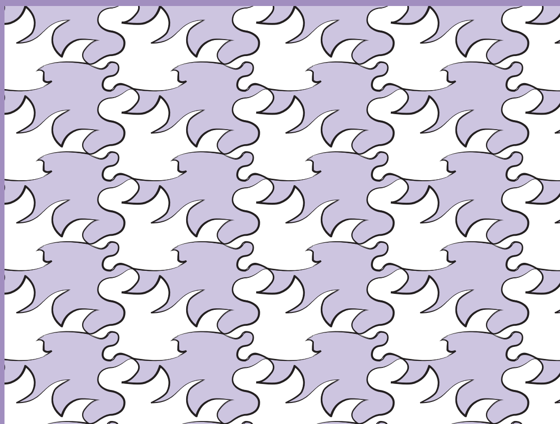


Четыре линии соединяют точку с углами конверта, иногда проходя с изнанки (лицевая сторона слева, изнанка справа). Получившийся конверт представлен ниже

3. Отрежьте по линиям (каждый слой конверта по отдельности, не насквозь) и разверните получившуюся фигуру. Повторите алгоритм много раз подряд, и вот, вы уже создали собственный конечный элемент! Вы можете поразмышлять, почему это всегда работает!



Фигура, которая получается после разворота конверта

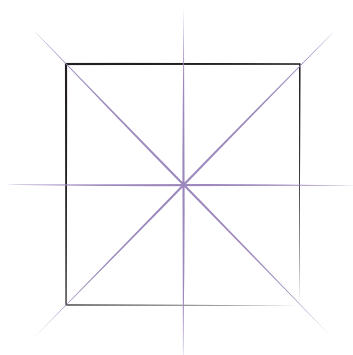


Конечный элемент с использованием данной формы

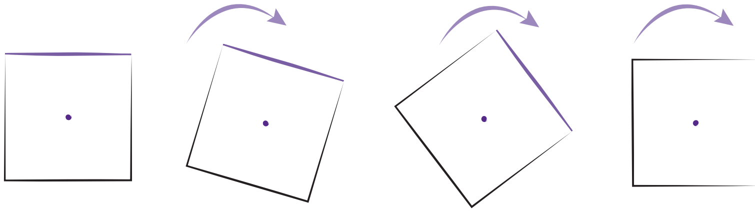
Эта техника также работает с «конвертом» в виде половины квадрата (обрезанного по диагонали), равностороннего треугольника или его половины (обрезанной по высоте).

Классификация конечных элементов

Существует бесконечное множество различных конечных элементов. Чтобы их классифицировать, математики предложили рассмотреть их «симметрию». Что это означает? Давайте разбираться. Понятие симметрии для математика (как и в целом для ученых) – это не просто ось симметрии или тот факт, что предмет идентичен отражению в зеркале. Таким образом, предмет обладает симметрией, если сохраняется неизменность при некоторых преобразованиях. И напротив, если не соблюдаются данные условия, это является «нарушением симметрии». Квадрат, например, симметричен, потому что он располагает осями симметрии:



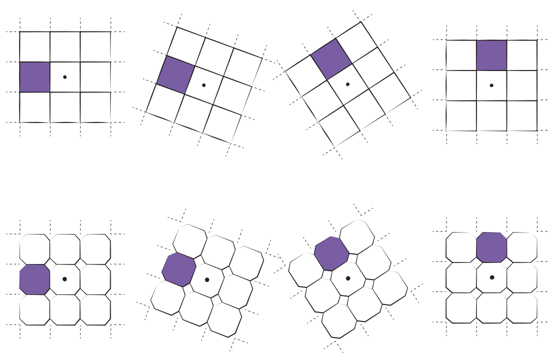
но также потому, что у него есть то, что называют «центром симметрии четвертого порядка».



Если вы повернете квадрат вокруг центра, вы не увидите отличий по сравнению с предыдущей позицией (чтобы показать различия на рисунке, мы специально раскрасили одно ребро квадрата). Иначе говоря, совершая полный оборот вокруг своей оси, квадрат всегда будет в одном и том же положении. У правильного шестиугольника центр симметрий шестого порядка, поскольку все шесть поворотов он будет в одинаковом положении, у восьмиугольника центр симметрии, соответственно, 8 порядка. Какая связь с конечными элементами?.. Симметрия – идеальный параметр для их классификации.

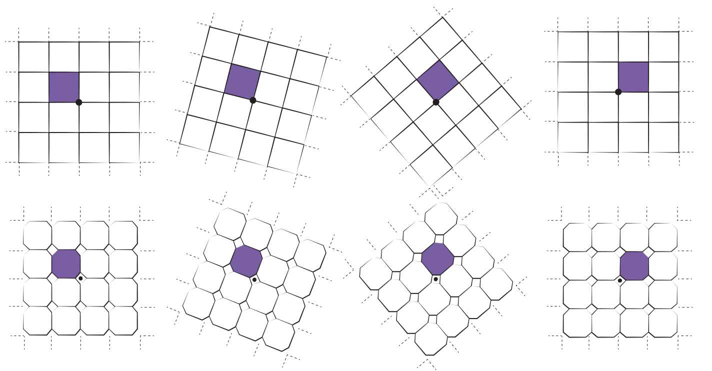
Рассмотрите плитку, находя все возможные типы симметрии, представив, что она простирается бесконечно во всех направлениях... Сравните конечные элементы из квадратов, восьмиугольников и смешанных квадратов.

В первом случае в центре каждого квадрата находится центр оси симметрии четвертого порядка, как и в центре каждого правильного восьмиугольника.



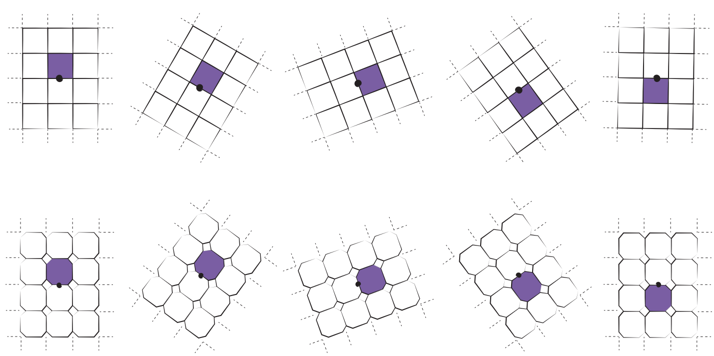
Если повернуть квадратную плитку на четверть вокруг центра одного из квадратов, она останется в том же положении, как если бы ее не поворачивали. Фиолетовый квадратик меняет свое положение, только чтобы продемонстрировать движение фигуры. То же правило сработает и для восьмиугольной плитки

На вершинах каждого квадрата находится центр симметрии четвертого порядка, как и в центре каждого квадратика/восьмиугольника плитки!



Точно так же, если повернуть квадрат плитки на четверть вокруг вершины квадрата или же повернуть восьмиугольник и квадратик плитки вокруг центра квадрата, его позиция останется неизменной относительно изначальной

В середине каждой стороны квадрата есть центр симметрии второго порядка... как и в центре каждой стороны восьмиугольника, которая не является общей для квадрата.



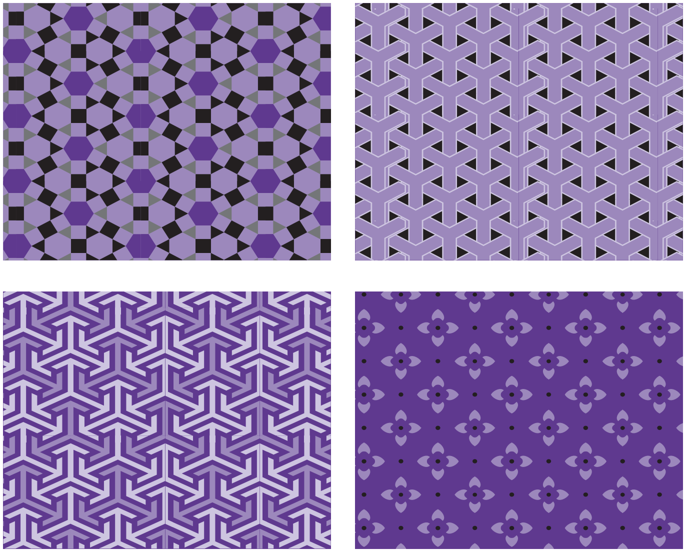
Если вы ищете оси симметрии, вы легко их найдете у двух конечных элементов! Короче говоря, если виды паркета располагают одинаковой симметрией, они могут считаться более или менее «одинаковыми».

С другой стороны, шестиугольные конечные элементы имеют совсем другую симметрию: например, нет центра вращения четвертого порядка. Следовательно, этот вид конечного элемента не принадлежит тому же семейству.

Благодаря этим критериям мы можем разработать эффективную классификацию. Неважно, насколько «мудреный» тот или иной конечный элемент (к которым относятся все виды плиток, кроме тех, которые составлены из отломанных как попало кусочков), он входит в одно из 17 существующих семейств. Потому как существует именно 17 семейств, не больше и не меньше! Об этом нам известно с 1891 года, благодаря математику и кристаллографу Евграфу Федорову (1853–1919).

Ого!

Альгамбра в Гранаде (Испания) – знаменитый и очень красивый архитектурно-парковый ансамбль, самая известная часть которого была построена арабами на рубеже 13 и 14 веков. Основное архитектурное оформление – мозаика, геометрические фигуры, тесное переплетение узоров. Короче говоря, есть чем занять математика надолго. И действительно, некоторые не прошли мимо: они классифицировали все существующие виды конечных элементов в этих дворцах, построенных задолго до того, как математики начали совать нос в их историю... Неожиданно: почти 17 известных семейств конечных элементов находятся в Альгамбре! Это означает, что художники того времени, будучи в поисках красивой мозаики, новой, не похожей на другие, нашли теоретически все возможные типы замощения.



Различные виды конечных элементов в Альгамбре, некоторые имеют очевидное сходство!

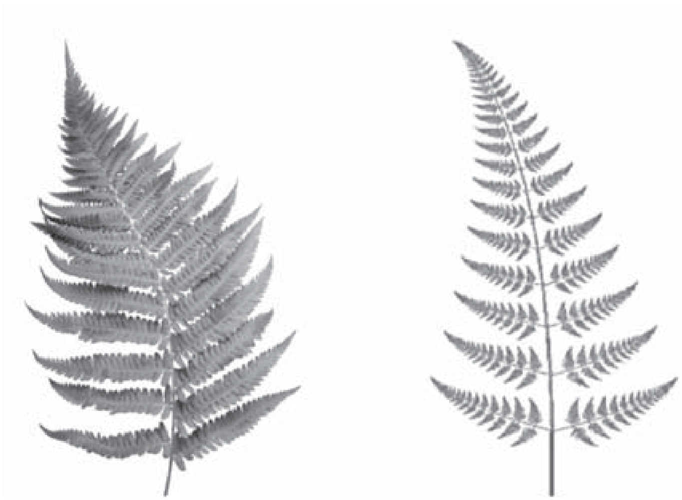
Еда – это не игрушки?

Математикам интересны любые формы: простые, сложные, похожие и кардинально отличающиеся друг от друга. Вот и новое поле деятельности: классифицировать, распределить, описать как можно лучше.

Математики рождены в капусте!

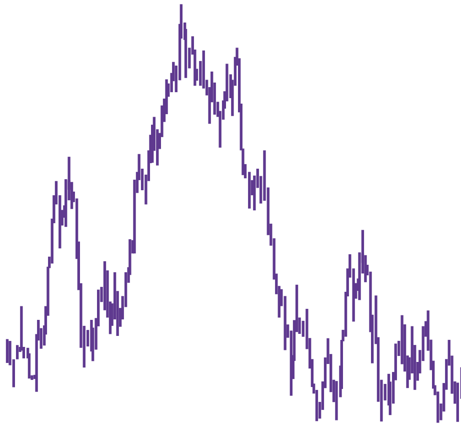
Видели ли вы когда-нибудь эту замечательную капусту романеско?

Как и у цветной капусты или папоротника, первое, что бросается в глаза, это их изрезанный вид; точнее маленький кусочек как две капли похож на целый объект. Эти причудливо неровные предметы (сравните их в этом плане с гладким помидором) часто встречаются в природе и неизбежно напоминают математикам о «фракталах» – математических объектах, на которые они похожи больше всего.



Сможете ли вы отличить настоящий папоротник от фрактала?

Разница между фракталом и теми предметами, которые похожи на них в реальной жизни, состоит в том, что небольшой фрагмент фрактала имеет ту же форму, что и весь объект (свойство самоподобия). Другими словами, вы можете взять часть кусочка от части фрактала, и вы получите такую же сложную фигуру, такой же формы, что и «материнский» объект. Тогда как, нарезая настоящую капусту романеско, в итоге вы быстро придете к тому, что останутся лишь бесформенные крупицы.



Один из самых «простых» фракталов и самых древних… Не очень-то похоже на плавные холмы!

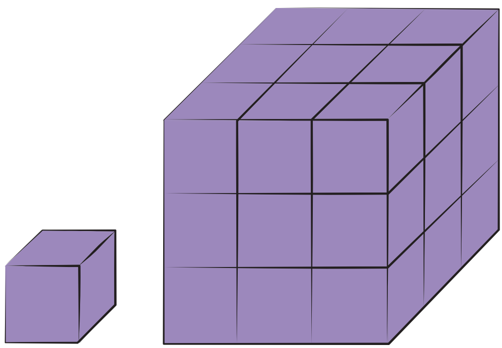
Появление первых фракталов не на шутку взволновало математиков: прежде они полагали, что почти все геометрические объекты «гладкие». Чтобы понять, о чем идет речь, возьмите апельсин и отделите маленький кусочек от кожуры. Очистив небольшой ломтик от кожуры, можно подумать, что он идеально гладкий (плоский). Но если мы снимем больший кусок кожуры, то станет заметно, что он неровный и его невозможно выровнять, не разорвав. Также и в повседневной жизни: Земля, которая нас окружает, кажется плоской (удаляясь от поверхности) и не круглой, так как мы видим всего лишь маленький кусочек. За исключением предметов, где есть «углы» и «вершины», например уголки книги или острие ножниц, мы полагали, что очертания предметов, и в частности математические очертания, «умеренные» и напоминают больше кривые или пологие, как холмы поверхности. Но в конце 19 века появились первые фракталы, которые еще не получили своего имени: эдакие вздымающиеся вершины и впадины, совершенно не гладкие!

Когда великому математику Шарлю Эрмиту (1822–1901) показали первые фракталы, которые еще так не именовались, он был настолько шокирован, что написал: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы» (от непрерывной функции, не имеющей производных. – *Прим. перев.*)

Мало-помалу фракталы прочно обосновались в математическом бестиарии, и на то была причина: очень быстро все поняли, что они годятся , чтобы описать не только капусту, но также курс на бирже, функцию легких, берега Бретани... Все вещи, которые изогнуты, угловаты, запутаны и которых, если подумать, – очень много. С появлением компьютеров появилась возможность визуализировать фракталы все лучше и лучше. И объекты, которые до этого были похожи скорее на монстров, постепенно превратились в звезды, являющие все великолепие математики!

Между двумя измерениями

Куб вырос: его стороны увеличились втрое, поверхности в 9 раз (можно насчитать 9 квадратов на каждую сторону) и объем вырос в 27 раз (в большом кубе насчитывается 27 маленьких кубиков).

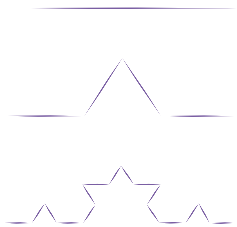


Давайте увеличим объект, увеличив длины его сторон втрое. Чтобы было проще, достаточно представить куб, стороны которого увеличены в 9 раз и объем в 27 раз

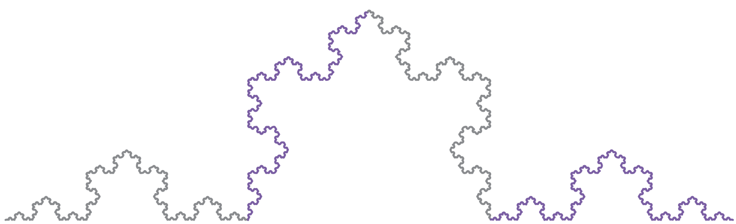
Если мы увеличим стороны вдвое, поверхности увеличатся в 4 и объем в 8. Из этого следует: каким бы ни было число увеличений или уменьшений неважно для какого объема: если мы увеличим все длины сторон на фактор k, поверхности увеличатся на k^2, а объем на k^3.

Теперь взглянем, что произойдет с участком, именуемым кривой Коха – одним из самых известных фракталов.

Чтобы создать снежинку Коха, давайте начнем с сегмента, который мы разделим на три равные части. Возьмем кусочек из середины и заменим его на два участка той же длины, так, чтобы получилась маленькая горка. Затем повторим эти же действия для каждого из четырех сегментов. И так до бесконечности. Полученная кривая примет причудливый вид и будет напоминать снежинку (игра слов: «flocon de Koch» – кривая Коха, «flocon de neige» – снежинка. – *Прим. перев.*).



Если взять первый отрезок (обозначен серым цветом) и представить его в три раза больше, мы получим объект целиком.



Кривая Коха

Следовательно, один из участков увеличится втрое. Если бы это была длина, маленький кусочек повторился бы три раза. Или, как мы можем обнаружить здесь... четыре раза! Искомый объект все еще не двумерный, потому что в этом случае частичка объекта должна быть воспроизведена 9 раз... Единственно верный вывод: этот объект, как и большинство фракталов, не является частью ни одномерного, ни двумерного измерения, он находится между ними: больше чем линия, но все еще не плоскость.

Великие открытия

Нечеткое определение

Бенуа Мандельбро первым использовал слово «фрактал» в книге, опубликованной в 1974 году. С этого момента широкая публика услышала о фракталах. Но после этой публикации мнения математиков насчет точного определения фрактала разделились.

Для некоторых из них фрактал оставался «самоподобным» объектом: мы видим то же самое, когда смотрим на него вблизи и издалека. Это как раз случай цветной капусты.

Для других фрактал – это объект, который остается «сложным», когда зритель отдаляется, он никогда не будет «гладким», но формы в разных масштабах необязательно всегда одинаковы. Например, глядя на побережье Бретани, мы всегда увидим новые бухты, вершины, но не карту, которая точно отражает форму всей Бретани.

Для других математиков фракталы – это объекты, которые «находятся между двумя измерениями». Их размерность не является целым числом: например, кривая Коха – линия, которая, разворачиваясь, может почти целиком заполнить поверхность или лист смятой бумаги, и это больше похоже на объемную фигуру, чем на плоскость.

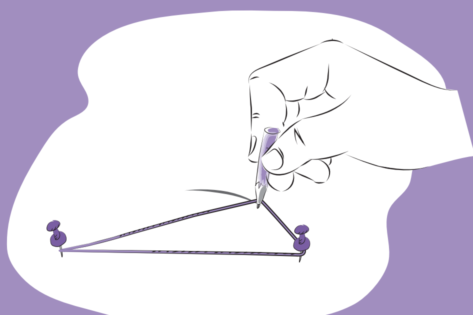
А как же тогда гладкие фрукты и овощи?

Без паники, математики и тут найдут пользу, особенно нарезая овощи. Возьмите помидор, к примеру. Каким образом вы бы его ни нарезали, срез всегда будет круглым (ну почти). Но замечали ли вы, насколько красива форма среза, когда нарезают огурцы или морковь немного наискось? А это уже эллипсы, очередная звезда математики, еще более древняя, чем фракталы! Эллипсы нас окружают повсюду: искривленные окружности, к примеру миски, тарелки и блюдца. Посмотрев на эллипс с удачного ракурса, вы можете увидеть окружность! Глядя на огурец со стороны его среза, вы всегда будете видеть круг. Невозможно догадаться, нарезали ли его наискось или ровно! Эту замечательную фигуру можно также увидеть, если нашинковать любой конус. Именно эллипс можно увидеть, если посветить на пол карманным фонариком: так, будто вы смотрите на луч света (дословно: световой конус) под углом. В зависимости от положения лампы эллипс может «не замыкаться»: расплываясь, он будет приближаться к бесконечности. В этом случае полученная кривая будет «параболой» либо частью «гиперболы».

Домашнее задание

Нарисуйте эллипс

Нарисовать эллипс, что может быть проще? Возьмите две кнопки, лист картона, нитку и карандаш. Воткните кнопки в картон, не слишком близко к краю. Пропустите нитку вокруг двух кнопок и завяжите ее на узелок, оставив немного свободной нитки. Это необходимо, чтобы можно было сделать оборот вокруг двух кнопок. Возьмите карандаш, натяните нитку, и сделайте полный оборот от кнопки до кнопки, продолжая держать нить хорошо натянутой. Поздравляем! У вас получился великолепный эллипс!



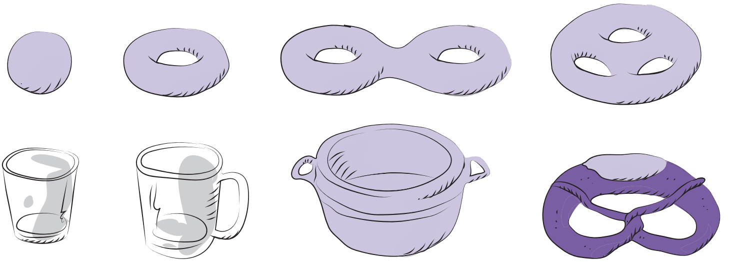
Небольшое дополнение: эллипс представляет собой совокупность точек, для которых сумма расстояний до кнопок остается одинаковой. Если две кнопки находятся в одном и том же месте, мы получим другую известную фигуру: круг.

Вам миску, чашку или котелок?

Завтрак ставит математика перед корнелианской дилеммой[1]: что же выбрать – чашку или миску? Разница между этими предметами существенна! У миски нет отверстия, можно ее представить, как сдутый воздушный шарик. Тогда как чашку, если у нее есть ручка, можно представить в виде соединенных вместе сдувшегося воздушного шарика и спасательного круга (т.е. предмета с отверстием). А кастрюля с двумя ручками – это отдельный (отличающийся от двух предыдущих) предмет, полученный из парочки «спасательных кругов»! Брецели, широко распространенная в Германии закуска, являются яркими представителями другой категории предметов, тех, у которых три отверстия.

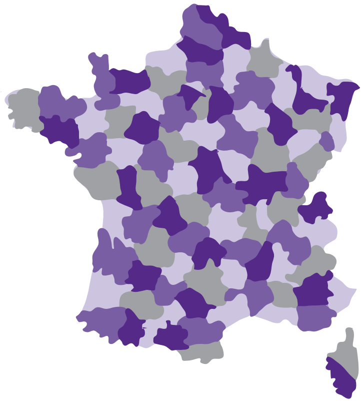
---

[1] Корнелианской дилеммой считается сложный нравственный выбор. В классической драме – это персонаж, испытывающий внутренний конфликт, заставляющий его выбирать между любовью и честью или желанием и обязанностью. Впервые пример такого выбора был введен в драме Пьера Корнеля «Сид». – *Прим. перев.*

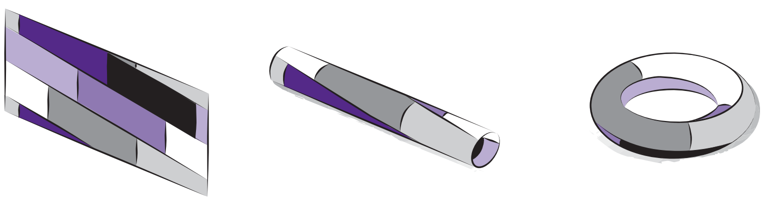


Без отверстия, с одним отверстием, двумя, тремя...
А сколько отверстий у предметов вокруг вас?

Этот своеобразный способ рассматривать объекты в зависимости от количества их отверстий свойственен области математики, которая зародилась около века назад, – топологии. Здесь опять-таки классификация объектов помогает выявлять сходства объектов одного множества. Вот чем обычно занимаются математики: треугольники, например, сгруппированы, потому что они имеют три стороны, однако у них очень разнообразные формы. Но они обладают определенными свойствами, такими как сумма углов, которая всегда равна 180°. Точно так же, какая бы ни была их точная форма, некоторые свойства справедливы для всех плоскостей, имеющих одинаковое количество отверстий. Самый известный пример – проблема раскраски карт. Вопрос в том, сколько необходимо цветов, чтобы правильно раскрасить всевозможные карты, которые только можно представить. Правильно – это так, чтобы две области, граничащие друг с другом, были разных цветов. Решение зависит от количества впадин на местности, карта которой будет нарисована. На поверхности без впадин – шара или миски, всегда можно обойтись четырьмя цветами, независимо от того, как раскрашивать карту (это также справедливо для плоской карты, потому что она не имеет впадин). Но чтобы раскрасить карту на тороиде, потребуется семь цветов, чтобы одинаковые не соприкасались.



Эту карту можно раскрасить всего четырьмя цветами, как обычную карту на бумаге или на поверхности без отверстий (дырок)



На планете в форме тора[1], потребуется семь цветов, чтобы они не повторялись (в этом примере представлен каждый из 7 окрашенных участков касается других шести лишь один раз при окраске тора)

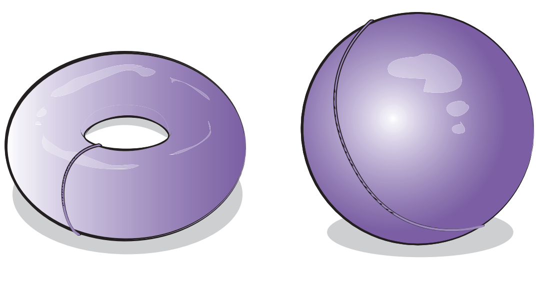
[1] Тор (тороид) — поверхность вращения, получаемая вращением образующей окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее. – *Прим. перев.*

Великие открытия

Гипотеза Пуанкаре: 100 лет ожидания...

Особый вклад в топологию в 2003 году внес русский математик Григорий Перельман, после почти векового ожидания свет увидела гипотеза Пуанкаре (гипотеза – это утверждение, которое считается верным, но которое предполагается доказать). Возьмем абсолютно скрученную поверхность. Если мы захотим узнать, есть ли у нее отверстие или нет, есть как минимум два способа, чтобы это сделать:

1. Подуть внутрь, чтобы узнать, будет ли в конечном итоге фигура похожа на сферу или на тор. (Да, можно математически «подуть» внутрь поверхности, даже если иногда это не так просто сделать!)
2. Посмотрите, можно ли снять веревку, завязанную вокруг объекта на узел, не развязав его. Действительно, если это невозможно для тора (веревка проходит через отверстие, ее придется развязать), то возможно в случае со сферой, даже деформированной.



Большой вопрос состоит в том, как узнать, сможет ли этот тест так же верно сгруппировать другие всевозможные фигуры в те же группы. И если в случае вышеизложенного примера результат может показаться очевидным, это совсем не так, когда мы рассматриваем объекты настолько сложные, как, например, фракталы.

Ого!

...И миллион долларов в руках

Возвращаясь к проблеме (к гипотезе Пуанкаре), которая не давала перевести дух математикам на протяжении сотни лет, Григорий Перельман отказался от всех наград, включая приз в миллион долларов! Он обосновал свое решение, объяснив, что люди, которые работали над решением этой проблемы до него, также участвовали в доказательстве гипотезы, поэтому заслуживают такую же награду, как и он.

Почему пузыри круглые?

Перейдем теперь к разделу, особенно любимому математиками и физиками: мыльным пленкам. Задумывались ли вы когда-нибудь, почему пузыри круглые? Давайте вкратце рассмотрим физический аспект данной проблемы: пузырь — это воздух, заключенный в полностью напряженную поверхность. Это явление сопоставимо с воздушным шаром, который надувают: если вы оставите его в покое — он будет очень маленьким. Но когда вы начнете надувать его, вы измените его естественную форму, растягивая резину.

И тогда воздушный шарик примет ту форму, в которой напряжение, которое он испытывает, будет равномерно распределено по всей поверхности и минимально. Стоит отметить, что форма надутого шара близка к сфере, однако он ею не является, потому что в некоторых местах резина более плотная, например в районе хвостика.

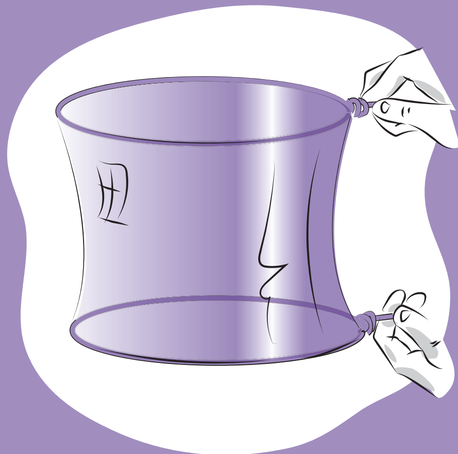
Взглянем на ситуацию с чисто математической точки зрения. Некоторое количество мыльной воды, которое окружено некоторым объемом воздуха, с максимальным натяжением. Чтобы определить естественную форму мыльного пузыря, достаточно решить математическую задачку: найти форму, которую займет объем, чтобы поверхность вокруг него была как можно меньше. Вы уже, наверное, догадались, что поверхность, которая отвечает этим требованиям: сфера. И если большие пузыри имеют не только форму сферы, то это уже вопросы к физикам: ситуация усложнилась!

Домашнее задание

Создание минимальных поверхностей

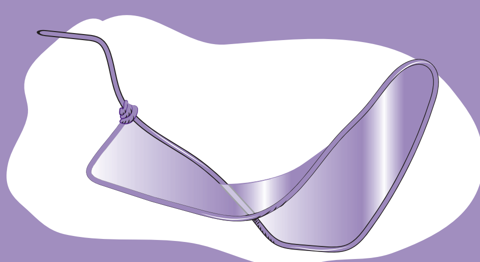
Чтобы создать «минимальные поверхности», можно воспользоваться свойством мыльных пленок (поверхностным натяжением). Другими словами, найти наименьшую поверхность, которая соединяла бы заданные контуры.

Возьмите медную проволоку или электрический провод и сделайте два круга. Расположите их один над другим и окуните в мыльную воду. Достаньте круги и осторожно отведите их друг от друга; между кругами появится мыльная пленка, напоминающая цилиндр, сужающийся к центру. Данная фигура называется «катеноид». Это самая маленькая поверхность, которая может «опираться» на два круга.



Если вы продолжите отдалять круги друг от друга, катеноид резко пропадет, останутся лишь два диска. Сумма их площадей будет еще меньше, чем у катеноида.

Вы можете повторить этот опыт с проволокой любой формы: кубической, спиралью, формой волнистой линии, теннисного мячика.. В большинстве случаев мыльная пленка, соединяя края объекта, будет очень похожа по свойствам на минимальную поверхность.



Кривая теннисного мяча и ее поверхность напоминает седло для лошади

Минимальные поверхности не так уж легко рассчитать. Опыт не позволяет узнать о них все, что хотелось бы (к примеру, чтобы можно было бы создать их цифровую модель), но он дает четкое представление об их форме, что тоже может в дальнейшем пригодиться. Что известно точно: у минимальной поверхности никогда не будет «рельефа» («горба»). А потому площадь поверхности, полученная путем разрезания этого рельефа, будет еще меньше. Эти поверхности всегда состоят из частей, плоских или похожих на чипсы или лошадиное седло: поверхность вздымается в одном направлении (вспомните оси «голова лошади / хвост лошади») и опускается в другом («левая нога / правая нога наездника»). То, что также называют в математике «седловой точкой»...

2

В кресле

Пока вы играли, сидели за компьютером и проходили опросы, вы, сами того не подозревая, приблизились к важным открытиям в математике!

От игр к математике

Вдумчивого математика может заинтересовать что угодно. В том числе и игры, все игры! Математики не любят играть (ну почти все), но любят изучать правила игры, стратегии (разглядеть все варианты!). От азартных игр до игр, требующих недюжинного ума, им интересно все!

Азартные игры

От белота до покера на костях или игры в лошадки – большая часть этих игр зависит от удачи. И если в этих играх нет достоверного способа выигрывать каждый раз (иначе они не были бы азартными), часто можно увеличить шансы на победу, рассуждая логически...

Возможно, вы уже заметили, например, что когда вы бросаете два кубика, значения, полученные суммированием двух (от 2 до 12), не повторяются так часто. Это логично: если кубики не фальшивые, выпасть может любое значение.

Итак, у всех возможных комбинаций есть одинаковые шансы выпасть. Однако среди этих комбинаций, некоторые, такие как 1 и 3, 2 и 2, 3 и 1, могут дать одинаковый результат. И количество способов получить некоторые комбинации не будет одинаковым для всех чисел от 2 и 12: например, существует только один способ получить 2 (оба кубика падают на 1), но есть шесть способов получить 7 (1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1)!

Кубик 1 / Кубик 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Конечно, это небольшое наблюдение не позволит тут же выиграть, но оно наглядно демонстрирует, что иногда полезно поломать голову...

Возьмем, к примеру, Эдварда Торпа, математика, который в шестидесятых нашел способ выиграть в блекджек в среднем более одного раза (одна из самых популярных карточных игр в казино). Он успел сорвать большой куш до того, как ему отказали во въезде во все игорные заведения мира...

Великие открытия

Сомнительные пари шевалье де Мере

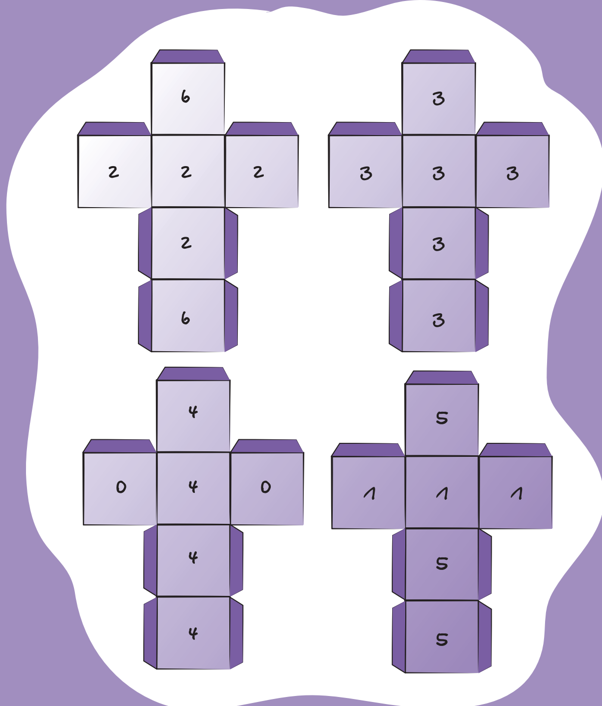
Блез Паскаль (1623–1662), известный как физик и теолог, также внес вклад в изучение азартных игр. Согласно легенде, один из его друзей с очень неблагонадежной репутацией, шевалье де Мере, имел привычку обыгрывать людей в тавернах, предлагая запутанные ставки. На самом деле нет смысла в том, чтобы играть в такие игры, как классическая «орел или решка»: поскольку нет сильного перевеса в одном или другом результате. Придется сыграть немало партий, при этом никто не потеряет и не выиграет много денег. Поэтому шевалье де Мере предложил следующую игру: «Я бросаю четыре кубика и, по крайней мере, на одном из них должно выпасть 6». Расчет показывает, что это происходит несколько чаще, чем один к двум.

Играя так долгое время, шевалье был уверен в постепенном выигрыше. К несчастью для него, он иногда попадался в свою же ловушку и предлагал заведомо проигрышные ставки.
Нужно сказать, что в те времена подобные изыскания были далеки от реальных исследований и не имели под собой научных оснований. Общее мнение заключалось в том, что нельзя вычислить лучшую комбинацию: невозможно предсказать удачу! Заинтересованный задачками шевалье де Мере, Паскаль предложил «сильные идеи», позволяющие рассуждать точнее и рассчитывать напрямую вероятность того, что произойдет то или иное событие. С тех пор развилась целая теория, теория вероятности, составляющая сегодня очень важный раздел математики, и теперь все знают, что можно выучить законы удачи.

Домашнее задание

Кубики, чтобы жульничать круче, чем шевалье де Мере

Представляем вам четыре макета игральных костей, которые бы оценил даже шевалье. Чтобы смастерить игральные кости, напишите цифры 2-2-2-2-6-6 на первой костяшке, 3-3-3-3-3-3 на второй, 0-0-4-4-4-4 на третьей, и, наконец, 1-1-1-5-5-5 на четвертой. Правила игры следующие: ваша жертва выбирает кубик, а вы выбираете один из оставшихся трех (вы можете заметить, что вы честный игрок, так как у вас меньше выбора на втором ходу). Каждый кидает свой кубик, и тот, у кого выпадает самая большая цифра, выигрывает одно очко.



Так как удача непредсказуема, невозможно найти методику, позволяющую выигрывать каждый раз. Но подумайте хорошенько: если ваш соперник выберет первый кубик, вам нужно выбрать второй, чтобы иметь больше шансов на победу, поскольку в четырех из шести случаев он получит 2, меньше, чем 3, которые вы обязательно получите. Не паникуйте, если соперник выбирает второй кубик: та же логика позволяет вам убедиться, что с третьим кубиком вы выиграете в четырех из шести случаев. Если соперник возьмет третий кубик, вы возьмете четвертый. Почему? А здесь сложнее: у вас есть шанс, что оба раза выпадет 5.

В этом случае вашему оппоненту даже не нужно будет кидать кости, чтобы понять, что он проиграл. Но если вам выпадет 1, вы все равно можете победить, если ему не повезло получить 0! Итак, вероятность вашего выигрыша снова составляет один к двум. Вы думаете, что проиграете, если соперник выберет четвертый? Это было бы логично, так как судя по всему, четвертый кубик – самый сильный. Но это не тот случай! Выберите в этом случае первый кубик. У вашего оппонента вероятность один к двум, что выпадет единица, которая гарантирует вам победу. И если выпадает 5, у вас все еще есть шансы на победу, так как вы можете выкинуть шестерку; и так далее, ваши шансы на победу всегда будут один к двум. Проведя некоторые вычисления, мы обнаруживаем, что действительно есть ровно два варианта из трех, чтобы выиграть, выбирая нужные кубики. Если вы сыграете множество партий, вы будете выигрывать вдвое чаще, чем проигрывать!

Неазартные игры

Но математиков интересуют также игры, в которых нет места азарту и случайности. К этой категории относятся игры на двоих, такие как шахматы, шашки, четыре в ряд, авале[1], крестики-нолики.

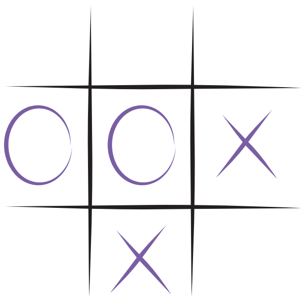
Существует очень важная теорема, общая для всех этих игр: теорема Цермело (1871–1953). Благодаря этому мы можем утверждать, что теоретически можно сделать все эти игры совершенно безынтересными! Согласно этой теореме, если ни один из двух игроков не ошибается, то есть если оба совершают лучшие ходы, то исход игры предопределен до ее начала.

---

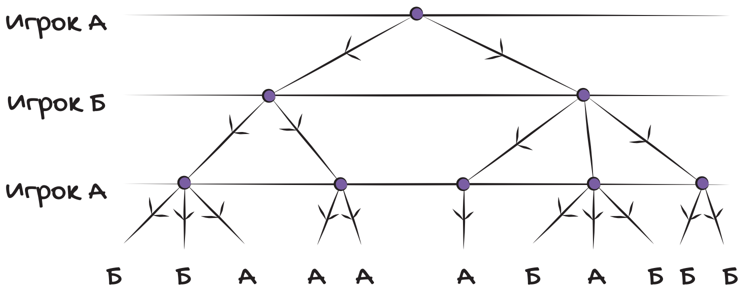
[1] Авале – южно-афр. awalém (игра, заключающаяся в перемещении зерен по клеткам). – *Прим. перев.*

Теоретически, во всех этих играх мы можем знать с самого начала, кто будет победителем: игрок, который начинает или его противник (или игра закончится ничьей). В этом случае речь идет о «выигрышной стратегии».

Как это возможно? Подумайте, что происходит в крестиках-ноликах, где нужно вписать сплошной ряд крестиков или ноликов в маленькую решетку.



Поскольку эта игра «короткая» (в конце концов, в ней очень мало вариантов развития событий), можно набить руку и запомнить все позиции, а также ходы, которые приведут вас к победе или поражению. С двумя игроками игры всегда заканчиваются без победителя (так как может быть ничья). Для «более крупной» игры, подобной упомянутой выше, человеку не хватит памяти, чтобы запомнить все возможные партии (варианты игры). Но современный компьютер имеет гораздо больше памяти, несмотря на ограничения. И можно представить себе память, достаточно большую, чтобы хранить всевозможные ходы любой игры (которой даже не существует в реальности!). С самого начала игры эта супер-память имеет список всех возможных концовок игры. Рассмотрим простой вариант, когда игра не может закончиться ничьей. Тогда можно перечислить все варианты концовок со стороны победителя.

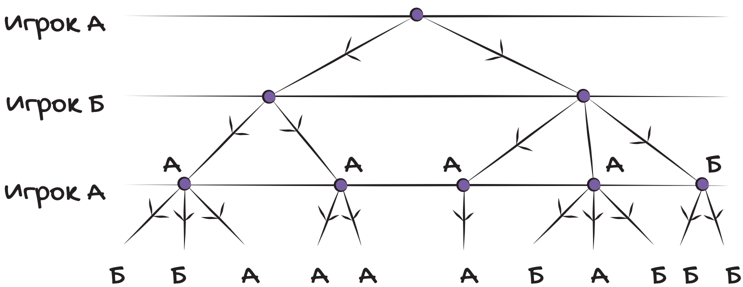


Партия игроков А и Б: каждая точка описывает отдельную игровую ситуацию (особое положение шахматных фигур или шашек, красных и желтых фишек во «Власти четырех»[1]. Следующим ходом игроки (А или Б по очереди) переходят в следующую позицию, на уровень ниже. На самом нижнем уровне конец игры. В каких-то случаях выигрывает игрок А, в других игрок Б.

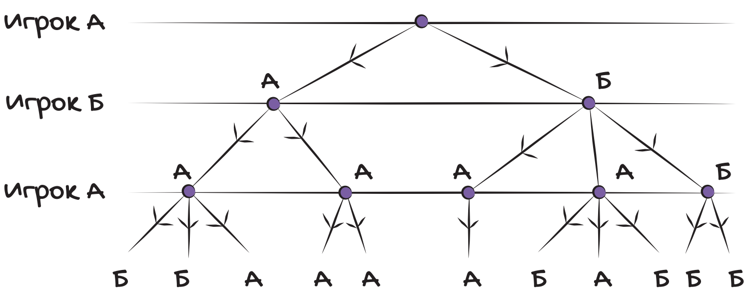
А теперь поставьте себя на место игрока А в момент его последнего хода, на последнем уровне. Если все ходы, которые он может совершить, приведут его к игроку Б, что в данном случае иллюстрирует крайняя правая позиция, то игрок А проиграет, какой бы ход он ни сделал. Мы можем даже отметить эту позицию игрока Б: что бы ни делал игрок А, Б выиграет. И наоборот, в других позициях А может выбрать ход, который приведет его к победе. Поскольку он отлично играет, А выиграет в любой из этих позиций. Мы можем отметить и эти ходы игрока А, так как такой исход игры уже встречался ранее.

---

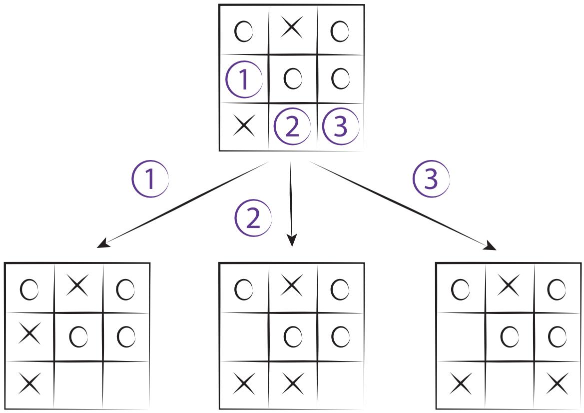
[1] Puissance 4 — четыре в ряд или connect four — игра для двоих, в которой игроки сначала выбирают цвет фишек, а затем ходят по очереди, роняя фишки в ячейки вертикальной доски. Цель игры — расположить раньше противника подряд по горизонтали, вертикали или диагонали четыре фишки своего цвета. Существуют варианты игры с полем разного размера, с фишками в форме дисков или шариков. Наиболее распространенный вариант, также называемый классическим, 7 × 6, а также 8 × 7, 9 × 7 и 10 × 7. — *Прим. перев.*



Рассуждая так, можно отметить позиции игры на следующем уровне: на этот раз речь об игроке Б. Если он сможет пройти до конечного пункта, то есть к своей победе, он сделает это, и позиция будет обозначена как Б. А если любой его ход приводит к позиции А, то выиграет уже игрок А и позиция будет отмечена как А.



Возвращаясь к истокам, можно обозначить начальную позицию игры, прежде чем она начнется, чтобы узнать, кто победит, если оба игрока будут играть без ошибок. Здесь это будет игрок А.



Наглядный пример игры в крестики-нолики. Нолики сходили первыми, и сейчас черед крестиков. У второго игрока есть три варианта следующего хода, но первый игрок все равно уверен в победе. В этой ситуации крестики всегда проигрывают, а нолики выигрывают

А интересны ли шахматы? Конечно же! К счастью, для нынешнего поколения компьютеров эта игра еще слишком сложна, несмотря на то, что с каждым разом машины все чаще побеждают человека. И даже если в играх типа шашек мы можем с уверенностью предполагать победу компьютера, всегда интересно понаблюдать битву между машиной и человеком. Но здесь уже речь идет не о математике...

Для таких простых игр, как «игра со спичками», которая стала популярной благодаря телепередаче «Форт-Боярд», выигрышная стратегия проста для понимания и применения. Просто следуйте инструкциям!

Домашнее задание

Как прослыть мастаком в игре со спичками?

Напомним правила. На стол в линию выкладывается несколько спичек. Каждый игрок по очереди тянет одну, две или три спички. Проигрывает тот, кто тянет последнюю спичку.

Как это часто бывает в математике, чтобы понять, как победить в игре, нужно искать решение с самых простых случаев (как здесь, с очень небольшим количеством спичек), постепенно увеличивая сложность проблемы, например, количеством спичек. Начнем с простого: если начать игру с одной спичкой, то игрок проигрывает, потому что по правилам игры он обязан взять не менее одной спички.

Игрок, который начнет игру с одной спичкой, проиграет, так как эта позиция заведомо проигрышная

Если начинать игру с двумя спичками, то первый игрок возьмет одну спичку, и тем самым обеспечит поражение второму игроку. С тремя или четырьмя спичками та же история: первый игрок берет две или три спички, тем самым оставляя последнюю спичку другому игроку, обрекая его на проигрыш.

Даже если остается 2, 3 или 4 спички, будет нетрудно оставить противника с одной спичкой и выиграть. Таким образом, это «выигрышные позиции» (фиолетовым окрашены спички, которые возьмет первый игрок)

И тут мы подходим к интересному случаю, когда игра начинается с пятью спичками. Первый игрок должен взять одну, две или три спички. Это означает, что противнику останется 4, 3 или 2 спички. В каждом из этих вариантов, тот, кому нужно брать спичку следующим, может быть уверен в победе! Но такой расклад, тем не менее, проигрышный для первого игрока так же, как в случае, когда осталась только одна спичка: если противник не ошибется, то первый игрок проиграет.

Как бы он ни ходил (фиолетовые спички), первый игрок оставит выигрышную позицию своему противнику, поэтому он проиграет! Пять спичек — «проигрышная позиция»

Добавив еще 1, 2 или 3 спички, то есть начиная игру с 6, 7 или 8 спичками, первый игрок может снова одержать победу, оставив 5 спичек своему противнику. С 9 спичками первый игрок проигрывает, так как он должен оставить 6, 7 или 8 спичек своему противнику. Таким образом, вытягивая спички вторым, вы сможете

гарантировать себе победу. Если начинать игру с 10, 11 или 12 спичками, то уже первому игроку можно быть уверенным в выигрыше, только если он оставит 9 спичек противнику, а если 13, то победа достанется второму игроку, и так далее. Короче говоря, если изначальное количество спичек находится среди чисел 1, 5, 9, 13,17... то есть чисел, которые могут быть записаны как кратные 4 плюс 1, первый игрок скорее всего проиграет, если нет – то выиграет.
Эта игра больше не представляет какого-либо интереса, по крайней мере для двух игроков, которые понимают, как это работает. Поскольку достаточно знать исходное количество спичек, чтобы вычислить, победит первый или второй игрок. В случае игры, которая начинается с 17 спичек ($17 = 4 \times 4 + 1$), у второго игрока есть все шансы выиграть, при условии, что если его противник берет одну спичку, он берет 3, противник – 2 спички, он поднимает 2, противник – 3 спички, он убирает 1. Когда два игрока сделали по одному ходу, четыре спички уже вытащены. Останется 13, затем 9, затем 5, затем 1: первый игрок продует! Чтобы узнать, кто выиграет, достаточно знать, кто первым будет ходить.

Человек против машины

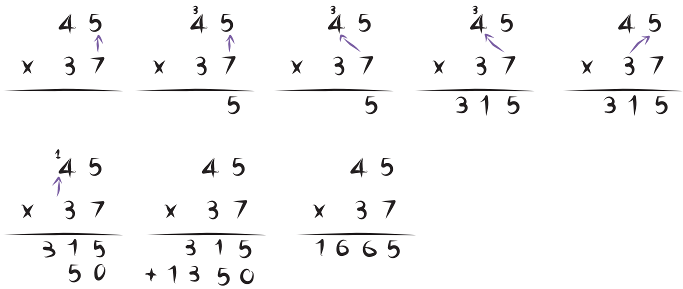
Проверка по алгоритму

Мы выяснили, что если избрать выигрышную стратегию или обладать невероятной памятью, головоломки теряют свою привлекательность. Хорошие новости для компьютеров, которые могут с легкостью побеждать нас в играх, которые будут нам казаться сложными, в то время как на самом деле они легкие.

Тем не менее, чтобы найти выигрышную, но вместе с тем простую стратегию, как, например, в игре со спичками, нужно немножко поразмыслить, не так ли? Что, черт возьми, нужно сделать, чтобы машины типа компьютера, газонокосилки или даже тостера производили впечатление умных вещей? Математики признают свою вину... Самое важное слово – «алгоритм». Алгоритм – инструкция, чтобы сделать нечто сложное, не разбираясь в этом, а лишь выполняя правила. Примерно этим же вы занимаетесь, когда готовите по рецепту: необязательно знать, получится у вас в итоге шоколадное пирожное или картошка фри, и нет нужды пытаться понять, зачем необходим тот или иной этап. Просто следуйте рецепту, чтобы приготовить нужное блюдо!

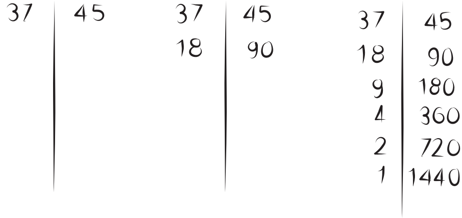
Вы также следуете алгоритму, когда умножаете столбиком. Вам не нужно знать, почему работает этот метод, не говоря уже о том, чтобы думать, как именно. Просто примените то, чему вас научили: умножьте число в правом нижнем углу на верхнее правое, напишите количество единиц и держите в уме десятки.

Умножьте нижнюю цифру справа на вторую верхнюю цифру и прибавьте оставшиеся «в уме» десятки. Пройдя все цифры сверху, повторите алгоритм, проделав то же самое с нижней цифрой, начиная справа, и так далее.



Существуют и другие алгоритмы, дающие тот же результат, что и умножение «в столбик».

Расчертите лист на две колонки. Меньшее число запишите слева, большее справа. Разделите меньшее число на 2 и результат запишите ниже. Если в ответе есть дробная часть после запятой, не пишите ее. А число во втором столбце наоборот умножьте на 2. Повторите алгоритм до тех пор, пока в левой колонке не получите единицу. Зачеркните все строчки, где числа слева четные. Затем сложите все оставшиеся числа в правой колонке.



37	45
~~18~~	~~90~~
9	180
~~4~~	~~360~~
~~2~~	~~720~~
1	1440

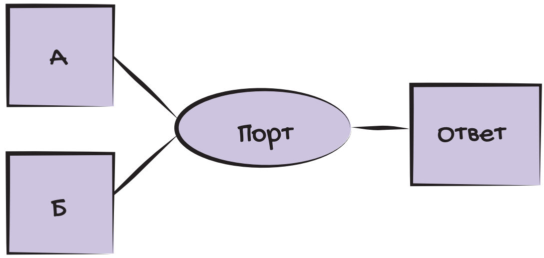
37	45
~~18~~	~~90~~
9	180
~~4~~	~~360~~
~~2~~	~~720~~
1	1440
	1665

Когда вы закончите применять эти правила (дойдете до конца алгоритма), у вас получится результат умножения, который заведомо сложен для вычисления, какими бы ни были изначальные числа. Суммирование простых действий может дать удивительный результат.

Логические порты

Теперь вы можете примерно представить, как компьютер просчитывает подобные сложные вещи. Он выполняет множество простых операций: отправляет и получает нули и единицы, хранит их в памяти, затем достает оттуда. Но он просто проделывает это очень быстро.

На элементарном уровне компьютера находится некое подобие «ячеек», которые в большинстве своем получают две цифры (нули или единицы, других компьютер не знает!) и отправляет в ответ лишь одну; мы называет это «логические порты».



Порт, который имеет два входа А и Б
(которые могут иметь значения 0 и 1)
и отправляет ответ (0 или 1)

Самые известные логические порты (функции) – «и» и «или». Эти названия исходят из их логического смысла: зная, что 0 – это ложь, а 1 – это правда, логично предположить, что порт «и» должен отвечать «правда», если оба входа А и Б правдивы, и «ложь» – если это не так.

Сравните с разговорной речью, когда мы говорим «вам сыр или десерт?», и это означает, что мы возьмем что-то одно, а не сразу два блюда.

Эту разницу в определениях помогает прочувствовать известный среди математиков анекдот: женщина-программист только что родила, и ее спрашивают: «Это мальчик или девочка?», а она отвечает «Да, конечно!»

Обратимся за помощью к таблице – часто используемая методика, чтобы продемонстрировать работу логических портов. Итак, есть два входа, А и Б, которые могут принимать значения 0 и 1. Существуют следующие возможные ситуации: А и Б равны 0, А равно 0, а Б равно 1, А равно 1, и Б равно 0, оба параметра равны 1. Для каждого возможного результата на входе колонка «выход» показывает, что же ответит порт.

Порт «и»

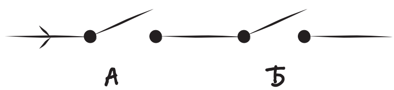
А	Б	Выход
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порт «или»

А	Б	Выход
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

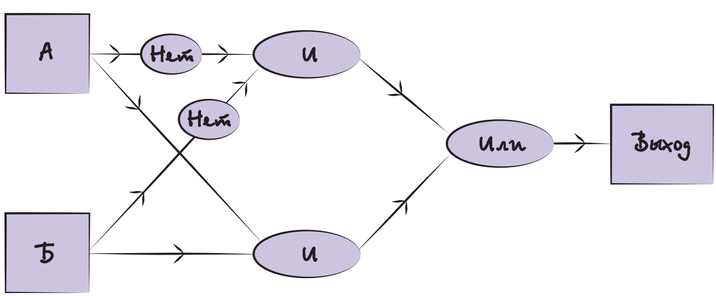
Добавим другой порт, особенный, поскольку он не принимает на входе цифры, логическое отрицание «нет». Исходя из своего названия, он всегда делает противоположное тому, что получил на входе.

Логические порты могут быть представлены и в реальном мире: механическими или электрическими устройствами. Например, пусть 0 означает отсутствие электрического тока, а 1 говорит о том, что ток проходит. Чтобы создать автоматически работающий порт «и», достаточно добавить два рубильника в цепь. В то время как один из них открыт, тока не будет, а если закрыты оба – ток побежит по проводам.



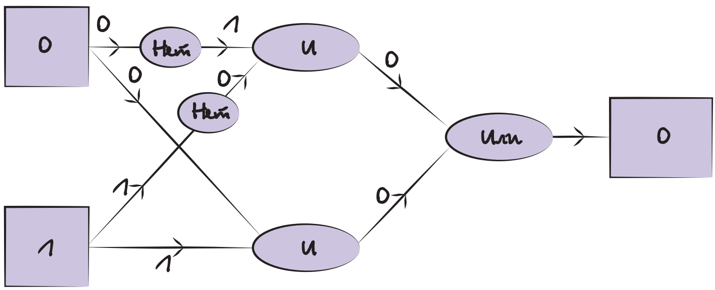
Электрическая цепь «и»: если А и Б закрыты, то в цепи есть ток, схема включения отвечает «1». Если А или Б открыты, то тока в цепи не будет, схема отвечает «0»

В чем польза логических портов? То, что они вытворяют с минимальным набором элементов, производит впечатление, будто машины умеют думать. Взглянем на схему:



На выходе каждого порта мы получаем либо 0, либо 1, которые следуют к другому порту, и так далее до конечного выхода.

Вы можете проверить работу порта, вычислив, какие значения будут у А и Б (0 или 1 для каждого из них), выход покажет 1, если оба выхода будут идентичны, и 0, если они будут отличаться друг от друга.



Небольшой пример «машины» в действии: если А равняется 0 и Б равняется 1, то на выходе получится 0

Это маленькая машина позволяет сравнивать два значения, чтобы понять, одинаковы они или нет! Она не сможет выиграть в шахматы или написать музыку, но она является доказательством того, что комбинируя логические порты с умом, мы можем создавать новые блоки, более масштабные, которые смогут решать сложные задачи и производить впечатление, будет ваш компьютер тот еще хитрец... тогда как это заслуги автоматики!

Великие открытия

Когда появился первый компьютер?

Если вы прочтете историю информатики и заведете беседу на эту тему, большинство будет уверено, что первые компьютеры появились в конце Второй мировой войны. А между тем...

В середине 19 века английский инженер и математик Чарльз Бэббидж, изучая механические калькуляторы, созданные в то время для автоматизации некоторых задач, предположил, что можно представить машину, способную выполнять огромное количество операций в одиночку... компьютер! В ту эпоху королевой технологий была механика, а не электричество... Поэтому он разработал схему полностью автоматической машины, состоящей из множества шестеренок, позволяющих производить довольно сложные вычисления, стоит только крутануть рукоятку. Он даже нашел ценную помощницу в лице Ады Лавлейс, математика, написавшего первые программы (инструкции, чтобы дать компьютеру правильно выполнить желаемые вычисления). Они были в форме перфокарт, напоминающих те, что использовались для ткацких станков. К сожалению, первый «компьютер» не дожил до наших дней: теоретически, он бы работал, но воссоздание хрупкой механики того времени отняло бы слишком много сил. Кроме того, Бэббидж был перфекционистом и постоянно улучшал схему, а потому пришлось бы собирать шедевр с нуля, чтобы четко учесть все изменения.
Спустя столетие люди решили отдать дань уважения детищу Бэббиджа: с 2002 года, старательно следуя схемам Бэббиджа, в Музее науки в Лондоне был воссоздан механический компьютер. И он отлично работал!

А вы любите ириски?

Сегодня, конечно, компьютеры намного мощнее, чем во времена Бэббиджа. И потому мы можем часами зависать в интернете, учиться и добывать информацию, которая заинтересует и математиков или даже ужаснет... Как, например, неверно составленные анкеты.

Вот, например, увлекательный опрос, который показывает, что 34% французов любят ириски. Как это выяснили?

Вы можете, конечно, попробовать лично опросить всех французов... Очень смело с вашей стороны, даже героически! Не забудьте вернуться и дочитать эту главу, как только закончите, через несколько лет. Продолжение вас определенно заинтересует. Но будьте благоразумны и давайте рассуждать. У вас уже может вырисовываться некоторая статистика, когда вы опросите сотню человек. Если никто не любит ириски, у вас создастся впечатление, что в целом мало кто в восторге от них. Но нужно быть осторожным с выводами: кто они, ваша сотня респондентов? Если это были бы завсегдатаи овощного магазина, ваши результаты отличались бы от того, как если бы это были бы любители выпечки...

Основа теории опроса заключается в том, что респонденты выбираются наугад, чтобы избежать таких ситуаций, которые называются «погрешность выборки». Но как выбирать людей «наугад»? Вы можете в произвольном порядке обзванивать людей, но у кого-то несколько телефонных номеров, у других – только один домашний телефон на всю семью или вообще его нет, так что это уже не будет случайным выбором. И если вам не отвечают, не переставайте звонить, иначе вы можете не включить в опрос людей, которые заняты больше остальных и поэтому редко отвечают на телефон. Те же трудности, если вы ищете респондентов по электронной почте. А если вы опрашиваете прохожих, то в каком именно районе, в какое время суток?

Мешок с шариками

Оставим институты общественного мнения наедине с этим каверзным вопросом и перейдем к более простым вещам: красные и белые шарики в мешке. (Представим, что шарики – это французы: красные – те, кто любит ириски). И вам нужно выяснить, сколько же красных шариков. Если всего в мешке их несколько тысяч, вы же не будете их все пересчитывать. Однако вы можете их перемешать (ведь это легко!) и взять наугад 100 шариков. Но если 34 шарика из 100 окажутся красными, нельзя быть уверенным в том, что именно 34% шариков в мешке красные. Чтобы понять почему, попробуйте представить, что мы начинаем опыт заново: вы перемешиваете шарики и достаете сотню наугад. И хотя количество красных шариков в мешке не поменялось, шанс, что вы вытащите столько же красных шариков, что и в прошлый раз, очень невелик. Хотя маловероятно, что во второй раз вы вытащите 2 красных шарика или 85 из 100. Другими словами, опрос дает общее представление о ситуации, но не точный результат, даже в условиях полной случайности.

А теперь взглянем с другого ракурса: вы знаете, что в мешке лежит 34% красных шаров. Если вы вытащите шарик наугад, то у вас будет 34 шанса из 100, что он будет красный. Если вы достанете два шарика, то $34/100 \times 34/100$, что оба будут красными. Вероятность, что это белый шарик для каждого составит 66%, поэтому существует вероятность $34/100 \times 66/100$, что первый будет красным, а второй белым, $66/100 \times 34/100$, так что сначала будет белый, затем красный и, наконец, $66/100 \times 66/100$, так оба шарика будут белыми. Проводить подобные расчеты будет проще с меньшим количеством шариков – 3, 4, 5, сколько захотите. Легко высчитать, сколько мы достанем красных шаров, если в мешке всего 100 шаров и доля красных шариков в сумке заранее известна.

Но наша проблема в точности противоположна: зная, что у нас есть 34 красных шара из вытянутых 100, какова вероятность того, что в большой сумке 34% красного цвета? Больше? Меньше? Этот расчет сложнее выполнять, но результаты можно получить иным способом (руководствуясь теорией опросов).

Более-менее точный результат

Итак, результат опроса не является точным значением оцениваемой пропорции, и его скорее следует преподносить в виде «вилок», в которых эта пропорция более или менее вероятна.

Если 1000 человек спросили, нравятся ли им ириски, и 34% ответили, что любят это лакомство, то можно рассчитать, что есть 95% вероятность того, что реально число любителей ирисок (среди всего населения) будет от 31% до 37%, 90% – от 32% до 36%, 75% – от 33% до 35%. Очевидно, что результат будет более точным, если опросить большее количество людей. Но факт остается фактом: чем сильнее вы хотите добиться точного результата, тем больше вы рискуете и, наоборот, чем меньше вы хотите рисковать, тем более точный результат получите. Но что известно наверняка, так это что ответ типа «34%» будет слишком ограниченным. И единственный способ быть уверенным, что вы не ошиблись – это объявить, что результат лежит между 0 и 100%!

Это похоже на попытку выяснить, где находится человек, который въехал в тоннель, зная при этом только его примерную скорость до того, как он туда въехал. Вы точно знаете, что он в тоннеле, и вы даже можете догадываться, где он примерно находится. Но если вы попробуете назвать точное местоположение, вы рискуете ошибиться.

Ого!

В апреле 2002 года французы были потрясены результатами первого тура президентских выборов: вопреки всем ожиданиям, кандидат от партии социалистов был повержен кандидатом от национального фронта, который в свою очередь противостоял члену ОПР[1]. Неожиданность? Отнюдь. Если к результатам приложить вилки последних опросов перед выборами, станет ясно, что все возможные исходы борьбы между тремя кандидатами были вероятны.

[1] Объединение в поддержку республики (ОПР, фр. Rassemblement pour la République, RPR) — правая политическая партия Франции с 1976 по 2002 год, относящаяся к голлистским партиям. – *Прим. перев.*

Великие открытия

Давид и Голиаф проводят опрос

В 1936 году в Соединенных Штатах Америки проходили президентские выборы и, как всегда, газеты пытались предугадать результаты заранее, проводя опросы.

До этого момента издание Literary Digest имело авторитет: долгие годы журнал опрашивал миллионы избирателей, за кого они будут голосовать, а затем публиковал результаты. Ни разу прогноз не ошибся с победителем.

К этим выборам журнал опросил 10 миллионов избирателей и обработал более 2 миллионов ответов, что позволило утверждать, что Альфред Лэндон, кандидат от республиканцев, будет в числе лидеров. Небольшой и на тот момент молодой институт Гэллапа[1], специализирующийся на изучении общественного мнения, опросил лишь 5000 человек, специально отобранных для лучшего представления населения США. В результате выяснилось, что победит кандидат от Демократической партии, Франклин Делано Рузвельт. Пять тысяч против 2 миллионов, борьба кажется неравной: чем больше людей опросить, тем ближе результат будет к реальности. И все же победил именно Рузвельт, набрав голосов даже больше, чем предполагал Гэллап.

Есть множество объяснений этой неожиданной развязке. Скорее всего, журнал Literary Digest сделал неверную выборку: он опросил людей, которые были наиболее доступны — своих читателей, многие из которых были обладателями личных телефонов

---

[1] Институт Гэллапа — американский институт общественного мнения (англ. American Institute of Public Opinion), а также другие учреждения по изучению общественного мнения, основанные Джорджем Гэллапом. – *Прим. перев.*

(которые в 1936 году были у единиц), владельцев легковых автомобилей (та же история). Еще одна серьезная ошибка: журнал не потрудился узнать, кто же были 8 миллионов опрошенных, которые не ответили, а также причину их безмолвия.
Но читатели журнала, бесспорно, были более заинтересованы в опросе, чем кто-либо из другого социального слоя. Два миллиона респондентов просто не были достаточно распределены среди 10 миллионов. А выборка Гэллапа была гораздо меньше, но более репрезентативной (гораздо больше отражала взгляды населения США).

3

Числа «а-ля натюрель»

Вдали от технологического прогресса, от всей человеческой деятельности, существует ли на Земле место, где математик не увидел бы ничего, что заставляло бы его думать о математике? Сложно, невероятно сложно... Все его нутро настроено видеть числа повсюду! Профессиональная деформация!

Фигурные числа

Числа и треугольники

Возьмем обычные камушки. Знаете ли вы, что по-французски камушек это «caillou»[1], а на латыни это переводится как «calculus» или «вычисление»? Calculus как calcul... (Камушки как вычисление). Так что нет ничего лучше, чем камушки, чтобы начать изучать числа!

Мы можем нарисовать рисунок: треугольник из трех камушков, квадрат из четырех, пятиугольник из пяти. Можно сделать даже лучше: достаточно, например, добавить три камня к основанию треугольника из трех камней, чтобы получить более крупный треугольник. И добавив еще четыре камня, вы получите еще больший треугольник. И так далее до бесконечности.

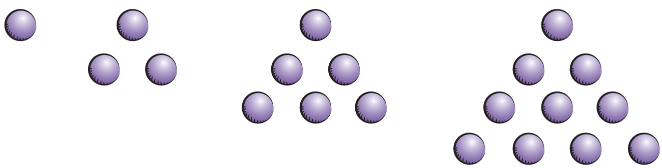
---

[1] Caillou (в пер. с фр.) – камень, галька, восходит к лат. «callum». – *Прим. перев.*

Древних греков интересовали формы, которыми можно описать число, то, что мы называем «фигурными числами».

Треугольные числа

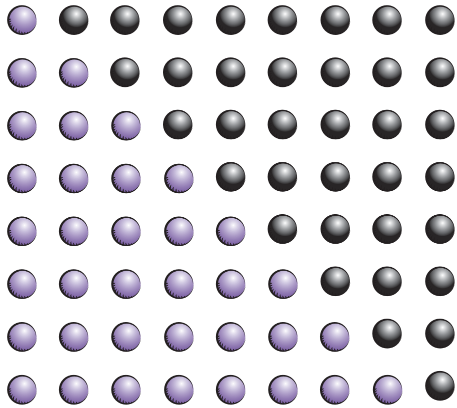
Чтобы создать треугольные числа, достаточно каждый раз добавлять ряд камней к предыдущему. И получим:



1; 3 (= 1 + 2); 6 (= 3 + 3); 10 (= 6 + 4)

Затем 15 (= 10 + 5); 21 (= 15 + 6), и т.д. Чтобы узнать, какое число камней потребуется, чтобы составить треугольник из 42 или 571 рядов, достаточно проявить терпение и посчитать 1 + 2 + 3 + 4... Остановитесь! Это же займет уйму времени.

К счастью, можно точно подсчитать число камней для нашего треугольника, но другим способом: достаточно приложить этот треугольник к первому, совместив их по длинной стороне. Мы получим прямоугольник:



В данном случае, в первоначальном треугольнике (фиолетового цвета) восемь рядов; следовательно, восемь рядов в прямоугольнике. С присоединением второго треугольника (серого цвета) добавился девятый столбец. Следовательно $(8 \times 9) = 72$ камушка в этом прямоугольнике. Так как половина приходится на первый треугольник, это означает, что он был сделан из $(72/2) = 36$ камней. Это доказательство применимо и для более крупных треугольников: у прямоугольника, полученного из треугольника в 42 ряда, будет 42 ряда и 43 столбца. Следовательно, чтобы составить треугольник из 42 рядов, потребуется $(42 \times 43)/2$ камней. (Если вам интересно, это будет 903).

Тайна треугольных чисел раскрыта: для «n» рядов вы используете $N \times (N + 1)/2$ камней ...

Домашнее задание

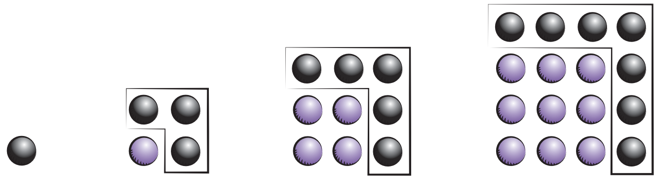
Сколько раз чокнемся?

Вечеринка, все гости весело чокаются бокалами друг с другом! 50 человек будут делать это долго... Сколько раз мы услышим тихий и мелодичный звон бокалов?

Давайте подумаем: нужно найти всевозможные варианты составления пар из 50 человек. Это выглядит непросто. Подумаем снова: каждый гость чокается с остальными, всего 49 раз. Но результат, который мы ищем, – это не 50 × 49, потому что, когда Алина чокается с Бертраном, Бертран в свою очередь чокается с Алиной. И так мы насчитаем в два раза больше «чоканий». Тогда результат будет 49 × 50/2? Прямо как число камушков в треугольнике из 49 рядов. Удивительно! Рассуждаем иначе: представьте, что в комнату по одному заходят гости. Первый вошедший не чокается. Когда заходит второй человек, они уже чокаются: дзынь-дзынь. Когда заходит третий гость, он чокается со всеми: еще два дзынь-дзынь. И так далее, четвертый вошедший должен будет чокнуться три раза, пятый – четыре раза... Следовательно, вполне логично обнаружить треугольные числа! Внимание между тем, никакой ошибки: для 50 гостей надо рассматривать треугольник не из 50 рядов, а из 49, так как чтобы чокаться, нужны минимум двое! Мелодичная музыка 1225 бокалов...

Квадратные числа

Треугольные числа довольно быстро вышли из моды, чего не скажешь о квадратных числах, которые популярны и по сей день. Чтобы их найти, достаточно умножить каждое число на само себя, это даст квадрат, у которого в качестве стороны и будет искомое число. Список квадратных чисел начинается с 1 × 1, то есть 1; затем 2 × 2, то есть 4; затем 3 × 3, и так далее. Нет ничего увлекательнее! Продолжая удивляться, давайте понаблюдаем, как образуются квадратные числа на примере:



Нужно каждый раз добавлять плюс два сверх того, что то, что было добавлено в предыдущий раз. Следовательно, квадратное число является суммой первых нечетных чисел, то есть по аналогии 1 + 3 + 5 + 7 + и останавливаемся, когда хотим. Можем это проверить: 1; 1+3 = 4; 4 + 5 = 9; 9 + 7 = 16... Это работает!

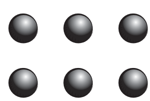
Но греки решили на этом не останавливаться. Они изучали пятиугольные числа, шестиугольные, а также пирамидальные, кубические («кубы» и квадраты единственные фигурные числа, которые сохранили свое название по сей день).

Составные числа

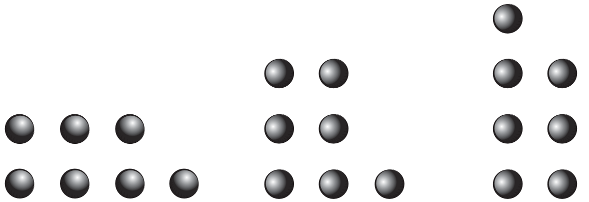
Оказалось, что одну из фигур намного сложнее обозначить: «прямоугольные числа» позже стали называться «составными числами». Все числа, которые могут быть отображены в виде прямоугольника, более или менее вытянутого. Но по-прежнему нельзя составить прямоугольник из одной строки или одного столбца, иначе все числа пришлось бы считать прямоугольными числами!

Начнем с некоторых примеров:

Число 6 хорошо представлено двумя рядами камней:

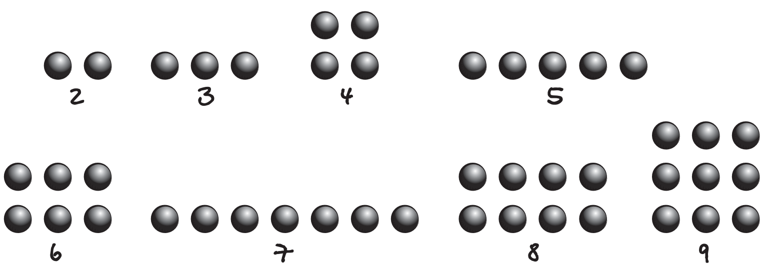


Тогда как с числом 7 это не сработает, как бы мы ни меняли местами количество строк и столбцов.



Можно заметить, что бесполезно менять количество рядов: здесь, например, чтобы попытаться расположить камни в четыре ряда, придется разделить их на два столбика. Итак, мы пробовали выстраивать в два ряда или два столбца, что по сути одно и то же, нужно просто развернуть всю конструкцию на 90°, и нет необходимости продолжать! Вот начало списка чисел, представленных в форме прямоугольника, когда это возможно, и в форме линии – когда это невозможно.

Единицу мы оставим пока в сторонке: является ли она квадратным числом, будучи представленной одной линией?



Вы наверняка без труда узнали среди прямоугольных чисел и квадратные, что неудивительно, поскольку они являются частным случаем прямоугольных чисел. И еще: вопреки квадратным или треугольным числам, можно представлять различные прямоугольники одним и тем же числом: «мухлюя» (с шестью камнями вы можете сделать три ряда из двух камней, а можете два ряда из трех), и не «мухлюя» (двенадцать камней могут быть расположены в три ряда, по четыре камня в каждом, а также в два ряда по шесть камней, но оба прямоугольника будут отличаться). Однако некоторые числа не удается представить в виде прямоугольников, каким бы ни было количество рядов, из которых мы их попытаемся собрать. Как определять эти числа? Не так-то просто!

Вы можете легко найти все прямоугольники из двух линий (рядов): посчитайте два по два, начиная с четырех. Начните с прямоугольника из двух рядов, постепенно добавляя по одному камню в каждый ряд и записывая все кратные двум. И таким же образом начиная с шести, числа, кратные трем (6, 9, 12), могут быть разделены на три ряда: достаточно добавлять каждый раз камушек в конец каждого ряда и те, которые будут кратны трем, нам подходят, и так далее.

Следуя этому правилу, можно найти все прямоугольные числа. Но мы их разделяем на группы (умножая на 2, на 3 и т.д.) и не по порядку от самого маленького к самому большому, как это было с треугольными числами! Но найти формулу, которая позволяла бы сразу найти 32-е прямоугольное число, кажется сложным...

Простые числа

Довольно сложно найти формы представления чисел, которые не являются прямоугольными. Вы наверняка о них слышали: числа, которые нельзя представить как несколько рядов одинаковой длины, называются простыми.

Великие открытия

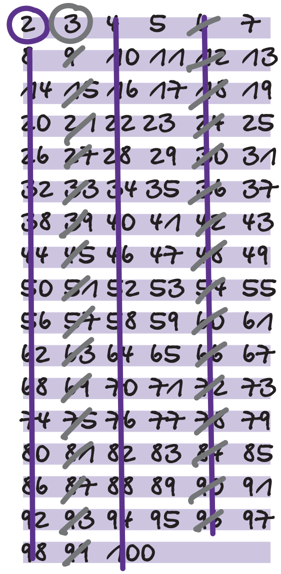
Решето Эратосфена

Это наиболее древний алгоритм, позволяющий быстро вычислить простые числа. Как и все гениальное, он чрезвычайно прост: чтобы найти простые числа, исключим те, которые ими не являются, так как их проще всего найти. К примеру, попробуем найти все простые числа в промежутке от 2 до 100 (единицу оставим в стороне, так как она всегда будет являться частным случаем).

Начнем с двойки. Она, конечно же, будет простым числом, запишем ее. Теперь вычеркнем каждое второе число, то есть числа, кратные двум, так как они не являются простыми.

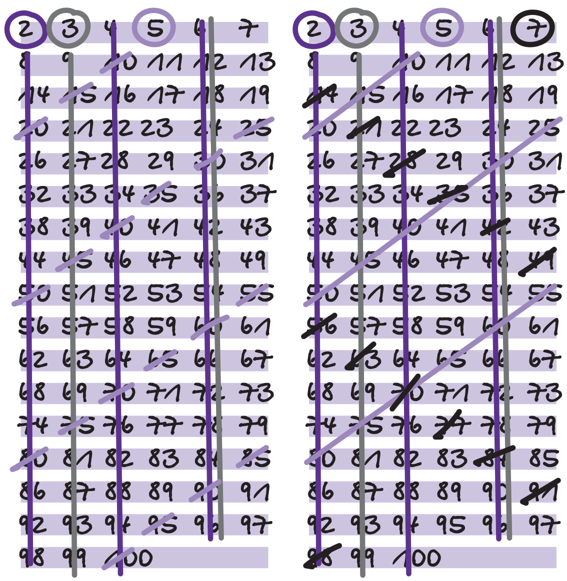
Числа, кратные двум

Первое незачеркнутое число – 3, оно не зачеркнуто, потому как чтобы создать прямоугольник, потребуется минимум три ряда по три камня в каждом: стало быть, 3 – это простое число. Запишем его и вычеркнем числа кратные трем, начиная с 6. Мы также зачеркиваем числа, которые исключили ранее, те, что кратные и двум и трем.



Числа, кратные трем

Опять же, первое число, которое не перечеркнуто, оно простое, и это 5. Отставим его в сторонку, теперь вычеркнем каждое пятое число, начиная с 10. И семерка будет очередным простым числом, поэтому далее мы вычеркиваем каждое седьмое...



Числа, кратные пяти   Числа, кратные семи

Этот метод позволяет найти столько простых чисел, сколько душе угодно. После вычеркивания всех чисел кратных 7, всех оставшиеся числа до 121 будут простыми (то есть все не вычеркнутые в таблице выше). Чтобы уверить вас в этом, вспомните числа, кратные 11, которые вы вычеркните уже на следующем шаге: 2 × 11, уже включены в список кратных 2, 3 × 11, вычеркнутые как кратные 3... Первое число, которое вам действительно нужно вычеркнуть, это 11 × 11, то есть 121.

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$
8	9	10	$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$
14	15	16	$\boxed{17}$	18	$\boxed{19}$
20	21	22	$\boxed{23}$	24	25
26	27	28	$\boxed{29}$	30	$\boxed{31}$
32	33	34	35	36	$\boxed{37}$
38	39	40	$\boxed{41}$	42	$\boxed{43}$
44	45	46	$\boxed{47}$	48	49
50	51	52	$\boxed{53}$	54	55
56	57	58	$\boxed{59}$	60	$\boxed{61}$
62	63	64	65	66	$\boxed{67}$
68	69	70	$\boxed{71}$	72	$\boxed{73}$
74	75	76	77	78	$\boxed{79}$
80	81	82	$\boxed{83}$	84	85
86	87	88	$\boxed{89}$	90	91
92	93	94	95	96	$\boxed{97}$
98	99	100			

Простые числа до 100 — те, что взяты в «квадратик» на каждой строке (на каждом этапе решета)

Этот метод хорошо демонстрирует проблему, созданную простыми числами: даже если на каждом этапе решета регулярно появляются большие промежутки, факт, что некоторые промежутки будут повторяться чаще (и не всегда одинаковое количество раз) приводит к не очень постоянному результату!
Помимо прочего, метод позволяет также понять, почему чем дальше мы «углубляемся» в большие числа, тем реже встречаются среди них простые, так как когда число большое, решето будет просеивать большее количество чисел. И это действительно так: например, среди чисел от 0 до 100 всего 25 простых чисел, тогда как их всего 16 на промежутке от 1000 до 1100, 11 между 10 000 и 10100, 6 между 100 000 и 100100. И так как их количество постепенно уменьшается,

можно представить, что после определенного числа все остальные будут вычеркнуты и это позволит, наконец, составить полный список простых чисел. Увы, еще с античности известно, что список простых чисел бесконечен и постоянно пополняется.

Почему простым числам уделяется столько внимания? Во-первых, потому что их список составить довольно легко, во-вторых, потому, что они уже известны более 2500 лет, что впечатляет. Конечно, успех в их нахождении был достигнут с момента их открытия (решето Эратосфена, см. выше), но вопросы, кажущиеся на первый взгляд простыми, все еще ждут ответа...

Другая причина заключается в том, что понимание этих чисел позволит лучше разбираться во всех остальных числах, как минимум!

Вы в этом сомневаетесь? А вы когда-нибудь задумывались, почему простые числа так называются?

Подумайте о простых цветах: желтый, красный (пурпурный) и синий (циан). Они названы таким образом, так как из них можно создать любые цвета, но их нельзя изготовить из других цветов. Еще одно замечание: для создания конкретного цвета существует единственно верная комбинация трех основных цветов. Простые числа играют точно такую же роль: они являются «сырьем» для создания всех целых чисел с использованием умножения. Для этого достаточно выбрать простые числа и перемножить их, иногда несколько раз. Например, число 12 составлено из простых чисел 2 и 3:

$$12 = 2 \times 2 \times 3.$$

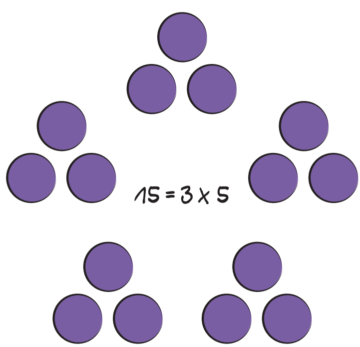
Число 30 составлено из 2, 3 и 5:

$$2 \times 3 \times 5 = 30.$$

Вы можете составить все целые числа из простых чисел, и для каждого числа есть только один способ сделать это. Но невозможно найти простое число, перемножив меньшие числа, так как они неделимы. Таким образом, у каждого целого числа есть своя визитная карточка: либо это простое число, либо его можно записать как результат умножения простых чисел.

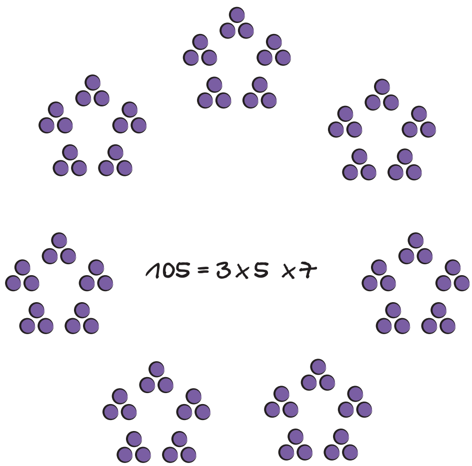
Чтобы продемонстрировать эту «визитную карточку» есть очень практичный и красивый метод, разработанный молодым исследователем из Пенсильвании (см. ссылки на сайты на стр. 163):

- простое число, поэтому без делителя, представлено множеством точек, расположенных по кругу.
- для числа, которое не является простым, расположение точек подчеркнет роль делителей; например, для номера 15 точки расположены следующим образом:



Здесь мы видим 5 кучек по три камня в каждой (треугольники) (делители 15 это 3 и 5).

Довольно просто, не так ли? Для 15, конечно, но для 105 сможете ли вы, не глядя на рисунок, вычислить, сколько будет $3 \times 5 \times 7$?



Кстати, и сегодня некоторые люди предпочитают представлять числа камнями!

Великие открытия

Нерешенные задачи

Если гипотеза Пуанкаре была доказана (см. стр. 30), то гипотеза Римана (1826–1866), сформулированная в 1859 году, так и не нашла решения. Она была включена Математическим институтом Клея в список семи проблем тысячелетия, и за ее решение назначена награда в 1 миллион долларов. Какова формулировка? Слишком сложная для объяснения, но очень тесно связана с простыми числами. Большинство математиков считает, что речь идет о наиболее важной проблеме современной математики.

И эта одержимость не нова: известный немецкий математик начала 20 века Давид Гильберт однажды произнес: «Если бы я мог проснуться через 1000 лет, моим первым вопросом был бы: Уже доказали гипотезу Римана?»

Числа-близнецы

И еще один вопрос, который математики желали бы разрешить: гипотеза чисел-близнецов. Это, по крайней мере, довольно просто объяснить. Парные простые числа-«близнецы», как и предполагает их название, очень похожи: они отличаются друг от друга на 2. Мы не можем представить себе лучшего для двух простых чисел, исключая двойку, которая является единственным простым числом без пары.

Список простых чисел-близнецов начинается следующим образом: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19... Конечно, чем больше будут числа, тем меньше будет количество чисел-близнецов, так как это особенность всех простых чисел. Но бесконечно ли количество простых чисел-близнецов? Исследователи, работающие над этой темой, почти уверены, что количество этих чисел бесконечно, но не знают, как это доказать, и эта проблема тянется со времен античности! Поторопитесь, если вам это интересно. С мая 2013 года мир математики кипит: Итан Чжан (Yitang Zhang), не известный доселе математик, сделал решающий шаг, показав, что существует бесконечность простых чисел, разница которых составляет не более 70 миллионов! Осталось свести эту разницу до 2... Это кажется невероятным, но в математике часто важно сделать первый шаг. Доказательство: менее чем через год математики, объединившие свои силы, уже смогли свести эту разницу до 270.

Кролики Фибоначчи

Что может быть милее, чем маленькие кролики, резвящиеся на лугах? Симпатичные, но весьма агрессивные! Эти кролики и их безумная скорость размножения находятся в центре одной из самых известных проблем в истории математики, о которой вспоминает каждый математик, когда видит кролика!

Изначально вопрос был поднят Леонардом Пизанским, также известным как Фибоначчи, сыном итальянских купцов, жившим около 1200 года. Итак: пару кроликов вывезли на пустынный остров и нужно узнать, сколько кроликов будет через некоторое время.

Очевидно, что этот вопрос сильно озадачил математиков: а чем будут питаться кролики, а сколько потомства дадут? А сколько их умрет? Чтобы попытаться ответить на эти вопросы, необходимо упростить реальность, чтобы сделать ее сугубо математической проблемой – смоделировать ситуацию. Цель – минимально отдалиться от реальной жизни. С этой точки зрения Фибоначчи вышел далеко за рамки реальности. Сначала он представил, что в мире всегда хватает пищи на всех. Затем он предположил, что каждая пара взрослых кроликов приносит потомство каждый месяц – еще одну пару кроликов – а именно самку и самца. В реальности в помете, как правило, больше двух крольчат и не всегда одинаковое количество самок и самцов.

Подобное упрощение все же может оказаться логичным, так как для большой популяции это справедливо: во всех пометах одного поколения мы можем рассчитывать найти примерно одинаковое количество самцов и самок. И чтобы компенсировать небольшой приплод, кролики будут бессмертными! И последний штрих: кролик не рождается взрослым и может размножаться не ранее чем через месяц. Если с учетом всех этих упрощений мы сможем предсказать что-то достоверное, без сомнения, это будет большая удача! По крайней мере, проблема становится достаточно легкой для изучения математиками.

Великие открытия

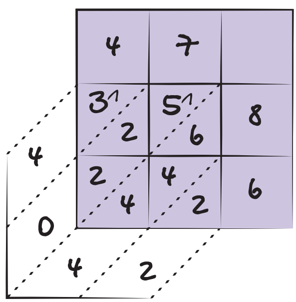
Фибоначчи, книга Абака и арабские цифры

Собственно говоря, Фибоначчи не был великим математиком. Но будучи сыном торговцев, он много путешествовал по Средиземному Морю, и повстречал много арабов, более продвинутых в плане науки, чем европейцы того времени.

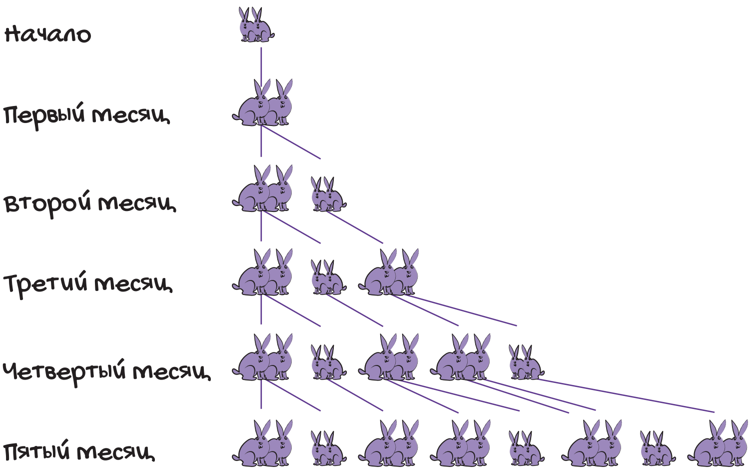
Одним из наиболее успешных нововведений, которое Фибоначчи перенял от арабов, был их способ писать цифры. А также легкость, с которой они осуществляли расчеты, благодаря этой системе.

Надо сказать, что в эту эпоху в Европе все еще пользовались римскими цифрами, довольно неуклюжими в плане расчетов! И тогда Фибоначчи написал труд, посвященный арифметическим проблемам и их решениям, Liber abaci – книгу Абака, чтобы познакомить читателей с существованием и полезностью арабских цифр. Проблемы, предложенные Фибоначчи (из которых самой известной является проблема кроликов), служили главным образом наглядными примерами, чтобы продемонстрировать эффективность методов, использованных арабскими учеными. Как, например, решетчатое умножение.

Этот метод очень похож на то, чему вас учили в школе. Умножим, например, 47 на 86.
Сначала запишем числа в таблицу следующим образом: первое на верхней строчке, второе в правом столбце. Остальные ячейки разделим пополам по диагонали. Затем мы вписываем в эти ячейки результат умножения из соответствующих строк и столбцов, отмечая единицы под чертой и десятки над чертой (или 0, если их нет). Чтобы получить ответ, останется наискось сложить получившиеся числа, начиная с нижней диагонали, диагонали единиц, и не забывая удержанные в уме десятки (они отмечены на рисунке внизу).



Подводя итоги: пара взрослых кроликов рождается каждый месяц и ежемесячно порождает новую пару молодняка. Через месяц после рождения молодые кролики становятся взрослыми и снова дают потомство каждый месяц. И ни один кролик не умирает. Давайте посмотрим, что же будет происходить месяц за месяцем, начиная с единственной пары кроликов.



Кролики взрослеют (первый месяц). Рождается новое поколение (2 месяц) и производит следующую молодую пару. На третьем месяце первая пара вновь рождает потомство, и оно со временем становится взрослым. Три пары кроликов. И это продолжается... На пятом месяце эксперимента весело резвятся уже восемь пар кроликов. Как узнать количество кроликов в следующих месяцах? Не прибегая к помощи рисунка, который, как и кролики, становится откровенно назойливым?

На каждом этапе нужно различать молодых и взрослых кроликов. Итак, взрослые кролики, на данный момент, на шестой месяц, например, – это все те, которые уже существовали, молодые или взрослые месяцем раньше (здесь, пятый). А молодые?

Они рождены от тех, кто были уже взрослыми месяцем раньше, на пятом. Но мы заметили только, что количество взрослых особей точно соответствует общему количеству пар, существовавших месяцем ранее, на четвертом, стало быть, в нашем случае!

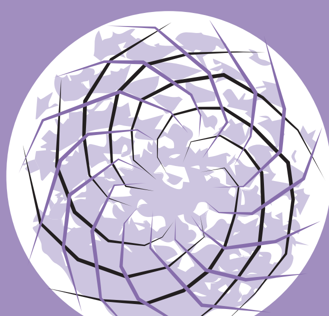
Иначе говоря, чтобы узнать число пар кроликов на шестом месяце, достаточно прибавить число пар кроликов за четвертый месяц (количество молодняка) и за пятый (количество взрослых особей). В общем, их будет 13.

Эти расчеты были справедливы и ранее: количество пар кроликов будет увеличиваться месяц за месяцем в следующей последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Достаточно сложить два последних значения, чтобы узнать следующее в этой замечательной «последовательности Фибоначчи»!

Домашнее задание

Сосновые шишки и последовательность Фибоначчи

Взгляните на сосновую шишку: ее чешуйки располагаются по спирали в двух направлениях: по часовой стрелке (черные) и против часовой стрелки (фиолетовые).

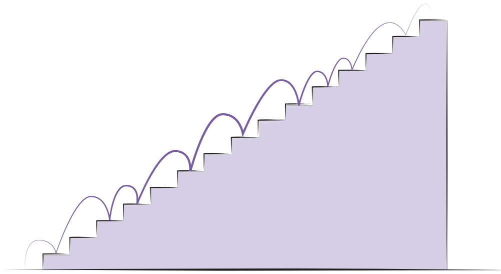


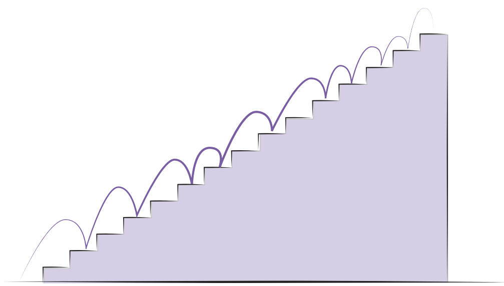
Внимательно подсчитайте количество спиралей, которые идут по часовой стрелке, и которые против часовой. На рисунке их 8 и 13, и вы всегда будете встречать эти два числа из последовательности Фибоначчи! Вы можете проверить это, изучив ананас и даже подсолнух. За немногими исключениями это всегда будут числа 5 и 8, или 8 и 13, или же 13 и 21, или даже 34 и 55 и более!

Как объяснять эти явления? Как и для цилиндрических или сферических форм, которые встречаются очень часто в природе (см. мыльные пузыри, стр. 31): ответы надо искать у физики.
В сосновой шишке чешуйки растут по очереди из центра спирали. Они вырастают там, где больше свободного места и толкают наружу другие чешуйки. К тому же, чешуйки плотно прижаты друг к другу, и когда новые вырастают, то прижимают старые еще сильнее друг к другу. Вооружившись этими знаниями, Стефан Дуади и Ив Кудэ (Stéphane Douady et Yves Couder) сумели в 2000 г. воспроизвести в лаборатории спирали Фибоначчи с маленькими каплями, которые отталкиваются одна за другой и падают в одном ритме. Природа волшебна!

Мы находим эту последовательность или похожие, которые напоминают ее (изменяя начальные значения, суммируя последние три вместо двух последних...), во многих небольших и разнообразных проблемах; например, проблему лестницы вы можете даже попытаться решить на практике!

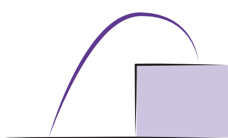
Вы поднимаетесь по лестнице. В любое время вы можете перепрыгнуть ступеньку, но только одну, скажем, потому, что они огромные. Иначе говоря, на каждом этапе вы либо поднимаетесь на следующую ступеньку, либо перепрыгиваете. Сколько существует различных вариантов, чтобы подняться по вашей лестнице?



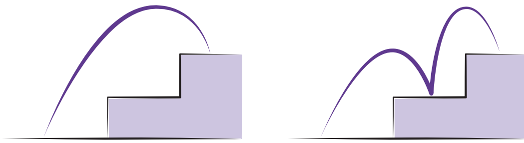


Два различных способа подняться по одной и той же лестнице

Конечно, все зависит от числа ступенек. Рассмотрим поэтапно: чтобы подняться на одну ступеньку, у вас есть единственный способ, как это сделать:



Чтобы преодолеть лестницу в две ступеньки, у вас есть выбор: либо вы перешагнете через одну ступеньку и сразу взберетесь наверх, либо вы начнете с первой ступеньки.



А дальше? Чтобы преодолеть три ступеньки, вы либо начнете с первой ступеньки, и тогда вам останется преодолеть всего две, либо вы перешагнете и начнете со второй ступеньки, и вам останется одна.

мы начинаем с первой ступеньки, и тогда остается преодолеть всего две, или со второй, и тогда остается только одна ступенька

Таким образом, существует 2 + 1 = 3 варианта подняться по лестнице из трех ступенек, рассуждая по такой логике 3 + 2 = 5 способов преодолеть лестницу в четыре ступеньки. И так далее! Достаточно добавлять каждый раз предыдущее количество способов поднимания на лестницу. Это вам не напоминает историю кроликов?

Ого!

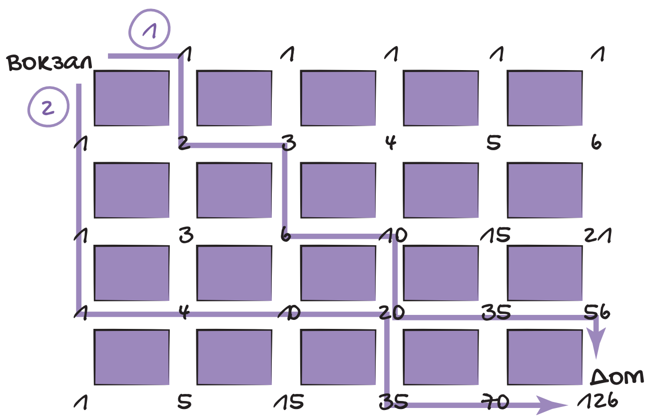
Арабские цифры

Как ни странно, арабским цифрам потребовалось немало времени, чтобы завоевать доверие европейцев. Среди прочего, потому что они были детищем врага – «неверных» арабов. Арабы всего лишь мудро воспользовались системой, придуманной в Индии! И да, арабские цифры следует называть индийскими... Конечно, этот факт не сильно изменил бы мировую историю, но эта система настолько упростила вычисления, что вскоре завоевала мир.

На этой гравюре начала 16 века «Госпожа Арифметика» отдает предпочтение молодому человеку, который, используя арабские цифры, выполняет расчеты гораздо быстрее, чем его оппонент со счетами

В городе…

Представьте, что вы живете в квартале, где все улицы прямые и параллельны/перпендикулярны друг другу. Сколько существует вариантов, чтобы добраться от вокзала (в левом верхнем углу) до вашего дома (в правом нижнем углу), поворачивая только вправо или вниз, но не разворачиваясь?



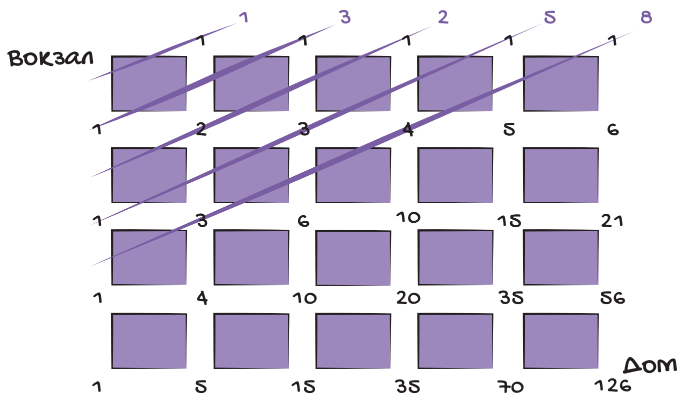
Самый простой способ – подсчитать количество всевозможных путей, идущих от вокзала и заканчивающихся на каждом перекрестке. Для тех, что располагаются на двух улицах, пересекающихся на вокзале, это легко. Есть только один способ – пойти прямо. Для других, поскольку вы неизбежно перейдете с перекрестка налево или вниз, просто добавьте номер пути, который заканчивается на каждом из этих двух перекрестков.

Таким образом, вы постепенно получите значение для каждого перекрестка и, следовательно, количество путей, которые приведут вас к месту назначения: здесь их 126!

Кстати, обратите внимание на список целых чисел на второй улице по вертикали слева: они идут по порядку. Неудивительно: каждый перекресток слева добавляет «1» к числу путей, ведущих от перекрестка выше.

Еще более удивительно, хотя все еще очень логично: на следующей вертикальной улице мы находим последовательность треугольных чисел!

И совсем необычно то, что, суммировав числа по диагонали, можно разглядеть последовательность Фибоначчи!



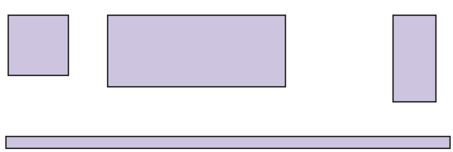
4

Камень-ножницы-бумага!

Мастеря из подручных средств, скручивая листы по-всякому, вы можете наблюдать очень интересные вещи. И у вас наверняка возникнут вопросы к математике!

Форма треугольника

Прямоугольники могут быть разнообразных форм: похожие на квадраты (частный случай прямоугольника), вытянутые до состояния линии. Все эти формы называются одинаково, хотя совершенно не похожи друг на друга.

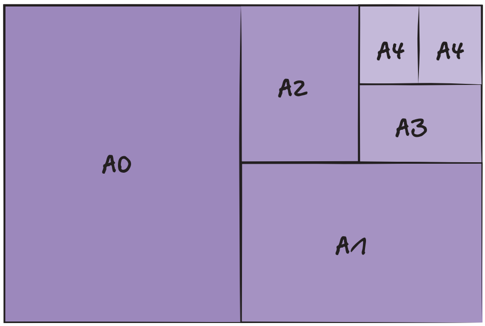


Самый популярный формат листа офисной бумаги – А4, его размеры 21 см на 29,7 см. Почему именно такие?

Лист А4 является частью семейства «А»: А3 или А2 используются для плакатов, А5 – для программок к спектаклям.

Перейти к более мелкому формату просто: достаточно сложить лист вдвое по длинной стороне.

Плакат (афиша) А3, поделенная на 2, как раз будет размера листа А4, который состоит из двух листов А5. Что особенного у этого семейства?

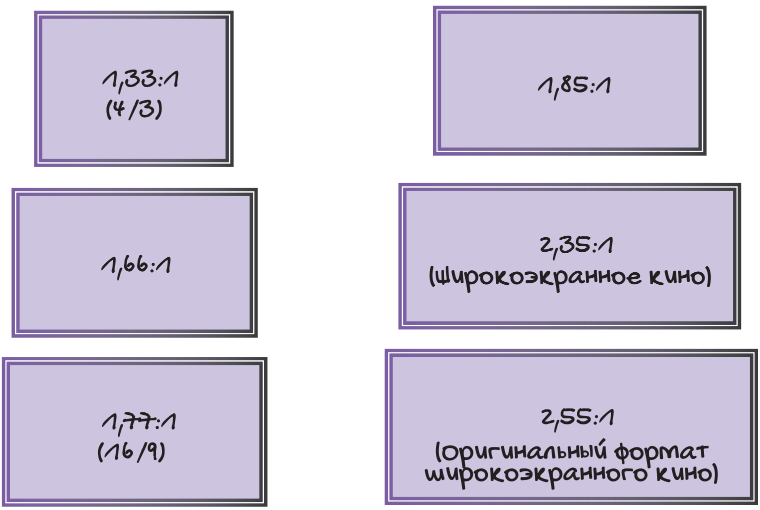


Возьмем квадрат. Если его сложить пополам, получится прямоугольник, у которого одна сторона будет вдвое больше, чем другая. Если вы согнете пополам получившуюся фигуру, то вы снова получите квадрат. Лист А4 не квадратный (и это видно), его ширина не равна двум длинам, поэтому, согнув его пополам, мы не получим квадрат. Действительно, его размеры были выбраны так, чтобы у прямоугольника, полученного после сгибания, была точно такая же форма, как и у первоначальной фигуры!

Это означает, что больший формат представляет собой увеличение меньшего формата без деформации искомого по длине и ширине. Ширина и длина меньшего формата были умножены на одно и то же число, чтобы получить ширину и длину большего. Если фотография или рисунок находится внутри маленького прямоугольника, то они не искажаются на большом экране компьютера, подстраиваясь под диагональ вписанного прямоугольника.

Большое преимущество этого формата: два небольших формата идеально вписываются в большой, а переход от одного размера к другому не деформирует изображение. Поэтому мы можем в полной мере воспользоваться расширением А4 в А3 без потери пространства и без деформации.

Это, очевидно, но не всегда так. Чтобы вы поняли, сравните экраны телефона, кино, телевидения, компьютеров: 16/9, 4/3, формат квадрата... Если вы не адаптируете изображение на экране для просмотра фильма, у актеров нелепо исказятся головы.



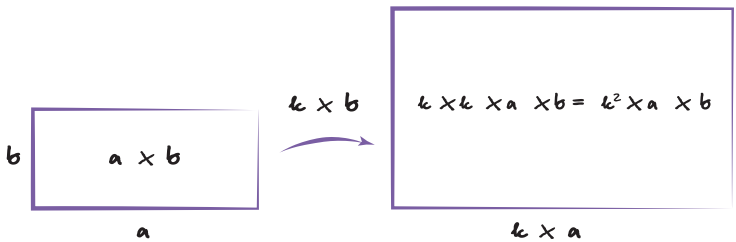
Различные форматы экранов

Если бы экраны были все одинаковой формы, изображение бы просто было больше или меньше, но всегда занимало бы экран целиком, а потому деформировалось.

Вернемся к математике: как создать такой прямоугольник, который после складывания пополам сохранял бы те же пропорции?

Форма прямоугольника определяется числом, с помощью которого нужно умножить его ширину, чтобы найти ее длину, то есть отношение его длины к ширине.

Начнем с небольшого прямоугольника сторон a и b. Его площадь тогда равняется $a \times b$. Чтобы перейти к более крупному прямоугольнику без искажений, умножьте ширину и длину на одно и то же число «k». Следовательно, размеры сторон большого прямоугольника $k \times a$ и $\mathrm{k} \times b$, а его площадь $k \times a \times k \times b = k \times \mathrm{k} \times a \times b = k^2 \times a \times b$, то есть k^2 раз площадь малого прямоугольника.



В случае с форматом А4, который мы рассматриваем, мы знаем, что площадь большого прямоугольника должна быть вдвое больше площади маленького, так как достаточно сложить его пополам, чтобы получить малый прямоугольник. Таким образом, $k \times k = 2$. Следовательно, число k является числом, которое, умноженное на себя, дает 2... Мы также знаем, что длина маленького прямоугольника равна ширине большого (потому что малый прямоугольник – это большой прямоугольник, сложенный пополам). Следовательно, отношение a/b между длиной и шириной искомого прямоугольника является таким же числом k.

Это число известно с древности: это квадратный корень из 2, также известный как $\sqrt{2}$. Как вычислить его значение? Вы можете попробовать метод подбора: $1 \times 1 = 1$ и $2 \times 2 = 4$. Тогда как это число лежит между 1 до 2. Попробуем 1,5: $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$, слишком много. Таким образом, искомое число меньше. 1,25? $1{,}25 \times 1{,}25 = 1{,}5625$, слишком мало и так далее. Конечно, есть и другие способы его найти. Самым эффективным сегодня является использование калькулятора!

Но он не особо поможет, потому что это число имеет бесконечное количество десятичных знаков (цифр после запятой). И калькулятор отобразит только первые из них 1,41421356. Вы можете проверить, что результат этого числа, умноженного на само себя, очень близок к 2, но немного меньше!

И вы также можете проверить, что размеры формата А4 имеют примерно такое соотношение: 29,7 см в длину, 21 см в ширину, 29,7/21 – около 1,4142857. Почему именно соотношение (21 × 29,7 см^2?). Ответ кроется в площади формата А0 (1 м^2), которую можно получить из 32 листов формата А4.

В следующий раз, когда воспользуетесь копировальным аппаратом, вы можете увидеть, что предлагаемое увеличение-141%. 1,41... разве это вам ничего не напоминает?

Великие открытия

Иррациональные числа

Число корень из двух – первое известное иррациональное число в истории. Его открытие наделало немало шуму!

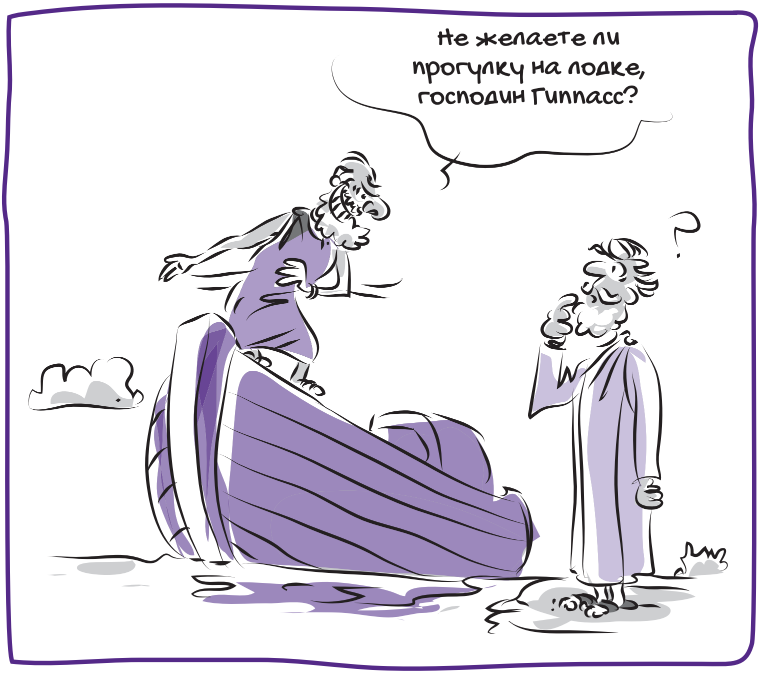
Чтобы распутать это дело, перенесемся в Древнюю Грецию к пифагорейцам. Их имя, конечно же, принадлежит Пифагору, прославленному ученому, который далеко не первым доказал известную теорему, которая носит его имя сегодня. Но именно Пифагор был тем, кто основал эту школу (наполовину исследовательский клуб, наполовину секту), где мужчины занимались исследованиями и обменивались секретами (в частности) касаемо предметов изучения математики. Одна из их основных идей заключалась в том, что «все есть число», то есть все можно описать, используя целые числа. Пифагореец, который делит пирожное на двоих, или, как чаще говорят, пополам, на 0,5, предпочитает говорить, что между половиной пирога и целым «есть соотношение 1 к двум».

Эта формулировка позволяет использовать только целые числа. И это может быть применимо к любой части пирожного или же любого другого предмета. Чтобы отразить длину, площадь, протяженность, они всегда пытались использовать целые числа. Например, размеры листа A4 в пифагорейской манере будут звучать как «длина относится к ширине как 297 относится к 210». Такими же точными будут ваши измерения длины и ширины для треугольника, к примеру 23,53 см и 32,89 см. Вы всегда можете отобразить их двумя целыми числами: 23,53 см = 2353 десятых миллиметра и 32,89см = 3289 десятых миллиметра. Это также имеет место, как если измерять 33,333333333... см: потому что это число составляет 100/3 см, что составляет 100 «третей сантиметров», или 10 000 третей десятых миллиметра. И достаточно умножить заданную длину в десятых долях миллиметра на три, чтобы получить ее в новом виде.

Потрясающее открытие пифагорейцев состоит в том, что это несправедливо для числа √2: невозможно найти общую единицу, даже очень маленькую, для измерения как этой длины, так и длины 1, например. С абсолютной точностью – невозможно. Эти две длины «неизмеримы». Сегодня мы говорим, что число √2 является «иррациональным». Но в то время найти длину, которая не могла быть сопоставлена с другими целыми числами, было огромным шоком! Тем более что найти несложно: если квадрат имеет сторону длины 1, ее диагональ точно измеряет √2.

Ого!

Легенда гласит, что один из членов пифагорейской секты, Гиппас из Метапонта (около 500 г. до н. э.), осмелился разгласить это скандальное открытие за границей... Настоящая ересь! Из-за которой, согласно легенде, он был выброшен за борт в открытое море, чтобы не проболтался снова. Хотя эта история, скорее всего, вымысел, она демонстрирует, насколько это небольшое число разозлило старейшин. И не только их: нужно будет подождать до конца девятнадцатого века, чтобы хорошо понять, что это за иррациональные числа!

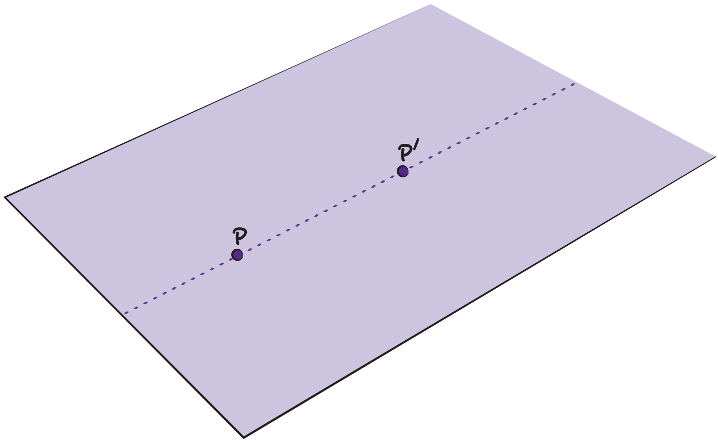


Оригами против линейки и циркуля

Сложите один прямоугольник, чтобы получить другой. Хорошо, но можно сделать намного лучше. Ведь искусство оригами также интересует математиков. Древние греки занимались построением фигур с помощью линейки и циркуля, то есть используя только окружность и прямую – самые простые геометрические фигуры. Но ведь так интересно, какие фигуры мы можем получить сгибанием! Тем более, что это может помочь смастерить довольно милые оригами...

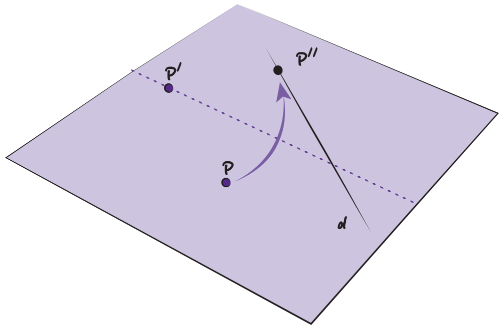
Сгибание имеет больше преимуществ, чем циркуль и линейка. Доказательство?

С помощью линейки можно начертить прямую, которая связывает две точки. Этого же можно добиться и складыванием листа: сгиб, который проходит между двумя точками, и есть та самая прямая.



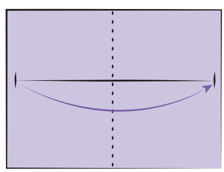
Циркуль позволяет начертить круг, который невозможно получить при складывании. Но циркуль еще полезен тем, что им можно откладывать длину, чего нельзя добиться одним складыванием. Если длина, которую мы хотим отложить, является отрезком, нужно сложить лист, чтобы этот отрезок наложился на место, где мы хотим отложить эту длину.

Представьте себе, например, что вы хотите нарисовать точку P″ на линии d так, что расстояние P′P″ равно расстоянию P′P. Используя классические инструменты, возьмите циркуль, установив его в P′, раскройте его, чтобы отложить расстояние P′P, затем нарисуйте дугу, пока она не пересечет прямую. Но если вы сложите лист так, чтобы линия сгиба проходила через P′, и проведя P на линии d, вы найдете искомую очку P″!

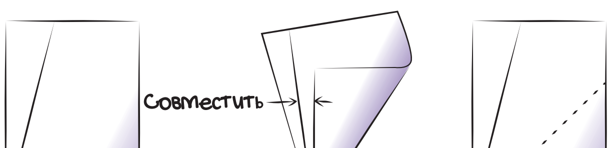


Таким образом, складывание может эффективно заменить линейку и циркуль!

Другой пример: найти середину отрезка очень просто: просто сложите его пополам так, чтобы концы отрезка совместились друг с другом. Таким образом, мы получим еще и медиатрису[1] отрезка: сгиб как раз пройдет вдоль этой линии, которая проходит через середину отрезка и перпендикулярна ему.



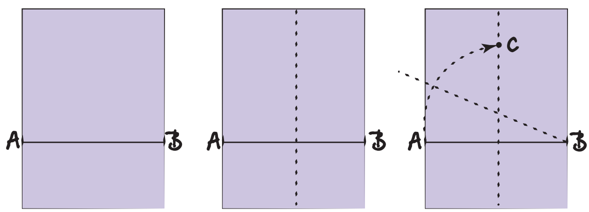
Разделить угол на два равных, то есть начертить его биссектрису? Просто совместите два края угла.



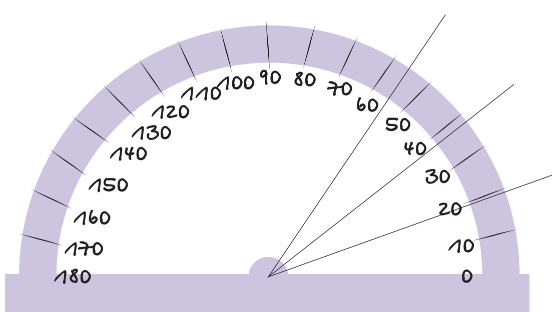
Деление на две равные части

[1] Серединный перпендикуляр (срединный перпендикуляр или медиатриса) – прямая, перпендикулярная к данному отрезку и проходящая через его середину. – *Прим. перев.*

Чтобы построить равносторонний треугольник из отрезка [AB], наложите друг на друга точки A и B, согнув лист пополам. Затем сложите один из двух концов отрезка, скажем A, так, чтобы новая складка проходила через другой конец отрезка (здесь это B). Место, где находится A, – это и будет расположение третьей вершины равностороннего треугольника (C).



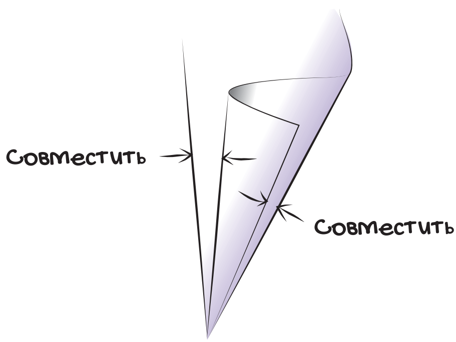
А теперь сложнее: вы можете складыванием изготовить вещи, которые невозможно сделать, используя только линейку и циркуль. Возьмем, к примеру, одну из самых известных проблем, поставленных греками: «трисекция угла». Речь идет о разрезе угла на три равных части. Это легко сделать с помощью транспортира: просто измерьте угол и разделите эту цифру на три.



Трисекция угла 57° 57/3 = 19°. Просто начертите угол 19° и угол 38° (2 x 19)

Но, используя линейку и циркуль, невозможно построить эти углы. Внимание: это не значит, что еще никто не смог это сделать, но зато мы знаем, как продемонстрировать, что никто и никогда в этом не преуспеет!

Используя складывание, это сделать довольно просто (ну почти): начертите угол на краю листа (так, чтобы одна сторона угла была краем листа). Если вы сложите край листа по краю угла, вы разделите угол на две равные части. Но если вы завернете край так, чтобы сгиб накладывался на другую сторону угла, а край листа накладывался на другую складку, с небольшой долей усердия и ловкости у вас получится разделить угол на три равных части!



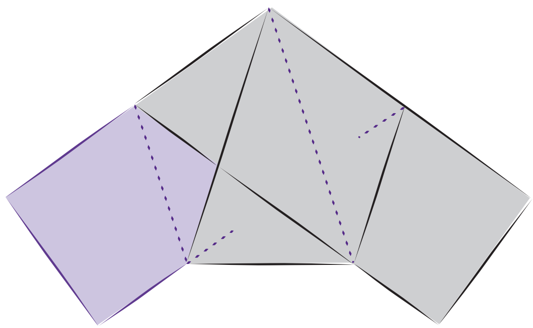
Деление на три равные части

И это еще не все... С помощью линейки и циркуля невозможно начертить все правильные многоугольники, то есть те, чьи стороны все имеют одинаковую длину и все углы идентичны. Нам удалось построить большее количество: равносторонний треугольник и квадрат, конечно, правильный пятиугольник (пять сторон), правильный шестиугольник (шесть сторон)... Но невозможно, например, построить «правильный семиугольник», он имеет семь сторон.

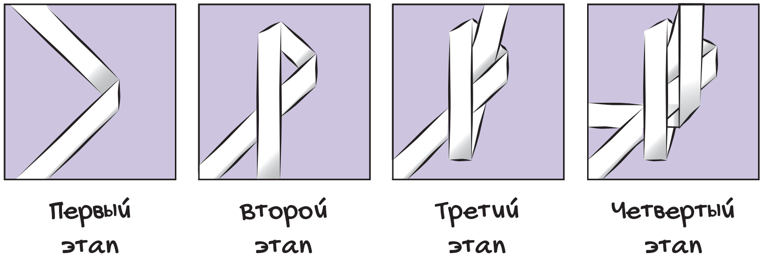
А вот оригами здесь поможет...

Начнем с обычного пятиугольника, не очень понятно, как его построить с помощью линейки и циркуля, в то время как нескольких секунд достаточно, чтобы смастерить фигуру при помощи сгибания бумаги! Возьмите простую полоску бумаги и завяжите узлом (шаг 3 на рисунке ниже).

Аккуратно прогладьте сгибы, так, чтобы полоска нигде не порвалась. Быстро, просто, эффективно, это идеальный правильный пятиугольник!



И для семи сторон? С гораздо более тонкой (или более длинной) полоской бумаги вы можете преуспеть в этом. Сделав еще один узел, мы добавим еще две стороны (шаг 4). Не так легко и быстро, но по-прежнему эффективно! Таким образом, можно добавлять узлы на бумажной ленте столько раз, сколько хотим добавить сторон!



Великие открытия

Евклидовы «Начала»

Эта книга была и остается культовой для всех математиков, а также для всех образованных людей мира. Написанная в Греции примерно 300 лет до нашей эры, она была издана почти столько же раз, сколько и Библия за всю историю человечества!
Она настолько важна вовсе не потому, что в ней рассказывается о новейших достижениях математики, но потому, что они описаны совершенно иным способом: каждое утверждение сопровождается последующим доказательством. Цель – быть уверенным в результате: почему то или иное утверждение верно? Чаще всего люди, далекие от математики, не понимают, зачем терять время на доказательства, если «это уже показано на примере». Но опыт показывает, что пример иногда полностью ошибочен!
Принцип, введенный в «Началах», но ставший впоследствии классическим в математике гласил: нужно начинать со списка утверждений, который используются при доказательстве, например: «если A = B и B = C, то A = C».
Существует также список возможных конструкций, таких как: «Если у меня есть две точки A и B, я могу начертить отрезок [AB]». Это аксиомы, элементы, которые считаются истинными без необходимости доказательства. Внимание: как только установлены аксиомы, любое новое утверждение должно свестись до цепочки рассуждений, построенных на этих аксиомах. Это способ быть наиболее правдивым и убедительным; Евклид заявляет в некотором роде: «Вот что я считаю правильным. Если вы согласны с этими аксиомами, тогда у вас нет выбора, вы обязаны согласиться со всеми представленными результатами, которые вытекают из них».

Для Евклидовой геометрии на плоскости существует только пять аксиом:

1. Через две точки можно провести прямую и притом только одну.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. С помощью двух точек можно начертить окружность (одна служит центром, а расстояние между точек является радиусом).
4. Все прямые углы равны между собой (эта аксиома может показаться странной, но она необходима, чтобы дать определение правильному углу).
5. Существует одна и только одна прямая, параллельная заданной и проходящая через точку, не принадлежащую прямой (заданной).

Используя только эти аксиомы, первая книга «Начал» демонстрирует большое количество результатов, включая доказательство знаменитой теоремы Пифагора...

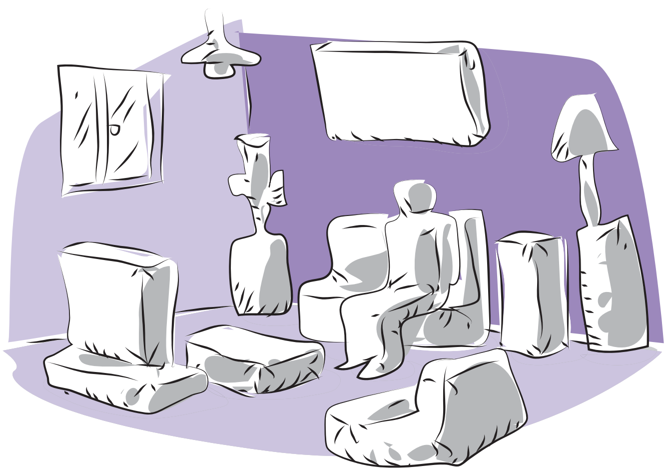
Если такой подход остался примером, выбор аксиом может варьироваться: ничто не запрещает, например, давать аксиомы, основанные на оригами. Это и было сделано в 1990-х годах: очень серьезная теория геометрии позволяет вам узнать, что вы можете и что вы не можете получить, складывая!

Свернуть, развернуть

Замечали ли вы когда-нибудь, как легко упаковывать книги, но чтобы упаковать, например, мяч, уходит немало подарочной бумаги, да и в итоге она будет вся мятая. Логично, скажете вы, книга состоит из ровных частей, в то время как мяч круглый. Таким образом, существуют объемные поверхности, которые легко разворачиваются – например, цилиндр.

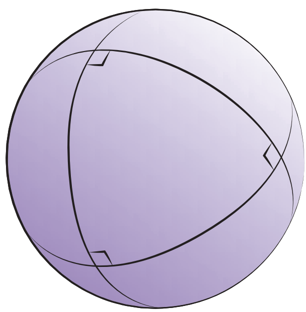
Такие поверхности называются развертывающимися, то есть их можно развернуть на плоскости.

Еще один пример такой поверхности – конус. Это означает, что мы можем смастерить данные фигуры из листа бумаги, ничего не сминая. Иначе говоря, чтобы смастерить эти формы из бумаги, достаточно одного разреза, чтобы развернуть их на плоскости. Но это невозможно с неразвертывающейся поверхностью. Вы можете проверить, пытаясь упаковать все вокруг, что развертывающиеся поверхности редки: плоские предметы, конечно (но остерегайтесь углов, все знают, что это каверзный момент при упаковке книг), цилиндры, конусы, и… это почти все!



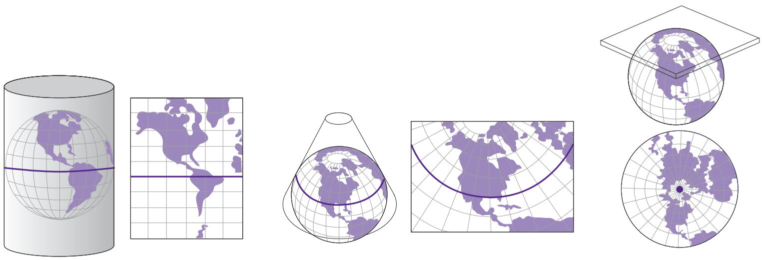
Основная проблема картографов в представлении Земли на плоскости: даже если Земля не имеет в точности форму сферы, она ее очень напоминает. Но если вы попробуете обернуть шар (воздушный шар, апельсин) бумагой, вы сразу увидите, что это неразвертывающаяся поверхность, складки будут повсюду! Поэтому невозможно представить Землю плоской, не деформируя ее.

Вспомните опыт из первой главы: маленький кусочек кожуры апельсина легко сделать плоским. Но если речь идет о более крупном куске кожуры, то невозможно сделать его плоским, не разорвав! И вот почему: на сфере это будет выглядеть несколько забавно. Возьмите фломастер и нарисуйте необычный треугольник на апельсине: начните с «экватора», поднимитесь на Северный полюс, развернитесь на девяносто градусов, снова спуститесь до экватора и вернитесь в исходную точку, следуя тем же путем. Вы начертили только что треугольник, у которого есть три прямых угла! Вы никогда не сможете его нарисовать на плоскости!



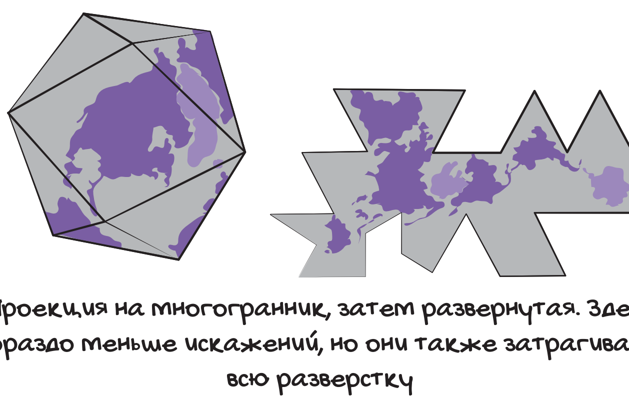
Сумма углов «классического» треугольника всегда равна 180°, но для этого чудовищного треугольника, она равна 3 × 90°, то есть 270°! Это так: в «сферическом» треугольнике эта сумма – фактически всегда больше 180°. Она не всегда одинакова и увеличивается вместе с треугольником. Это еще раз доказывает, что карта маленького земельного участка может быть почти точной, в то время как карта, представляющая большую часть земного шара, очень деформирована по необходимости.

Как же тогда нарисовать мир на плоскости? Первая идея – представить себе лампу в центре земного шара, который пропускает свет, и, таким образом, лампа проецирует карту на развертывающуюся поверхность: цилиндр, конус, многогранник или даже прямо на плоскость. На этих поверхностях появляется тень карт, которые могут быть затем представлены на плоскости без каких-либо проблем.



Как представить мир на плоскости?

Очевидно, кстати, все или почти все карты искажены: например, поместив глобус в цилиндр, все круги, параллельные экватору, проецируются на круги одинакового размера на цилиндре, даже те, которые очень близки к полюсам, но в реальности намного меньше! Фактически, только экватор не искажен в этом случае...



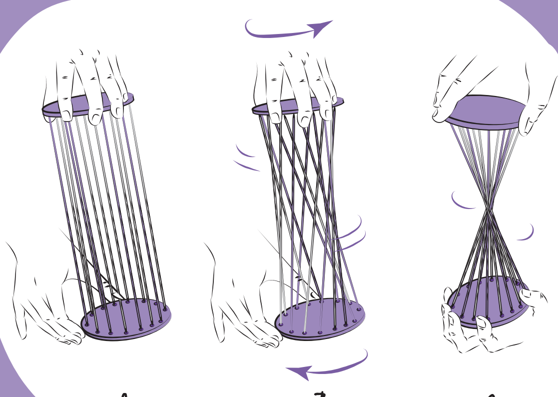
Проекция на многогранник, затем развернутая. Здесь гораздо меньше искажений, но они также затрагивают всю развертку

Домашнее задание

Вращающиеся прямые!

Возьмите два картонных диска одинакового размера (примерно 10 см в диаметре) и нитку. Расположите диски друг над другом и просверлите отверстия на обоих дисках равномерно по кругу. Затем «свяжите» два диска вместе, используя нить, но не натягивайте ее сильно, чтобы иметь возможность широко развести диски.

Готово! Отведите диски, удерживая их параллельно друг другу и натянув равномерно все нити (рис. А). Они образуют «скелет» цилиндра, который можно легко представить. Чтобы получить его целиком, потребуется прямая линия в том же направлении, что и нити, проходящие от одного к другому, проходящая по кругу от центральной оси. Поверхность, которая может быть получена путем перемещения прямой, называется «регулярной поверхностью». Конус также является регулярной поверхностью, его можно легко увидеть, повернув два диска в противоположных направлениях: нити пересекаются посередине двух дисков, образуя два конуса, с общей точкой (рис. С). Все еще ничего поразительного?



A B C

Остановитесь посередине вашего движения (B): полученная поверхность в действительности представляет собой регулярную поверхность, так как она ограничена натянутыми нитями, то есть прямыми. И все же она изогнута, и абсолютно невозможно обернуть ее бумагой, не разрывая и не комкая! Эта поверхность, «гиперболоид вращения», не является исключением: существует множество регулярных поверхностей, которые невозможно развернуть.

5

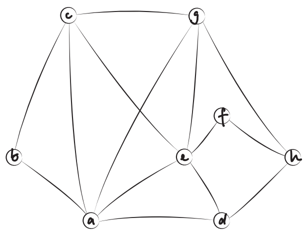
Большой беспорядок в городе

Поехали в город! Все эти улочки заполнены бурлящей копошащейся толпой: люди сталкиваются, уворачиваются, пешком и на машине. Эти антенны всевозможных форм и величин, передающие радиоволны, мобильные телефоны, эти кабели, эти трубы, по которым несутся вода и газ... Все это пересекается, переплетается... Какой же бардак!

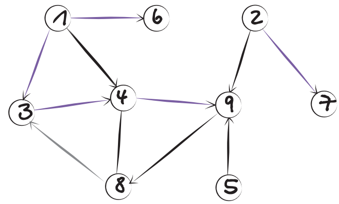
Математик, очевидно, примется размышлять, как бы все это упорядочить: как избежать перегруженности и на дорогах и в электросетях, как снизить вероятность сбоев, убрать ненужный транспорт. Кто сказал, что математика не заботится о решении насущных вопросов?

Графы вновь и вновь...

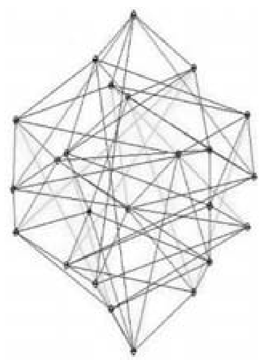
Чтобы рассуждать об этих многочисленных проблемах, в математике существует один чудесный раздел: теория графов. Не пугайтесь, если вы не поняли ни слова, граф – это очень простая штука: точки, соединенные линиями. Но в математике мы называем их вершинами и ребрами, это более солидно.



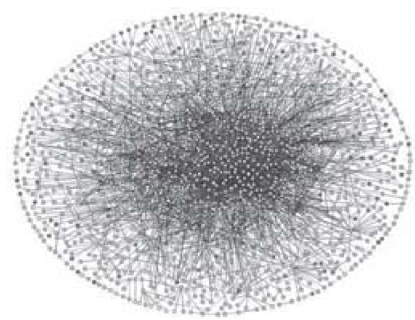
Граф



Другой граф, ориентированный, т.е. со стрелочками



Более сложный граф



Еще более сложный граф!

- Дороги? Графы: каждый перекресток – вершина, каждая дорога – ребро.
- Электросети? Каждый трансформатор, каждая подстанция – это вершина, а каждый кабель, который их соединяет, – это ребро.
- Интернет? Каждая веб-страница – это вершина, каждая ссылка между двумя страницами – это ребро.

И так далее, мы можем наблюдать графы повсюду!

И снова интерес в том, как решать множество различных проблем всего одной математической теорией? Например, для особо нагруженных электросетей встает вопрос об их бесперебойности: если внезапно отрубается несколько линий (вышли из строя электрические кабели), как это отразится на остальных участках графа? Нужно быть уверенным, что большое количество людей не будет сидеть без электричества из-за поломки одного лишь кабеля.

Случай преднамеренной атаки, которая может иметь место, например, у террористов, немного отличается: на этот раз необходимо тщательно исследовать состояние графа после разрушения, выбирая в качестве цели конкретные вершины или ребра, а не случайные наугад. Так, человек, который хочет устроить большой беспорядок в интернете, будет нацелен на страницы, тесно связанные с другими: поисковые системы, облачные хранилища, социальные сети.

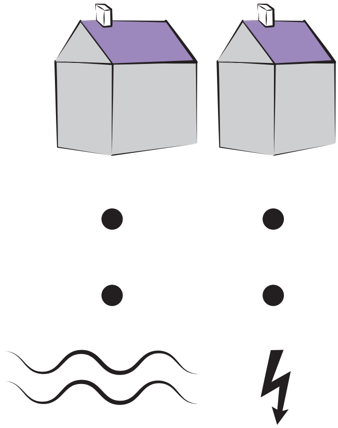
Вопросы, стоящие перед менеджерами сети, разнообразны, но один наиболее актуален: как обеспечить надежность сети, сэкономив при этом на общей длине кабеля?

Планарные графы или нет?

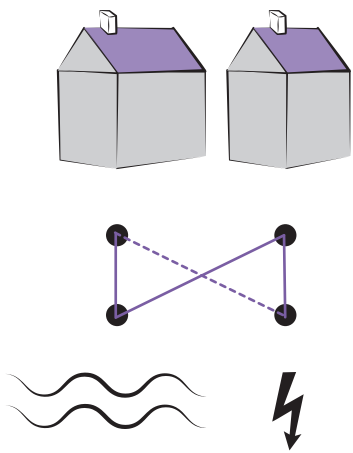
А теперь давайте рассмотрим проблему, которая кардинально отличается от предыдущей. Она более простая для понимания и, вероятно, менее полезная с прикладной точки зрения, но все же очень важная...

Вот коротенькая задачка, которая иллюстрирует вымышленную проблему, но может быть очень полезна при решении реальных вопросов.

Представьте два дома, в которые вам нужно провести электричество, воду, но только в плоском мире (двумерном): тоннель прорыть невозможно. Как поступить?

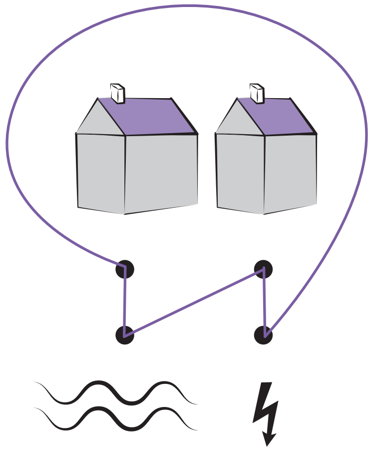


В данном случае, если вы напрямую подключите каждый дом, вы получите следующее.

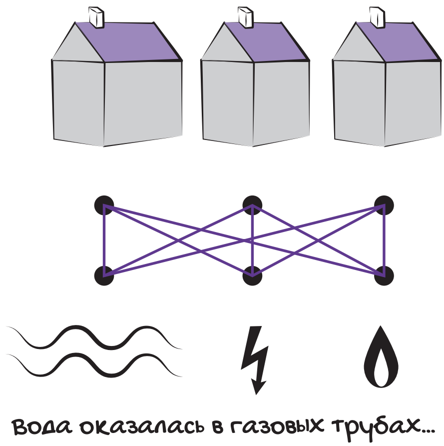


Водопроводная труба пересекается с электрическим кабелем! Опасность, караул!

Из сложившейся ситуации, между тем, можно выпутаться, переместив дом или же сделав крюк одним из кабелей:



Граф идентичен, поскольку те же вершины соединены таким же образом. Но больше ничего не пересекается. Теперь подумаем, а что же делать, если добавится третий дом и необходимость провести газ! Нельзя допускать никаких пересечений, это очень опасно. Однако с первого взгляда на рисунок без особых размышлений мы насчитаем 9 пересечений!



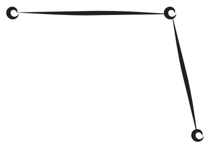
В отличие от первой ситуации, задача с тремя домами нерешаема: вы можете сколько угодно переставлять дома и фабрики, всячески перекручивать кабели и трубы, но вам не избежать хотя бы одного пересечения. Это доказано уже множеством способов более ста лет назад!

Итак, существует два семейства графов: те, что можно отобразить на плоскости без пересечения, планарные графы, и те, для которых пересечения неизбежны – непланарные графы.

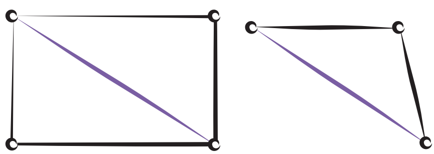
Планарные графы тесно связаны с известным «соотношением Эйлера»[1]. Что же нам скажет эта формула касаемо этого простого графа:

Он имеет только две вершины и одно ребро. Чтобы увеличить его, мы можем добавить вершину и связать ее с остальной частью графа новым ребром:

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внесший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук).



Еще одна вершина, еще одно ребро, после этого способа добавления всегда будет больше вершин, чем ребер. И так будет всегда, если мы свяжем новую вершину с уже существующей. И если, наоборот, мы попытаемся добавить ребро, соединив две уже существующие вершины (новое ребро обозначим на рисунке фиолетовым).



На этот раз добавление этого ребра не компенсируется дополнительной вершиной; но новая «замкнутая поверхность », то есть кусок плоскости, окруженный ребрами, будет систематически появляться : потому как новое ребро обрезает уже существующую грань пополам, как и фиолетовый край на графе слева, так как это новое ребро «замыкает» новую область, которая ранее была вне графа (справа).

Подводя итог: на каждое дополнительное ребро приходится еще одна вершина или еще одна замкнутая поверхность. Таким образом, количество граней плюс число вершин всегда будет больше, чем количество ребер: это то, что мы наблюдали на очень маленьком графе вначале (одно ребро, две вершины и нулевые грани!). Чтобы нарисовать граф любого размера, мы начинаем добавлять по одному ребру к маленькому графу.

А вот как это отображается в формуле Эйлера:

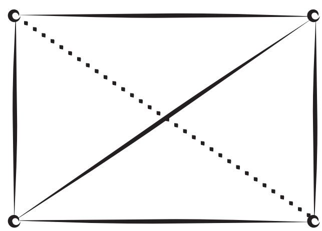
«число вершин+ число поверхностей – число ребер = 1».

Обычно приводится в более короткой форме:

$$S - A + F = 1.$$

Вы можете сразу же проверить это утверждение на всех графах без пересечений, которые вы можете нарисовать, это соотношение всегда будет истинным!

Внимание, если мы рисуем два ребра, которые пересекаются, вся наша демонстрация бесполезна, потому что мы не знаем точно, сколько появилось новых замкнутых поверхностей. Но это соотношение верно для всех плоских графов.



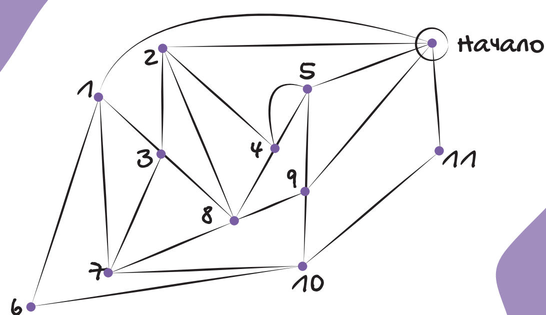
Сколько поверхностей добавлено путем рисования нового ребра (пунктиром)

Формула Эйлера позволяет также доказать, что проблема трех домов, которые мы рассматривали ранее, не имеет решения, так как ее граф не удовлетворяет соотношению Эйлера. (Можно только примерно оценить количество получившихся замкнутых поверхностей.) Существуют и другие методы, чтобы выяснить, является ли граф планарным или нет, что может очень пригодиться в определенных ситуациях: печатные платы, все эти электрические соединения, выполненные на платах, где дорожки никогда не должны пересекаться.

Домашнее задание

Сеанс математического ментализма!

Эйлер – один из основоположников изучения графов, в честь него назван Эйлеров путь[1] (эйлерова цепь), который позволяет провернуть вот такой забавный фокус. Покажите вашим зрителям график, представленный ниже (распечатайте на отдельном листе).



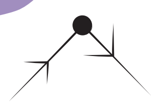
Пример графа с двумя вершинами нечетной степени

Вы наверняка заметили, что все вершины, кроме той, что названа «начало», пронумерованы. Попросите кого-нибудь (в аудитории) выдвинуться из точки «начало», пройти по всем ребрам графа в любом порядке, но, не проходя дважды один и тот же участок. Чтобы облегчить задание, избежать споров и ошибок, предложите обозначить путь фломастером. Человек должен будет остановиться, как только попадет в тупиковую точку. До того как он начнет проходить по графу, напишите на листочке число и спрячьте его до конца игры.

---

[1] В графе – это путь, проходящий по всем ребрам графа и притом только по одному разу (ср. Гамильтонов путь).

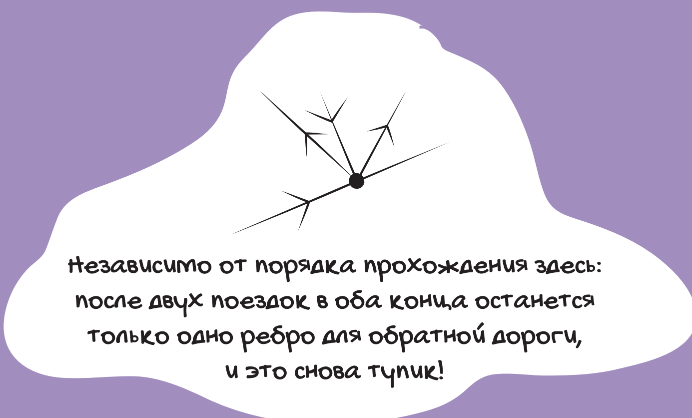
В конце прохождения «лабиринта» участник называет номер вершины, на которой он остановился. А теперь вслух прочитайте цифру, которую вы написали заранее: то самое число!
Секрет этого фокуса? Единственное, что нужно сделать, это нарисовать граф, в котором ровно две вершины нечетной степени, то есть с нечетным числом ребер. Затем выберите одну из этих двух вершин в качестве начальной точки и запишите номер другой перед началом фокуса: путь всегда заканчивается на этой вершине.
Итак, в приведенном выше примере все пути заканчиваются на вершине номер 8, связанной с пятью ребрами. Почему? Взгляните на вершину, связанную с двумя ребрами (например, вершинами 6 или 11 нашего графа): мы приходим к этой вершине одним или другим из этих ребер, тогда отправиться обратно можно будет только вторым ребром! Нельзя останавливаться (закончить) на этой вершине.



Прибытие по левому ребру, выезд по правому ребру или наоборот... Невозможно остаться на этой вершине!

И это будет одинаково для всех вершин с четным числом ребер: для каждого ребра, которое входит, есть ребро, которое выходит. Эта вершина обязательно является точкой пересечения, а не тупиком: невозможно застрять здесь!

И наоборот, если вершина имеет нечетное число ребер и не является начальной точкой отправления, то после некоторого количества круговых поездок останется только одно ребро, связывающее его с остальной частью графа. Наступит момент, когда нужно будет воспользоваться этим ребром, но придется остаться в этом тупике!

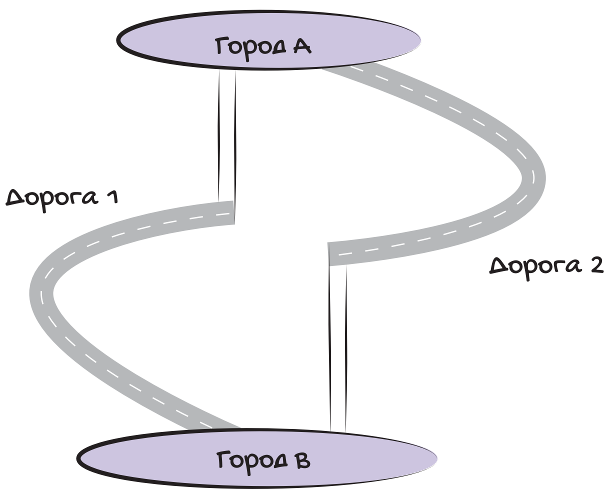


Как только принцип станет понятен, этот трюк можно повторить столько раз, сколько вы хотите, всегда с новыми графами. И если вы используете сначала небольшую подсказку, это даже не проблема, чтобы нарисовать новый граф без подготовки!

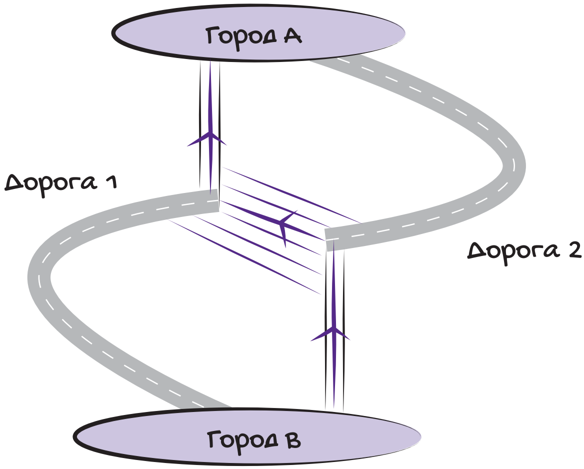
Лучшее – враг хорошего

«Вот улица, которую я перекрыл, чтобы избавиться от пробок».

Нелепо? А на самом деле все очень даже возможно. Речь идет о так называемом «парадоксе Браеса». Этот немецкий математик (родившийся в 1938 году) заметил в 1968 году, что такой тип ситуации можно воспроизвести теоретически. Как? Представьте две дороги, связывающие два города. На одной из них первая часть пути сначала узкая, затем движение становится более оживленным, затем затухает, но этот участок полностью прямой, тогда как вторая часть этой дороги более широкая, ехать по ней более комфортно, но она более извилистая. На второй дороге все наоборот. В целом, выбор одного или другого маршрута не занимает много времени. Поэтому количество транспортных средств примерно одинаково на обеих дорогах.



А теперь представим, что мы построили участок, который быстро сможет соединить две дороги посередине. Тогда все будут заинтересованы ехать по одной и той же дороге, более короткой, соединяющей два участка дороги!



Однако это перегрузит дорогу и существенно замедлит движение... Тем не менее пока время в пути не превышает времени, затраченного на более длинные ответвления, каждый будет продолжать выбирать данную дорогу... рискуя иногда удлинять время в пути каждого!

Конечно, так случается не всегда: чаще всего открытие новой дороги экономит время для всех. Но в моделях, используемых математиками, было продемонстрировано, что в худшем случае открытие новой дороги может увеличить общее время поездки на 4/3 (около 1,33)! Вместо часа для всех до строительства новой развязки время в пути может теоретически достигнуть 1 часа 20 минут... Единственное решение в данной ситуации будет жестким: закрыть участок, который ранее улучшал ситуацию!

Эта кажется абсурдным: достаточно договориться никогда не выезжать на дополнительную дорогу, и время в пути сократится до одного часа. Но успех не будет постоянным: ведь каждый водитель заинтересован в том, чтобы не соблюдать общие правила игры ради выигрыша времени; если вы будете единственным, кто пользуется новой дорогой, вы выиграете время. Существует противоречие между коллективными интересами и индивидуальными интересами.

И наоборот, если все выберут тут же новую дорогу, будучи уверенными, что они единственные, кто так поступит, это опять создаст пробку. Никто не заинтересован в том, чтобы пользоваться старой дорогой, если все остальные не делают этого, но в то же время ситуация стабильна, даже если это не самый лучший выбор.

Великие открытия

Теория игр и равновесие Нэша: дилемма заключенного

Как такое возможно, чтобы группа людей сделала худший возможный выбор? Эта ситуация хорошо известна в «теории игр» – области математики, которая постепенно заинтересовалась вопросами, все более далекими от реальных игр, но в которых мы всегда находим людей (или животных, растений, группы...), которые делают выбор и извлекают из этого выгоду или же нет.

Некоторые животные дерутся за территорию, тратя при этом силы и сильно рискуя.

В экономике стоит выбор, конкурировать или нет, будь то снижение цен для завоевания клиентов или нет, который также можно рассматривать как «игру» между несколькими компаниями, которые выиграют или теряют деньги.

Когда два человека «играют» столько раз друг против друга, они в конечном итоге избирают «стратегию», способ игры. Точно так же, в случае автомобильных поездок, через несколько дней, каждый привыкнет и поедет по той или иной дороге, обнаружив, что путь стал быстрее.

Математик Джон Нэш представил идею «баланса» в этом типе ситуации: через какое-то время никто не будет интересоваться изменением стратегии. Но нет никакой гарантии, что этот баланс является лучшим для всех.

Самая известная история, обобщающая эту идею, – дилемма заключенного (внимание, аморальная история!).

Два сообщника были арестованы, но у полиции нет достаточного количества доказательств против них, чтобы задержать их в тюрьме надолго. Затем каждому отдельному заключенному предлагается выбор:

«Если вы сдадите полиции своего друга, а он не сдаст вас, чтобы поблагодарить вас, мы освободим вас, а он останется на 10 лет в тюрьме, потому что ваши показания служат доказательством против него. В противоположной ситуации предложения, конечно же, будут отменены. Если вы сдадите друг друга, так как у нас есть доказательства против обоих, мы посадим вас за решетку, но только на 5 лет, потому что вы согласитесь говорить. Наконец, если никто из вас не заговорит, из-за отсутствия доказательств, мы оставим вас всего на 6 месяцев».

Краткое изложение этой странной договоренности часто представлено в виде этой таблицы:

Осужденный 2 / Осужденный 1	Промолчит	Проговорится
Промолчит	$(-^1/_2; -^1/_2)$	(–10; 0)
Проговорится	(0; – 10)	(–5; –5)

Давайте рассуждать как один из заключенных. Если его друг не проговорится, у него есть все основания сдать сообщника и покинуть тюрьму, а не остаться на 6 месяцев! Если, наоборот, проговорится его сообщник, это еще хуже: он рискует получить 10 лет вместо 5, если он также заговорит. В обеих ситуациях лучше всего признаться!

Но если оба заключенных будут придерживаться этих рассуждений, они оба останутся в тюрьме на 5 лет вместо того, чтобы выйти через 6 месяцев, если они промолчат! Эта ситуация напоминает парадокс Браеса: каждый заинтересован в выборе, который делает результат менее хорошим для всех. Поэтому индивидуальный рациональный выбор может противостоять коллективным интересам, которые могут быть навязаны только внешней силой. Другие подобные истории несут более оптимистичную мораль, например, тот факт, что может быть личная заинтересованность во взаимной помощи... Поэтому ее, вероятно, по-прежнему будут поощрять! Не говоря уже о том, что каждый не всегда думает только о своих личных интересах, к счастью!

Математики в городе!

В 1969-м, в немецком городе Штутгарт открылось новое шоссе, которое должно было помочь «разгрузить» город... Через некоторое время мэрия констатировала, что ситуация на дорогах ухудшилась, и приняла решение закрыть новое шоссе, что определенно улучшило ситуацию! Но было ли это прямым примером парадокса Браеса? Такие ситуации слишком сложные и на практике очень сложно достоверно описать причину случившегося. Теория может быть полезна, но для того, чтобы внести ясность, нужно тестировать на практике. Теоретическое знание о том, что этот тип явлений может иметь место, все еще меняет образ мышления... В Нью-Йорке, например, теория предусматривала, что закрытие некоторых участков улицы улучшит дорожную ситуацию.

Реальное испытание позволило показать, что шоссе действительно стало менее загруженным, но не настолько, как предсказывалось. Участки были закрыты, тем не менее, окончательно, чего не случилось бы без теории.

Для такого рода проблем невозможно впихнуть всю реальность в математические теории и еще меньше – в компьютеры: что касается автодорожной ситуации, надо учесть особенности пути каждого участника движения, пешехода, водителя или велосипедиста, непредвиденные остановки, пробки...

И вместо того, чтобы заниматься поиском и описанием реальных ситуаций, математики предпочитают моделировать ситуации, делая так, будто бы все происходило случайно. Расчеты оказываются весьма упрощенными и фактически дают очень хорошие результаты!

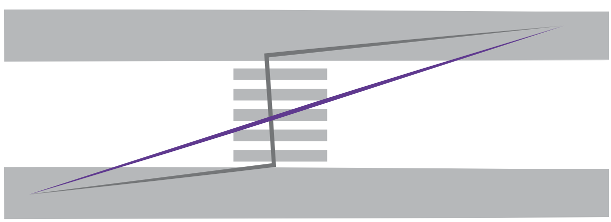
Целые исследовательские отрасли занимаются тем, что решают эти практические проблемы, которые могут быть многократными. Таким образом, теория массового обслуживания (или теория очередей) пытается отвечать на различные вопросы:

- Какой будет длина ряда машин, в зависимости от времени, которое будет гореть красный свет светофора?
- Сколько касс открывать, чтобы покупатели не ждали долго?
- Сколько устанавливать телефонных антенн, чтобы многочисленные звонки их не перегрузили (звонки можно рассматривать как людей, пребывающих в очереди и желающих пройти через антенну)?
- Как располагать трубопроводы и клапаны, чтобы вода правильно циркулировала по сети трубопроводов?

Кривые повсюду!

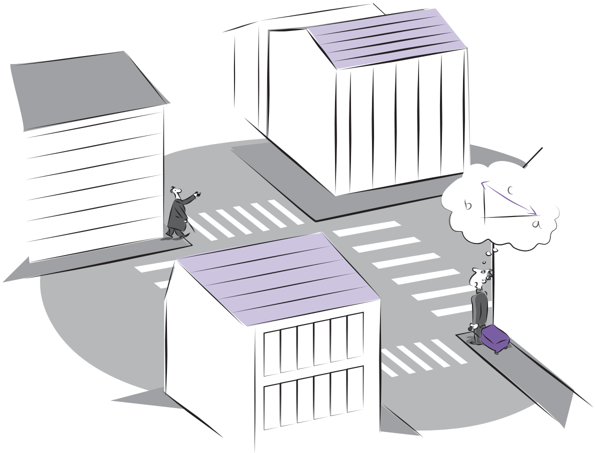
Вы наверняка замечали, что переходить улицу по диагонали – это не очень умно, но все же куда быстрее, чем сначала дойти до пешеходного перехода, чтобы пересечь улицу перпендикулярно ему.

Между прямой линией, которая пересекает улицу наискось (наиболее короткий путь), и наиболее осторожным путем, который проходит только через тротуары и пешеходный переход, появляется идеальная кривая, следуя по которой можно избежать длительного нахождения на проезжей части, и заодно сократить себе путь.



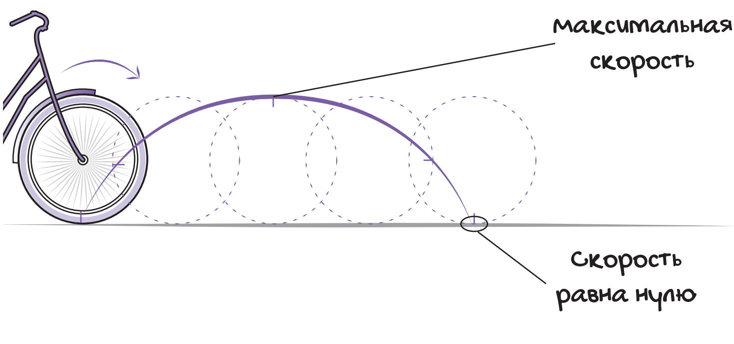
Наиболее короткий путь обозначен фиолетовым, а наиболее осторожный (правильный) — серым

Вот он, вопрос «оптимизации»! Оптимизация – это искусство найти лучшее решение проблемы, в которой требуется перевезти козу и капусту через реку, и даже больше. Здесь в роли козы выступает длина пути, а капуста – риск ходьбы по проезжей части.

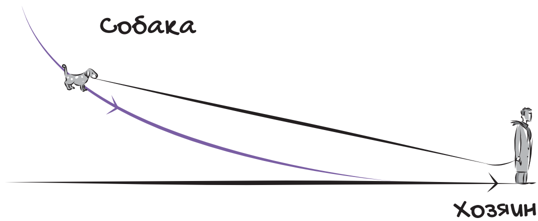


В городе математик видит, что множество известных или неизвестных кривых появляются естественным образом. Циклоида является примером звездной кривой: она описывает путь гвоздя, застрявшего в шине.

Наблюдая это, вы поймете то, что было не так очевидно до этого: когда гвоздь касается земли, его скорость равна нулю! В противном случае это означало бы, что велосипед скользит или его заносит. И наоборот, когда гвоздь находится в верхней части колеса (в верхней части циклоидной арки, следовательно), его скорость максимальна: скорость движения велосипеда добавляется к скорости вращения колеса!

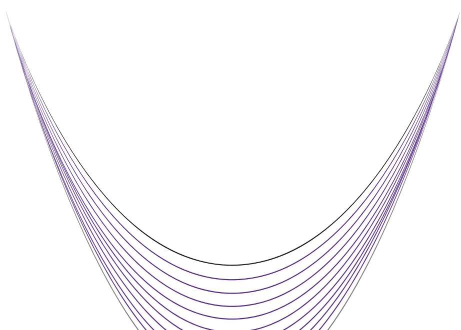


Другой вид кривой, которой можно регулярно наслаждаться в городе: трактриса. Это путь, проделанный упрямым щенком, которого волочит на поводке хозяин, следующий по прямой траектории.



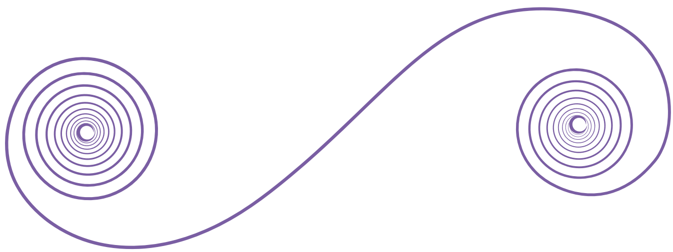
Трактриса: хозяин (представим вид сверху) двигается по прямой и тянет за собой на поводке упрямую собаку

Еще одна заурядная кривая: «цепная», описываемая высоковольтными кабелями между двумя столбами или цепью между бетонными блоками.



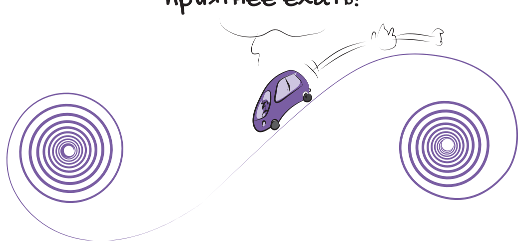
Цепные кривые разной длины, но выходящие из общих точек

И последняя, с другим сложным именем, которое нужно запомнить: клотоида. Попытайтесь запомнить ее и благодарить ее каждый раз, когда вы заезжаете или покидаете шоссе!

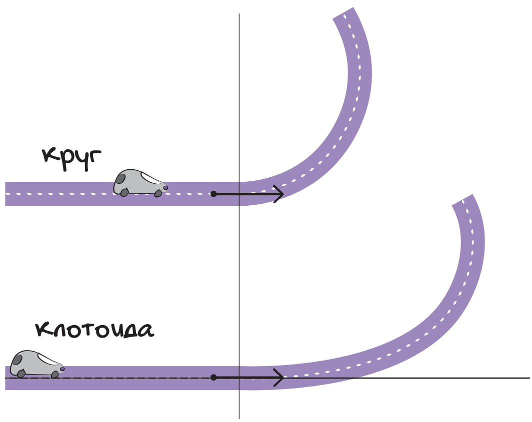


Завершенная клотоида (к счастью, только ее части встречаются на наших дорогах!)

Математики обнаружили ее задолго до того, как появились машины, и, вероятно, это не соотносилось с какими-либо практическими проблемами. Но появление высокоскоростных транспортных средств придало ей огромное значение! Действительно, эта кривая отвечает на следующий вопрос: какова будет траектория, когда вы едете всегда с одинаковой скоростью, но постепенно поворачиваете все сильнее руль, без рывков, не ускоряя и не замедляя скорость, с которой мы его поворачиваем?



Чтобы понять важность этой кривой, подумайте о том, что произойдет, если вы не повернули бы колеса. Одна из двух вещей: или вы едете прямо, что очень хорошо на шоссе, или вы едете по кругу, что идеально подходит для кругового движения, или на развязке. Как проложить дорогу, соединяющую прямую линию с дугой? Если развязка круглая, придется очень сильно повернуть руль. Чтобы избежать этого эффекта, крутые повороты всегда строятся в виде куска клотоиды, что позволяет постепенно поворачивать руль до положения, которое он будет держать, когда автомобиль выходит на развязку; и, чтобы вернуться на прямую дорогу, достаточно предвидеть новый кусочек клотоиды. Спасибо кому?

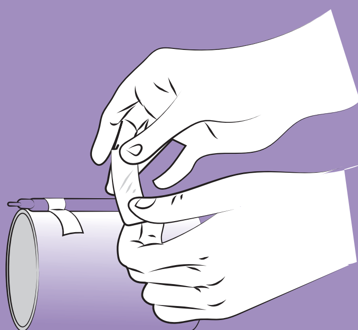


От прямой линии до круга прямо: следите за поворотом! Следуя клотоиде, все пройдет гладко...

Домашнее задание

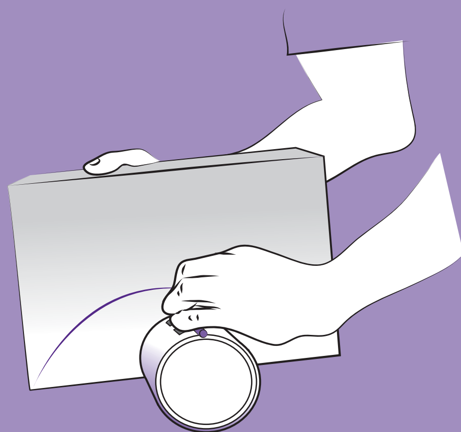
Циклоида-суперзвезда!

1. Вам понадобится консервная банка и фломастер. Приклейте его таким образом, чтобы он слегка выступал из-за коробки. Получилось?



Первый этап

2. Теперь возьмите картонную коробку из-под хлопьев (конечно, пустую). Прислоните ее к стене и поместите банку с фломастером на угол коробки с хлопьями. Затем медленно крутите банку, убедившись, что фломастер хорошо прорисовывает кривую...

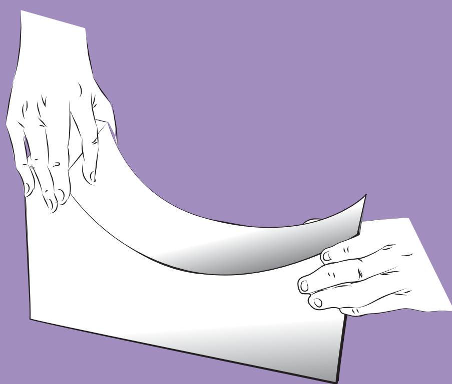


Второй этап

3. В принципе, после одного полного оборота банки у вас получится превосходная циклоида, нарисованная на упаковке! Проделайте то же самое с другой стороны, выбирая ту же часть коробки в качестве отправной точки.

Третий этап

4. Все, что вам нужно сделать, это аккуратно отрезать по линии (по обеим сторонам упаковки), затем приклеить полоску картона вдоль изгиба и скосов, чтобы предотвратить падение шаров (см. ниже).

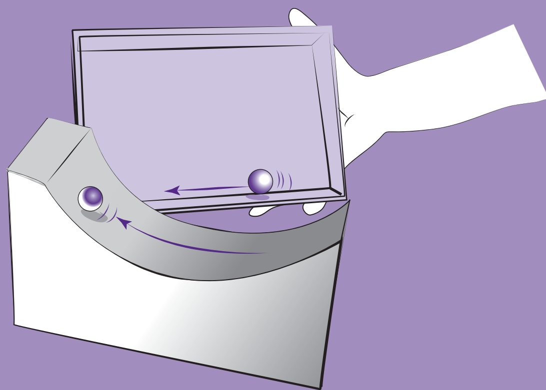


Четвертый этап

С этой роскошной рампой вы увидите, что эта циклоида обладает удивительными свойствами.

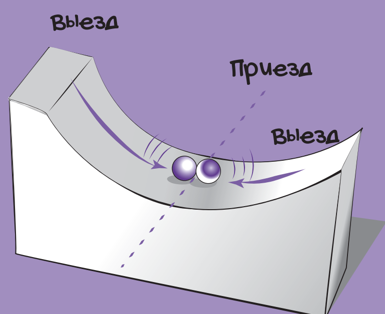
Для удовольствия глаз и ушей дайте официальные названия: циклоида – «брахистохрона», «изохрона» и «таутохронная кривая»!

- Брахистохрона – означает, что эта кривая является самой быстрой из всех, чтобы спуститься из одной точки в другую (если первая не находися ниже второй, конечно!). Сравните с прямой рампой: если вы одновременно отпустите с верхней точки два шара, первым, кто придет вниз, станет тот, который следует по циклоиде. Она довольно покатая вначале, так что мяч набирает скорость, но не слишком большую, что ускорит его спуск и существенно сократит путь. Еще одна история оптимизации!



По циклоиде шар придет первым

- Таутохронная кривая указывает, что если вы отпустите два шара с разных высот циклоиды (по обе стороны от нижней точки), они всегда встретятся строго внизу! Другими словами, у мяча всегда займет одно и то же время путь от верха до низа циклоиды.



Два шара скатываются одновременно!

- Термин «изохронна» означает почти то же самое, но другими словами. Какая бы ни была высота, откуда вы бы ни бросали мяч, падение всегда будет занимать столько времени, чтобы прокатиться по рампе туда-сюда.

Ого!

Благодаря таким прекрасным свойствам математики, работающие над циклоидой Галилей, Роберваль, Бернулли, Эйлер, Ньютон прозвали ее математической «Еленой Прекрасной», ссылаясь на самую красивую женщину в мире в греческой мифологии, Елену из Трои!

6

С точки зрения искусства

Бытует мнение, что искусство далеко от науки, и особенно – от математики, такой холодной и расчетливой. А между тем... Вспомните Леонардо да Винчи (1452–1519) – инженера и художника, Жака Рубо – французского поэта и математика, родившегося в 1932-м, или Готфрида Лейбница – немецкого математика, чьему перу принадлежит следующее высказывание: «Музыка есть бессознательное упражнение души в арифметике». Настоящие гении интересуются всем!

Новые стихи

Однажды писатель и любитель математики Ремон Кено (1903–1976) открыл миру «секстину» – старинную форму стихотворения, состоящего из шести строф, каждая из которых включала 6 строк. Оканчивались строки всегда одними и теми же шестью словами, но каждая новая строфа повторяла конечные слова предыдущей строфы. Далее вы прочтете пример такого стихотворения – отрывок из поэмы «L'exil des esprits»[1] Фердинанда де Грамона – политика и поэта 19 века. (Для русскоязычного читателя приведем ниже отрывок из стихотворения «Секстина» (1910) Игоря Северянина. – *Прим. ред.*)

---

[1] Согласно Sextines, из книги «История секстин на языках, производных от латыни», маркиз Фердинанд де Грамон, Альфонс Лемерр издатель, 1872, Париж.

L'exil des esprits

On vous a donc bannis, hôtes du clair de lune, (1)
On ne veut plus de vous, impalpables Esprits, (2)
Elves, Sylphes, Follets, qui, sur la blanche dune (3)
Ou les ronds de gazon, dansiez à l'heure brune, (4)
Vous qui des vieux châteaux protégiez les débris (5)
Et des grands bois profonds enchantiez les abris! (6)

Désormais c'en est fait, vides tous ces abris! (6)
Vainement les manoirs s'argentent sous la lune, (1)
On n'y reverra point, explorant leurs débris, (5)
Luire Titania, la reine des Esprits; (2)
Ni de son cor d'ivoire Obéron à la brune (4)
N'ira plus éveiller les échos de la dune. (3)
[...]

Секстина[1]

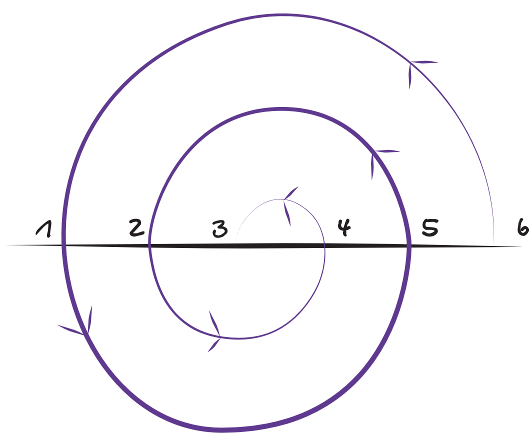
Предчувствие – томительней кометы, (1)
Непознанной, но видимой везде. (2)
Послушаем, что говорят приметы (3)
О тягостной, мучительной звезде. (4)
Что знаешь ты, ученый! сам во тьме ты, (5)
Как и народ, светлеющий в нужде. (6)

Не каждому дано светлеть в нужде (6)
И измерять святую глубь кометы... (1)
Бодрись, народ: ведь не один во тьме ты, – (5)
Мы все во тьме – повсюду и везде. (2)
Но вдохновенна мысль твоя в звезде, (4)
И у тебя есть верные приметы. (3)
[...]

[1] *И. Северянин*. Громокипящий кубок. – М.: Гриф, 1913. – 206 с.

Математики называют подобный порядок смены слов перестановкой: один и тот же порядок перемещения слов от строфы к строфе.

Для удобства пронумеруем слова, чтобы отследить перестановку: 123456 → 615243 – так представлен порядок слов во второй строфе. Чтобы определить порядок слов в третьей строфе – повторите процедуру, и у вас получится: 364125. Таким образом, перестановка состоит в том, чтобы каждый раз менять местами первое и последнее слово в последующей строфе. Сначала первое, потом предпоследнее, потом второе и так далее, один к двум в начале, один к двум в конце. Рисунок хорошо иллюстрирует этот алгоритм: на линии отображен порядок слов в первой строфе, а на спирали – порядок слов в последующей строфе.



Замена в секстине

К концу шестой перестановки возвращается изначальный порядок слов: 123456 → 615243 → 364125 → 532614 → 451362 → 246531 → 123456

Вот почему в секстине именно шесть строф!

Эта перестановка вдвойне примечательна (несмотря на иные преимущества): она отлично перемешивает слова (порядок слов полностью поменялся, а не так, как в простой перестановке 123456 → 234561), и в каждой строфе шесть строк, а в стихотворении шесть строф, прежде чем вернется первоначальный порядок. Но это не всегда так, взгляните на пример перестановки 123456 → 654321: уже третья строфа будет в том же порядке, что и первая.

Ремон Кено хотел упорядочить эти знания (обычное дело для математиков – находить максимальное число соответствий и категоризировать их). И тогда он задался следующим вопросом: возможно ли написать стихи с n-ным количеством строф, по аналогии с секстинами, но с любым количеством строк в строфе?

Следуя логике, мы можем написать «квинтины», пять строф по пять строк в каждой. Доказательство? Воспроизведем порядок перестановки в секстине: 12345 → 51423 → 35214 → 43152 → 24531 → 12345.

Пять строф подряд порядок последних слов менялся, а на шестой строфе он вновь вернулся к первоначальному, великолепно!

В то же время, если вы захотите написать «септину» из семи строф по семь строк: 1234567 → 7162534 → 4731562 → 2467531 → 1234567.

Увы! Порядок слов первой строфы вернулся уже на пятой итерации, слишком рано!

К чести Ремона Кено, его стихотворения сегодня называются «кенинами» – и числа, для которых кенины возможны, называются числами Кено. Вот начало этого списка: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 14, 18, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 39, 41, 50, 51, 53, 65, 69, 74, 81, 83, 86, 89, 90, 98, 99... А много их там еще? Никто не может точно сказать, конечны ли числа Кено. Поиски продолжаются, поскольку еще в 2008 году этот вопрос оставался нерешенным. Пожелаем терпения энтузиастам!

Домашнее задание

Хорошо перетасованы?

Возьмите шесть карт по порядку (от 1 до 6) и перетасуйте их, последовательно поменяв верхнюю карту с нижней. Речь идет об обратном, противоположном перекрестному секстильному пути. После такой тасовки, порядок, конечно, перевернут вверх дном. С 123456 (снизу вверх, обращаясь к картам к столу), вы действительно перейдете к 246531. Но на шестое перемешивание порядок будет восстановлен. Возьмите другое количество карт, какое пожелаете, и повторите эксперимент: через определенное время, более или менее длительное, в зависимости от количества выбранных карт, порядок вновь восстановится. И это справедливо независимо от выбранного сочетания: при условии, что всегда повторяется точно такая же тасовка, первоначальный порядок всегда будет возвращаться.

Например, вы можете попробовать тасовку «ласточкин хвост» или американский вариант тасовки, известный у магов и фокусников, который состоит в разделении колоды на две равные части и в последовательной перетасовке карт из одной в другую часть колоды. Невероятно сложно быстро научиться идеально тасовать карты подобным образом. Но, потратив время, чтобы сделать это для колоды из восьми карт, например, вы увидите, что карты возвращаются в первоначальный порядок после трех-шести «тасовок» в зависимости от карты, которая расположена внизу колода проходит путь от начала и до конца.

Хороший трюк

Вот идея небольшого фокуса, который мы можем предложить на основе вышеизложенных наблюдений: Начните с подготовки колоды из 32 карт. Разделите карты по мастям и расположите их в порядке возрастания. «Перемешайте», бубновые один раз «сверху вниз», черви и пики дважды, и три раза трефы (порядок мастей – в алфавитном порядке, для лучшего запоминания...). Затем смешайте карты разных мастей, чтобы заново собрать колоду из 32 карт, не изменяя, разумеется, порядок карт одной масти (возьмите, например, две карты из стопки пик, затем один из бубновых, четыре трефы, одну из пик, два червы... и так со всеми четырьмя стопками).
А теперь продемонстрируйте колоду своим зрителям. Вы можете показать ее ближе, она выглядит хорошо перемешанной. Попросите кого-нибудь выбрать масть по своему выбору. Уберите из колоды карты

этой масти, оставляя их в том же порядке и тем самым восстанавливая порядок в стопке карт, как вы его подготовили, прежде чем смешивать его с другими. Затем перемешайте карты следующим образом: три раза бубновые, дважды черви и пики, один раз трефы... В любом случае карты будут идти по порядку, так как восемь карт достаточно перетасовать всего четыре раза, чтобы вернуть первоначальный порядок!
Не стесняйтесь придумывать более сложные фокусы... Но в любом случае вы будете знать, что когда волшебник несколько раз мешает колоду, чтобы показать вам, что он не мухлюет, он точно обводит вас вокруг пальца!

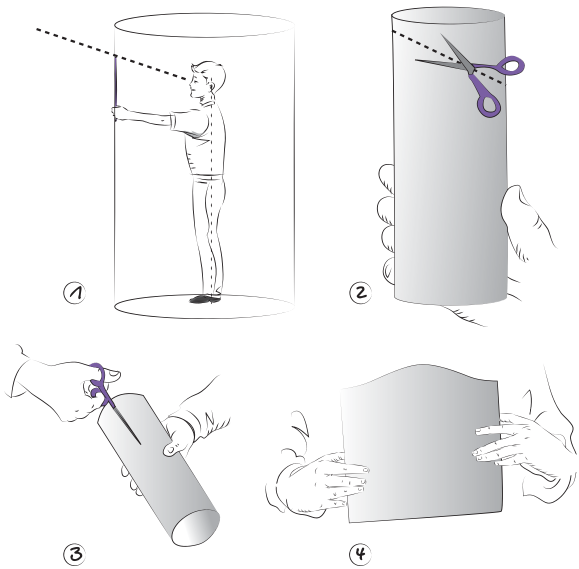
История перспективы

Пытались ли вы когда-нибудь представить себе совершенную перспективу? Это очень сложно... Речь идет о том, чтобы сделать плоским то, что является объемным (как уже мы наблюдали в главе 4).

Наиболее часто употребляемый способ – техника «вытянутой руки»: художник держит карандаш на вытянутой руке и определяет так примерную высоту дерева, головы человека, размер дома, и переносит эти измерения на полотно. Таким образом, соблюдаются очевидные пропорции: предмет, кажущийся в два раза больше, чем другой, будет и на картине в два раза больше. Но если слишком дотошно следовать данному методу, пейзаж будет искажен: плечо не двигается, но рука двигается по полусфере, поскольку проходит через точки, которые находятся на расстоянии вытянутой руки.

Карандаш перемещается также по мнимой сфере, и это невозможно сгладить, не деформируя. Впечатление будет таким же, как если смотреть через дверной глазок, или как на фотографиях, где использовался эффект «рыбий глаз», эти фото сделаны под очень широким углом.

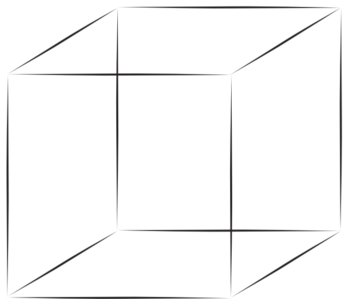
Избежать этого можно, если держать карандаш вертикально в вытянутой руке. И тогда траектория его перемещения будет напоминать часть цилиндра, который можно развернуть. Но когда художник смотрит снизу или сверху, это означает, что взглядом он как бы разрезает цилиндр наискось. Теперь вы можете поэкспериментировать, разрезав рулон бумажного полотенца под углом, а затем в продольном направлении, чтобы выровнять его: прямой срез становится волной! (взгляните на фигуру на стр. 144).



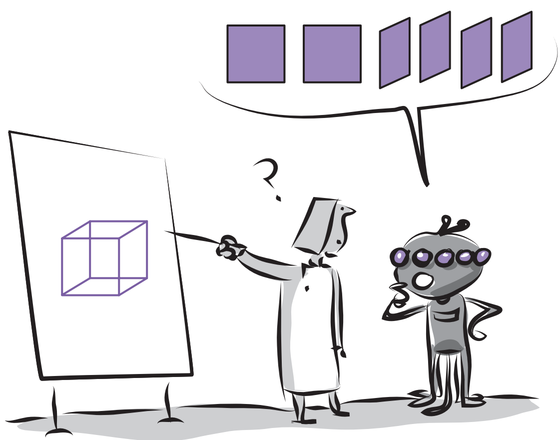
Некоторые картины Средневековья наглядно демонстрируют эти «искажения». На многих полотнах отсутствует передний план, либо задний немного размыт, чтобы решить эту проблему!

Миниатюра Жана Фуке (1420—1481), на которой очень хорошо заметно искажение перспективы, особенно если взглянуть на брусчатку...

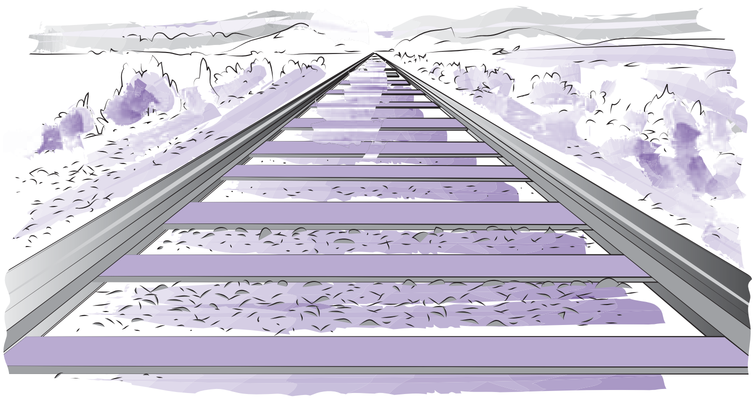
Но вы-то наверняка умеете отображать перспективу! Вам хорошо известен простой способ нарисовать куб: перспектива, которая называется «косоугольной» (аксонометрической) проекцией (проекция Кавалье, в которой направление проецирования составляет с плоскостью угол 45°).



И вы не будете сомневаться ни минуты, взглянув на этот рисунок: речь идет о кубе. Однако сходство не слишком очевидно, нужно иметь начальное представление об этом виде перспективы, чтобы разглядеть шесть перпендикулярных друг другу квадратов. Инопланетянин увидит лишь два квадрата и четыре параллелограмма, необычно расположенных!



Хуже, что для человека, который плохо знаком с косоугольной проекцией, изображение будет казаться необычным, и вот почему: довольно необычно, что задняя и передняя грани нарисованного куба одинакового размера, поскольку предмет такого же размера, расположенный дальше, должен казаться меньше. В результате ребра всех сторон параллельны, в то время как те, которые находятся дальше от нас, кажутся нам приближающимися друг к другу. В этой перспективе, все реальные параллельные линии остаются таковыми и на рисунке. Рельсы, исчезающие на горизонте, никогда не пересекутся друг с другом. Но иначе представить невозможно.



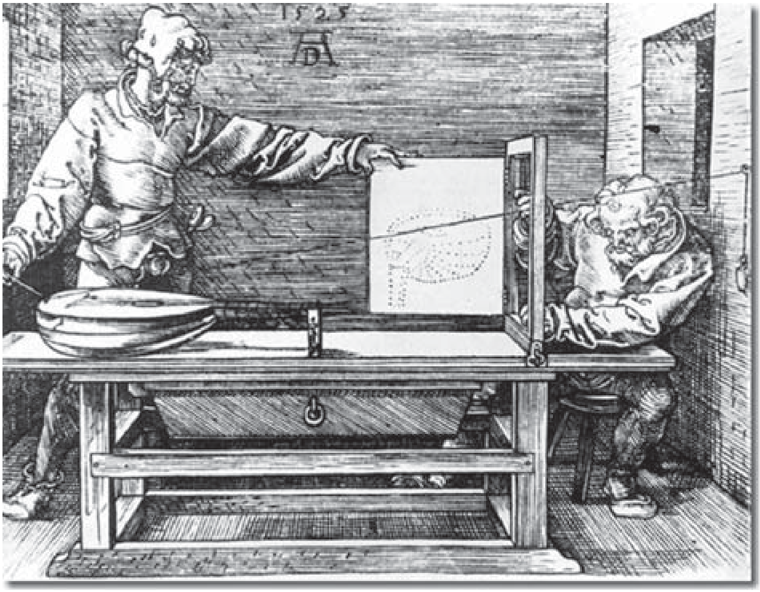
В косоугольной проекции эти рельсы остаются параллельными!

Тем не менее косоугольная проекция была и остается популярной. Достаточно взглянуть на азиатские комиксы или даже мангу, которые частично переняли эту традицию: в основном персонажи представлены без фона, чтобы не было проблем с горизонтом. С другой стороны, в кино (и во многих видеоиграх) съемка идет как будто с высоты, с высокого ракурса, или со стеной на заднем плане прямо перед наблюдателем.

Эти приемы позволяют избежать этого странного ощущения наблюдения двух линий, которые удаляются, оставаясь при этом параллельными... В некоторых старых кинолентах можно заметить эти линии, которые создают впечатление, будто они отдаляются друг от друга.

А что насчет «классической» перспективы? Она известна довольно давно, так как еще с древних времен существуют картины с довольно убедительными оптическими иллюзиями! Опытным путем художники вскоре поняли, что для того чтобы создать впечатление рельефа, необходимо представить две параллельные прямые двумя линиями, которые сходятся в общей точке картины. В Ренессансе сложились более четкие правила, которыми мы пользуемся и сегодня: линия горизонта, на которой находятся одна или несколько точек схода...

В то время не было явного разделения между профессиями, умениями. Художники были часто учеными, а ученые художниками. Многие художники постигали науку, чтобы лучше разбираться в вопросах гармонии. Немецкий гравер А. Дюрер (1471–1528), например, изобрел устройство, позволяющее точно понять, что такое перспектива, и как ее осуществлять теоретически совершенным способом: дверца Дюрера (перспектограф).

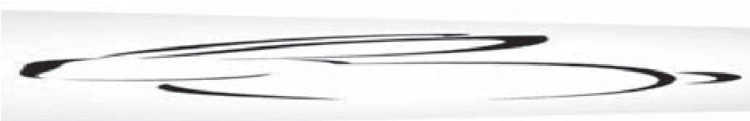


Глаз наблюдателя заменен гвоздем, вбитым в стену справа. Он неподвижен. От него тянется веревка, представляющая луч света, который падает на представленный предмет. Рисунок, вернее, уже готовый набросок (мандолина) находится на полотне, которое держит человек слева. Полотно двигается, как дверца. Техника состоит в том, чтобы открыть «дверцу», протянуть нить через рамку до нужной точки предмета (до определенной части или до границы) и продолжать держать ее натянутой, что и делает левый персонаж. Второй человек, здесь он стоит справа, в это время определяет точное место, где нить пересекается с рамкой, которая является плоскостью картины. Затем достаточно приподнять нить, не теряя положение этой точки, затем закрыть вновь «дверцу-картину», чтобы перенести ее на полотно.

Эта техника не поможет создать шедевр на практике, но зато дает представление о построении перспективы: если разместить идеальный натюрморт напротив реальных предметов, и наблюдать его с определенной точки, то невозможно отличить оригинал от картины.

Тем не менее у этой техники есть и свои ограничения: в реальности у нас два глаза, которые двигаются, мы сами двигаемся, и большую часть времени мы довольно легко отличим оптическую иллюзию от настоящего пейзажа! Художники, впрочем, довольно быстро оставили идею воспроизведения идеальной перспективы и вернулись к более привычным методам, чтобы продолжить творить.

Между тем, данная теория сильно изменила способ восприятия мира и его представления. К тому же, идея картины, которая пишется, когда наблюдатель смотрит на нее под определенным углом, была использована для создания анаморфозов, где напротив нужно смотреть наискось или в кривое зеркало, чтобы увидеть реальный объект. Посмотрите на этот необычный рисунок снизу с правого угла листа. Сюрприз!



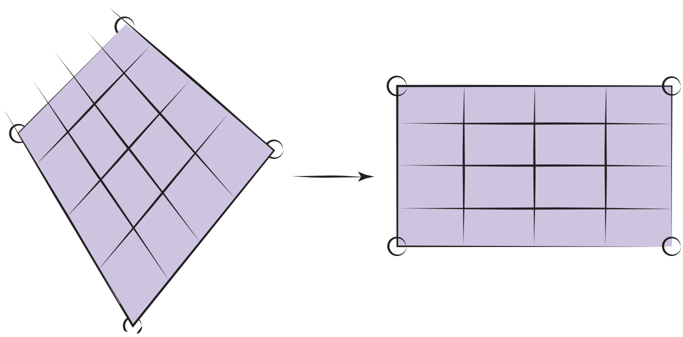
Проективная геометрия

А эта область математики имеет довольно сложную историю. Математик Папп Александрийский начал размышлять над этими вопросами с 4 века, Жерар Дезарг – фрацузский архитектор и геометр, написал в 17 веке книгу о проективной геометрии, но она была непопулярна. Затем в 19 веке интерес к проективной геометрии возобновился, до тех пор пока математики полностью не отклонились от этой концепции! Некоторые результаты остаются, тем не менее очень полезными, и проективную геометрию продолжили изучать еще долгое время.

Объектом ее изучения является целое, которое не видоизменяется при проецировании геометрических фигур.

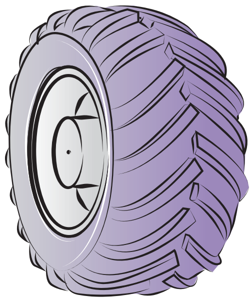
Проецировать – это, грубо говоря, переносить тень предмета на другую поверхность или воспроизводить его в перспективе.

Первое замечание: однажды спроецированные параллельные прямые необязательно будут таковыми. Понятие параллелизма не сохранилось, тогда будем считать, что две линии всегда пересекаются. Это смущает вас? Однако достаточно добавить «точки бесконечности», которые мы никогда не будем рисовать, где все так называемые параллельные прямые пересекаются в классической геометрии.



В проективной геометрии оба рисунка представляют один и тот же объект, но с разных углов зрения. Для правого рисунка справедливо считать, что прямые пересекаются в бесконечности!

Углы изменяются, когда они проецируются, не говоря уже о прямом угле или даже о каком-то конкретном угле... К счастью, не все потеряно: прямые остаются прямыми, что означает, что представление точек, лежащих на одной прямой, существует всегда, тем более что то, что не было прямым, не может стать таким. Следовательно, треугольник остается треугольником, даже если он может иметь почти любую форму. Четырехугольник также остается четырехугольником. Но квадрат может стать параллелограммом или трапецией! Понятия квадрата не существует в этом мире. Круги тоже не существуют, так как в перспективе они могут принимать форму любой «коники», эти кривые получены путем разрезания конуса или цилиндра под углом, уже встречающегося в главе 1 (стр. 25).

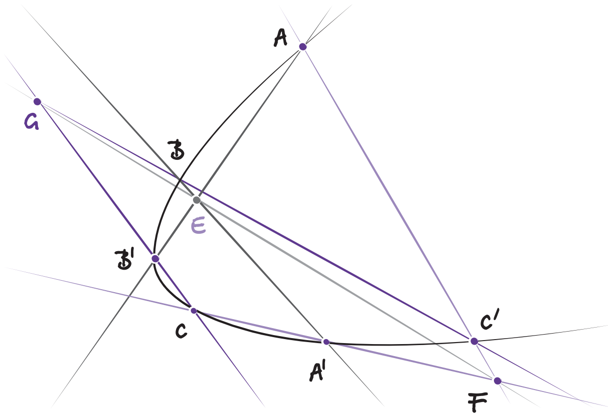


Действительно, круг в перспективе выглядит как эллипс, даже как часть параболы или гиперболы. И эллипс становится другим эллипсом, или же кругом, или одним из двух других сечений конуса. И это как раз оба последних случая: коническое сечение в перспективе остается неважно каким, но коническим сечением.

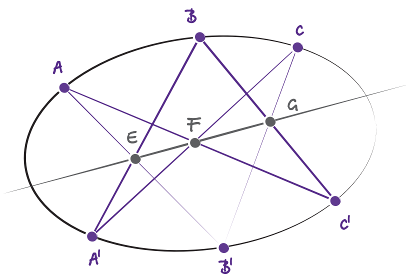
По всем этим причинам труды проективной геометрии дают довольно странные результаты! Однако это позволяет доказать очень важные теоремы, как, например, теорема Паскаля, французского философа и математика (1623–1662):

Пусть шесть точек A, B, C, A′, B′, C′ находятся на коническом сечении (парабола на фигуре 1, эллипс на фигуре 2), так что линии (AB′) и (A′B) пересекаются в E, (AC′) и (A′C) в F, (BC′) и (B′C) в G.

Тогда точки E, F и G будут лежать на одной прямой.



Фигура 1



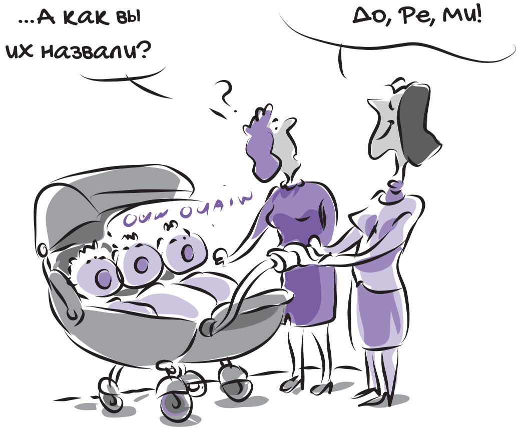
Фигура 2

Эта теорема является теоремой проективной геометрии, поскольку она остается верной, если мы представляем рисунок, который иллюстрирует это в перспективе: коническое сечение остается таковым, а точки E, F, G всегда лежат на одной прямой, так как прямая линия остается прямой.

Музыка смягчает нравы

Музыкант вы или нет, вы наверняка знаете названия всех восьми нот: до, ре, ми, фа, соль, ля, си, до. И вы также наслышаны о существовании других нот, черных клавиш на пианино, которые называются диезами и бемолями. С учетом всех этих нот, если не вдаваться в детали, полная гамма насчитывает 12 нот. Почему именно 12?

Прежде всего, вам нужно понять причину, по которой вы одинаково называете разные ноты: даже для не-музыкантов достаточно просто вспомнить, как люди с более или менее высокими голосами поют что-либо хором. У нас создается впечатление, что они поют одни и те же ноты (по крайней мере, если они не фальшивят!). И все же ясно, что маленький Лулу не поет ту же ноту, что и дядя Нестор. Эти две похожие, ноты разделены тем, что в мире музыки называют, одной или несколькими октавами. Расстояние, которое разделяет одно «до» от другого, – октава. Ноты названы одинаково. Названия этих нот не оспариваются по всему миру: музыканты всего мира согласны с этим.



Домашнее задание

Создайте ноту

Подвесьте сумку (или любой тяжелый предмет) на один конец веревки. Веревка должна быть хорошо натянута, чтобы вы могли услышать извлекаемую ноту. Измерьте длину веревки и разделите это расстояние на две части. Держите веревку посередине так, чтобы вибрировала только половина ее длины. Нота, которую вы получаете, точно такая же, как полученная с помощью целой веревки, но на октаву выше! Если вы последовательно сыграете эти две ноты (басы, затем высокие), вы должны узнать начало знаменитого мюзикла «Поющие под дождем...»

Сыгранную октаву легко узнать. Но некоторые аккорды, которые нам кажутся благозвучными, не считались таковыми в Средние Века. И наоборот, музыка тех времен не всегда воспринимается сегодня, так как наши уши привычны к иному звукоряду. Точно так же иногда нужно время, чтобы привыкнуть к непривычной музыке, экзотичной, экспериментальной или просто малознакомой.

Другим часто встречающимся музыкальным интервалом помимо октавы является квинта. Чтобы услышать ее, заставьте вибрировать 2/3 длины веревки (см. абзац на странице 154). Сыграв последовательно основную ноту веревки и квинту, вы услышите начало «Безвременников на лугу»[1] или тему из «Звездных Войн».

Квинта, базовая нота

Чтобы навести порядок в музыке, Пифагор (и снова он!), основываясь на своих расчетах, решил создать семейство гармонирующих нот. Его рабочим инструментом был монохорд: натянутая веревка как в эксперименте на странице 134. Единственный способ извлечь ноту на монохорде – заставить вибрировать отдельный участок струны, как делают музыканты, играющие на струнных инструментах.

Хоть монохорд и не является настоящим музыкальным инструментом, его, по крайней мере, легко смастерить, и он позволяет размышлять над музыкальной теорией... Если дернуть натянутую веревку, ничего не зажимая, мы получим базовую ноту. Наша цель – извлечь все ноты, находящиеся в пределах октавы от базовой ноты, то есть между общей длиной (скажем, 1 метр) и половиной этой длины (0,5 метра).

---

[1] «Безвременники на лугу» (фр. Colchiques dans les prés) – популярная французская песенка XX века. – *Прим. перев.*

Квинта зазвучала, когда завибрировало 2/3 струны, и пришлась по вкусу ушам Пифагора. Чтобы извлечь другие ноты, он извлекал квинту от квинты, так, чтобы она была созвучна со второй нотой, затем квинту от квинты квинты, и так далее.. Третью ноту он получил, заставив вибрировать 2/3 от 2/3 или 4/9 метра. Но 4/9 меньше 1/2: слишком высокая нота! К счастью, он нашел ту же ноту на октаву ниже, удвоив длину веревки: 8/9 метра. И вот третья нота! Продолжаем в том же духе: 2/3 из 8/9, то есть 16/27, затем 32/81, слишком высоко, поэтому умножьте на два, чтобы найти следующую ноту, которая будет располагаться на 64/81 метра и так далее.

Вот список полученных значений: 1, 2/3, 8/9, 16/27, 64/81, 128/243, 512/729, 2048/2187, 4096/6561, 16344/19683, 32688/59049, 130752/177147, 523008/531441, 131072/259057 (приблизительно 0,506).

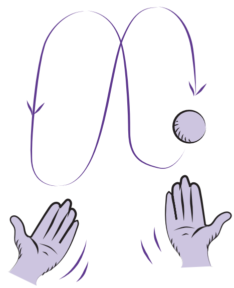
На двенадцатой итерации значение так близко к 1/2, что полученный результат вряд ли будет отличаться от начальной ноты. Поэтому разумно остановиться, поскольку ноты становятся неразличимы.

Остановиться или нет в поиске новых нот, найденных таким образом, решать вам, потому что вы никогда в точности не попадете не попадете на ноту, уже присутствующую в списке. Очевидно, что длина веревки, соответствующая новой ноте, никогда не будет равна 1 или 1/2: над линией дроби, соответствующей длине веревки, всегда будет число формы $2 \times 2 \times 2 \times 2...$, а под ним будет вид $3 \times 3 \times 3...$ Невозможно, чтобы они были равны или одно повторяло другое.

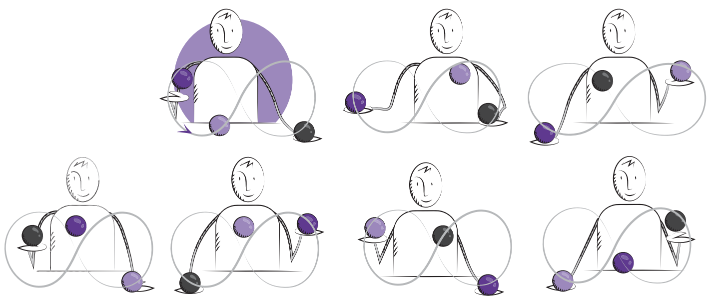
Как жонглировать и не сбиваться?

Пытались ли вы когда-нибудь жонглировать?

Первое, что удивляет в «элементарной» фигуре из трех шаров: равномерность. Каждый шар бросается одинаково из одной руки в другую, и остается в воздухе одинаковое время. Обе руки бросают шары на одну и ту же высоту. Возьмем шары трех разных цветов, фиолетового, лилового и черного, тогда порядок бросков всегда будет одинаковым: ФЛЧФЛЧФЛЧ... один из двух бросков будет сделан правой рукой и один из двух левой.



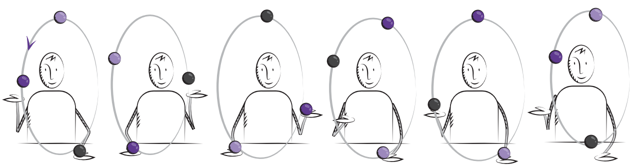
«Классическое» жонглирование: каждый из мячиков описывает «восьмерку»



Три мячика попеременно переходят из одной руки в другую. Они всегда подбрасываются одинаково и в одном и том же порядке

Жонглеры немного больше упражняются в фокусах. Иногда речь идет просто об изменении высоты броска, перекрещивании рук, жонглировании под ногами... При этом не меняется ни ритм, ни порядок, в котором бросаются мячики.

Но в иных случаях мячики не всегда запускаются на одну и ту же высоту: это касается «душа», одной из самых известных фигур в жонглировании. Чтобы повторить эту фигуру, одна рука всегда подбрасывает мячики очень высоко над другой рукой, в то время как вторая рука быстро ловит мячик, который первым прилетит в руку.



Проследите траекторию черного мячика: подброшенный высоко вверх левой рукой он падает в правую руку и быстро забрасывается через низ левой рукой. Как освоить новые трюки?

В 1980-е годы математики – поклонники жонглирования разработали систему подсчета очков под названием «siteswap» (жонглерская нотация)[1]. Представьте себе метроном, который идеально отбивает ритм. Идея состоит в том, чтобы с каждым броском мячика фиксировать количество времени, прошедшего до возвращения этого мячика в руку. Это время связано с высотой, на которую бросается мячик, так как чем выше он брошен, тем больше пройдет времени между двумя бросками одного и того же мяча.

В классическом варианте жонглирования тремя мячиками, один из них перебрасывается, только когда другие два уже были подброшены. Порядок бросков – ФЛЧФЛЧФЛЧ, где каждый мяч (каждая буква) повторяется каждые три раза. Поэтому такой тип жонглирования записан как 333.

[1] Жонглерская нотация (англ. siteswap) – нотация, используемая жонглерами для записи исполняемого трюка. Позволяет стандартизовать запись и облегчает обмен знаниями и разработку новых трюков. – *Прим. перев.*

Благодаря этой нотации возможно изобретать новые трюки и осознавать, являются ли они теоретически выполнимыми. Первое, что нужно знать: сумма всех значений, деленная на количество указанных бросков, дает количество мячей для использования. В случае, например, «441», сумма из трех значений дает 4 + 4 + 1 = 9. И есть три броска. Как и 9/3 = 3, этот трюк можно выполнить с тремя мячиками. Второе: нужно проверить возможность (факт) одновременного падения мячиков, так как вряд ли новичок сможет их поймать. Представим себе, что мы по порядку бросаем фиолетовый, лиловый и черный мячики:

1. Бросаем 4 фиолетовый	2. Бросаем 4 лиловый	3. Бросаем 1 черный
4. Бросаем 4 черный	5. Бросаем 4 фиолетовый	6. Бросаем 1 лиловый

Отметим это более кратко в таблице:

Время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Порядок броска	4	4	1	4	4	1	4	4	1	4	4	1
Брошенный мячик	Ф	Л	Ч	Ч	Ф	Л	Л	Ч	Ф	Ф	Л	Ч

Нет проблем, этот трюк можно выполнить: в конце третьего броска мы приходим к первоначальному порядку, цикл завершен и может продолжаться сколько угодно! Это вид «душа», показанного на стр. 159. Попробуем с 521. Сумма равна 8, и есть 3 броска. А 8 не делится на 3. Так что это невозможно.

И 351? 3 + 5 +1 = 9; эта цифра, возможно, может быть реализована с тремя шарами... Но на самом деле это не так:

Время	1	2	3	4
Порядок броска	3	5	1	3
Брошеный мячик	Фиолетовый	Лиловый	Черный	Фиолетовый и черный!

На четвертом броске первый и последний шары приземляются в одно и то же время!

Эта теория теперь преподается, по крайней мере, для основ, любому ученику-жонглеру и развивается, чтобы изучать достижимые фигуры, бросая несколько мячиков одновременно, чтобы найти трюки, которые могут или не могут быть связаны напрямую... Вот где математика приходит на помощь артистам!

Хотите узнать больше?

Книги

Les maths qui tuent, Kjartan Poskitt et Rob Davis, Le Pommier, Paris, 2011.

L'assassin des échecs et autres fictions mathématiques, Benoît Rittaud, le Pommier, Paris, 2010.

Le monde des pavages, André Deledicq et Raoul Raba, ACL – Éditions du Kangourou, Paris, 1997.

Combien de chaussettes font la paire ? Rob Eastaway et Olivier Courcelle, Flammarion, Paris, 2011.

Mon cabinet de curiosités mathématiques, Ian Stewart et Anthony Truchet, Flammarion, Paris, 2013.

Les maths, Robin Jamet, collection «À quoi ça sert ?», Belin, Paris, 2009.

80 petites expériences de maths magiques, Dominique Souder, Dunod, Paris, 2008.

Le chat à six pattes et autres casse-tête, Louis Thépault, collection «Oh, les sciences!», Dunod, Paris, 2008.

Espèce de trochoïde!, Luc de Brabandere, collection «Oh, les sciences!», Dunod, Paris, 2008.

Oh, les maths!, Yakov Perelman, collection «Oh, les sciences!», Dunod, Paris, 2001.

Oh! encore des nombres!, Clifford A. Pickover, collection «Oh, les sciences!», Dunod, Paris, 2001.

Les nombres remarquables, François le Lionnais, Éditions Hermann, Paris, 1997.

Журналы

Cosinus, revue scientifique pour la jeunesse, Éditions Faton (mensuel)

Tangente, revue de mathématiques accessible à tous, Éditions Pôle (bimestriel)

Сайты

Des jeux, des explications avec animations, des tours de magie et des exemples de pavages: http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/indexF.htm

La recherche mathématique en mots et en images: http://images.math.cnrs.fr/

Des films qui aident à comprendre les maths: http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

http://www.chaos-math.org/fr

Un logiciel permettant de réaliser des anamorphoses: http://www.anamorphosis.com/software.html.

Des articles sur des sujets mathématiques variés: http://eljjdx.canalblog.com/

Le site proposant une représentation des nombres suivant leurs facteurs premiers (p. 74): http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

Алфавитный указатель

А

Азартные игры 35
Аксиома 102
Алгоритм 48
Альгамбра 17
Арабские цифры 86

Б

Бэббидж Чарльз 56
Брахистохрона 133

В

Вероятности 38
Вилка (статистическая) 58
Воздушный шар 27
Выигрышная стратегия 41

Г

Гильберт Давид 76
Гиппас из Метапонта 95
Гипербола 25
Гиперболоид вращения 108
Гипотеза простых чисел-близнецов 76
Гипотеза Пуанкаре 30
Гипотеза Римана 75
Граф 109

Д

Дверца Дюрера (перспектограф) 147
Дилемма заключенного 122

Е

Евклидовы «Начала» 102

Ж

Жонглирование 157

З

Задача с тремя домами 114

И

Игры со спичками 45
Измерения 22
Изохронна 135
Институт Гэллапа 60
Иррациональные числа 93

К

Камешки (фигурные числа) 62
Картография 104
Катеноида 32
Квадратные числа 65
Кенины 140
Кено Ремон 136
Клотоида 129
Книга Абака 79
Компьютер 48
Косоугольный(ая) 145
Корень из двух 92
Кривая Коха 22
Кривые 126
Кролики (Фибоначчи) 77

Л

Лавлейс Ада 56
Логические операции 51
Линейка и циркуль 96
Регулярные поверхности 107

М

Мандельбро Бенуа 24
Мешок с шариками 57
Минимальные поверхности 32
Мыльные пленки 31

Н

Неизмеримый 95

О

Октава 153
Опрос, анкета 57
Оптимизация 126
Оптическая иллюзия 147
Оригами 96
Отверстие, дырка 27

П

Парабола 25
Парадокс Браеса 120
Конечный элемент (плитка, замощение) 9
Паскаль Блез 37
Перельман Григорий 30
Перестановка 138
Перспектива 142
Пифагор 93
Пифагор (музыка) 155
Планарный 111
Последовательность Фибоначчи 82
Правильный пятиугольник 101
Проективная геометрия 149
Простые числа 68
Пузырь 31

Р

Равновесие Нэша 122
Развертывающиеся поверхности 104
Раскраска карт 28
Решето Эратосфена 69

Решетчатое умножение 79
«Рыбий глаз» 143

С

Сгибание 96
Секстина 136
Симметрия 9
Соотношения Эйлера 114
Сосновая шишка 82
Составные числа 66
Статистическая кривая 57

Т

Таутохронная кривая 134
Теорема Паскаля 151
Теория игр 122
Теория массового обслуживания 125
Топология 28
Тор (тороид) 28
Торп Эдвард 36
Точки бесконечности 150
Трактриса 128
Треугольные числа 63
Трисекция угла 99

У

Умножение «в столбик» 50

Ф

Федоров Евграф 17
Фибоначчи Леонардо 78
Фигурные числа 62
Фрактал 19

Ц

Центр симметрии 14
Цепь, цепная линия 128
Циклоида 127, 131

Ч

Числа Кено 140

Ш

Шевалье де Мере 37

Э

Эллипс 25
Эрдеш Пал 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТЕХНОСФЕРА» ПРЕДСТАВЛЯЕТ КНИГУ:

Фадель К.

Вы сказали «физика»?
И на кухне, и в салоне – всюду физика в нашем доме

М.: : ТЕХНОСФЕРА, 2019. – 158 с.,
ISBN 978-5-94836-549-7

Цена 475 руб.

Книга представляет собой настоящее введение в материю, показывая читателю фундаментальные физические понятия в виде экскурсии по различным состояниям материи и волновым процессам. Во время этой экскурсии можно открыть любую главу на выбор и прочитать. Рассматриваемые темы в значительной степени избавлены от математического формализма, который необходим для изучения науки в школе, однако многих отталкивает. Как правило, для понимания достаточно здравого смысла и элементарных арифметических операций. К тому же простые и привлекательные иллюстрации, игра слов, веселые истории, пояснения в виде вставок делают чтение еще приятней.

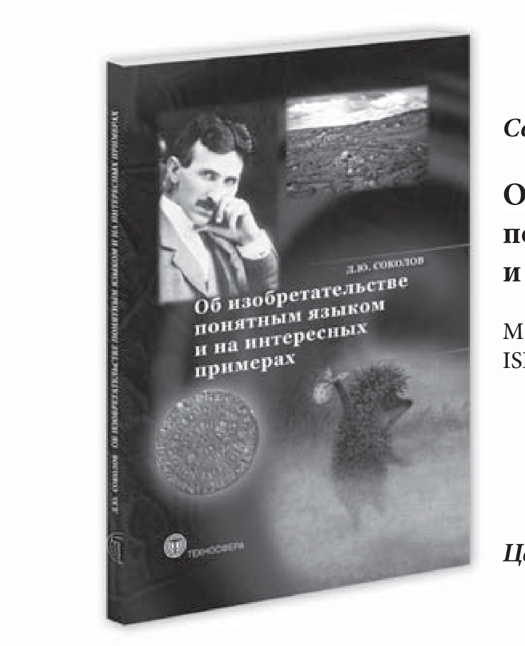
Для читателей всех возрастов – увлекательное путешествие в мир физики от Камиля Фаделя, руководителя отдела физики Дворца открытий (Париж, Франция).

ИНФОРМАЦИЯ О НОВИНКАХ
www.technosphera.ru

Как заказать наши книги?

По почте: 125319, Москва, а/я 91
По факсу: +7 (495) 956-33-46
E-mail: knigi@technosphera.ru
sales@technosphera.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТЕХНОСФЕРА» ПРЕДСТАВЛЯЕТ КНИГУ:



Соколов Д.Ю.

Об изобретательстве понятным языком и на интересных примерах

М.: ТЕХНОСФЕРА, 2011. – 152 с.
ISBN 978-5-94836-283-0

Цена 370 руб.

Каждому человеку в течение дня приходится решать различные изобретательские задачи. Эта книга поможет всем. Она рассказывает о великих изобретателях, о том, как они создавали свои большие и малые изобретения. Для состоявшихся изобретателей приведены примеры составления заявок на различные типы изобретений и эффективной патентной защиты широкого круга результатов интеллектуальной деятельности.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВИНКАХ
www.technosphera.ru

Как заказать наши книги?

По почте: 125319, Москва, а/я 91
По факсу: +7 (495) 956-33-46
E-mail: knigi@technosphera.ru
sales@technosphera.ru

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ТЕХНОСФЕРА» МОЖНО ПРИОБРЕСТИ:

В магазинах:

г. Москва
Торговый дом «Библио-Глобус»,
ст. м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6
тел. 8(495) 781-19-00, 624-46-80

«Московский дом книги»,
ст. м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8
тел. 8(495) 789-35-91

«Дом книги на Спартаковской»,
ст. м. Бауманская, ул. Спартаковская, 23
тел. 8(499) 400-41-06

«Молодая гвардия», ст.м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28
тел. 8(499) 238-50-01

«Дом технической книги»,
ст. м. Ленинский проспект, Ленинский проспект, 40
тел. 8(499) 137-60-38

«Дом медицинской книги»,
Комсомольский проспект, 25
тел. 8(495) 789-35-91,
(495)789-31-14

МГУ, химический факультет (корп. 3)
киоск ПБОЮЛ Макарова О.В.
ГСП-1, Ленинские горы

Производство книг на заказ
Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
125319, Москва, а/я 91
тел.: (495) 234-01-10
e-mail: knigi@technosphera.ru

Реклама в книгах:
• модульная
• статьи

Подробная информация о книгах на сайте
http://www.technosphera.ru

Робин Жаме

Вы сказали «математика»?
Из дома в город – всюду математика

Компьютерная верстка – В.В. Павлова
Корректор – Л.В. Бородина
Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев, А.В. Кочеткова
Дизайн – Н.И. Семячкина
Выпускающий редактор – О.Н. Кулешова
Ответственный за выпуск – С.А. Орлов

Подписано в печать 03.06.19.
Формат 84×108/32. Печать офсетная.
Гарнитура Ньютон
Печ.л. 5,5. Тираж 1000 экз. Зак. №
Бумага офсет №1, плотность 80 г/м^2

Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия»
428019, Чувашская Республика
г. Чебоксары, проспект Ивана Яковлева, дом 13