

**МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
ИМ. СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ**

**С. П. КОЛОСОВ, Ю. А. СИДОРОВ**

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

**Конспект лекций**

**по курсу**

**«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»**

**МОСКВА — 1974**

МИНИСТЕРСТВО  
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР  
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

---

С. П. КОЛОСОВ, Ю. А. СИДОРОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Конспект лекций

по курсу

«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

*Утверждено*  
на заседании редсовета  
как учебное пособие  
13 октября 1973 г.

МОСКВА — 1974

621.3(075)

К 614

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Конспект лекций «Нелинейные электрические цепи» представляет собой раздел курса «Теоретические основы электротехники» и предназначен для студентов электромеханических и электротехнических специальностей.

Необходимо отметить, что по линейным электрическим цепям в настоящее время получены существенные обобщения научного и методического характера, чего нельзя сказать о нелинейных цепях, где разработок гораздо меньше.

В нелинейном разделе теоретической электротехники значительная часть материала до сих пор излагается на примере конкретных электротехнических устройств. Число разновидностей подобных устройств непрерывно растет, однако в приемах расчета их остается много общего. В связи с этим целесообразно попытаться систематизировать их, определив такие группы нелинейных схем и их режимы, которые наиболее часто повторяются в различных технических применениях или имеют ближайшую перспективу развития. Если выяснить специфические особенности каждой группы и обобщить методику их анализа, то соответствующие методы расчета можно ввести в теорию нелинейных цепей в общем виде безотносительно к конкретным устройствам. В настоящем конспекте авторы в какой-то мере выполнили эту задачу.

В конспекте рассмотрены, развиты и обобщены распространенные методы расчета, позволяющие получить решения тех или иных конкретных технических задач, для которых приемлемы лежащие в основе этих методов допущения. Однако для сложных разветвленных цепей указанные методы часто не дают возможности непосредственно получить удобные и ообразимые решения графо-аналитическими или аналитическими методами. В этом случае целесообразно сочетать вышеуказанные методы с использованием аналоговой и цифровой вычислительной техники.

Следует указать на нецелесообразность непродуманного применения для расчетов на ЦВМ излишне точных приемов общего характера, сводящихся к составлению и решению численными методами весьма сложных систем уравнений, учитывающих несущественные или мало существенные для данного конкретного случая особенности нелинейных характеристик, несущественные гармо-



нические составляющие и т. д. Излишняя детализация усложняет все стадии вычислений, увеличивает вероятность ошибок и часто затрудняет трактовку результатов. Это не исключает, разумеется, целесообразности перехода к более точным способам после того, как полученное первое приближение полностью осмыслено с физической стороны и, кроме того, выясняется действительная необходимость уточнений в том или ином конкретном направлении.

Авторы надеются, что предварительное изучение общих основ теории нелинейных электрических цепей в плане написанного конспекта существенно облегчит усвоение материала таких дисциплин, как «Элементы автоматики», «Электроника», «Электрические машины», «Электрооборудование» и «Теория автоматического управления».

Авторы выражают признательность доц. А. Б. Тимофееву, канд. техн. наук В. Л. Фельдману, доц. В. П. Булекову, ст. преподавателю В. В. Митюшиной, ст. преподавателю В. В. Савостьянову, Т. А. Лебединской и Т. М. Фокиной за помощь, оказанную ими при подготовке рукописи в печать.

Авторы с благодарностью примут замечания любого характера по содержанию конспекта.

---

**ОБОЗНАЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН,  
ПРИМЕНЯЕМЫХ В КОНСПЕКТЕ ЛЕКЦИИ**

Наименование величин (по алфавиту терминов)	Буквен- ные обозна- чения	Единицы измерения	Сокращен- ные обоз- начения единиц измерения
Емкость электрическая	$C$	фарада	Ф
Заряд электрический	$q$	кулон	Кл
Индуктивность	$L$	генри	Г
Индукция магнитная	$B$	тесла	Т
Индукция остаточная магнитная	$B_r$	тесла	Т
Напряжение электрическое	$U$	вольт	В
Напряженность магнитного поля	$H$	ампер на метр	А/м
Напряженность электрического поля	$E$	вольт на метр	В/м
Плотность электрического тока	$\vec{j}$	ампер на квад- ратный метр	А/м <sup>2</sup>
Постоянная магнитная	$\mu_0$	генри на метр	Г/м
Поток магнитный	$\Phi$	вебер	Вб
Потокосцепление	$\Psi$	вебер	Вб
Проводимость магнитная	$g_m$	генри	Г
Проводимость электрическая	$g$	сименс	См
Проводимость электрической цепи комплексная	$Y$	сименс	См
Проводимость электрической цепи полная	$y$	сименс	См
Проводимость электрической цепи реактивная	$b$	сименс	См
Проницаемость магнитная	$\mu$	—	—
Разность фаз напряжения и тока	$\varphi$	радиан	рад
Сила коэрцитивная	$H_c$	ампер на метр	А/м
Сила намагничивающая; сила магнитодвижущая	$F$	ампер	А

Наименование величин (по алфавиту терминов)	Буквен- ные обозна- чения	Единицы измерения	Сокращен- ные обоз- начения единиц измерения
Сила электродвижущая	$E$	вольт	В
Смещение электрическое	$D$	кулон на квад- ратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Сопротивление магнитное	$r_m$	единица на генри	1/Г
Сопротивление электрическое; сопротивление электрической цепи активное	$r$	ом	Ом
Сопротивление электрической цепи комплексное	$Z$	ом	Ом
Сопротивление электрической цепи полное	$z$	ом	Ом
Сопротивление электрической цепи реактивное	$x$	ом	Ом
Ток электрический; сила тока	$I$	ампер	А
Частота угловая	$\omega$	радиан в секунду	рад/с
Частота электрического тока	$f$	герц	Гц
Число витков обмотки	$w$	—	—

**ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ПРИМЕНЯЕМЫХ  
В КОНСПЕКТЕ ЛЕКЦИЙ**

Наименование величин	Буквен- ные обоз- начения	Единицы измерения	Сокращен- ные обоз- начения единиц измерения
Время	$t$	секунда	с
Длина	$l$	метр	м
Площадь	$S$	квадратный метр	м <sup>2</sup>

## ВВЕДЕНИЕ

Электрические цепи, параметры элементов которых (сопротивление, индуктивность, емкость) зависят от тока или напряжения, называются нелинейными.

Всякая реальная цепь нелинейна. Как только частота, токи и напряжения в цепи, которая в границах определенных режимов принята линейной, достигнут достаточно больших величин, начинают сказываться нелинейные эффекты: ферромагнитные сердечники насыщаются; нарушается пропорциональность между поляризацией и полем в диэлектриках; изменяется температура, а значит, и сопротивление проводников; изменяются геометрические размеры конденсаторов и пр.

В простейших случаях вместо линейных элементов цепи можно говорить о нелинейном сопротивлении  $r(i)$  или  $r(u)$ , нелинейной индуктивности  $L(i_L)$  или  $L(\Psi)$  и нелинейной емкости  $C(u_C)$  или  $C(q)$ . Напряжение на ветви, содержащей последовательно включенные нелинейные элементы  $r$ ,  $L$ ,  $C$ , можно записать в виде нелинейного уравнения

$$u = r(i)i + \frac{d[iL(i)]}{dt} + \frac{1}{C(u_C)} \int idt$$

вместо известного для линейной цепи уравнения

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Напомним, что нелинейным называется уравнение, в которое переменные и их производные входят не в первой степени или коэффициенты зависят от этих переменных и их производных. Общих методов решения нелинейных уравнений нет. Лишь для небольшого числа случаев могут быть найдены точные решения, выраженные известными функциями. Это и является причиной трудности анализа нелинейных электрических цепей.

Наиболее существенно при этом, что к нелинейным уравнениям, а значит, и к нелинейным цепям неприменим принцип наложения.



Именно неприменимость принципа наложения может служить определением нелинейной цепи, которую, если возможно и если это не приводит к недопустимым качественным изменениям или большим количественным погрешностям, следует пытаться описывать линейными зависимостями, т. е. сводить нелинейные цепи к линейным. Возможность пренебрежения нелинейностью зависит от свойств (характеристик) и режима работы элементов, входящих в цепь, а также от конкретных особенностей и технического назначения цепи.

Если линеаризация невозможна, то для упрощения анализа нелинейных цепей очень часто прибегают к рациональному изменению информации (исходных данных) о входящих в них нелинейностях. При этом нужно, разумеется, сохранить все характерные черты изучаемого нелинейного процесса, а ради упрощения исследования должны быть исключены только несущественные для изучаемого явления факторы. Ограничившись приближенным представлением характеристик нелинейной цепи, иногда удается даже получить точное решение упрощенных нелинейных уравнений.

Конечно, не всегда можно сразу правильно решить вопрос о том, какими факторами допустимо пренебречь при анализе данной нелинейной цепи. Поэтому, как правило, осуществляют экспериментальную проверку результатов упрощенного подхода, а затем уже уточняют выбранный упрощенный способ анализа и определяют пределы его применимости.

Нелинейности могут оказаться вредными. Это нелинейные искажения сигналов при передаче и преобразовании информации, искажение формы кривых тока и напряжения в энергетических установках и т. д. С другой стороны, только при помощи нелинейных элементов могут быть созданы важнейшие электротехнические устройства: усилители, стабилизаторы, преобразователи частоты, выпрямители и др. Развитие автоматики, телемеханики, радиотехники, вычислительной техники и др. вообще было бы невозможно без применения нелинейных цепей и разработки все новых нелинейных элементов.

В курсе теоретических основ электротехники рассматриваются начала теории нелинейных цепей.

В настоящем конспекте изложение в основном базируется на изучении и применении для расчета вольт-амперных характеристик нелинейных двухполюсников и семейств входных и выходных вольт-амперных характеристик нелинейных четырехполюсников. Из большого числа возможных видов нелинейностей и режимов работы главное внимание уделено тем нелинейностям и режимам, которые наиболее часто встречаются в современных устройствах автоматики. Изложение ведется в порядке возрастающей трудности материала: сначала рассматриваются установившиеся режимы в цепях постоянного тока (отдельно с двухполюсниками и четырехполюсниками).

ками); затем — в цепях переменного тока (с таким же подразделением) и в заключение даются краткие сведения о расчете переходных процессов в нелинейных цепях.

## Глава I. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

### § 1.1. ИСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХПОЛЮСНИКОВ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Напомним, что двухполусником называется часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к двум зажимам (рис. 1.1).

Общепринятой характеристикой нелинейного двухполусника является вольт-амперная характеристика, под которой понимается зависимость тока, протекающего через двухполусник, от подводимого к нему напряжения,  $I = f(U)$ , определенная для установившегося режима. Для линейного двухполусника эта характеристика — прямая линия.

Прежде чем рассмотреть особенности вольт-амперных характеристик, покажем, что в общем случае каждая точка характеристики определяется статическим и дифференциальным сопротивлениями.

Под статическим сопротивлением двухполусника понимается отношение постоянного напряжения на двухполуснике к току в нем:

$$r_{ст} = \frac{U}{I}. \quad (1.1)$$

Дифференциальным сопротивлением называется величина

$$r_{д} = \frac{dU}{dI}, \quad (1.2)$$

характеризующая двухполусник при малых отклонениях от рассматриваемой точки нелинейной характеристики.

В общем случае статическое и дифференциальное сопротивления не равны друг другу. Эти понятия совпадают только для линейных двухполусников ( $r_{ст} = r_{д} = r$ ).

Как видно из рис. 1.2,  $\alpha$ ,  $\beta$ , статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\alpha$ , образованного секущей, проведенной

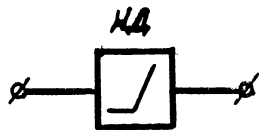


Рис. 1.1. Условное обозначение нелинейного двухполусника

из начала координат в рассматриваемую точку характеристики, с осью  $I$ ;

$$r_{\text{ст}} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.3)$$

где  $m_U$  — масштаб напряжения;  
 $m_I$  — масштаб тока.

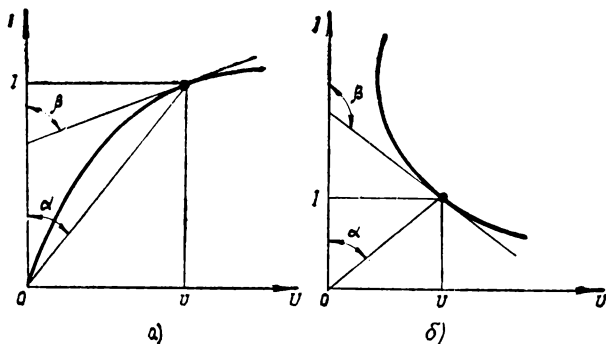


Рис. 1.2. Определение статического и дифференциального сопротивлений по характеристике:  
 а — для «восходящей» части характеристики; б — для «падающей» части характеристики

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\beta$ , образованного касательной в рассматриваемой точке характеристики с осью  $I$ :

$$r_d = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta. \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем считать, что статическое и дифференциальное сопротивления равны тангенсам соответствующих углов, и помнить о необходимости учитывать масштаб.

Можно также ввести понятия статической проводимости

$$g_{\text{ст}} = \frac{1}{r_{\text{ст}}} \quad (1.5)$$

и дифференциальной проводимости

$$g_d = \frac{1}{r_d}. \quad (1.6)$$

Если рассмотреть вольт-амперные характеристики двухполюсников и обобщить их по некоторым признакам, то все многообразие этих характеристик можно свести к пяти основным типам, которые (в первом квадранте) показаны на рис. 1.3: с насыщением по току,

с насыщением по напряжению, с неоднозначностью по току, с неоднозначностью по напряжению и гистерезисного типа.

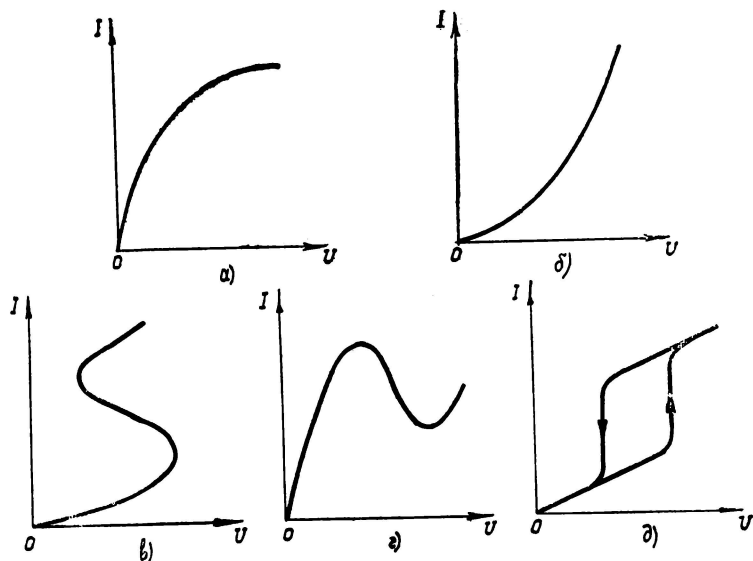


Рис. 1.3. Основные вольт-амперные характеристики двухполюсников: *а* — с насыщением по току; *б* — с насыщением по напряжению; *в* — с неоднозначностью по току; *г* — с неоднозначностью по напряжению; *д* — гистерезисного типа

Для некоторых задач практического применения характеристики двухполюсников могут быть смещены относительно начала координат, т. е. иметь зону нечувствительности. Зона нечувствительности может быть как по напряжению (рис. 1.4, *а*), так и по току (рис. 1.4, *б*).

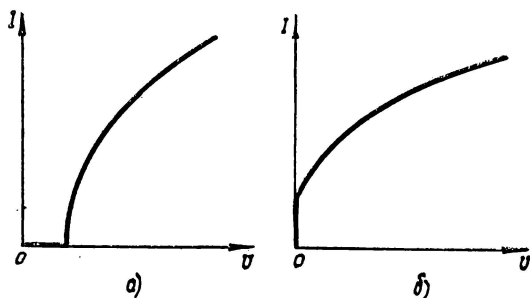


Рис. 1.4. Примеры вольт-амперных характеристик с зоной нечувствительности: *а* — по напряжению; *б* — по току



Вольт-амперные характеристики могут быть также симметричными относительно начала координат и несимметричными.

В случае симметричных характеристик имеет место равенство  $I(U) = -I(-U)$ . На рис. 1.5 показаны некоторые симметричные характеристики: основная, с зоной нечувствительности по напряжению и с зоной нечувствительности по току.

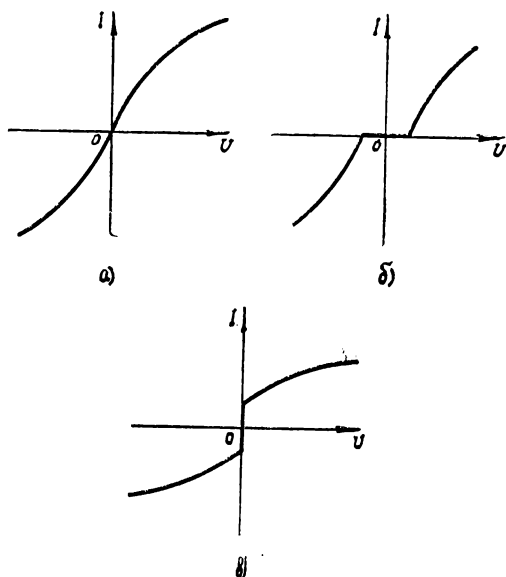


Рис. 1.5. Примеры симметричных вольт-амперных характеристик:  
 $a$  — без зоны нечувствительности;  $b$  — с зоной нечувствительности по напряжению;  
 $в$  — с зоной нечувствительности по току

Несимметричные характеристики  $I(U) \neq -I(-U)$  могут быть двух видов: мнимо несимметричные и явно несимметричные.

Мнимо несимметричные характеристики симметричны относительно некоторой точки на оси ординат (рис. 1.6,  $a, б, д, е$ ) или на оси абсцисс (рис. 1.6,  $в, г, ж, з$ ). Как правило, такие характеристики соответствуют активным двухполюсникам. Мнимо несимметричные характеристики могут быть приведены к началу координат, если вместо исходного активного двухполюсника рассмотреть пассивный, имеющий симметричную характеристику и включенный параллельно с источником тока (рис. 1.6,  $a, б, д, е$ ) или последовательно с источником напряжения (рис. 1.6,  $в, г, ж, з$ ).

К явно несимметричным характеристикам относятся такие, которые в первом и третьем квадрантах представлены сочетанием основных вольт-амперных характеристик разного типа (рис. 1.7,  $a$ ),

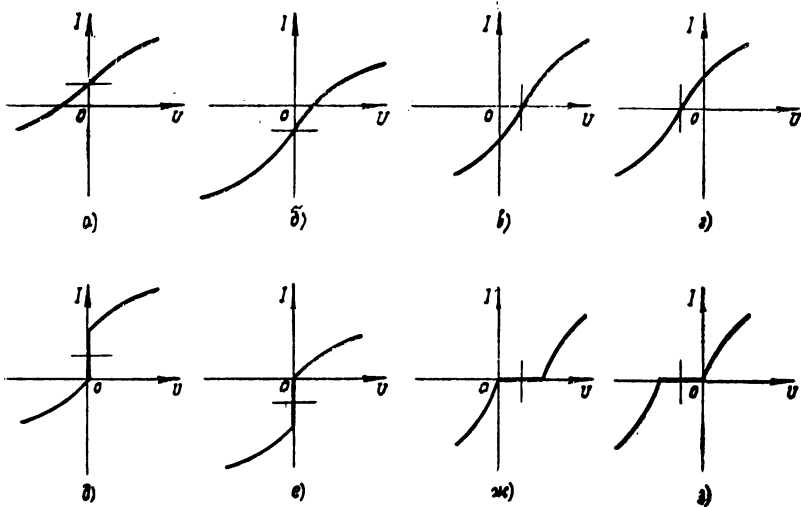


Рис. 1.6. Примеры минно несимметричных вольт-амперных характеристик:  
 а, б, д, е — сдвинутых по оси ординат; в, г, ж, з — сдвинутых по оси абсцисс

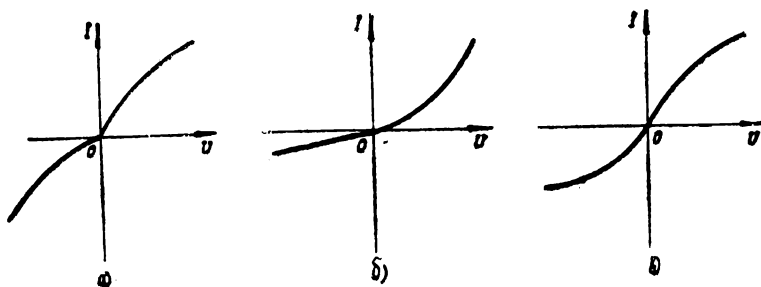


Рис. 1.7. Примеры явно несимметричных характеристик:  
 а — с насыщением по току и напряжению; б — с насыщением по напряжению и линейной частью; в — с насыщением по току

сочетанием нелинейной характеристики и линейной (рис. 1.7, б) или сочетанием основных вольт-амперных характеристик одного типа, но имеющих при одних и тех же значениях  $|U|$  различные значения  $|I|$  (рис. 1.7, в).

Кроме вольт-амперных характеристик для расчета нелинейных цепей могут применяться и зависимости статических и дифференциальных сопротивлений и проводимостей от тока и напряжения:  $r_{ст}(I)$ ,  $r_{ст}(U)$ ,  $g_{ст}(I)$ ,  $g_{ст}(U)$  (рис. 1.8),  $r_d(I)$ ,  $r_d(U)$ ,  $g_d(I)$ ,  $g_d(U)$ .

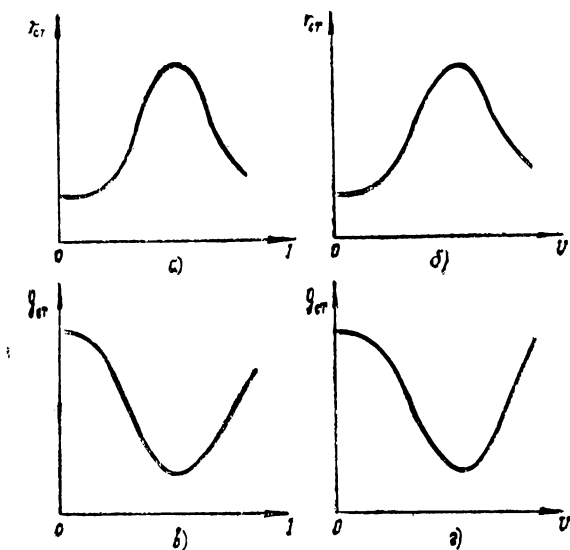


Рис. 1.8. Примеры зависимостей статических сопротивлений и проводимостей от тока и напряжения:

а —  $r_{ст}(I)$ ; б —  $r_{ст}(U)$ ; в —  $g_{ст}(I)$ ;  
г —  $g_{ст}(U)$

Все девять видов характеристик могут быть получены одна из другой и поэтому содержат одинаковое количество информации. Однако только вольт-амперная характеристика дает прямую связь между расчетными координатами — напряжением и током.

Целесообразность использования той или другой формы характеристики зависит от конкретной задачи, но можно полагать, что в большинстве случаев наиболее простым и наглядным оказывается применение вольт-амперных характеристик.

## § 1.2. УПРОЩЕНИЕ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХПОЛЮСНИКОВ. МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ. ИДЕАЛИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Прежде чем приступить к расчету цепей с нелинейными двухполюсниками, попытаемся упростить или линеаризовать исходные

характеристики, так как приближенное представление характеристик облегчает расчеты. При этом необходимо сохранить все качественные особенности изучаемого нелинейного процесса, поэтому одна и та же характеристика в зависимости от режима работы цепи может после упрощения или линеаризации иметь различный вид.

Так, например, упрощая симметричную вольт-амперную характеристику (рис. 1.5, б), можно иногда рассматривать ее без учета зоны нечувствительности или в одном квадранте, или в обоих сразу; мнимо несимметричные характеристики (рис. 1.6) могут быть приведены к началу координат, т. е. превращены в симметричные, и т. п.

Вольт-амперные характеристики могут быть двух видов: линеаризуемые, т. е. такие, которые в определенном режиме и для определенного диапазона воздействий могут быть сведены к линейной характеристике, и существенно нелинейные, когда линеаризация приводит к потере каких-либо свойств нелинейного двухполюсника.

Наиболее частым случаем является линеаризация относительно начала координат с помощью касательной или секущей (рис. 1.9).

Линеаризация при небольших отклонениях сигнала от рабочего режима возможна и для любой точки характеристики, если нелинейный двухполюсник заменить источником постоянного напряжения и сопротивлением, равным дифференциальному сопротивлению нелинейного двухполюсника на прямолинейном участке (метод компенсации). При этом исходный пассивный нелинейный двухполюсник сводится к линейному активному двухполюснику, внутреннее сопротивление которого равно дифференциальному сопротивлению исходного двухполюсника в рабочей точке.

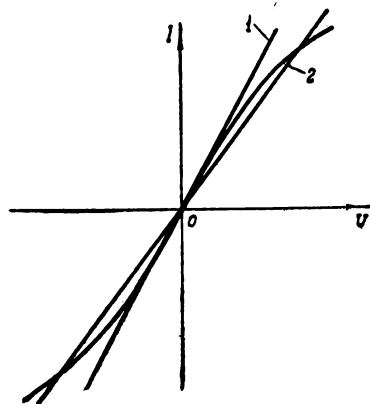


Рис. 1.9. Линеаризация с помощью касательной 1 и секущей 2

На рис. 1.10 показана такая замена для двух характеристик нелинейного двухполюсника: с насыщением по току и напряжению. Из рисунка видно, что если провести касательные к вольт-амперным характеристикам в рабочих точках, определяемых значениями токов и напряжений  $I_1$ ,  $U_1$  (рис. 1.10, б) и  $I_2$ ,  $U_2$  (рис. 1.10, в), то требуемые напряжения будут равны  $U_1 = -U_i + r_i I_1$  для первой и  $U_2 = U_i + r_i I_2$  для второй характеристики, где  $r_i = \tan \beta_1$  и  $r_i = \tan \beta_2$ , а  $U_i$  и  $U_i$  — отрезки на оси абсцисс. Эти уравнения могут быть реализованы в виде линейного источника напряжения  $U_i$  с линейным внутренним сопротивлением  $r_i$ , причем направление э. д. с. источника совпадает с направлением тока для



первой характеристики (рис. 1.10, в) и не совпадает для второй (рис. 1.10, е), что отвечает второму закону Кирхгофа для этих цепей. При этом следует иметь в виду, что значения  $U_{i_1}$ ,  $r_{i_1}$  и  $U_{i_2}$ ,  $r_{i_2}$  изменяются при изменении режима работы и справедливы только в ограниченной области вблизи рабочей точки.

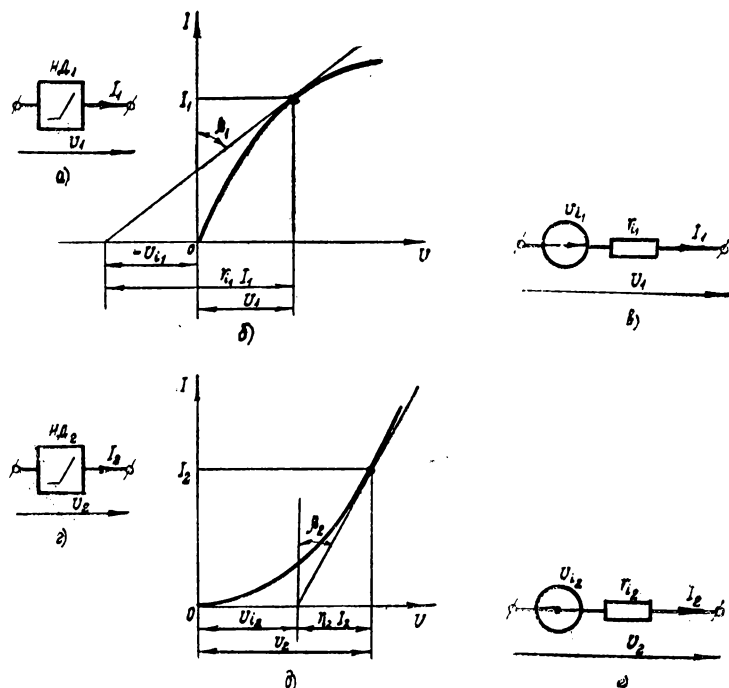


Рис. 1.10. Метод компенсации:  
 а — исходный нелинейный двухполюсник; б — графическое построение для вольт-амперной характеристики с насыщением по току; в — эквивалентная линейная цепь; г — исходный нелинейный двухполюсник; д — графическое построение для вольт-амперной характеристики с насыщением по напряжению; е — эквивалентная линейная цепь

Иногда участки вольт-амперных характеристик могут быть заменены несколькими прямыми линиями (рис. 1.11). Такие характеристики называются кусочно-линейными.

Если в линейном виде можно представить ограниченный круг характеристик, то в кусочно-линейном — любую нелинейную характеристику.

Вид линеаризованной характеристики, которая должна быть взята для расчета данного нелинейного двухполюсника, во многом зависит от режима его работы в конкретной схеме, т.е. от пределов изменения воздействующего на него напряжения. Так, например,

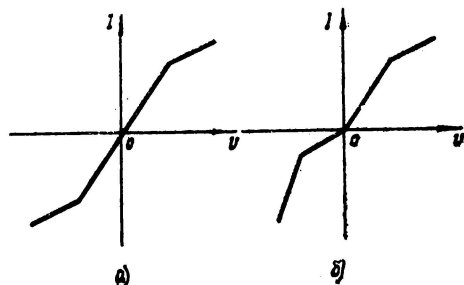


Рис. 1.11. Представление вольт-амперных характеристик в кусочно-линейном виде: а — характеристики рис. 1.5, а; б — характеристики рис. 1.7, а

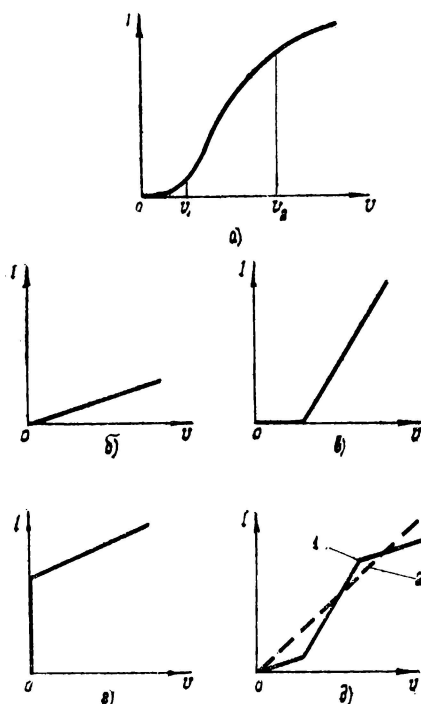


Рис. 1.12. Интерпретация вольт-амперной характеристики (а): б — для участка  $U = 0 - U_1$ ; в — для участка  $U = U_1 - U_2$ ; г — для участка  $U > U_2$ ; д — кусочная линейризация 1 и линейризация 2

характеристику рис. 1.12, *а*, представляющую собой частный случай основной характеристики (рис. 1.3, *а*), можно рассматривать в виде отдельных прямых линий при изменении напряжения:

- 1)  $U = 0 - U_1$  (рис. 1.12, *б*);
- 2)  $U = U_1 - U_2$  (рис. 1.12, *в*);
- 3)  $U > U_2$  (рис. 1.12, *г*).

В зависимости от диапазона воздействий одна и та же характеристика может быть принята или кусочно-линейной, или целиком линейной. Так, если диапазон изменения напряжения достаточно велик, то рассматриваемая характеристика может быть сведена к прямой 2 (рис. 1.12, *д*). Однако точность расчета при работе с характеристикой 1 значительно выше, чем с характеристикой 2.

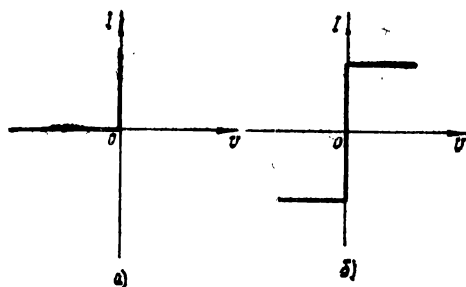


Рис. 1.13. Идеализация вольт-амперных характеристик:

*а* — характеристики рис. 1.7, *б*; *б* — характеристики рис. 1.5, *а*

Во многих случаях вводят дополнительные допущения: достаточно малые сопротивления принимают равными нулю, а достаточно большие — бесконечными; пренебрегают зоной гистерезиса и т. д. Такие характеристики называют идеализированными (рис. 1.13). Идеализация характеристик может быть проведена, если сопротивление нагрузки существенно больше или меньше статических сопротивлений соответствующих участков вольт-амперных характеристик. Нетрудно видеть, что характеристика рис. 1.13, *а* является предельной идеализацией рис. 1.7, *б*, а рис. 1.13, *б* — характеристики рис. 1.5, *а*.

### § 1.3. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ДВУХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И МЕТОДОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Нелинейные цепи простой конфигурации удобно рассчитывать известными из курса математики методами графического решения уравнений, непосредственно использующими графическое изображение исходных характеристик двухполюсников.

## Последовательное соединение

При последовательном соединении нелинейных двухполюсников  $НД_1$  и  $НД_2$  (рис. 1. 14, а), вольт-амперные характеристики которых показаны на рис. 1. 14, б, необходимо воспользоваться вторым законом Кирхгофа и, задаваясь произвольными значениями ординат (токов), суммировать соответствующие им абсциссы (напряжения). В результате суммирования получится вольт-амперная характеристика, соответствующая всей цепи, которая может рассматриваться как один эквивалентный нелинейный двухполюсник (рис. 1. 14, а). Далее по напряжению  $U$ , приложенному к цепи, находятся ток  $I$  и падения напряжений на двухполюсниках  $U_1$  и  $U_2$ . Аналогично может быть построена эквивалентная характеристика участка цепи с несколькими последовательно соединенными нелинейными двухполюсниками.

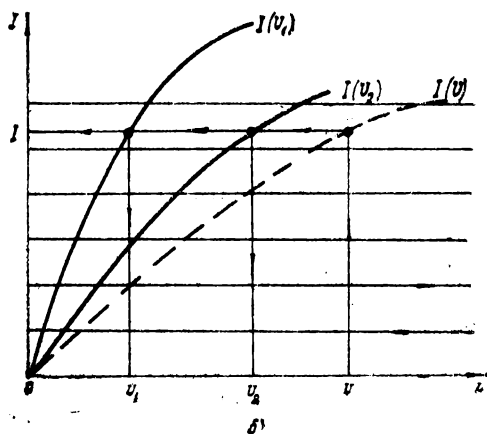
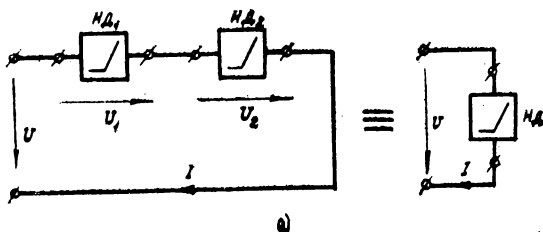


Рис. 1. 14. Последовательное соединение двухполюсников:  
а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная вольт-амперные характеристики

Если последовательно с двухполюсником включен источник напряжения, то вольт-амперная характеристика участка цепи с этим



двухполюсником и источником получается смещением характеристики влево на величину э. д. с., если направление э. д. с. источника совпадает с током, и вправо, — если не совпадает.

При фиксированном значении  $U$  ток и падения напряжений на двух нелинейных двухполюсниках могут быть найдены методом пересечения. Для этого одну из заданных вольт-амперных характеристик (рис. 1.15) следует перенести вправо от начала координат вдоль оси абсцисс на величину приложенного напряжения и повернуть так, чтобы получить зеркальное отображение ее относительно вертикали. Тогда точка пересечения зеркально отображенной характеристики  $I(U_2)' = I(U - U_2)$  одного двухполюсника с характеристикой другого двухполюсника  $I(U_1)$  определит искомый ток  $I$  и падения напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , причем  $U_1 + U_2 = U$ .

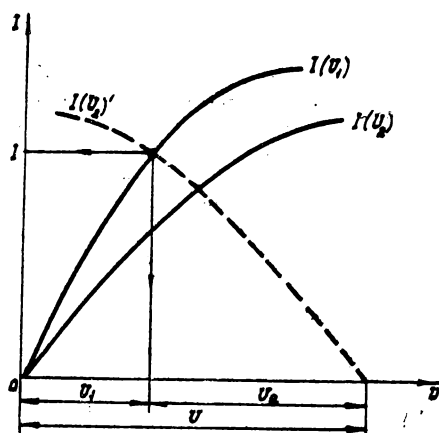


Рис. 1.15. Метод пересечения характеристик

Метод эквивалентных характеристик может быть применен и тогда, когда в качестве исходных характеристик заданы зависимости сопротивлений (статических или дифференциальных) от тока. При этом пользуются правилом преобразования цепи при последовательном соединении, согласно которому сопротивление эквивалентного двухполюсника равно сумме сопротивлений последовательно соединенных двухполюсников (при одном и том же токе). Поэтому, если заданы характеристики  $r_{ст1}(I)$  и  $r_{ст2}(I)$  (рис. 1.16, а) нелинейных двухполюсников НД<sub>1</sub> и НД<sub>2</sub> (рис. 1.14, а), то, задаваясь произвольными значениями абсцисс (токов), нужно просуммировать соответствующие им значения ординат (статических сопротивлений). В результате суммирования получится зависимость  $r_{ст}(I)$  для двухполюсника, эквивалентного двум заданным. Используя эту характеристику, нужно построить промежуточную зависимость  $r_{ст}(U)$  (рис. 1.16, б), отложить по оси абсцисс на-

пряжение  $U$ , приложенное к цепи, и определить  $r_{ст}$ . Затем значение  $r_{ст}$  переносится на график исходных и эквивалентной характеристик (рис. 1.16, а), определяются ток в цепи  $I$  и статические сопротив-

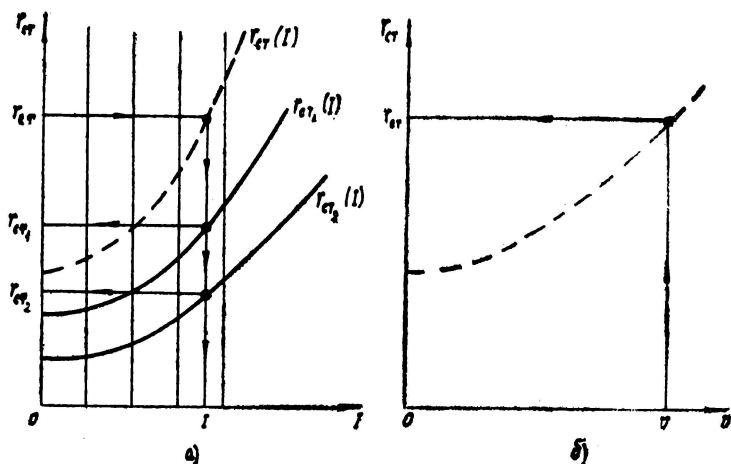


Рис. 1.16. Последовательное соединение двухполюсников:  
а — исходные и эквивалентная зависимости  $r_{ст}(I)$ ; б — зависимость  $r_{ст}(U)$

ления заданных двухполюсников  $r_{ст1}$  и  $r_{ст2}$ . Падения напряжений на этих двухполюсниках могут быть подсчитаны по закону Ома:  $U_1 = r_{ст1}I$  и  $U_2 = r_{ст2}I$ .

### Параллельное соединение

При параллельном соединении нелинейных двухполюсников (рис. 1.17, а) необходимо применить первый закон Киргофа: задаваясь произвольными значениями абсцисс (напряжений), просуммировать соответствующие значения ординат (токов). Полученная вольт-амперная характеристика соответствует эквивалентному нелинейному двухполюснику. Далее по заданному току  $I$  находят напряжение  $U$  и токи ветвей  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 1.17, б).

Если же задано напряжение  $U$ , то строить эквивалентную вольт-амперную характеристику не надо, так как токи  $I_1$  и  $I_2$  определяются из характеристик  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$ , а суммарный ток  $I = I_1 + I_2$ .

Аналогичный подход может быть использован при параллельном соединении нескольких нелинейных двухполюсников.

Если параллельно с двухполюсником включен источник тока, то вольт-амперная характеристика участка цепи с этим двухполюсником получается смещением характеристики вверх на величину тока источника, если его направление совпадает с напряжением, и вниз, — если не совпадает.

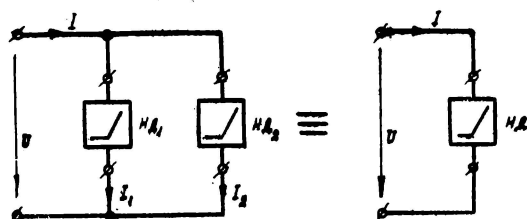


Рис. 1.17. Параллельное соединение двухполюсников.  
Исходная и эквивалентная схемы

Если при параллельном соединении двухполюсников заданы зависимости  $g_{ст1}(U)$  и  $g_{ст2}(U)$  (рис. 1.18, а), то можно применить правило преобразования цепи при параллельном соединении и, задаваясь значениями абсцисс (напряжений), просуммировать соответствующие значения ординат (статических проводимостей). Получится характеристика для эквивалентного двухполюсника.

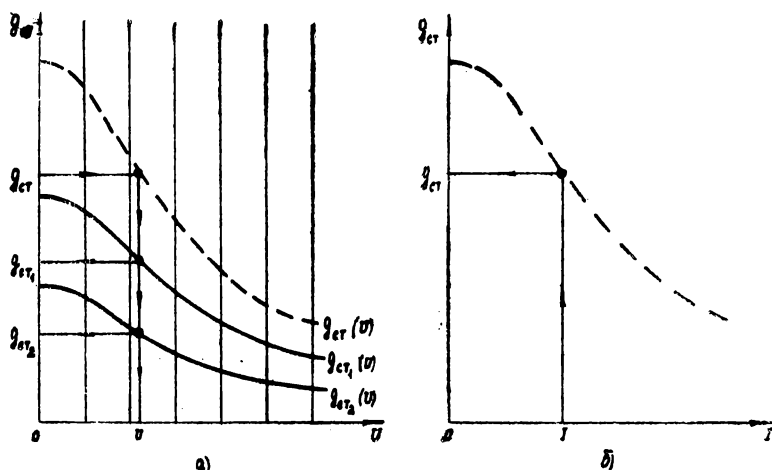


Рис. 1.18. Параллельное соединение двухполюсников:  
а — исходные и эквивалентная зависимости  $g_{ст}(U)$ ; б — зависимость  $g_{ст}(I)$

Далее необходимо построить промежуточную характеристику  $g_{ст}(I)$  и по заданному току  $I$  найти значение статической проводимости  $g_{ст}$  (рис. 1.18, б). Перенос значения этой проводимости на эквивалентную характеристику (рис. 1.18, а) позволит определить значения приложенного к цепи напряжения  $U$  и статических проводимостей  $g_{ст1}$  и  $g_{ст2}$  двухполюсников НД<sub>1</sub> и НД<sub>2</sub>. Токи параллельных ветвей найдутся из закона Ома:  $I_1 = g_{ст1}U$  и  $I_2 = g_{ст2}U$ .

Если же задано напряжение  $U$ , то строить эквивалентную характеристику нет необходимости, так как  $g_{ст1}$  и  $g_{ст2}$  и токи  $I_1$  и  $I_2$  определяются по исходным характеристикам.

### Смешанное соединение

Применяя те же приемы расчета, можно определить рабочий режим для любой цепи с последовательно-параллельным соединением двухполюсников.

На рис. 1.19, а показана схема для случая смешанного соединения линейного сопротивления  $r$  и двух нелинейных двухполюсников НД<sub>1</sub> и НД<sub>2</sub>, характеристики которых (соответственно)  $I_3(U_2)$ ,  $I_1(U_1)$  и  $I_2(U_2)$  показаны на рис. 1.19, б. После замены двух парал-

лельных двухполюсников одним эквивалентным  $I_2 + I_3 = I_1(U_2)$ , а затем двух последовательных — также одним эквивалентным  $I_1(U)$  по заданному напряжению  $U$  находим ток  $I_1$ . Определив ток  $I_1$ , найдем напряжения  $U_1$  и  $U_2$ ; зная напряжение  $U_2$  — токи  $I_2$  и  $I_3$ .

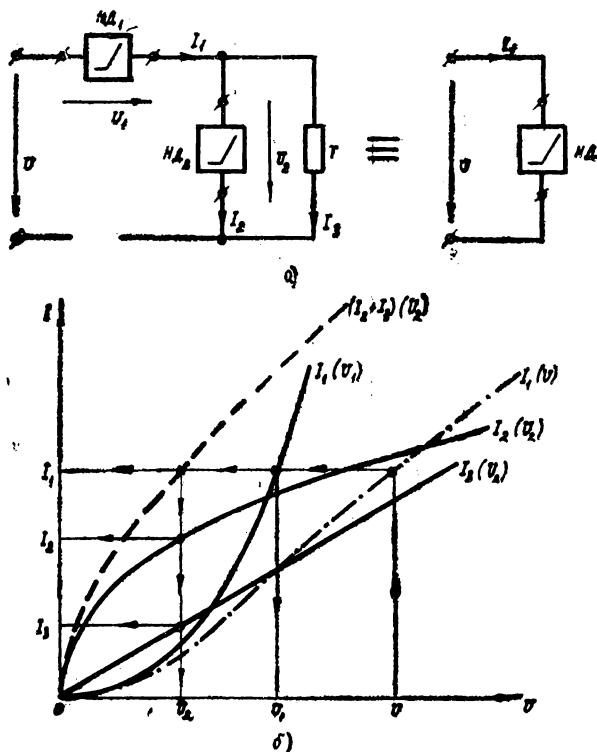


Рис. 1.19. Смешанное соединение двухполюсников:  
а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные  
и эквивалентные вольт-амперные характеристики

Если при смешанном соединении двухполюсников заданы зависимости сопротивлений или проводимостей от тока или напряжения, то целесообразно из них получить вольт-амперные характеристики и использовать их для расчета. Это объясняется тем, что в случае смешанного соединения эти исходные зависимости менее удобны, чем вольт-амперные характеристики, так как для расчета необходимо использовать как зависимости  $r_{ст}$  ( $I$  или  $U$ ), так и зависимости  $g_{ст}$  ( $I$  или  $U$ ) и переходить с одной на другую.

### Расчет цепи с двумя узлами

Графическое построение для расчета цепи с параллельными ветвями возможно и тогда, когда наряду с нелинейными двухполюс-

никами в них имеются источники постоянной э. д. с., включенные последовательно с двухполюсниками (рис. 1.20, а). Для этого

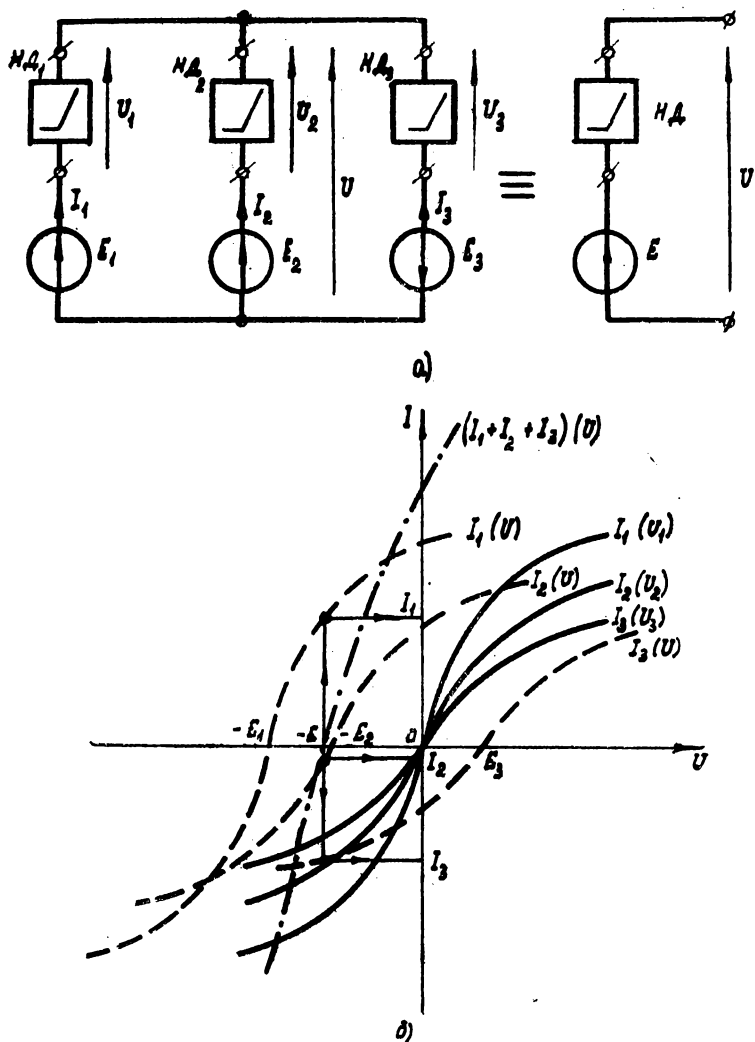


Рис. 1.20. Нелинейная цепь с двумя узлами:  
а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная характеристики

вместо вольт-амперных характеристик двухполюсников  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$  и  $I_3(U_3)$  предварительно строятся характеристики каждой ветви с учетом э. д. с.  $I_1(U)$ ,  $I_2(U)$  и  $I_3(U)$  (смещение влево на величину  $E_1$  и  $E_2$  и вправо — на величину  $E_3$  по оси абсцисс), а затем — эквивалентная характеристика параллельных ветвей  $(I_1 +$

$+I_2 + I_3$ ) ( $U$ ) (рис. 1.20, б). Эта характеристика смещена от начала координат на величину  $E$ , которую можно рассматривать как э. д. с. эквивалентной цепи.

Так как сумма токов в узле  $(I_1 + I_2 + I_3)$  равна нулю, то в эквивалентной цепи ток отсутствует. Следовательно, точка пересечения характеристики  $(I_1 + I_2 + I_3)$  ( $U$ ) с осью абсцисс — решение задачи. Отсюда находятся токи в каждой ветви  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , как это показано на рис. 1.20, б, а по соответствующим вольт-амперным характеристикам — напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ .

Описанный метод применим и в том случае, когда источники содержатся не во всех параллельных ветвях.

### Расчет сложной цепи с одним и двумя двухполюсниками

При расчете сложных электрических цепей необходимо, используя методы преобразования, упрощать схемы, пытаясь свести их к одноконтурным или схемам с двумя узлами.

Можно также, если электрическая цепь любой сложности содержит несколько источников напряжения и один нелинейный двухполюсник, применить для расчета такой цепи метод эквивалентного генератора. Для этого выделяют ветвь с двухполюсником и изображают всю остальную часть цепи в виде активного линейного двухполюсника (рис. 1.21), который может быть заменен эквивалентным источником напряжения. Тогда схема приводится к одноконтурной, состоящей из линейного сопротивления и нелинейного двухполюсника. Расчет ее проводится методом эквивалентных характеристик или методом пересечения.

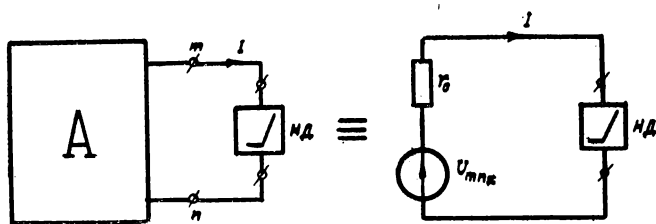


Рис. 1.21. Применение метода эквивалентного генератора для цепи с одним нелинейным двухполюсником

Как известно из раздела линейных электрических цепей, напряжение эквивалентного источника  $U_{mn}$  и сопротивление  $r_0$ , которое является входным сопротивлением пассивного двухполюсника относительно зажимов  $m$  и  $n$ , определяются в режиме, когда выделенная ветвь разомкнута. Поэтому необходимо, чтобы характеристика  $I(U)$  нелинейного двухполюсника проходила через начало координат (чтобы при  $I=0$  также и  $U=0$ ). Если же исходная характеристика смещена, то нужно перенести ее в начало координат.

нат включением дополнительного источника напряжения или тока (см. § 1.1). Этот источник учитывается в дальнейшем в линейной части цепи при нахождении напряжения  $U_{тнх}$ .

Если сколь угодно сложная цепь с источниками содержит два нелинейных двухполюсника, то можно выделить две эти ветви, а всю остальную линейную часть цепи представить в виде активного четырехполюсника (рис. 1.22).

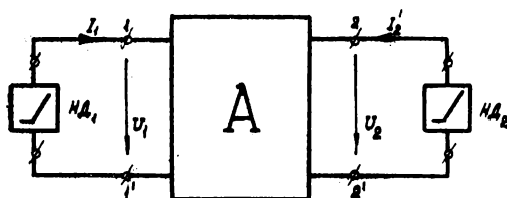


Рис. 1.22. Цепь с двумя нелинейными двухполюсниками

Известно, что если в две ветви одновременно ввести по источнику, э. д. с. которых равны напряжениям холостого хода на этих ветвях, то токи в них найдутся из схемы рис. 1.23. Упрощение задачи заключается в том, что вместо большого числа заданных источников, действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только два ( $U_{1x}$  и  $U_{2x}$ ), включенные в ветви с нелинейными двухполюсниками. При этом вся сложная линейная часть цепи стала пассивным четырехполюсником.

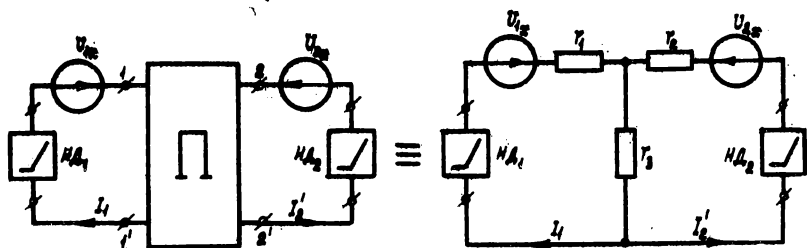


Рис. 1.23. Применение метода эквивалентного генератора для цепи с двумя нелинейными двухполюсниками

Следует отметить, что если токи в ветвях с двухполюсниками получаются из решения схемы рис. 1.23, то токи во всех других ветвях получатся суммированием токов режима холостого хода активного четырехполюсника (при определении напряжений  $U_{1x}$  и  $U_{2x}$ ) и режима схемы рис. 1.23.



Линейный пассивный четырехполюсник нужно затем заменить Т-образной схемой замещения и рассчитать эквивалентную схему как схему с двумя узлами.

Такой подход к решению цепи с двумя нелинейными двухполюсниками не является единственным. Можно разомкнуть только одну ветвь, например, с двухполюсником НД<sub>2</sub> (рис. 1.22), и определить напряжение холостого хода между зажимами 2 и 2' и входное нелинейное сопротивление относительно тех же зажимов, т. е. преобразовать схему в эквивалентную относительно одного двухполюсника. Если это удастся сделать, то схема рис. 1.22 преобразуется в одноконтурную, однако, в отличие от схемы рис. 1.21, с двумя нелинейными двухполюсниками.

#### **§ 1.4. РЕЛЕЙНЫЙ ЭФФЕКТ В ЦЕПИ С ДВУХПОЛЮСНИКОМ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

Если цепь содержит нелинейный двухполюсник с падающим участком вольт-амперной характеристики, то в цепи может возникнуть релейный эффект, т. е. скачкообразное изменение тока.

Пусть цепь приведена соответствующими преобразованиями к цепи с последовательно соединенными линейным сопротивлением  $r$  и нелинейным двухполюсником НД (рис. 1.24, а).

Если использовать метод пересечения и увеличивать входное напряжение  $U$ , то линейная характеристика  $I(U_1)'$  будет смещаться вправо параллельно самой себе. Одно из таких положений показано на рис. 1.24, б. При дальнейшем увеличении входного напряжения наступит момент, когда характеристика  $I(U_1)'$  коснется характеристики  $I(U_2)$  (точка 1, рис. 1.24, б). Точка 1 является точкой неустойчивого равновесия, поэтому произойдет скачкообразное изменение тока, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи 1 и падениям напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , определяемым точкой 2 (новое состояние устойчивого равновесия). Значение входного напряжения, при котором произойдет такое явление, называется напряжением срабатывания ( $U_{ср}$ ).

Дальнейшее увеличение входного напряжения не приведет к каким-либо качественным изменениям расчетных соотношений (рис. 1.24, в).

При уменьшении входного напряжения  $U$  до значения, при котором произойдет касание характеристики  $I(U_1)'$  характеристики  $I(U_2)$  в точке 3 (рис. 1.24, д), ток опять изменится скачком, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи 1 и падениям напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , определяемым точкой 4. Точка 3 является точкой неустойчивого равновесия, а точка 4 — устойчивого. Значение входного напряжения, при котором произойдет такое явление, называется напряжением отпускания ( $U_{отп}$ ). График самого релейного эффекта, т. е. зависимость  $I = f(U)$ , показан на рис. 1.24, е.

Диапазон напряжений срабатывания и отпускания, а следовательно, и ширина зоны характеристики нелинейного двухполюсника

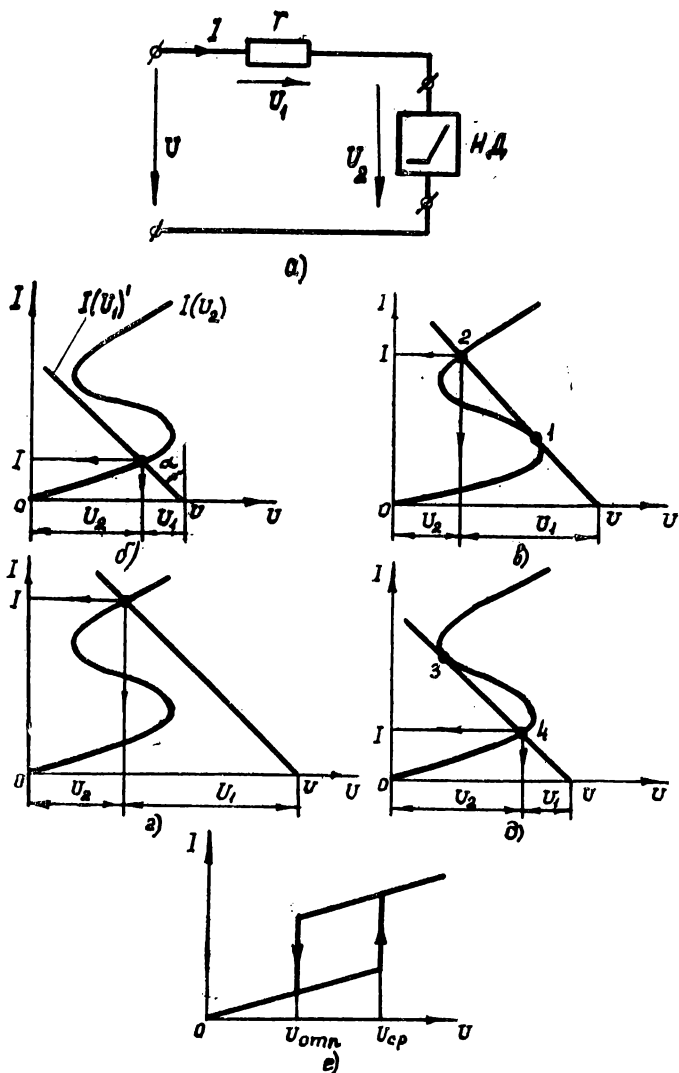


Рис. 1.24. Релейный эффект в нелинейной цепи:  
 а — схема; б — режим до  $U_{ср}$  (или после  $U_{отп}$ ); в — режим при  $U_{ср}$ ; г — режим после  $U_{ср}$  (или до  $U_{отп}$ ); д — режим при  $U_{отп}$ ; е — вольт-амперная характеристика релейного режима

между точками 1 и 3 определяются коэффициентом возврата  $k_B = \frac{U_{отп}}{U_{ср}} \leq 1$ .

Следует также отметить, что релейный эффект, в принципе, может быть получен не только изменением напряжения  $U$ , но и изменением сопротивления  $r$ , что равнозначно изменению угла наклона линейной вольт-амперной характеристики.

Условием возникновения релейного режима является взаимное касание характеристик, т. е.

$$|r_d| = r. \quad (1.7)$$

Релейный эффект, естественно, может возникнуть и в цепи с двумя нелинейными двухполюсниками.

### § 1.5. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА (НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ИСХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК)

Графические методы, удобные и наглядные для простых схем, становятся слишком громоздкими для сложных схем. Кроме того, графический метод даже для простых схем требует большой точности выполнения чертежей и выбора удовлетворительного масштаба. Для сложных схем графические методы не позволяют установить общие закономерности, найти оптимальные решения, варьировать параметрами и т. д. В таких случаях предпочтительнее аналитические методы расчета, которые основываются на аппроксимации вольт-амперных характеристик или зависимостей сопротивлений от тока (напряжения), т. е. на замене нелинейной характеристики аналитической функцией, приближенно выражающей заданную зависимость.

Если часть расчетных операций выполняется аналитически, а часть — графически, то метод расчета называется графо-аналитическим.

Точная аппроксимация характеристики или использование соответствующих ей точных выражений обычно приводит к сложным математическим соотношениям, что сильно затрудняет анализ. Поэтому на практике не стремятся к особо точной аппроксимации, причем аппроксимирующее выражение должно непременно удовлетворять двум требованиям:

- 1) по возможности точно выражать характер аппроксимируемой зависимости и, во всяком случае, отражать черты этой зависимости, являющиеся определяющими для анализа исследуемого явления;

- 2) должны получаться наиболее простые решения уравнений, в которые они вводятся при анализе цепи.

Поэтому для одной и той же характеристики в одних режимах может оказаться предпочтительнее один вид аппроксимации, в других режимах — другой.

Аппроксимация характеристик чаще всего производится с помощью полиномов, иногда с помощью тригонометрических или гиперболических функций, экспонент, ломаной линии (кусочно-линейная аппроксимация) и т. д.

Рассмотрим цепь, состоящую из двух последовательно соединенных линейного сопротивления  $r$  и нелинейного двухполюсника НД (рис. 1.25, а). Двухполюсник задан вольт-амперной характеристикой (кривая 1, рис. 1.25, б), которая на некотором интервале может быть аппроксимирована параболой второго порядка

$$I = aU_2^2, \quad (1.8)$$

достаточно точно (кривая 2, рис. 1.25, б) совпадающей с исходной вольт-амперной характеристикой.

На основании второго закона Кирхгофа

$$U = U_1 + U_2 = rI + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{I}. \quad (1.9)$$

Решение этого квадратного уравнения позволит определить ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если в качестве исходной характеристики задана зависимость  $r_{ст}(I)$ , то она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией. Тогда ток найдется из решения уравнения

$$U = U_1 + U_2 = rI + r_{ст}(I)I. \quad (1.10)$$

Если получено аппроксимирующее выражение нелинейной характеристики, то оно затем может быть линейризовано (как это было показано ранее для графического варианта) с помощью касательной или секущей.

Аналитический путь линейризации с помощью касательной заключается в том, что кривая на соответствующем участке заменяется линейным членом разложения ее в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки или в ряд Маклорена, если линейризация производится относительно начала координат.

При линейризации с помощью секущей необходимо выбрать положение секущей (угловой коэффициент), которое обычно определяется по способу наименьших квадратов, т. е. так, чтобы сумма

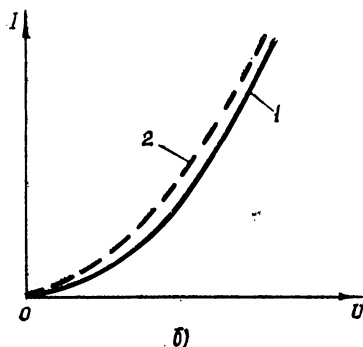
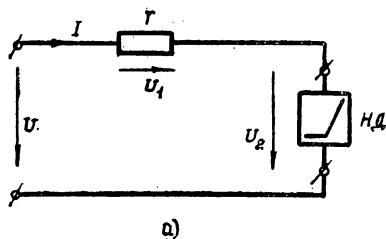


Рис. 1.25. Пример аппроксимации вольт-амперной характеристики: а — схема; б — исходная 1 и аппроксимирующая 2 характеристики

квадратов разностей ординат исходной кривой и секущей на заданном интервале была наименьшей.

### § 1.6. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ДВУХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Если в электрическую цепь включить нелинейный двухполюсник (рис. 1.26, а), имеющий, например, вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 1.26, б (так называемая вентильная характеристика), то к прямой ветви этой характеристики  $I=f_1(U)$  можно применить метод компенсации (см. § 1.2). Эквивалентная схема для определения тока  $I'$  показана на рис. 1.26, в. Из этой схемы

$$I' = \frac{U - U_i}{r_i + r_n} \quad (1.11)$$

(сущность значений  $U_i$  и  $r_i$  см. в § 1.2).

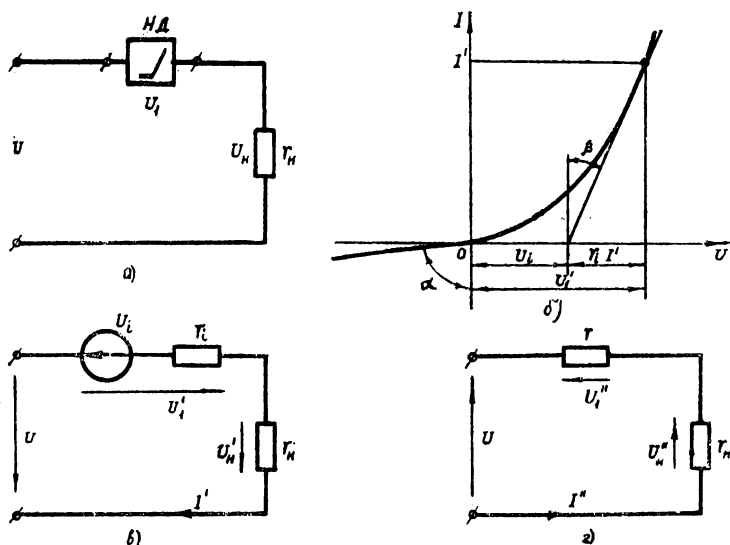


Рис. 1.26. Применение метода компенсации для цепи с нелинейным двухполюсником:

а — схема; б — графическое построение для исходной вольт-амперной характеристики; в — эквивалентная схема для ветви  $I(U)$ ; г — эквивалентная схема для ветви  $-I(-U)$

Рабочая точка ( $I'$ ,  $U_i'$ ) определяется током, необходимым нагрузке, и должна лежать на прямолинейном участке характеристики. Это дает возможность, определив по методу компенсации значения  $U_i$  и  $r_i$ , не прибегать в дальнейшем к вольт-амперной характеристике, а непосредственно из (1.11) находить значения тока  $I'$  при изменениях входного напряжения  $U$  или сопротивления

нагрузки  $r_n$ . При этом необходимо иметь в виду, что расчеты справедливы только в случае, если значения тока  $I'$  не выходят из зоны действия метода компенсации, ограниченного участком, вне которого вольт-амперная характеристика и прямая линия начинают расходиться.

При изменении полярности входного напряжения  $U$  расчет ведется по обратной ветви характеристики  $-I=f_2(-U)$ , которая практически во всем рабочем диапазоне может быть линеаризована и заменена одним сопротивлением  $r$ . При этом из эквивалентной схемы (рис. 1.26,  $z$ ) значение тока  $I''$  будет равно

$$I'' = \frac{U}{r + r_n} \approx \frac{U}{r}, \quad (1.12)$$

где  $r = \operatorname{tg} \alpha$  — статическое (дифференциальное) сопротивление для обратного направления тока.

## § 1.7. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ

Известно, что магнитная цепь и ее параметры внешне аналогичны электрической цепи и ее параметрам. Поэтому рассмотренные ранее методы и приемы расчета электрических цепей с нелинейными двухполюсниками полностью применимы и для расчета магнитных цепей. Для того чтобы провести указанную аналогию, необходимо уяснить особенности магнитной цепи, определить ее параметры и понять соотношения, определяемые физическими процессами, протекающими в магнитной цепи.

Для увеличения магнитного потока при заданной намагничивающей силе, а также для придания магнитному полю желаемой конфигурации в определенном месте электротехнического устройства части этого устройства выполняют из ферромагнитных материалов. Эти ферромагнитные части называют магнитопроводами (сердечниками). Магнитный поток создается током, протекающим по накладываемой на магнитопровод обмотке.

Систему ферромагнитных тел, предназначенную для надлежащего направления и концентрации магнитного потока, совместно с обмотками называют магнитной цепью. Если весь магнитопровод выполнен из какого-либо одного ферромагнитного материала, то магнитную цепь называют однородной. При включении в магнитопровод материалов с различными магнитными свойствами магнитную цепь называют неоднородной. Магнитная цепь, во всех сечениях которой магнитный поток одинаков, называется неразветвленной. В разветвленной магнитной цепи потоки в различных частях неодинаковы.

Если в полностью размагниченом ферромагнитном материале монотонно увеличивать напряженность и определять индукцию в установившемся режиме, то зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля  $B=f(H)$ , называемая кривой

начального намагничивания, будет иметь вид, показанный на рис. 1.27.

Вследствие необратимости процессов намагничивания магнитное состояние зависит от предшествующих воздействий. Такое свойство — сохранять след предшествующих воздействий — называется гистерезисом. После ряда повторных достаточно медленных изменений напряженности поля в пределах  $\pm H$  ( $+H_1 \rightarrow -H_1$ ;  $+H_2 \rightarrow -H_2$  и т. д.) устанавливается статическая симметричная петля гистерезиса (рис. 1.28). Когда же достигается предельное значение  $H_{\text{макс}}$ , форма собственно петли уже не изменяется, а растут только безгистерезисные участки в области насыщения. Соответствующая петля носит название предельной петли гистерезиса. Остальные возможные петли носят название частных циклов (или частных петель).

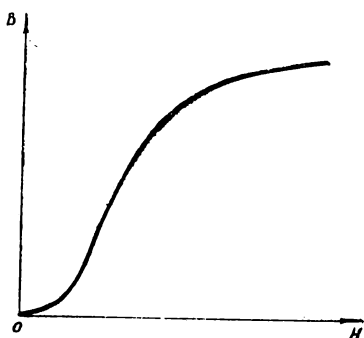


Рис. 1.27. Кривая начального намагничивания

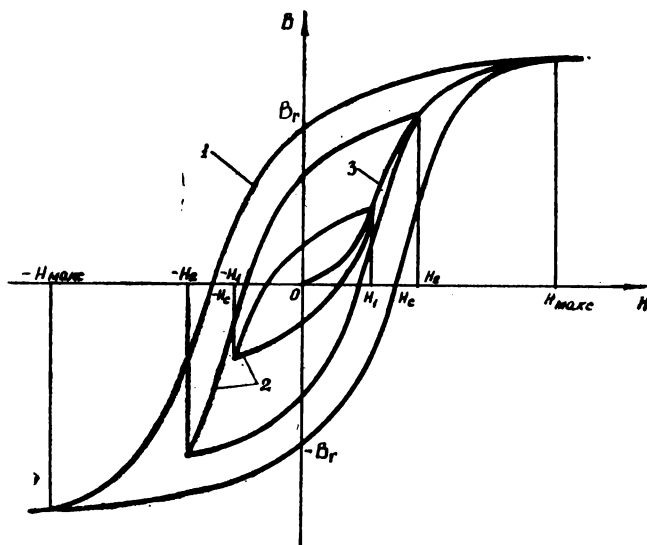


Рис. 1.28. Предельная 1 и частные 2 петли гистерезиса. Основная кривая намагничивания 3

Характерными точками на предельной петле гистерезиса являются: значение индукции при напряженности, равной нулю, называемое остаточной индукцией  $B_r$ ; значение напряженности магнитного поля, необходимой для того, чтобы довести индукцию в предвари-

тельно намагниченном материале до нуля, называемое коэрцитивной силой  $H_c$ .

Даже в статических условиях нелинейная магнитная цепь обладает совершенно различными характеристиками в зависимости от магнитной предыстории. Поэтому принято характеризовать магнитные материалы основной кривой намагничивания — геометрическим местом вершин симметричных петель гистерезиса, получающихся при различных максимальных значениях напряженности магнитного поля (рис. 1.28). Начальная и основная кривые намагничивания обычно близки друг к другу.

### Основные законы и особенности магнитной цепи

В основу расчета магнитных цепей положены известные из курса физики закон полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I \quad (1.13)$$

и принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.14)$$

Закон полного тока говорит о том, что линейный интеграл (циркуляция) вектора напряженности  $H$  вдоль произвольного замкнутого контура  $l$  равен алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур. Линейный интеграл напряженности характеризует намагничивающее действие электрического тока и называется намагничивающей силой (н. с.) или магнитодвижущей силой (м. д. с.) вдоль данного замкнутого контура.

Поток вектора магнитной индукции  $B$  через некоторую поверхность  $S$  называется магнитным потоком

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.15)$$

Принцип непрерывности говорит о том, что магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю; линии вектора  $B$  (или магнитные силовые линии) всегда замкнуты.

При расчете магнитных цепей в большинстве случаев принимают допущение, которое позволяет перейти от интегральных выражений к алгебраическим. Для этого считают, что величины  $H$  и  $B$  не изменяются вдоль поперечного сечения  $S$  магнитопровода, и расчет можно вести по некоторой средней силовой линии магнитопровода. Поэтому в дальнейшем под магнитной индукцией будем понимать некоторое среднее по сечению магнитопровода значение

$$B = \frac{\Phi}{S}, \quad (1.16)$$



а под линейным интегралом напряженности вдоль длины  $ab$  магнитной цепи (рис. 1.29, а) — магнитное напряжение на этой длине

$$\int_{ab} Hdl = U_{маб} \quad (1.17)$$

или

$$Hl_{аб} = U_{маб}, \quad (1.18)$$

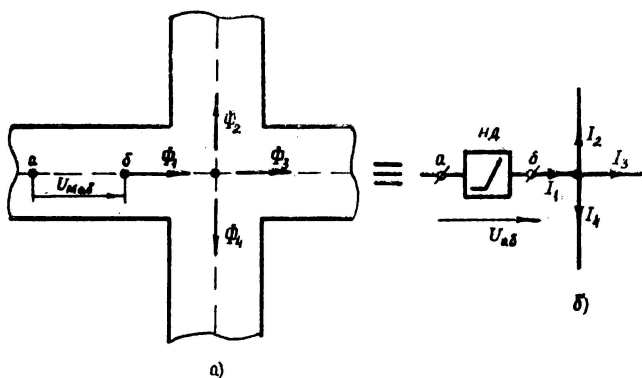


Рис. 1.29. Магнитный узел (а) и его электрический аналог (б)

Кроме того, явление гистерезиса не учитывается, и зависимость  $B$  от  $H$  определяется по основной кривой намагничивания.

### Законы Кирхгофа для магнитной цепи

Из принципа непрерывности магнитного потока следует, что для узла магнитной цепи справедливо уравнение

$$\sum \Phi = 0, \quad (1.19)$$

выражающее магнитный аналог первого закона Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю, причем потоки, направленные к узлу, берутся со знаком «+», а направленные от узла — со знаком «—».

Для магнитного узла, показанного на рис. 1.29, а, первый закон Кирхгофа запишется в виде

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 = 0, \quad (1.20)$$

что соответствует уравнению для токов электрического аналога этого магнитного узла (рис. 1.29, б).

Для того чтобы применить второй закон Кирхгофа для магнитной цепи, необходимо магнитную цепь разбить на участки. Участки могут отличаться друг от друга материалом или поперечным сечением, или тем и другим одновременно. Кроме того, различными

являются также участки одинакового сечения и материала, но находящиеся в зоне действия разных потоков.

Произведение тока в обмотке на число витков составляет н. с. обмотки

$$F = Iw. \quad (1.21)$$

Направление тока и н. с. связаны между собой правилом правого винта.

Из закона полного тока следует магнитный аналог второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма н. с. обмоток в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитных напряжений на отдельных участках контура:

$$\sum Iw = \sum Hl \quad (1.22)$$

или

$$\sum F = \sum U_m. \quad (1.23)$$

Если направление обхода контура совпадает с направлением н. с., то эта н. с. пишется со знаком «+»; если направление магнитного потока в участке совпадает с направлением обхода контура, то магнитное напряжение на этом участке также пишется со знаком «+».

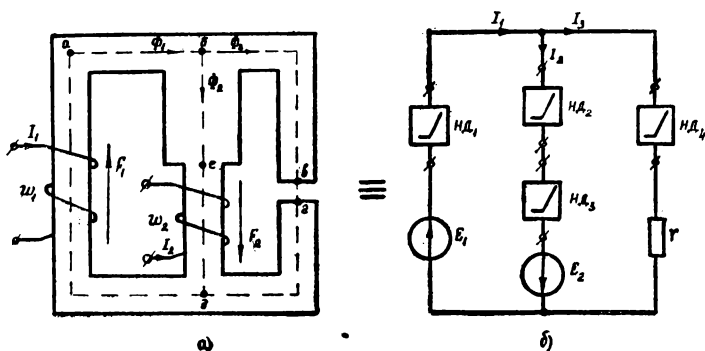


Рис. 1.30. Разветвленная магнитная цепь (а) и ее электрический аналог (б)

Составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи рис. 1.30, а в следующей последовательности:

1) зададимся положительными направлениями потоков  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ ;

2) определим положительные направления н. с.  $F_1$  и  $F_2$ , зная положительные направления токов  $I_1$  и  $I_2$  и направление намотки катушек  $w_1$  и  $w_2$ ;

3) выберем независимые контуры, например, левый и правый;

4) выберем направление обхода контуров: например, для первого контура — по часовой стрелке, для второго — против;

5) наметим средние линии каждой ветви магнитной цепи и определим число участков:

- 1-й участок —  $b a d$ ;
- 2-й участок —  $b e$ ;
- 3-й участок —  $e d$ ;
- 4-й участок —  $b в + e d$ ;
- 5-й участок —  $в e$ ;

6) составим уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 &= 0; \\ F_1 + F_2 &= I_1 w_1 + I_2 w_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3; \\ F_2 &= I_2 w_2 = H_2 l_2 + H_3 l_3 - H_4 l_4 - H_5 l_5.\end{aligned}$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены и для электрической цепи (рис. 1.30, б), представляющей собой аналог магнитной цепи (рис. 1.30, а).

По аналогии с электрическими цепями в расчетные соотношения магнитных цепей может быть введено понятие магнитного сопротивления

$$r_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{l}{\mu_0 \mu S} \quad (1.24)$$

или магнитной проводимости

$$g_m = \frac{1}{r_m}. \quad (1.25)$$

Так как относительная магнитная проницаемость ферромагнитного участка зависит от индукции

$$\mu = \frac{B}{\mu_0^* H}, \quad (1.26)$$

то его магнитное сопротивление (проводимость) нелинейно. Поэтому для расчета используют нелинейные характеристики, из которых наиболее часто применяют вебер-амперные (магнитные) характеристики участков магнитной цепи  $\Phi = f(Hl)$  или  $\Phi = f(Iw)$ . Вебер-амперные характеристики легко определяются по кривой намагничивания материала участка  $B(H)$  и его геометрическим размерам. Для этого значения ординат умножают на площадь поперечного сечения ( $\Phi = BS$ ), а значения абсцисс — на длину соответствующего участка ( $Hl$ ) (рис. 1.31). Фактически вебер-амперные характеристики являются аналогами вольт-амперных

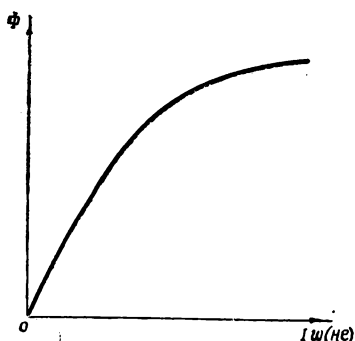


Рис. 1.31. Вебер-амперная (магнитная) характеристика

\*  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м.}$

характеристик, а участки магнитной цепи — аналогами электрических двухполюсников, т. е. магнитными двухполюсниками.

При расчете магнитных цепей можно также ввести понятия статических и дифференциальных магнитных сопротивлений и проводимостей и пользоваться зависимостями  $r_{\text{мст}}(Hl)$ ,  $r_{\text{мст}}(\Phi)$ ,  $r_{\text{мд}}(Hl)$  и т. д.

Воздушный зазор в магнитной цепи является аналогом линейного сопротивления, и связь между напряженностью магнитного поля и индукцией в нем определяется уравнением

$$H_{\text{в}} = \frac{B_{\text{в}}}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 B_{\text{в}}, \quad (1.27)$$

которое получается из (1.26), так как относительная магнитная проницаемость воздуха равна единице.

Таким образом, очевидно, что между электрическими и магнитными цепями существует явная аналогия. При этом аналогичны следующие величины и уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi &\sim I; \\ F = I\omega &\sim E; \\ U_{\text{м}} = Hl &\sim U; \\ \sum \Phi = 0 &\sim \sum I = 0; \\ \sum F = \sum U_{\text{м}} &\sim \sum E = \sum U; \\ r_{\text{м}} = \frac{Hl}{\Phi} = \frac{l}{\mu_0 \mu S} &\sim r = \frac{U}{I} = \frac{l}{\gamma S}; \\ g_{\text{м}} = \frac{1}{r_{\text{м}}} &\sim g = \frac{1}{r}; \\ B = \frac{\Phi}{S} &\sim \bar{\delta} = \frac{I}{S}; \end{aligned}$$

нелинейные магнитные двухполюсники (участки магнитной цепи)  $\sim$  нелинейным электрическим двухполюсникам;

$$\Phi(Hl) \text{ или } \Phi(I\omega) \sim I(U);$$

$$r_{\text{мст}}, r_{\text{мд}}, g_{\text{мст}}, g_{\text{мд}} \sim r_{\text{ст}}, r_{\text{д}}, g_{\text{ст}}, g_{\text{д}};$$

линейное магнитное сопротивление (воздушный зазор)  $\sim$  линейному электрическому сопротивлению;

магнитная цепь  $\sim$  электрической цепи;

выбор положительных направлений потоков и магнитных напряжений, независимых магнитных контуров, направления обхода магнитных контуров и т. д.

методы и приемы расчета магнитных цепей

~ выбору положительных направлений токов и напряжений, независимых электрических контуров, направления обхода электрических контуров и т. д.;

~ методам и приемам расчета электрических цепей.

Таким образом, при графическом расчете магнитной цепи необходимо построить вебер-амперные характеристики магнитных двухполюсников, составить электрический аналог магнитной цепи и применить соответствующий метод расчета. Так, например, неразветвленную магнитную цепь (рис. 1.32, а) можно рассчитать или методом эквивалентной характеристики, или методом пересечения (см. § 1.3). Разветвленная магнитная цепь (рис. 1.32, б) представляет собой схему с двумя узлами и рассчитывается аналогично электрической цепи (см. § 1.3).

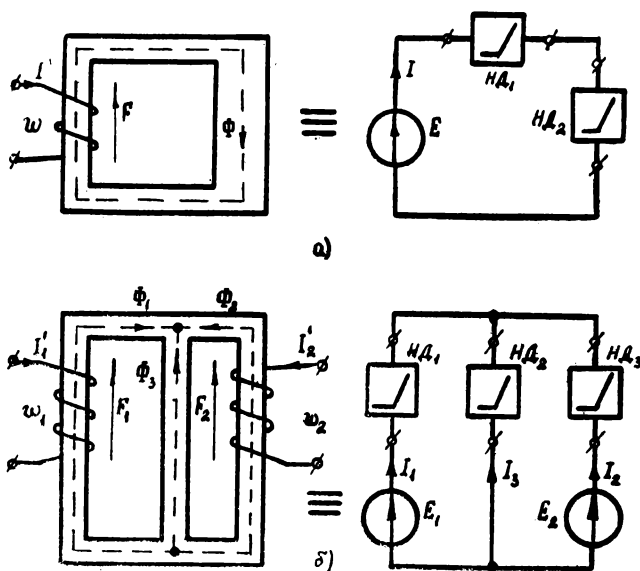


Рис. 1.32. К расчету магнитных цепей:  
а — неразветвленная цепь и ее электрический аналог;  
б — разветвленная цепь и ее электрический аналог

К расчету магнитных цепей могут быть применены и аналитические методы расчета, включая метод компенсации (см. § 1.5, 1.6).

## Магнитные цепи с постоянными магнитами

Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных материалов, широко используется при изготовлении постоянных магнитов. При этом применяются так называемые магнитотвердые материалы, обладающие сравнительно большими коэрцитивной силой (десятки и сотни ампер на сантиметр) и площадью петли гистерезиса.

При расчете постоянных магнитов пользуются частью петли гистерезиса, которая лежит во втором квадранте и называется кривой размагничивания (рис. 1.28). Зная геометрические размеры магнитопровода, можно построить вебер-амперную характеристику (кривая 1, рис. 1.33), которая смещена от начала координат на величину

$$-F_{\text{ост}} = -H_c l_m, \quad (1.28)$$

где  $F_{\text{ост}}$  — остаточная н. с.;

$l_m$  — длина средней силовой линии магнита.

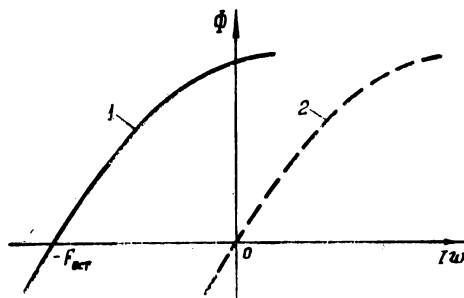


Рис. 1.33. Исходная 1 и эквивалентная 2 вебер-амперные характеристики постоянного магнита

Характеристика такого вида относится к числу mildly несимметричных характеристик (см. § 1.1) и определяет активный магнитный двухполюсник. Эта характеристика может быть перенесена в начало координат (кривая 2, рис. 1.33), если «последовательно» с пассивным магнитным двухполюсником включить источник намагничивающей силы.

Если рассмотреть тороидальный постоянный магнит без воздушного зазора (рис. 1.34, а), который представляет собой активный магнитный двухполюсник (за счет  $-F_{\text{ост}}$ ) и характеризуется кривой 1 (рис. 1.33), то его магнитным аналогом, отвечающим характеристике 2 (рис. 1.33), будет магнитная цепь, показанная на рис. 1.34, б. Электрический аналог (рис. 1.34, в) можно рассматривать или как активный двухполюсник, замкнутый накоротко, или как пассивный двухполюсник, включенный на источник напряжения.

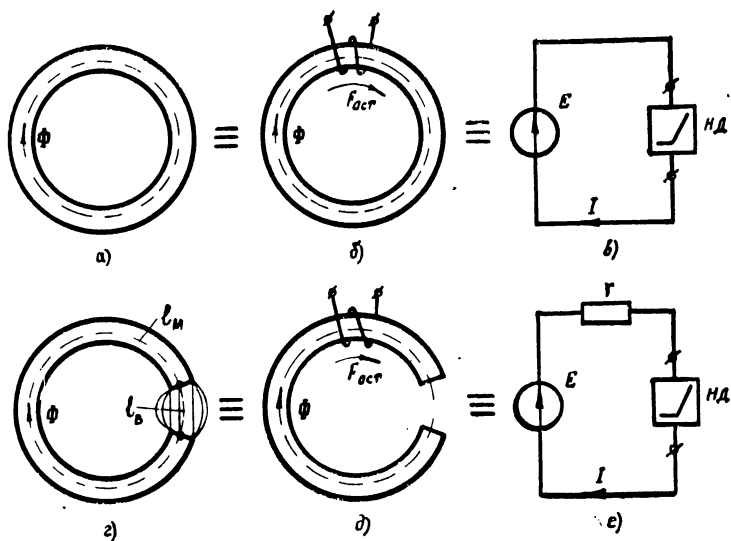


Рис. 1.34. Торoidalный постоянный магнит и его аналог:

$a$  — постоянный магнит без воздушного зазора;  $b$  — его магнитный аналог;  $d$  — его электрический аналог;  $z$  — постоянный магнит с воздушным зазором;  $d$  — его магнитный аналог;  $e$  — его электрический аналог

Для расчета такого магнита, т. е. определения магнитного потока, можно использовать или эквивалентную характеристику (рис. 1.35, а), или исходную (рис. 1.35, б).

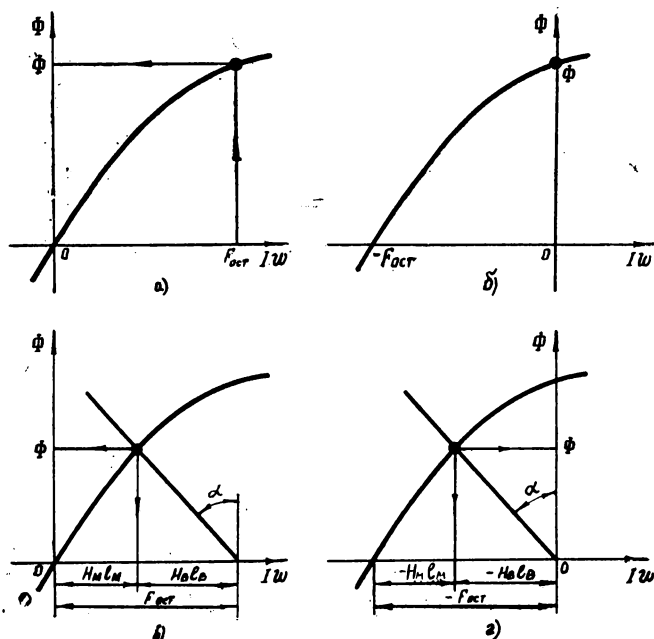


Рис. 1.35. Графический расчет постоянных магнитов:  
а — эквивалентная характеристика для рис. 1.34, а; б — исходная характеристика для рис. 1.34, а; в — эквивалентная характеристика для рис. 1.34, г; г — исходная характеристика для рис. 1.34, г

Если задан постоянный магнит с воздушным зазором (рис. 1.34, г), аналоги которого показаны на рис. 1.34, д, е, то для расчета такой магнитной цепи удобно использовать метод пересечения (см. § 1.3). Для этого необходимо определить угол  $\alpha$  (рис. 1.35, в), под которым проводится прямая линия, являющаяся характеристикой воздушного зазора. Воспользуемся уравнением (1.24), которое для определения сопротивления воздушного зазора будет иметь вид

$$r_{\text{в}} = \frac{l_{\text{в}}}{\mu_0 S_{\text{в}}}, \quad (1.29)$$

где  $l_{\text{в}}$  — длина средней силовой линии воздушного зазора;  
 $S_{\text{в}}$  — площадь поперечного сечения воздушного зазора.

Используя уравнение (1.29), можно определить угол  $\alpha$ , так как  $\alpha = \arctg r_{\text{в}}$ .



Линейная вебер-амперная характеристика воздушного зазора может быть построена, если умножить левую часть уравнения (1.27) на  $l_v$ , а правую часть — на  $S_v$ .

Точка пересечения линейной и нелинейной характеристик (рис. 1.35, в) является рабочей точкой, которая определяет значения магнитного потока  $\Phi$  и магнитных напряжений магнитопровода  $H_m I_m$  и воздушного зазора  $H_v I_v$ . Те же значения можно получить, если использовать для расчета исходную характеристику (рис. 1.35, г).

Значения магнитных индукций магнитопровода  $B_m$  и воздушного зазора  $B_v$  можно определить согласно уравнению (1.16):

$$B_m = \frac{\Phi}{S_m} \text{ и } B_v = \frac{\Phi}{S_v},$$

где  $S_m$  — площадь поперечного сечения магнита.

Следует заметить, что в магнитных цепях, рассмотренных ранее, площади магнитопровода и воздушного зазора в большинстве случаев принимались равными. Это объяснялось несоизмеримостью площади поперечного сечения и длины воздушного зазора, и поэтому выпучивание магнитного потока в воздушном зазоре было несущественно.

В цепях с постоянными магнитами воздушные зазоры имеют значительную длину, а магнитный поток — сложную конфигурацию, замыкаясь не только по прямым линиям (рис. 1.34, г). Поэтому площадь поперечного сечения воздушного зазора  $S_v$  в отдельных случаях значительно превышает площадь поперечного сечения магнита  $S_m$ .

## Глава 2. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХ- ПОЛЮСНИКАМИ

### § 2.1. ИСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ИХ СИСТЕМАТИЗАЦИЯ

Напомним, что четырехполусником называется часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к двум парам ее зажимов (рис. 2.1).

Если свойства двухполусников определяются одной характеристикой, то для анализа четырехполусников необходимо иметь два семейства вольт-амперных характеристик: входное и выходное. Каждая из отдельных характеристик семейств имеет своим прототипом одну из вольт-амперных характеристик двухполусников (см. рис. 1.3—1.7).

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполусника для выбранных положительных направлений токов и напряжений (рис. 2.2) могут сводиться, в частности, к одной из следующих систем уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I'_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I'_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I'_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что первая система уравнений, построенная графически на рис. 2.3, а, б, представляет собой нелинейный вариант формы  $g$ -параметров. Следовательно, если возможна линеаризация этих характеристик, то аналитическое выражение будет иметь вид

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= g_{11}U_{\text{вх}} + g_{12}U_{\text{вых}}; \\ I'_{\text{вых}} &= g_{21}U_{\text{вх}} + g_{22}U_{\text{вых}}. \end{aligned}$$

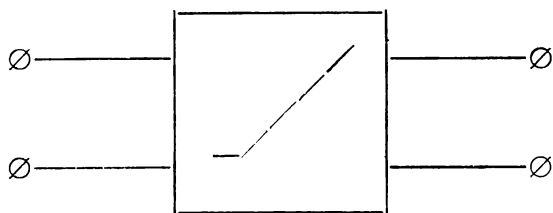


Рис. 2. 1. Условное обозначение  
нелинейного четырехполюсника

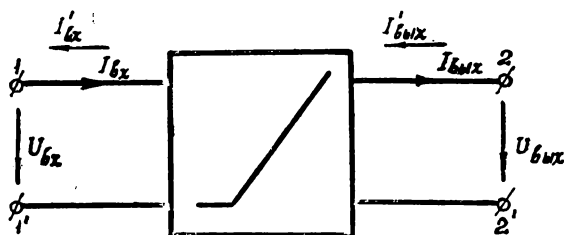


Рис. 2. 2. Положительные направления  
напряжений и токов четырехполюсника

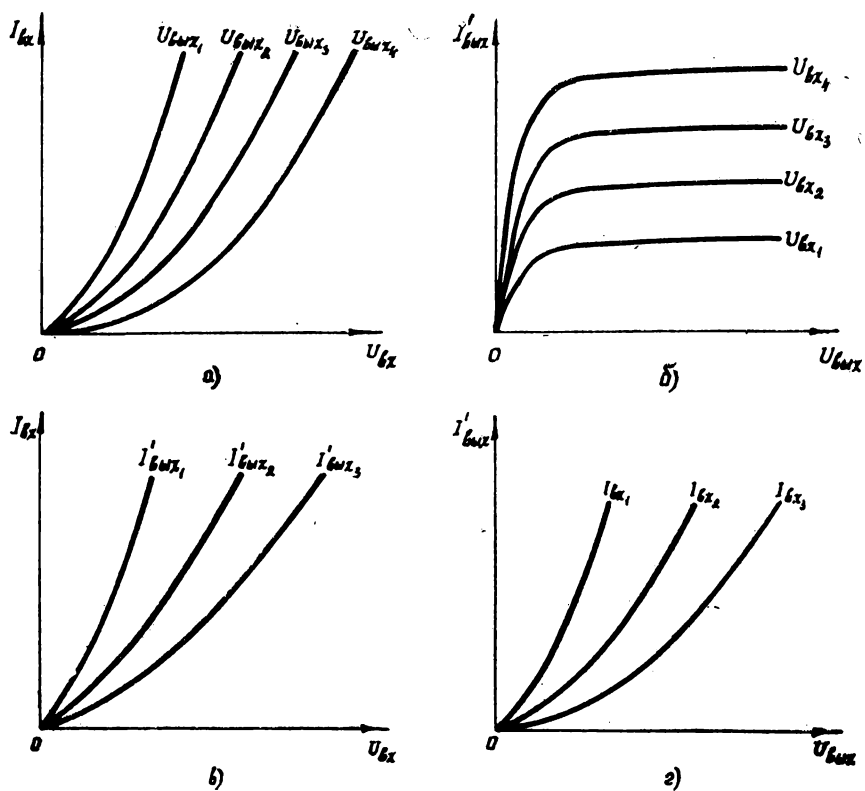


Рис. 2.3. Примеры семейств вольт-амперных характеристик четырехполусника:

а — входных  $I_{вх}(U_{вх}, U_{вых})$ ; б — выходных  $I'_{вых}(U_{вх}, U_{вых})$ ; в — входных  $I_{вх}(U_{вх}, I'_{вых})$ ; г — выходных  $I'_{вых}(I_{вх}, U_{вых})$

Последующие три формы записи не имеют аналогии с принятыми формами уравнений линейных четырехполюсников, поскольку в каждой паре уравнений одна и та же величина входит как в левую, так и в правую части уравнений (т. е. в качестве и независимой, и зависимой величины). Преимуществом таких форм записи является то, что они связаны с графическим представлением семейств входных и выходных вольт-амперных характеристик, которые иногда бывают более удобными, чем соответствующие принятым формам четырехполюсников графики (например, последняя система уравнений (2.1) и рис. 2.3, в, г).

Исходными характеристиками для четырехполюсника могут быть также семейства зависимостей сопротивлений или проводимостей либо безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого рода должно быть четыре, так как нелинейный четырехполюсник определяется четырьмя взаимно независимыми нелинейными зависимостями (линейный четырехполюсник определяется тремя коэффициентами, так как для него справедлив неприменимый в данном случае принцип взаимности). Например:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_{11}(U_{\text{вх}}) + f_{12}(U_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_{21}(U_{\text{вх}}) + f_{22}(U_{\text{вых}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Поэтому преимущество применения вольт-амперных характеристик для расчета четырехполюсников еще более очевидно, чем для расчета двухполюсников.

Нелинейные четырехполюсники могут быть направленными и ненаправленными.

Направленным четырехполюсником (рис. 2.4) называется такой, у которого выходные ток и напряжение не влияют на входные. Семейство его входных характеристик вырождается в одну вольт-амперную характеристику, и направленный четырехполюсник описывается одной характеристикой по входу и семейством характеристик по выходу (т. е. характеризуется только тремя нелинейными зависимостями). Например:

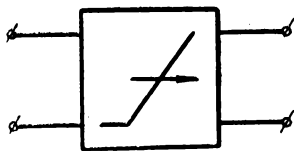


Рис. 2.4. Условное обозначение направленного четырехполюсника

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_{11}(U_{\text{вх}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_{21}(U_{\text{вх}}) + f_{22}(U_{\text{вых}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Полной системой уравнений (2.1), (2.2) характеризуется ненаправленный четырехполюсник (рис. 2.5), у которого выходные ток и напряжение влияют на входные.

Нелинейные четырехполюсники целесообразно подразделять еще по следующим признакам:

1) четырехполюсники без участков с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит также плавное изменение выходного сигнала;

2) четырехполюсники с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит скачкообразное изменение выходного сигнала.

К семейству выходных характеристик четырехполюсников первой группы может быть применен метод компенсации, а к четырехполюсникам второй группы, если рабочий участок захватывает область скачка, — нет.

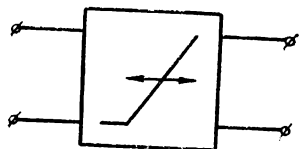


Рис. 2.5. Условное обозначение ненаправленного четырехполюсника

## § 2.2. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником (рис. 2.6, а), у которой заданы:  $E_1$  — э. д. с. источника входного сигнала;  $r_1$  — внутреннее сопротивление источника  $E_1$ ;  $E_2$  — э. д. с. источника питания выходной цепи;  $r_H$  — сопротивление нагрузки; входная и выходные характеристики четырехполюсника (рис. 2.6, б, в). Внутренним сопротивлением  $r_2$  источника  $E_2$  можно или пренебречь, или включить его в состав сопротивления нагрузки  $r_H$ .

Расчет начинается с входной характеристики (рис. 2.6, б), на оси абсцисс которой откладывается значение  $E_1$  и, используя метод пересечения, проводится прямая под углом  $\alpha_1 = \arctg r_1$ . Возможность применения метода пересечения объясняется тем, что для входной (а также выходной) цепи с четырехполюсником по второму закону Кирхгофа можно записать  $E_1 = U_1 + U_{вх}$  и получить, таким образом, цепь с последовательным соединением двух двухполюсников (один из которых нелинейный) при заданном значении входной э. д. с.  $E_1$  (см. § 1.3).

Рабочая точка на характеристике входной цепи дает возможность определить значения входного тока  $I_{вх}$ , входного напряжения четырехполюсника  $U_{вх} = U_{вх2}$  и падения напряжения на сопротивлении  $r_1$ :  $U_1 = r_1 I_{вх}$ .

На выходных характеристиках (рис. 2.6, в), также используя метод пересечения, строится прямая под углом  $\alpha_H = \arctg r_H$ , и пересечение ее с одной из характеристик семейства, соответствующей в данном случае значению входного напряжения  $U_{вх2}$ , даст рабочую точку на характеристиках выходной цепи. Далее определяются

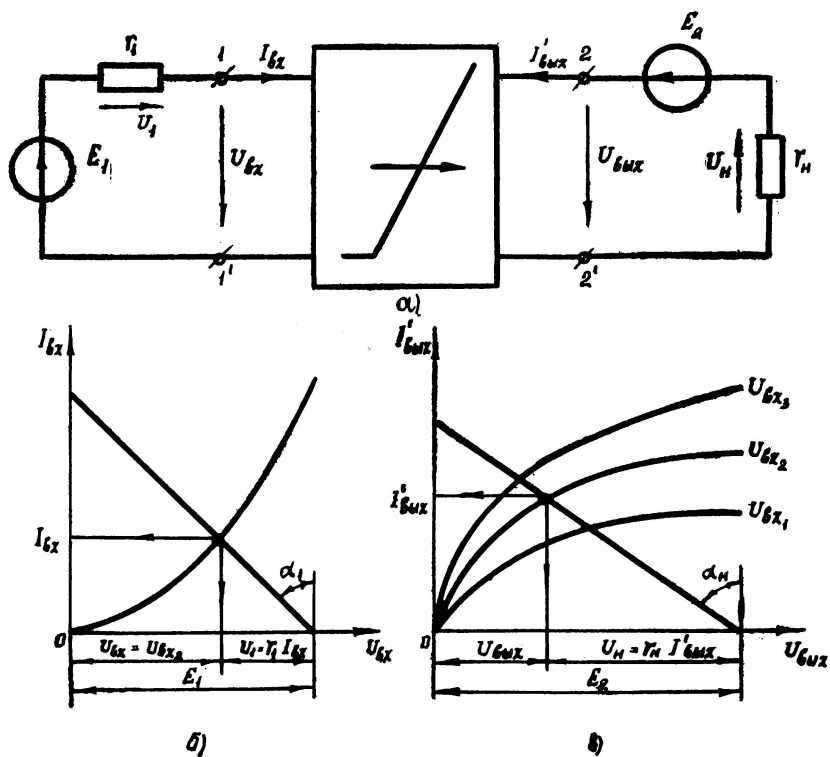


Рис. 2.6. Графический расчет цепи с направленным четырех-  
полюсником:  
а — схема; б — расчет входной цепи; в — расчет выходной цепи

значения выходного тока  $I'_{\text{вых}}$ , выходного напряжения четырех-  
полюсника  $U_{\text{вых}}$  и падения напряжения на сопротивлении нагрузки  
 $r_n$ :  $U_n = r_n I'_{\text{вых}}$ .

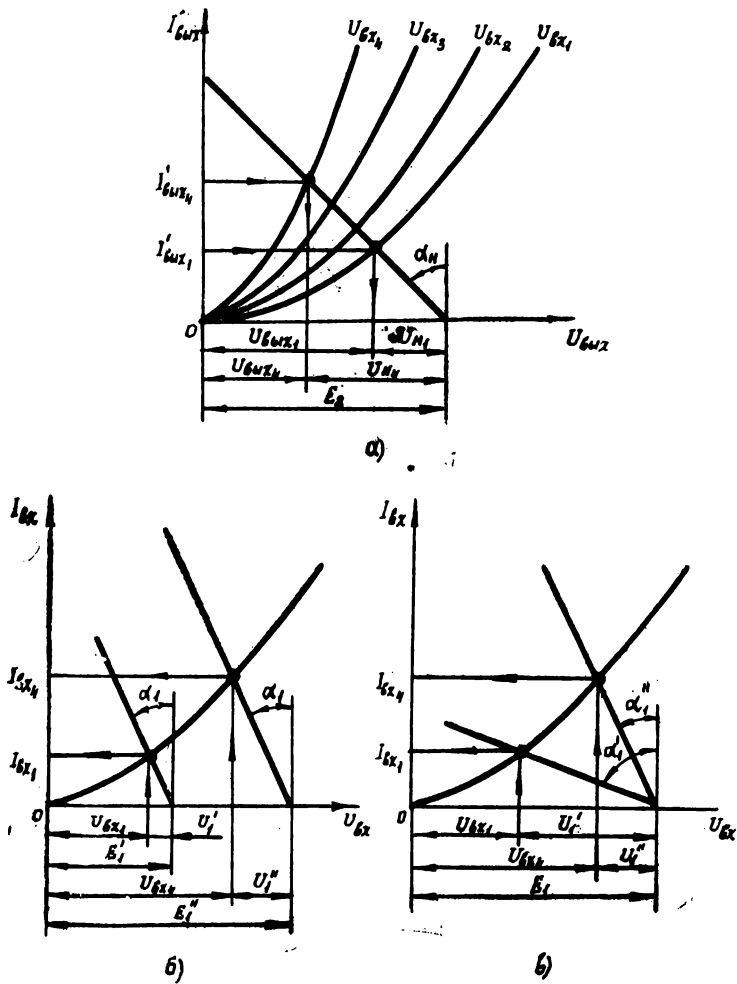


Рис. 2.7. Графический расчет цепи с направленным четырех-  
полюсником:  
а — характеристики выходной цепи; б — изменение  $E_1$  при  
 $r_1 = \text{const}$ ; в — изменение  $r_1$  при  $E_1 = \text{const}$

Если необходимо получить определенный диапазон изменения  
выходного тока, то следует изменять входное напряжение, напри-  
мер, от  $U_{\text{вх}1}$  до  $U_{\text{вх}4}$  (рис. 2.7, а). В этом случае переменное значе-  
ние входного напряжения может быть обеспечено как изменением



э. д. с. входного сигнала  $E_1$ , так и изменением сопротивления  $r_1$  (рис. 2.6, а).

Для этого необходимо отложить на оси абсцисс значения  $U_{вх_1}$  и  $U_{вх_2}$  и определить токи  $I_{вх_1}$  и  $I_{вх_2}$  (рис. 2.7, б, в), т. е. определить рабочий диапазон на входной вольт-амперной характеристике. Теперь можно графически найти значения э. д. с. входного источника, если через точки с координатами  $I_{вх_1}$ ,  $U_{вх_1}$  и  $I_{вх_2}$ ,  $U_{вх_2}$  провести прямые под углом  $\alpha_1 = \arctg r_1$  (при этом  $r_1 = \text{const}$ ) (рис. 2.7, б). Если  $E_1 = \text{const}$ , то сопротивления  $r_1'$  и  $r_1''$  равны соответственно  $\text{tg } \alpha_1'$  и  $\text{tg } \alpha_1''$  (рис. 2.8, в). Значения э. д. с.  $E_1'$  и  $E_1''$  и сопротивлений  $r_1'$  и  $r_1''$  можно определить также, не прибегая к графическим построениям, а используя уравнение для входной цепи четырехполюсника:  $E_1 = r_1 I_{вх} + U_{вх}$ .

Вместо линейных сопротивлений  $r_n$  и  $r_1$  в схеме (рис. 2.6, а) могут быть применены и нелинейные двухполюсники. Это будет означать, что прямые нагрузочные линии на рис. 2.6, б, в необходимо заменить на зеркально отображенные вольт-амперные характеристики двухполюсников.

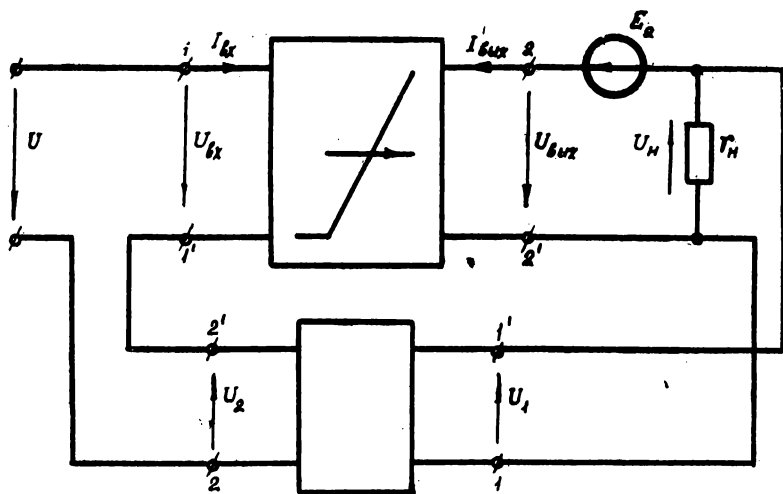
Если в аналогичной схеме (рис. 2.6, а) рассматривается направленный четырехполюсник у которого при плавном изменении входного сигнала должно происходить скачкообразное изменение выходного, то для расчета цепи применяется тот же подход, что и рассмотренный выше. При этом рассматривается, естественно, некоторый диапазон выходного тока (а не фиксированное значение), чтобы использовать область выходных характеристик, позволяющих получить скачкообразное изменение тока. Заметим, что в принципе изменение тока можно также обеспечить при фиксированных входных величинах  $E_1$  и  $r_1$  за счет изменения  $E_2$  или  $r_n$ .

Общий подход при этом аналогичен вышеизложенному для случая релейного эффекта применительно к двухполюсникам (см. § 1.4).

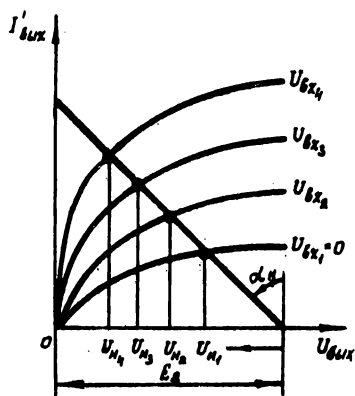
### § 2.3. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ И ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Для того чтобы изменить в нужном направлении характеристики четырехполюсника, пользуются положительными и отрицательными обратными связями. Обратные связи могут быть осуществлены по напряжению или по току. На рис. 2.8, а показана цепь с нелинейным направленным четырехполюсником, у которого осуществлена обратная связь по напряжению с помощью линейного направленного четырехполюсника.

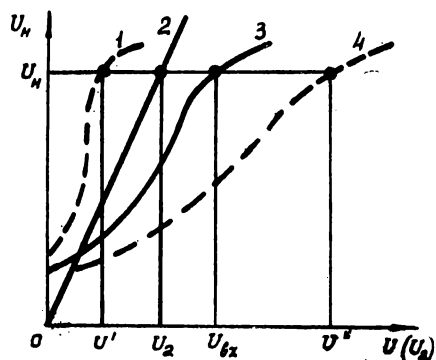
Для графического расчета такой цепи необходимо предварительно построить зависимость напряжения нагрузки  $U_n$  от напряжения источника сигнала  $U$  для четырехполюсника без обратной связи (кривая 3, рис. 2.8, в). В этом случае  $U = U_{вх}$  и для построения кривой  $U_n(U)$  используется семейство выходных вольт-амперных



а)



б)



в)

Рис. 2.8. Графический расчет цепи с направленным четырехполусником и обратной связью:

а — схема; б — характеристики выходной цепи; в — зависимости  $U_N(U)$

характеристик, изображенных совместно с нагрузочной прямой (рис. 2.8, б).

Теперь рассмотрим, как влияет обратная связь на напряжение на нагрузке.

При появлении напряжения на входе основного четырехполюсника появляется напряжение на нагрузке (кривая 3, рис. 2.8, в), которое, в свою очередь, является напряжением входа четырехполюсника обратной связи, так как  $U_1 = U_n$ . Характеристика  $U_2(U_1)$  четырехполюсника обратной связи показана на рис. 2.8, в (прямая 2), причем напряжение  $U_2$  откладывается по оси абсцисс, чтобы получить единую систему координат для обоих четырехполюсников.

Из рис. 2.8, в (кривая 3) видно, что, для того чтобы получить на нагрузке, например, напряжение  $U_n$ , необходимо на вход основного четырехполюсника без обратной связи подать напряжение  $U_{вх} = U$ . Однако напряжение, появившееся на нагрузке, поступает на вход четырехполюсника обратной связи, так как  $U_n = U_1$ , и на выходе четырехполюсника обратной связи возникает напряжение  $U_2$  (прямая 2, рис. 2.8, в). Если это напряжение складывается с напряжением источника сигнала  $U$  (как это показано на рис. 2.8, а), то обратная связь будет являться положительной (ПОС), т. е. при положительной обратной связи  $U_{вх} = U' + U_2$ . Это означает, что теперь для получения на нагрузке того же напряжения  $U_n$  требуется меньшее значение (на величину  $U_2$ ) напряжения источника сигнала (кривая 1, рис. 2.8, в), так как  $U' = U_{вх} - U_2$ .

Характеристика  $U_n(U)$  цепи с положительной обратной связью получается круче, чем без обратной связи, что в пределе позволяет получить даже релейный эффект в цепях с четырехполюсниками, имеющими однозначные входные и выходные характеристики, что принципиально невозможно, если обратная связь отсутствует. Крутизна результирующей характеристики  $U_n(U)$  зависит от наклона характеристики четырехполюсника обратной связи или, как иногда говорят, от глубины обратной связи.

Если теперь поменять местами зажимы 2 и 2' или 1 и 1' у четырехполюсника обратной связи (рис. 2.8, а), то  $U_{вх} = U'' - U_2$ . Такая обратная связь называется отрицательной (ООС), так как теперь, чтобы получить на нагрузке напряжение  $U_n$ , требуется увеличить (на величину  $U_2$ ) напряжение источника сигнала (кривая 4, рис. 2.8, в), так как  $U'' = U_{вх} + U_2$ .

Обратная связь позволяет осуществить влияние выхода на вход у направленного четырехполюсника, что превращает систему направленный четырехполюсник — обратная связь в ненаправленный четырехполюсник. Поскольку подобная внешняя обратная связь приводит к указанному выше превращению четырехполюсников, можно всякий ненаправленный четырехполюсник трактовать как направленный с внутренней обратной связью. Отсюда, в частности, следует, что единственной физической причиной возникнове-

ния релейных режимов является положительная внешняя или внутренняя обратная связь.

## § 2.4. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Во многих случаях режим работы четырехполюсника выбирают так, чтобы рабочие точки на входной и выходной характеристиках лежали на прямолинейных участках. Тогда можно, применив метод компенсации, составить линейаризованные уравнения для нелинейного четырехполюсника и всей цепи в целом. В дальнейшем из этих уравнений можно получать необходимые параметры всей цепи при условии, что рабочие точки на характеристиках не выходят из зоны прямолинейных участков.

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником (рис. 2.6, а), свойства которого описываются характеристиками, представленными на рис. 2.9, а, б.

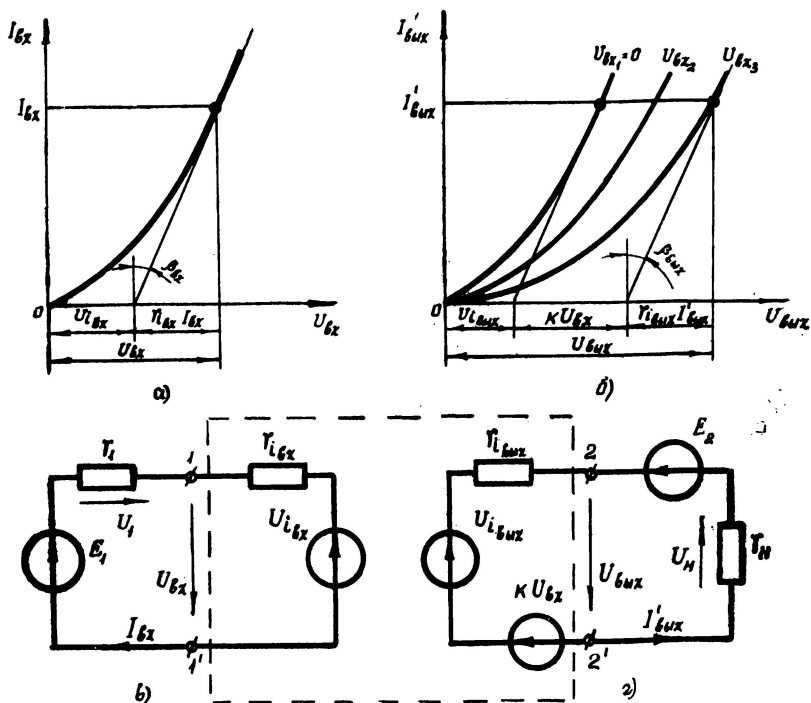


Рис. 2.9. К расчету цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:

а — входная характеристика; б — выходные характеристики; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Из входной характеристики четырехполюсника (рис. 2.9, а) уравнение входного напряжения можно записать в следующем виде (см. § 1.2):

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + r_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}} \quad (2.5)$$

(сущность значений  $U_{i_{\text{вх}}}$  и  $r_{i_{\text{вх}}}$  см. в § 1.2).

Уравнение выходного напряжения, которое можно получить из выходных характеристик четырехполюсника (рис. 2.9, б), имеет более сложный вид, поскольку появляется член уравнения ( $kU_{\text{вх}}$ ), определяющий положение той кривой семейства характеристик, на которой в данный момент лежит рабочая точка, относительно кривой, соответствующей  $U_{\text{вх}} = 0$ :

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + kU_{\text{вх}} + r_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}, \quad (2.6)$$

где  $k = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах (сущность значений  $U_{i_{\text{вых}}}$  и  $r_{i_{\text{вых}}}$  см. в § 1.2).

Следует заметить, что как в этом, так и во всех последующих случаях, когда рассматриваются семейства характеристик, предполагается, что прямолинейные участки этих характеристик приблизительно параллельны и равно отстоят друг от друга (рис. 2.9, б).

В соответствии с уравнениями (2.5) и (2.6) можно составить схему замещения четырехполюсника, а также всей цепи в целом, которая состоит из двух частей, относящихся ко входу (рис. 2.9, в) и к выходу (рис. 2.9, г). Из этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения  $kU_{\text{вх}}$ , а выходная цепь на вход не влияет. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является направленным, однако, в отличие от исходного (рис. 2.6, а), — линейным.

Из схемы рис. 2.9, в можно найти значения входного тока

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1 - U_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}} \quad (2.7)$$

и входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = E_1 - r_1 I_{\text{вх}} = \frac{r_{i_{\text{вх}}} E_1 + r_1 U_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}. \quad (2.8)$$

Из схемы рис. 2.9, г выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - kU_{\text{вх}}}{r_n + r_{i_{\text{вых}}}}, \quad (2.9)$$

откуда после подстановки в него уравнения (2.8)

$$I'_{\text{вых}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})(E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - k(r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}})}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})} = \\ = \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} - k \frac{r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}}}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})}. \quad (2.10)$$

Определив значение выходного тока, можно найти напряжение на нагрузке

$$U_{\text{н}} = r_{\text{н}}I'_{\text{вых}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}(E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - kr_{\text{н}} \frac{r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}}}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})} \quad (2.11)$$

или

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}(E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}kU_{\text{вх}}. \quad (2.12)$$

Падение напряжения на сопротивлении  $r_1$  и выходное напряжение четырехполюсника могут быть найдены соответственно как  $U_1 = r_1I_{\text{вх}}$  и  $U_{\text{вых}} = E_2 - U_{\text{н}}$  или из уравнения (2.6).

Во многих случаях значения  $U_{i_{\text{вх}}}$  и  $U_{i_{\text{вых}}}$  бывают весьма малы по сравнению с другими членами уравнений или взаимно компенсируются в схемах с несколькими четырехполюсниками и ими можно пренебречь. Тогда

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}; \quad (2.13)$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{r_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}E_1; \quad (2.14)$$

$$I'_{\text{вых}} = \frac{E_2}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} - \frac{kr_{i_{\text{вх}}}E_1}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})}; \quad (2.15)$$

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}E_2 - \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} \frac{r_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}kE_1 \quad (2.16)$$

или

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}E_2 - \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}kU_{\text{вх}}. \quad (2.17)$$

Из выражений (2.5) и (2.6) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать эти уравнения для расчета цепи, как это было рассмотрено в разделе линейных электрических цепей.

Так, например, если решить уравнения (2.5) и (2.6) относительно  $I_{\text{вх}}$  и  $I'_{\text{вых}}$ , то получится система уравнений четырехполюсника в форме  $g$ -параметров с одним укороченным уравнением:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} - \frac{1}{r_{i_{\text{вх}}}} U_{i_{\text{вх}}} = g_{11} (U_{\text{вх}} - U_{i_{\text{вх}}}); \\ I'_{\text{вых}} &= -\frac{k}{r_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вх}} + \frac{1}{r_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вых}} - \frac{1}{r_{i_{\text{вых}}}} U_{i_{\text{вых}}} = \\ &= g_{21} U_{\text{вх}} + g_{22} (U_{\text{вых}} - U_{i_{\text{вых}}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

или для варианта, когда  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{вых}}} = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} = g_{11} U_{\text{вх}}; \\ I'_{\text{вых}} &= -\frac{k}{r_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вх}} + \frac{1}{r_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вых}} = g_{21} U_{\text{вх}} + g_{22} U_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

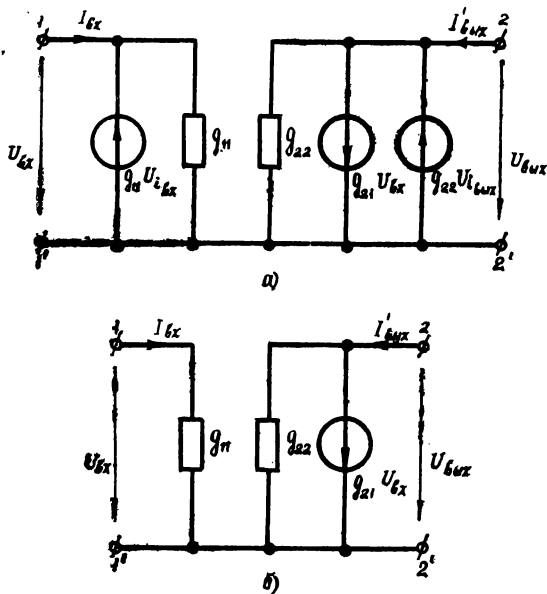


Рис. 2.10. К расчету цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:  
а — полная схема замещения четырехполюсника (с  $g$ -параметрами); б — схема замещения при условии  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{вых}}} = 0$

Схемы замещения четырехполюсников, отвечающих уравнениям (2.18) и (2.19), приведены соответственно на рис. 2.10, а и рис. 2.10, б.

Обратим внимание на то, что все три параметра линеаризованного направленного четырехполюсника  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  и  $g_{22}$  (так же как  $k$ ,  $r_{i_{вх}}$  и  $r_{i_{вых}}$  в предыдущем варианте записи) взаимно независимы.

Подобным же образом может быть получена система уравнений в форме  $r$ -параметров,  $h$ -параметров и т. д.

В случае необходимости от источников тока в схемах замещения можно перейти к источникам напряжений и, кроме того, иметь зависимые источники не только от входного напряжения, но и от входного тока. Но всегда линеаризованный направленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться тремя параметрами.

## § 2.5. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НЕНАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником (рис. 2.11, а) (так же как и в предыдущих случаях) состоит в нахождении входного и выходного токов, если заданы  $E_1$ ,  $r_1$ ,  $E_2$ ,  $r_n$  и входные (рис. 2.11, з) и выходные (рис. 2.11, в) характеристики четырехполюсника.

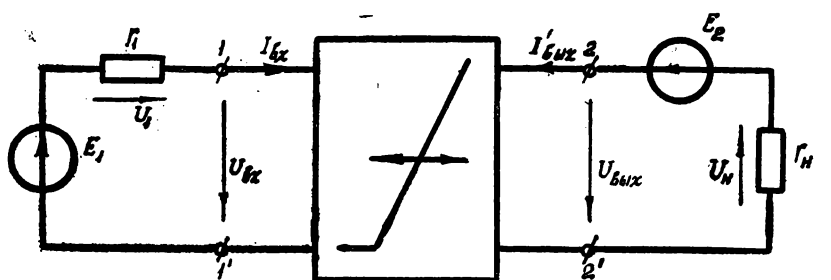
Для удобства расчета целесообразно построить две промежуточные характеристики, относящиеся уже к схеме рис. 2.11, а в целом, координаты которых определяются из семейства входных и выходных характеристик и параметров схемы.

Расчет начинается с выходных характеристик (рис. 2.11, в), на которых строится нагрузочная прямая под углом  $\alpha_n = \operatorname{arctg} r_n$ . Пересечение этой прямой с кривыми, соответствующими определенным значениям входного напряжения ( $U_{вх1}$ ,  $U_{вх2}$  и т. д.), дает возможность построить промежуточную зависимость  $I'_{вых}(U_{вх})$  (рис. 2.11, б). Кроме того, точки пересечения на выходных характеристиках позволяют определить значения  $U_{вых1}$ ,  $U_{вых2}$  и т. д. и, используя зависимость  $I'_{вых}(U_{вх})$ , построить вторую промежуточную кривую  $I_{вх}(U_{вх})$ . Обе промежуточные зависимости соответствуют сопротивлению нагрузки, равному  $r_n$ , и э. д. с. источника питания выходной цепи, равной  $E_2$ . Кривая  $I_{вх}(U_{вх})$  показана пунктиром на графике входных характеристик (рис. 2.11, з), которые перевернуты на  $180^\circ$  для удобства построений.

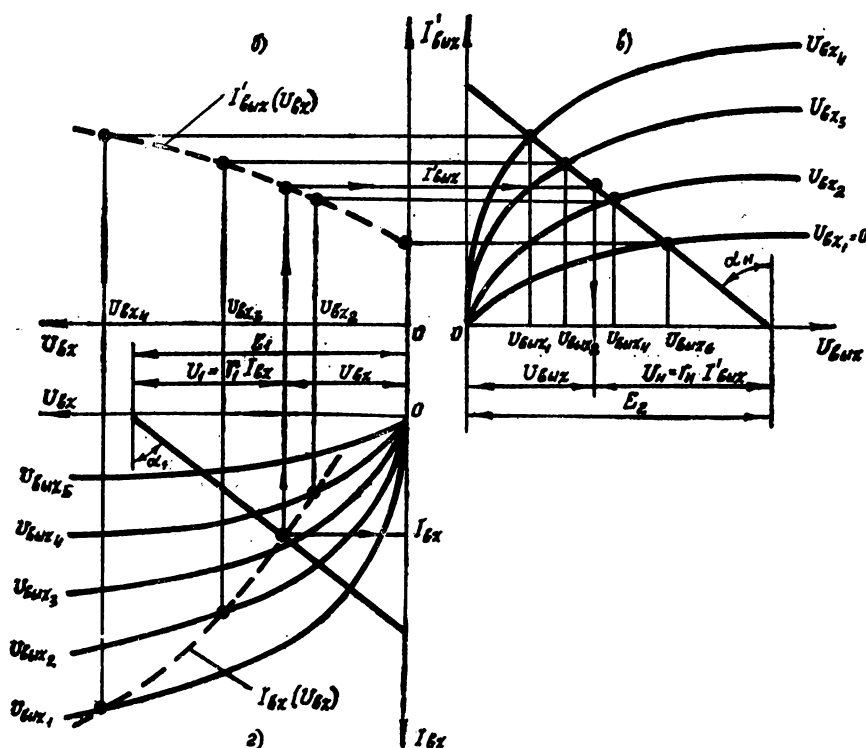
Отложив на оси абсцисс (рис. 2.11, з) значение  $E_1$ , построим прямую под углом  $\alpha_1 = \operatorname{arctg} r_1$ . Рабочей точкой на семействе входных характеристик будет место пересечения промежуточной кривой и прямой линии. На оси ординат найдем значение входного тока  $I_{вх}$ ; на оси абсцисс — значение входного напряжения  $U_{вх}$  и, если нужно, напряжения  $U_1$ .

Если теперь перенести положение рабочей точки на промежуточную кривую  $I'_{вых}(U_{вх})$  (рис. 2.11, б), то получим значение выходного тока  $I'_{вых}$ , соответствующее входному сигналу четырехполюсника. Точка пересечения ординаты выходного тока  $I'_{вых}$  с нагрузочной





а)



а)

Рис. 2.11. Графический расчет цепи с ненаправленным четырех-  
полюсником:

а — схема; б — зависимость  $I'_{\text{вых}}(U_{\text{вых}})$  при  $E_2, r_H = \text{const}$ ; в — характеристики выходной цепи; г — характеристики входной цепи и характеристика  $I_{\text{вх}}(U_{\text{вх}})$  при  $E_2, r_H = \text{const}$

прямой (рис. 2.11, в) — рабочая точка на семействе выходных характеристик, по которой далее определяются выходное напряжение четырехполюсника  $U_{\text{вых}}$  и напряжение по нагрузке  $U_{\text{н}}$ .

## § 2.6. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НЕНАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Если рабочие точки на входных и выходных характеристиках ненаправленного четырехполюсника не выходят за пределы прямолинейных участков, то для расчета цепи и в этом случае можно применить метод компенсации.

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполюсником (рис. 2.11, а), характеристики которого показаны на рис. 2.12, а, б.

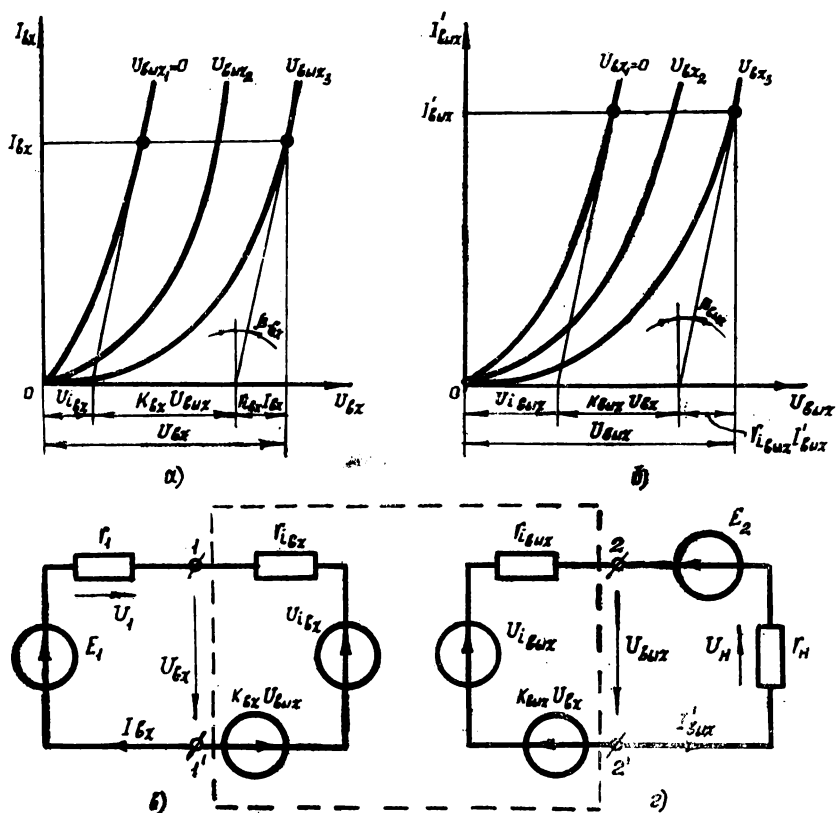


Рис. 2.12. К расчету цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — входные характеристики; б — выходные характеристики; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Из входных характеристик четырехполюсника (рис. 2.12, а) можно записать уравнение входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + k_{\text{вх}} U_{\text{вых}} + r_{i_{\text{вх}}} I'_{\text{вх}}, \quad (2.20)$$

где  $k_{\text{вх}} = \frac{\Delta U_{\text{вх}}}{\Delta U_{\text{вых}}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых входных зажимах (сущность значений  $U_{i_{\text{вх}}}$  и  $r_{i_{\text{вх}}}$  см. в § 1.2).

Для выходного напряжения

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + k_{\text{вых}} U_{\text{вх}} + r_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}, \quad (2.21)$$

где  $k_{\text{вых}} = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах (сущность значений  $U_{i_{\text{вых}}}$  и  $r_{i_{\text{вых}}}$  см. в § 1.2).

Согласно уравнениям (2.20) и (2.21) можно составить схему замещения для четырехполюсника, а также всей цепи в целом, состоящую из двух частей: входной (рис. 2.12, в) и выходной (рис. 2.12, г). Влияние выхода на вход и входа на выход осуществляется соответственно через зависимые источники напряжения  $k_{\text{вх}} U_{\text{вых}}$  и  $k_{\text{вых}} U_{\text{вх}}$ . Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является линейным, в отличие от исходного (рис. 2.12, а).

Из схем рис. 2.12, в и 2.12, г можно получить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) I_{\text{вх}} + U_{i_{\text{вх}}} + k_{\text{вх}} (E_2 - r_{\text{п}} I'_{\text{вых}}); \\ E_2 &= (r_{\text{п}} + r_{i_{\text{вых}}}) I'_{\text{вых}} + U_{i_{\text{вых}}} + k_{\text{вых}} (E_1 - r_1 I_{\text{вх}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

которая преобразуется относительно двух неизвестных  $I_{\text{вх}}$  и  $I'_{\text{вых}}$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 - U_{i_{\text{вх}}} - k_{\text{вх}} E_2 &= (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) I_{\text{вх}} - k_{\text{вх}} r_{\text{п}} I'_{\text{вых}}; \\ E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - k_{\text{вых}} E_1 &= -k_{\text{вых}} r_1 I_{\text{вх}} + (r_{\text{п}} + r_{i_{\text{вых}}}) I'_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Совместное решение двух уравнений системы (2.23) дает возможность определить входной ток

$$I_{\text{вх}} = \frac{(r_{\text{п}} + r_{i_{\text{вых}}}) (E_1 - U_{i_{\text{вх}}}) - k_{\text{вх}} (k_{\text{вых}} r_{\text{п}} E_1 + r_{i_{\text{вых}}} E_2 + r_{\text{п}} U_{i_{\text{вых}}})}{(r_{\text{п}} + r_{i_{\text{вых}}}) (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) - k_{\text{вх}} k_{\text{вых}} r_1 r_{\text{п}}} \quad (2.24)$$

и выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) (E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - k_{\text{вых}} (k_{\text{вх}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{вх}}} E_1 + r_1 U_{i_{\text{вх}}})}{(r_{\text{п}} + r_{i_{\text{вых}}}) (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) - k_{\text{вх}} k_{\text{вых}} r_1 r_{\text{п}}}, \quad (2.25)$$

а зная токи, — напряжения  $U_{\text{вх}}$ ,  $U_{\text{вых}}$ ,  $U_1$  и  $U_{\text{н}}$ .

В тех случаях, когда значениями  $U_{i_{\text{ВХ}}}$  и  $U_{i_{\text{ВЫХ}}}$  можно пренебречь, имеем

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) E_1 - k_{\text{ВХ}} (k_{\text{ВЫХ}} r_{\text{H}} E_1 + r_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2)}{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - k_{\text{ВХ}} k_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{H}}} \quad (2.26)$$

и

$$I'_{\text{ВЫХ}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - k_{\text{ВЫХ}} (k_{\text{ВХ}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - k_{\text{ВХ}} k_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{H}}} \quad (2.27)$$

Входное напряжение при этом допущении равно

$$U_{\text{ВХ}} = \frac{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) r_{i_{\text{ВХ}}} E_1 - k_{\text{ВХ}} r_1 r_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2}{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - k_{\text{ВХ}} k_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{H}}} \quad (2.28)$$

а напряжение на нагрузке —

$$U_{\text{H}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - k_{\text{ВХ}} (k_{\text{ВХ}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(r_{\text{H}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - k_{\text{ВХ}} k_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{H}}} r_{\text{H}} \quad (2.29)$$

Из выражений (2.20) и (2.21) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и, применяя приемы раздела линейной электротехники, использовать эти уравнения для расчета.

Если решить уравнения (2.20) и (2.21) относительно  $I_{\text{ВХ}}$  и  $I'_{\text{ВЫХ}}$ , то получится система уравнений четырехполюсника в форме  $g$ -параметров:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{k_{\text{ВХ}}}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{i_{\text{ВХ}}} = g_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}) + g_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{k_{\text{ВЫХ}}}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{i_{\text{ВЫХ}}} = g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

или с учетом, что в некоторых случаях  $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{k_{\text{ВХ}}}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = g_{11} U_{\text{ВХ}} + g_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{k_{\text{ВЫХ}}}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} U_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Из уравнений (2.30) и (2.31) видно, что линеаризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  и  $g_{22}$  ( $k_{\text{ВХ}}$ ,  $k_{\text{ВЫХ}}$ ,  $r_{i_{\text{ВХ}}}$  и  $r_{i_{\text{ВЫХ}}}$ ).

На рис. 2.13, а приведена П-образная схема замещения четырехполюсника, которая соответствует системе уравнений (2.30). Дей-

ствительно, если составить для этой схемы уравнения методом узловых напряжений, то для левого узла

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= (g_{11} + g_{12}) U_{\text{вх}} - g_{11} U_{i_{\text{вх}}} - g_{12} (U_{\text{вх}} - U_{\text{ввых}}) = \\ &= g_{11} (U_{\text{вх}} - U_{i_{\text{вх}}}) + g_{12} U_{\text{ввых}}. \end{aligned}$$

В свою очередь, для правого узла получим

$$\begin{aligned} I'_{\text{ввых}} &= (g_{22} + g_{12}) U_{\text{ввых}} - g_{22} U_{i_{\text{ввых}}} + (g_{21} - g_{12}) U_{\text{вх}} - g_{12} (U_{\text{ввых}} - U_{\text{вх}}) = \\ &= g_{21} U_{\text{вх}} + g_{22} (U_{\text{ввых}} - U_{i_{\text{ввых}}}). \end{aligned}$$

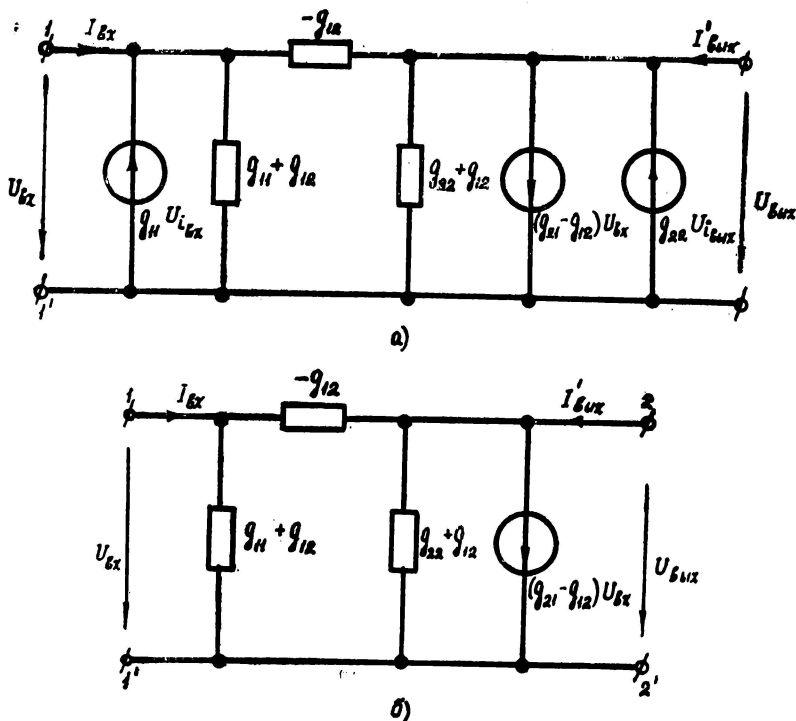


Рис. 2. 13. К расчету цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — полная схема замещения четырехполюсника (с  $g$ -параметрами); б — схема замещения при условии  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{ввых}}} = 0$

Подобным же образом можно доказать, что П-образная схема замещения, показанная на рис. 2. 13, б, соответствует уравнениям (2. 31).

В случае необходимости известными методами преобразования можно получить систему уравнений в форме  $r$ -параметров,  $h$ -параметров и т. д., П-образную схему заменить Т-образной, от источни-

ков тока перейти к источникам напряжений. Кроме того, источники в схемах замещения могут зависеть не только от входного напряжения, но и от входного тока и даже от сигналов промежуточных цепей схемы замещения и т. д. Но всегда линеаризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

---

## Глава 3. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

### § 3.1. ОСОБЕННОСТИ ДВУХПОЛЮСНИКОВ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ, ИХ ИСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ

В цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками наблюдаются явления гораздо более сложные, чем в цепях постоянного тока. В этом случае будем полагать, что двухполюсники могут быть со свойствами активного сопротивления (резистивными), чисто реактивными (индуктивными или емкостными) или смешанными (активно-реактивными). Условные обозначения таких двухполюсников показаны на рис. 3.1.

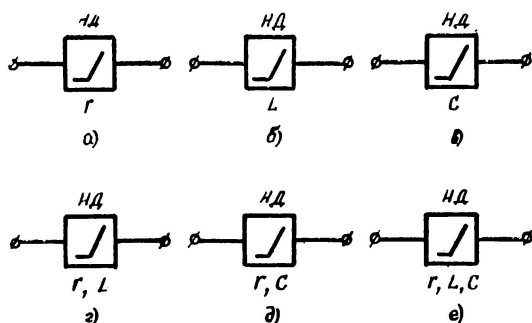


Рис. 3.1. Условные обозначения нелинейных двухполюсников на переменном токе:  
 $a$  — резистивного;  $б$  — индуктивного;  $в$  — емкостного;  $г$  — активно-индуктивного;  $д$  — активно-емкостного;  $е$  — активно-реактивного

Если в активно-реактивном двухполюснике нелинейной является только одна часть, то вторая обычно может быть выделена в виде отдельных линейных активных или реактивных сопротивлений.

Поэтому, если в схеме задан активно-реактивный двухполюсник вида рис. 3.1, *е*, то предполагается, что нелинейными являются все три составляющие (*r*, *L* и *C*). Если же нелинейной является только часть этого двухполюсника, например *r*, то он должен быть преобразован в двухполюсник вида рис. 3.1, *а*, включенный последовательно с линейными индуктивностью и емкостью. Ниже будут в качестве исходных рассматриваться, как правило, двухполюсники вида рис. 3.1, *а*, *б* и *в*.

Свойства нелинейных двухполюсников на переменном токе описываются большим числом исходных характеристик, выбор координат которых зависит от физических процессов, протекающих в конкретных схемах, содержащих двухполюсники.

В общем случае при синусоидальном напряжении ток в цепях с нелинейными двухполюсниками становится несинусоидальным. Тогда для полного анализа явления нужно пользоваться вольт-амперной характеристикой, связывающей мгновенные значения тока и напряжения, так как ток практически мгновенно следует за каждым изменением напряжения. Однако, как известно, прямая связь между мгновенными значениями тока и напряжения (закон Ома) наблюдается только у двухполюсника со свойствами активного сопротивления (рис. 3.1, *а*). У индуктивного (рис. 3.1, *б*) и емкостного (рис. 3.1, *в*) двухполюсников такая связь — интегро-дифференциальная. Поэтому и форма исходных характеристик этих двухполюсников будет различная.

Двухполюсник со свойствами активного сопротивления описывается вольт-амперной характеристикой  $i = f(u)$  (рис. 3.2), из которой, как и в случае постоянного тока, для каждой точки характеристики могут быть получены значения активного статического сопротивления

$$r_{ст} = \frac{u}{i} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

и активного дифференциального сопротивления

$$r_d = \frac{du}{di} = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.2)$$

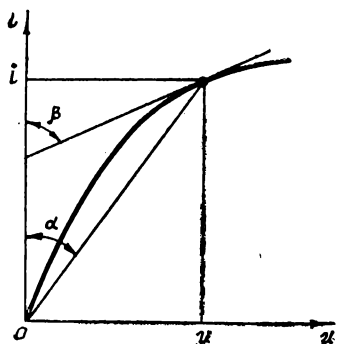


Рис. 3.2. Определение активного статического и дифференциального сопротивлений по характеристике

Из характеристики  $i = f(u)$  можно получить зависимости  $r_{ст}(i)$ ,  $r_d(i)$ ,  $r_{ст}(u)$  и  $r_d(u)$  и использовать их в качестве исходных.

Для индуктивного двухполюсника (рис. 3.1, *б*) первичной характеристикой является зависимость потокосцепления самоиндукции от тока  $\Psi = f(i_L)$  (рис. 3.3). По аналогии с вышеизложенным



здесь также могут быть введены понятия статической индуктивности

$$L_{\text{ст}} = \frac{\Psi}{i_L} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.3)$$

и дифференциальной индуктивности

$$L_{\text{д}} = \frac{d\Psi}{di_L} = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.4)$$

На основании закона электромагнитной индукции напряжение на индуктивном двухполюснике

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{di_L} (L_{\text{ст}} i_L) \frac{di_L}{dt} = \\ &= \left( L_{\text{ст}} + i_L \frac{dL_{\text{ст}}}{di_L} \right) \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \quad (3.5)$$

или

$$u_L = \frac{d\Psi}{di_L} \frac{di_L}{dt} = L_{\text{д}} \frac{di_L}{dt}. \quad (3.6)$$

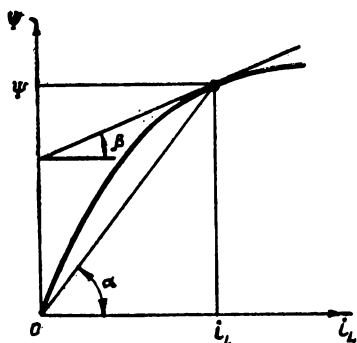


Рис. 3.3. Определение статической и дифференциальной индуктивностей по характеристике

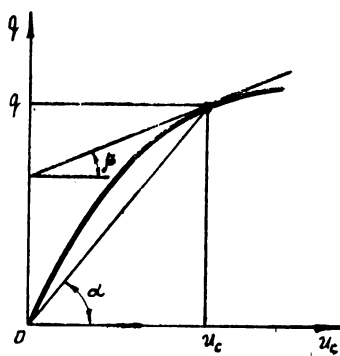


Рис. 3.4. Определение статической и дифференциальной емкостей по характеристике

Из характеристики  $\Psi = f(i_L)$  можно получить зависимости  $L_{\text{ст}}(i_L)$ ,  $L_{\text{д}}(i_L)$ ,  $L_{\text{ст}}(\Psi)$  и  $L_{\text{д}}(\Psi)$ . Особенно удобной для расчета, как это следует из уравнения (3.6), является зависимость  $L_{\text{д}}(i_L)$ , используя которую можно получить простую связь между мгновенными значениями тока и напряжения.

Для емкостного двухполюсника (рис. 3.1, в) первичной характеристикой является зависимость заряда от напряжения  $q = f(u_C)$  (рис. 3.4). При этом следует различать статическую емкость

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u_C} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.8)$$

и дифференциальную емкость

$$C_d = \frac{dq}{du_C} = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.7)$$

Ток через емкостный двухполюсник

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{du_C} (C_{\text{ст}} u_C) \frac{du_C}{dt} = \\ &= \left( C_{\text{ст}} + u_C \frac{dC_{\text{ст}}}{du_C} \right) \frac{du_C}{dt}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

или

$$i_C = \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt} = C_d \frac{du_C}{dt}. \quad (3.10)$$

Из характеристики  $q = f(u_C)$  могут быть получены зависимости  $C_{\text{ст}}(u_C)$ ,  $C_d(u_C)$ ,  $C_{\text{ст}}(q)$  и  $C_d(q)$ , из которых наиболее удобной для расчета является зависимость  $C_d(u_C)$ .

Во многих случаях форма тока или напряжения не является очень существенной, и тогда вольт-амперная характеристика может быть построена не для мгновенных, а для действующих  $I = f_1(U)$ , средних  $I_{\text{ср}} = f_2(U_{\text{ср}})$  или амплитудных  $I_m = f_3(U_m)$  значений тока и напряжения соответствующей фиксированной частоты. При этом под действующим значением понимается или действующее значение основной (первой) гармоники, или эквивалентное действующее значение несинусоидальной функции.

Методы расчета, основанные на таком допущении, называются квазилинейными, так как предполагается, что форма токов и напряжений остается синусоидальной (как в линейных цепях), а нелинейность сохраняется только для соотношений между действующими значениями тока и напряжения.

Имеется группа двухполюсников, которые не приближенно, а фактически обладают квазилинейными свойствами. Так, например, если нелинейность основана на температурной зависимости сопротивления, то тепловой процесс, который обуславливает нелинейность вольт-амперной характеристики, протекает относительно медленно. Постоянная времени нагрева часто бывает так велика, что даже при сравнительно низкой частоте температура таких двухполюсников и соответственно сопротивление в течение периода практически не изменяются, т. е. температура не успевает следовать за изменениями мгновенных значений тока.

В общем случае для нелинейного двухполюсника при квазилинейном рассмотрении могут быть введены понятия полного статического сопротивления (рис. 3.5)

$$z_{ст} = \frac{U}{I} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.11)$$

и полного дифференциального сопротивления

$$z_d = \frac{dU}{dI} = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.12)$$

Эти понятия справедливы для всех двухполюсников, показанных на рис. 3.1, причем для первых трех двухполюсников они превращаются соответственно в активное статическое и дифференциальное сопротивления  $r_{ст}$  и  $r_d$ , индуктивное статическое и дифференциальное сопротивления  $x_{Lст}$  и  $x_{Lд}$  и емкостное статическое и дифференциальное сопротивления  $x_{Cст}$  и  $x_{Cд}$ . По аналогии с цепями постоянного тока можно также использовать понятия статических и дифференциальных проводимостей.

Кроме вольт-амперных характеристик в качестве исходных можно пользоваться зависимостями  $z_{ст}(I)$ ,  $r_{ст}(I)$ ,  $x_{Lст}(I)$ ,  $x_{Cст}(I)$ ,  $z_{ст}(U)$  и т. д. Следует отметить, что характеристики  $z_{ст}(I)$ ,  $z_d(I)$ ,  $z_{ст}(U)$  и  $z_d(U)$  не дают полной информации о двухполюснике, так как неизвестно изменение фазовых сдвигов с изменением сигнала.

Вольт-амперные характеристики реактивных и активно-реактивных двухполюсников зависят от частоты. Поэтому для анализа нелинейной цепи не при фиксированной, а для меняющейся частоты необходимо располагать зависимостью тока от двух переменных (напряжения и частоты), т. е. семейством характеристик  $I = f(U, \omega)$ . На рис. 3.6 показано такое семейство характеристик для емкостного двухполюсника. При  $\omega = \text{const}$  вместо семейства получается одна вольт-амперная характеристика; при  $\omega = 0$  — вырожденная характеристика на постоянном токе.

Если в качестве исходных данных используются статические и дифференциальные сопротивления, то их также следует рассматривать в функции двух переменных — тока и частоты или напряжения и частоты (рис. 3.7).

Семейства характеристик двухполюсника могут быть представлены также в трехмерном пространстве.

При использовании квазилинейного подхода существенной разницы между расчетом цепей переменного и постоянного тока нет, хотя методы расчета обычно усложняются, что связано с необходимостью учитывать фазовые сдвиги между током и напряжением.

Необходимо также отметить, что если расчет линейных цепей и цепей с нелинейными двухполюсниками на постоянном токе можно проводить в известной степени формально, то для расчета

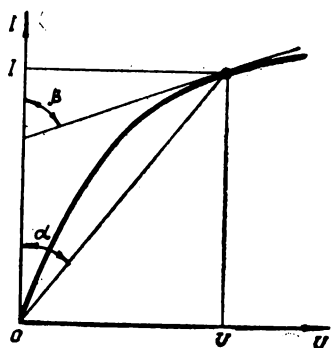


Рис. 3.5. Определение полного статического и дифференциального сопротивлений по характеристике

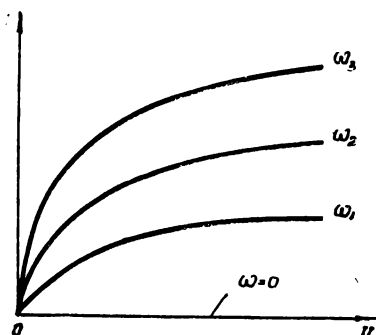


Рис. 3.6. Семейство вольт-амперных характеристик емкостного двухполюсника для разных частот

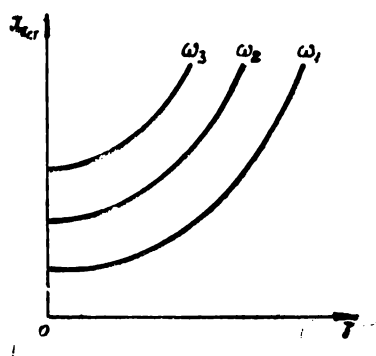


Рис. 3.7. Семейство характеристик  $x_{C\sigma}(I)$  для разных частот

нелинейных цепей переменного тока необходимо, как правило, предварительно уяснить сущность физических процессов, происходящих в конкретной анализируемой цепи. Только тогда можно выбрать рациональный метод расчета.

### § 3.2. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И МЕТОДОМ ЭЛЛИПСА

Следует помнить, что, за исключением случаев фактической квазилинейности, расчет по действующим значениям всегда будет приближенным, так как степень несинусоидальности токов и напряжений в каждой конкретной цепи зависит от режима работы.

Таким образом, принципиально не может быть универсальных исходных характеристик, и в каждом отдельном случае приходится ориентироваться на характеристики двухполюсников, снятые в режиме, близком к ожидаемому. Для оценки степени этой близости точных критериев не существует. Будем полагать в дальнейшем, что соответствующие ожидаемому режиму исходные характеристики на требуемой частоте имеются.

При последовательном, параллельном и смешанном соединении двухполюсников на переменном токе возможны различные их комбинации, которые определяют тот или иной подход к расчету электрической цепи.

Так, если соединяются двухполюсники с одинаковыми свойствами ( $r$  и  $r$ ;  $L$  и  $L$ ;  $C$  и  $C$ ) или двухполюсники и линейные элементы одного характера, то графический расчет проводится так же, как и на постоянном токе (см. § 1.3). Приемы расчета цепей на постоянном токе применимы и для активно-реактивных двухполюсников ( $r$ ,  $L$  и  $r$ ,  $L$ ;  $r$ ,  $C$  и  $r$ ,  $C$ ;  $r$ ,  $L$ ,  $C$  и  $r$ ,  $L$ ,  $C$ ), если углы сдвига между током и напряжением в каждом из соединяемых двухполюсников одинаковы. Тогда сложение абсцисс (напряжений) или ординат (токов) производят арифметически (для соединения  $L$  и  $C$  вычитают абсциссы или ординаты).

При соединении между собой двухполюсников с различными свойствами ( $r$  и  $C$ ;  $r$  и  $L$ ) или двухполюсников ( $r$ ;  $L$ ;  $C$ ) и линейных комплексных сопротивлений необходимо учитывать углы сдвига между током и напряжением, которые для таких сочетаний двухполюсников и линейных сопротивлений легко определяются.

Если в цепи соединены между собой активно-реактивные двухполюсники, то для расчета такой цепи кроме вольт-амперных характеристик  $I = f_1(U)$  необходимо иметь зависимости угла сдвига между током и напряжением от тока (напряжения):  $\varphi = f_2(I)$  или  $\varphi = f_3(U)$ . Это объясняется тем, что в этом случае для каждой точки вольт-амперной характеристики угол сдвига будет разный (см. рис. 3.8, б).

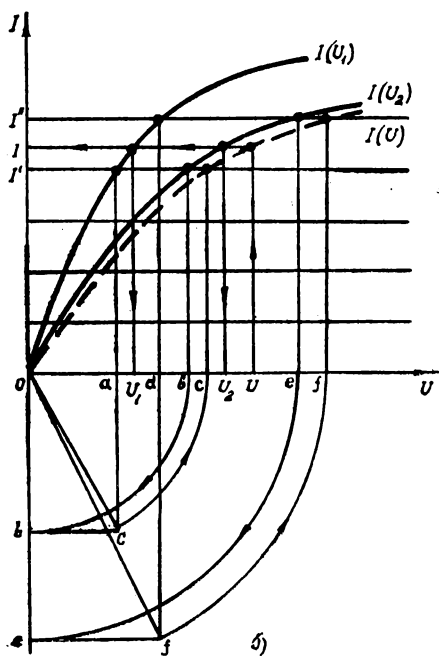
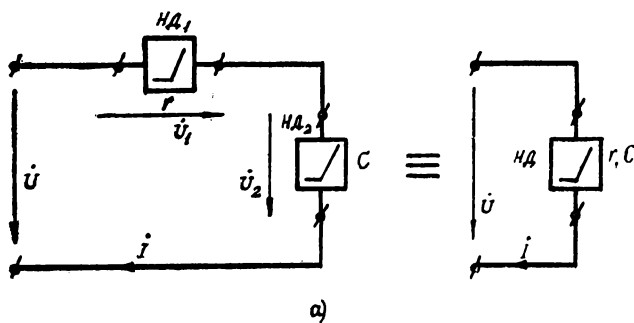


Рис. 3.8. Последовательное соединение двухполюсников  $r$  и  $C$ :  
 а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная характеристики

## Последовательное соединение. Резонанс напряжений

Рассмотрим последовательное соединение двух нелинейных двухполюсников  $\text{НД}_1(r)$  и  $\text{НД}_2(C)$  (рис. 3.8, *а*), вольт-амперные характеристики которых  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$  представлены на рис. 3.8, *б*.

Так как для цепи синусоидального тока по второму закону Кирхгофа  $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$  или  $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$ , то сложение ординат (напряжений) для построения эквивалентной характеристики необходимо производить геометрически. Это построение показано на рис. 3.8, *б* для двух значений тока:  $I'$  и  $I''$ . При значении тока в цепи  $I'$  падения напряжений на двухполюсниках  $\text{НД}_1$  и  $\text{НД}_2$  определяются соответственно отрезками на оси абсцисс  $oa$  и  $ob$ . Если считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, то напряжение  $U_1$  (отрезок  $oa$ ) совпадает с осью абсцисс, а напряжение  $U_2$  (отрезок  $ob$ ) отстает от тока на угол  $90^\circ$ , и его необходимо повернуть на этот угол по часовой стрелке. Геометрическое сложение отрезков  $oa$  и  $ob$  даст отрезок  $os$ , который необходимо повернуть до совпадения с осью абсцисс, а затем найти точку пересечения этого отрезка, т. е. напряжения  $U$  с током  $I'$ . Аналогичное построение проведено и для значения тока  $I''$ . Поскольку свойства (характер фазового сдвига) двухполюсников ( $r$  и  $C$ ) не меняются в зависимости от тока (напряжения), то для любых значений тока угол сдвига между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  будет равен  $90^\circ$ .

Если к цепи приложено напряжение  $U$ , то по эквивалентной характеристике  $I(U)$  можно найти ток в цепи  $I$  и падения напряжений на двухполюсниках  $U_1$  и  $U_2$ .

Из графических построений на рис. 3.8, *б* видно, что в каждой точке эквивалентной вольт-амперной характеристики  $I(U)$  меняется не только модуль напряжения, но и угол сдвига между током и напряжением (геометрически построенные отрезки  $os$  и  $of$ ). Таким образом, если необходимо, зависимость  $\varphi(I)$  или  $\varphi(U)$  легко получается из рис. 3.8, *б*.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двухполюсника  $\text{НД}(r)$  и линейного комплексного сопротивления, имеющего активно-емкостный характер (рис. 3.9, *а*). Вольт-амперные характеристики  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$  приведены на рис. 3.9, *б*. В этом случае можно воспользоваться подходом, изложенным выше, если объединить двухполюсник  $\text{НД}(r)$  и активное сопротивление  $r$ . Однако целесообразней не делать промежуточной операции, а сразу получить эквивалентную характеристику.

Будем считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, тогда при любых значениях тока напряжения  $U_1$  будут совпадать с осью абсцисс, а напряжения  $U_2$  — отставать от этой оси на угол  $\varphi = \arctg \frac{x_c}{r}$ . Значение напряжения  $U$  есть геометрическая сумма напряжений  $U_1$  и  $U_2$ .

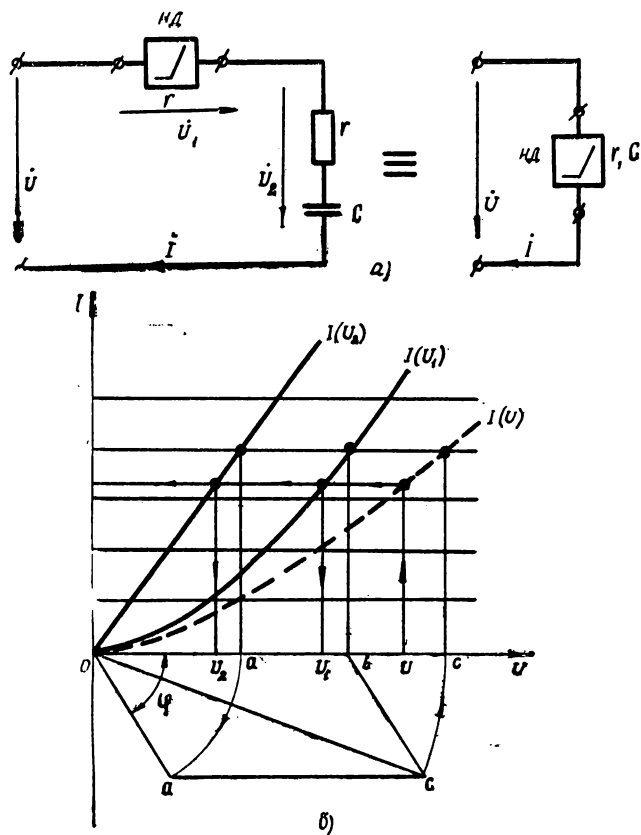


Рис. 3.9. Последовательное соединение двухполюсника  $r$  и линейного активно-емкостного сопротивления:  
 а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная характеристики



На рис. 3.9, б показано построение одной точки эквивалентной характеристики  $I(U)$  для тока  $I'$ . Отрезок  $oa$  (напряжение  $U_2$ ) необходимо повернуть по часовой стрелке на угол  $\varphi$  и сложить геометрически с отрезком  $ob$  (напряжение  $U_1$ ). Полученный отрезок  $oc$  (напряжение  $U$ ) поворачивают до совпадения с осью абсцисс и находят точку пересечения этой абсциссы с током  $I'$ .

После построения эквивалентной характеристики по заданному входному напряжению  $U$  находят ток в цепи  $I$  и падения напряжений  $U_1$  и  $U_2$ .

Аналогично строят эквивалентную характеристику, если задана цепь с последовательно включенными активно-реактивными двухполюсниками. Однако в этом случае, как было указано ранее, необходимо для каждого двухполюсника иметь кроме вольт-амперной характеристики зависимость  $\varphi(I)$ . Тогда, задаваясь значениями токов, можно найти значения напряжений и углов сдвига между током и напряжениями и произвести геометрические построения. При этом для каждой пары напряжений будут получаться различные углы сдвига между ними, так как  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

В качестве исходных характеристик для графического расчета цепей могут использоваться также зависимости сопротивлений от тока и напряжения.

Если для схемы рис. 3.8, а заданы зависимости  $r_{ст}(I)$  и  $x_{ст}(I)$  (рис. 3.10, а), то, задаваясь значениями тока, можно найти соответствующие им значения  $r_{ст}$  и  $x_{ст}$  и значения  $z_{ст}$ . Так как  $z_{ст} = \sqrt{r_{ст}^2 + x_{ст}^2}$ , необходимо произвести геометрическое сложение  $r_{ст}$  и  $x_{ст}$ , что и показано на рис. 3.10, а для значения тока  $I'$ .

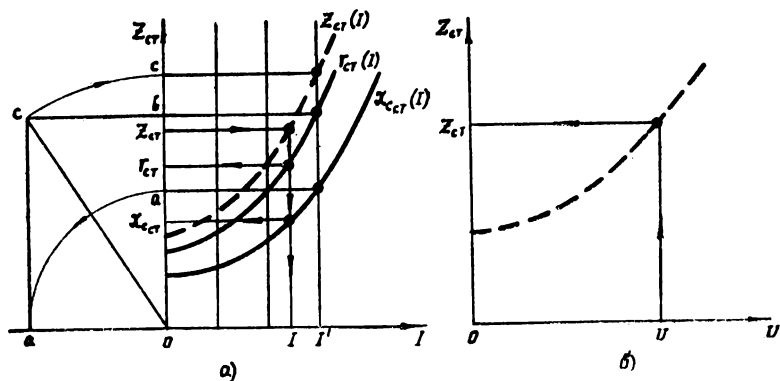


Рис. 3.10. Последовательное соединение двухполюсников  $r$  и  $C$ : а — исходные и эквивалентная зависимости  $z_{ст}(I)$ ; б — зависимость  $z_{ст}(U)$

Эквивалентная характеристика  $z_{ст}(I)$  используется далее для построения зависимости  $z_{ст}(U)$ , по которой при заданном входном напряжении  $U$  можно определить значение  $z_{ст}$  (рис. 3.10, б). Это значение переносят на рис. 3.10, а и по эквивалентной характе-

ристике  $z_{ст}(I)$  определяют ток в цепи  $I$ . Зная ток в цепи, по характеристикам  $r_{ст}(I)$  и  $x_{ст}(I)$  можно определить значения  $r_{ст}$  и  $x_{ст}$ . Падения напряжений на двухполюсниках (рис. 3.8, а) можно получить из закона Ома:  $U_1 = r_{ст}I$  и  $U_2 = x_{ст}I$ .

При последовательном соединении на переменном токе можно, как и в цепи постоянного тока, применять метод пересечения, который в этом случае носит название метода эллипса.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 3.11, а. Введем для этой схемы условный ток короткого замыкания, под которым понимается ток в цепи при коротком замыкании зажимов двухполюсника НД:

$$I_{кз} = \frac{U}{x_C}. \quad (3.13)$$

Если теперь уравнение  $U^2 = U_1^2 + x_C^2 I^2$  разделить на  $U^2$  и использовать соотношение (3.13), то получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{U_1^2}{U^2} + \frac{I^2}{I_{кз}^2} = 1 \quad (3.14)$$

с центром в начале координат и полуосями  $U$  и  $I_{кз}$ . Переменным  $U_1$  и  $I$  геометрически соответствуют текущие координаты эллипса.

Графический расчет цепи рис.

3.11, а показан на рис. 3.11, б, где точка пересечения эллипса с вольт-амперной характеристикой двухполюсника  $I(U_1)$  определяет значение тока в цепи  $I$  и напряжения  $U_1$ . Напряжение  $U_2$  можно найти по закону Ома:  $U_2 = x_C I$ .

Нетрудно видеть, что метод эллипса является более общим случаем метода пересечения, когда вследствие фазовых сдвигов линейная вольт-амперная характеристика  $I(U_2)'$  преобразуется в эллипс. Если же в схеме рис. 3.11, а вместо емкости  $C$  было бы включено сопротивление  $r$ , при котором фазовые сдвиги между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  отсутствуют, то уравнение эллипса превратилось бы в уравнение прямой в отрезках на осях. Действительно, при этом  $U = U_1 + rI$ ,  $I_{кз} = \frac{U}{r}$ , что приводит к выражению

$$\frac{U_1}{U} + \frac{I}{I_{кз}} = 1. \quad (3.15)$$

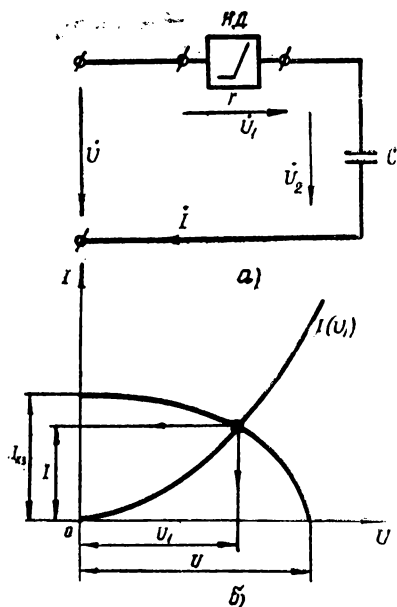


Рис. 3.11. Последовательное соединение двухполюсника  $r$  и линейной емкости:

а — схема; б — метод эллипса

Метод эллипса можно применить и для цепи, когда последовательно с нелинейным двухполюсником включено комплексное сопротивление. Тогда строят эллипс для цепи без учета той составляющей комплексного сопротивления, которая имеет один характер с двухполюсником, а затем из координат эллипса вычитают координаты линейной вольт-амперной характеристики неучтенной части комплексного сопротивления.

Так, для цепи рис. 3.12, а строят эллипс (кривая 1, рис. 3.12, б), который не учитывает сопротивление  $r$ , т. е. рассматривается схема рис. 3.11, а, и  $I'_{кз} = \frac{U}{x_C}$ . Теперь из абсцисс эллипса, которые полу-

чаются, если задаться некоторыми значениями токов в цепи, необходимо вычесть соответствующие абсциссы линейной вольт-амперной характеристики  $I(U_r)$ , которую строят под углом  $\alpha = \arctg r$ . Получившаяся эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.12, б) лежит ниже эллипса, что отвечает физическим процессам, происходящим в цепи, так как  $z = \sqrt{r^2 + x_C^2} > x_C$ , следовательно, действительное значение тока должно уменьшиться.

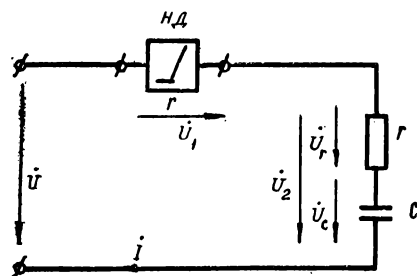
Точка пересечения эквивалентной кривой и вольт-амперной характеристики  $I(U_1)$  — рабочая точка, по которой определяются ток  $I$  и напряжение  $U_1$ . Напряжение  $U_2$  и, если требуется, напряжения  $U_r$  и  $U_C$  можно найти по закону Ома:  $U_2 = zI$ ,  $U_r = rI$  и  $U_C = x_C I$ .

Аналогично вышеизложенному можно построить эллипс для цепи, показанной на рис. 3.13, а. При этом емкость  $C$  вначале не учитывается, и эллипс имеет полуоси, равные  $U$  и  $I'_{кз} = \frac{U}{r}$  (кривая 1, рис. 3.13, б). Однако далее абсциссы эллипса складываются с соответствующими абсциссами линейной вольт-амперной характеристики  $I(U_C)$ , построенной под углом  $\alpha = \arctg x_C$ , и поэтому эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.13, б) лежит выше эллипса. Это объясняется известным соотношением  $x = x_L - x_C$ , когда реактивное сопротивление уменьшается, если в цепь последовательно с индуктивностью включается емкость.

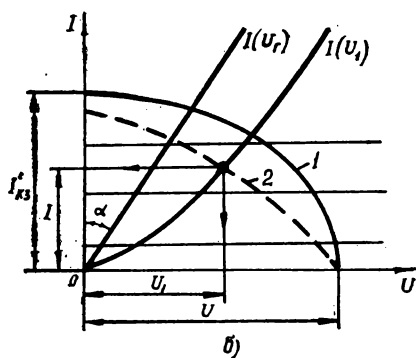
Пересечение эквивалентной кривой с вольт-амперной характеристикой двухполюсника  $I(U_1)$  определяет рабочий режим цепи, т. е. ток  $I$  и напряжение  $U_1$ ; затем по закону Ома находят напряжения  $U_2$ ,  $U_r$  и  $U_C$ .

Рабочие точки на рис. 3.12, б и 3.13, б могут быть также получены, если повернуть эллипсы на угол  $\alpha$  относительно начала координат: по часовой стрелке, если сопротивление увеличивается (рис. 3.12), и против часовой стрелки, если оно уменьшается (рис. 3.13).

Графический расчет цепи, показанный на рис. 3.13, б, предполагал, как это видно из характеристик  $I(U_C)$  и  $I(U_1)$ , что эти характеристики не пересекаются. Если же это имеет место и если это

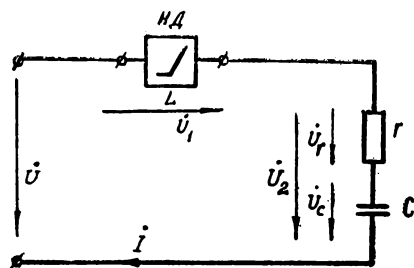


а)



б)

Рис. 3.12. Последовательное соединение двухполюсника  $r$  и активно-емкостного сопротивления:  
а — схема; б — метод эллипса



а)

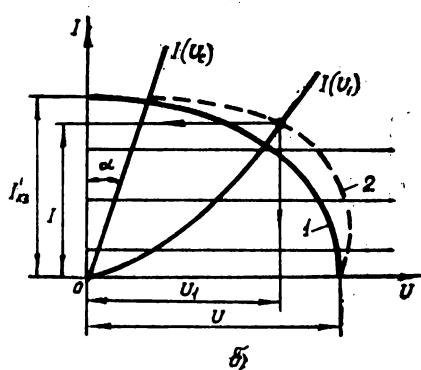


Рис. 3.13. Последовательное соединение двухполюсника  $L$  и активно-емкостного сопротивления:  
а — схема; б — метод эллипса

характеристики индуктивного и емкостного двухполюсников, то в цепи возможен резонанс напряжений.

Рассмотрим схему рис. 3.14, а, в которой нелинейный индуктивный двухполюсник включен последовательно с линейной емкостью. Вольт-амперные характеристики двухполюсника  $I(U_L)$  и емкости  $I(U_C)$  ( $\alpha = \arctg x_C$ ) показаны на рис. 3.14, б.

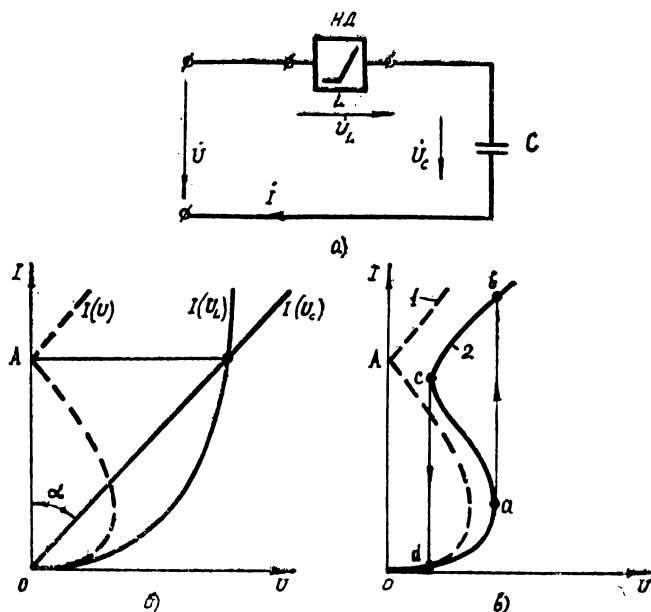


Рис. 3.14. Резонанс напряжений:  
а — схема; б — исходные и эквивалентная характеристики; в — вольт-амперные характеристики цепи без учета  $r$  (1) и с учетом  $r$  (2)

Для такой цепи

$$U = |U_L - U_C|, \quad (3.16)$$

так как падения напряжений на индуктивности и емкости находятся в противофазе. Поэтому, вычитая значения абсцисс двух характеристик при одном и том же токе, можно построить эквивалентную характеристику  $I(U)$ , которая является вольт-амперной характеристикой, неоднозначной по току (см. § 1.1).

Точка А характеристики  $I(U)$  лежит на оси ординат и является точкой резонанса, так как в этой точке напряжения  $U_L$  и  $U_C$  взаимно компенсируются. Отсюда следует, что, в отличие от линейных цепей, резонанс в рассматриваемой цепи можно получить изменением величины приложенного напряжения. Это объясняется тем, что индуктивность нелинейного двухполюсника зависит от тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Так как нелинейность индуктивного двухполюсника

связана с наличием ферромагнитного сердечника, рассматриваемое явление носит название феррорезонанса напряжений.

Графическое построение, показанное на рис. 3.14, б, было проведено в предположении, что цепь обладает квазилинейными свойствами и в цепи нет активного сопротивления. Однако в действительности потери в цепи существуют, как существуют и высшие гармоники. Поэтому фактическая характеристика будет иметь вид, приведенный на рис. 3.14, в (кривая 2). На этой характеристике показано, что при изменении напряжения ток скачком изменяется от точки *a* в точку *b* и от точки *c* в точку *d*, т. е. в цепи имеет место релейный эффект (см. § 1.4). Следует заметить, что изменения тока сопровождаются также изменениями угла сдвига в цепи.

Аналогичные явления возникают и в цепи с последовательно соединенными нелинейным емкостным двухполюсником и линейной индуктивностью. Резонанс напряжений в такой цепи носит название диэлектрического резонанса.

### Параллельное соединение. Резонанс токов

Рассмотрим схему, состоящую из двух параллельно соединенных нелинейных двухполюсников  $\text{НД}_1(r)$  и  $\text{НД}_2(C)$  (рис. 3.15, а), вольт-амперные характеристики которых  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$  приведены на рис. 3.15, б. Так как для цепи синусоидального тока по первому закону Кирхгофа  $I = I_1 + I_2$  или  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ , то, задаваясь некоторыми значениями приложенного напряжения, необходимо сложить геометрически полученные значения токов  $I_1$  и  $I_2$  и построить эквивалентную характеристику  $I(U)$ . Такое построение показано на рис. 3.15, б для одного значения напряжения  $U'$ . Вектор напряжения примем совпадающим с осью ординат, тогда ток  $I_1$  (отрезок *ob*) совпадает, а ток  $I_2$  (отрезок *oa*) отстает от напряжения  $U$ . Полученный как геометрическая сумма отрезков *oc* (ток  $I$ ) необходимо повернуть до совпадения с осью ординат и получить точку пересечения этого тока с напряжением  $U'$ .

После того как эквивалентная характеристика  $I(U)$  построена, можно по заданному току  $I$  определить входное напряжение  $U$ , а затем токи  $I_1$  и  $I_2$ .

Если же задано напряжение  $U$ , то строить эквивалентную характеристику не нужно, так как токи  $I_1$  и  $I_2$  определяются сразу по исходным вольт-амперным характеристикам  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$ .

Аналогичные построения могут быть проведены, если в качестве исходных характеристик будут заданы зависимости  $g_{\text{ст}}(U)$  и  $b_{\text{ст}}(U)$ .

Если задана цепь, состоящая из параллельно соединенных нелинейного индуктивного двухполюсника и линейной емкости

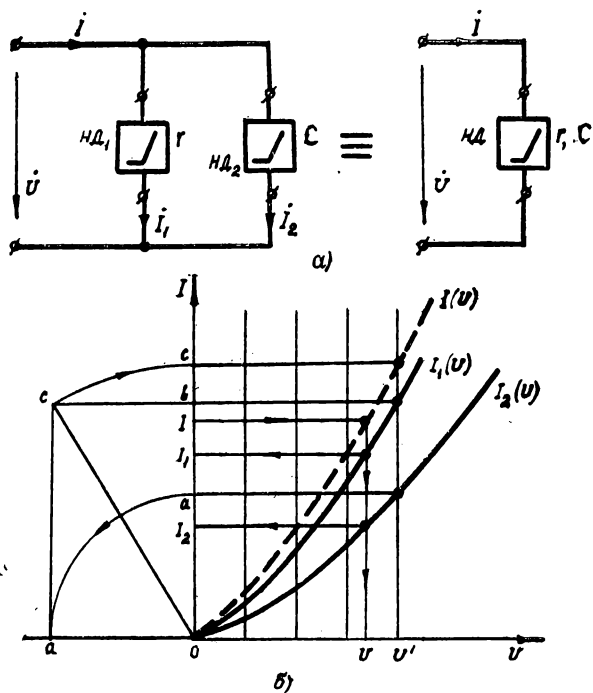


Рис. 3.15. Параллельное соединение двухполюсников  $r$  и  $C$ :  
 а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная характеристики



(рис. 3.16, а), вольт-амперные характеристики которых  $I_L(U)$  и  $I_C(U)$  ( $\alpha = \arctg x_C$ ) пересекаются (рис. 3.16, б), то в цепи возникает резонанс токов.

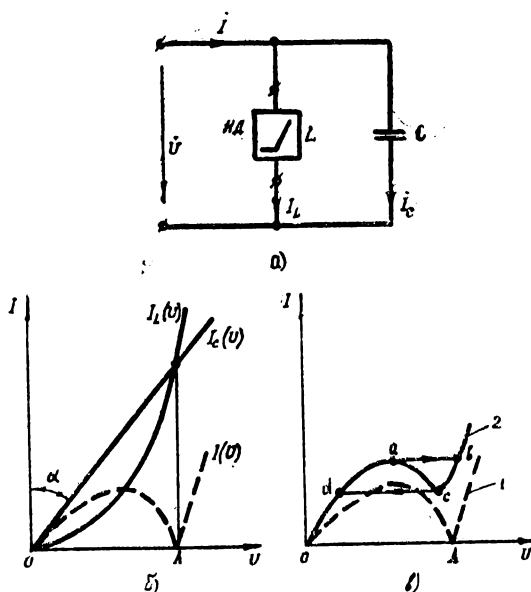


Рис. 3.16. Резонанс токов:  
а — схема; б — исходные и эквивалентная характеристики; в — вольт-амперные характеристики цепи без учета  $r(I)$  и с учетом  $r(2)$

Так как

$$I = |I_L - I_C|, \quad (3.17)$$

то эквивалентная характеристика  $I(U)$  получается при вычитании ординат исходных характеристик. Точка А, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, так как в этой точке токи  $I_L$  и  $I_C$  взаимно компенсируются. Отсюда следует, что в нелинейной цепи при параллельном соединении резонанса можно добиться изменением величины приложенного напряжения.

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегаем, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 3.16, в (кривая 2). По своему характеру как кривая 1, так и кривая 2 (рис. 3.16, в) являются характеристиками, неоднозначными по напряжению (см. § 1.1), на которых можно получить скачки напряжения из точки а в точку б и из точки с в точку d (кривая 2, рис. 3.16, в). Однако для этого необходимо иметь источник питания, в котором регулируется ток, а не напряжение, т. е. питать цепь от источника тока. Если же на

входе цепи стоит источник напряжения, то эквивалентная характеристика (при изменении напряжения) получается плавной, без скачков.

Резонанс в такой цепи называется феррорезонансом токов, в отличие от диэлектрического резонанса токов, когда параллельно соединяются нелинейный емкостный двухполюсник и линейная индуктивность.

### Смешанное соединение

При смешанном соединении двухполюсников применяется подход, изложенный выше для цепей с последовательным и параллельным соединением.

Пусть задана цепь, изображенная на рис. 3.17, а, двухполюсники которой  $\text{НД}_1(r)$  и  $\text{НД}_2(L)$  и линейная индуктивность  $L$  имеют исходные вольт-амперные характеристики соответственно  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$  и  $I_3(U_2)$  (рис. 3.17, б).

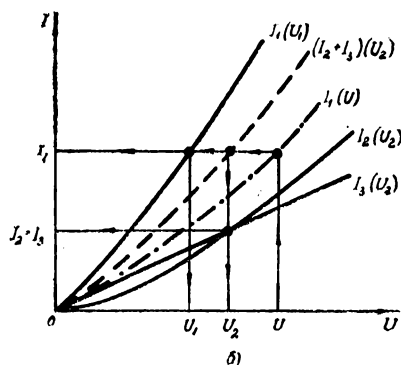
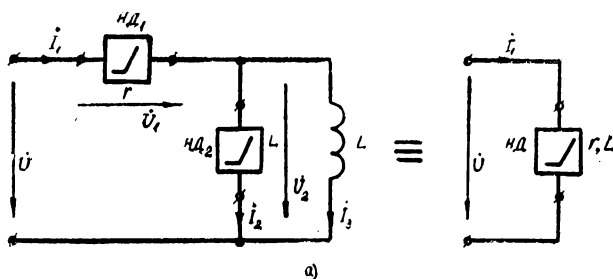


Рис. 3.17. Смешанное соединение двухполюсников:  
а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные  
и эквивалентные характеристики

Поскольку в параллельных ветвях находятся двухполюсник и линейный элемент одного свойства, то промежуточная эквивалентная характеристика  $(I_2 + I_3)(U_2)$  строится так же, как на

постоянным токе, так как фазовые сдвиги в этом случае отсутствуют.

Суммарная же эквивалентная характеристика  $I_1(U)$  получается в результате геометрического сложения абсцисс характеристик  $I_1(U_1)$  и  $(I_2 + I_3)(U_2)$ , так как теперь двухполюсники имеют разный характер: резистивный и индуктивный.

Если теперь на вход цепи подать напряжение  $U$ , то по суммарной эквивалентной характеристике  $I_1(U)$  можно определить ток  $I_1$ ; зная ток  $I_1$ , по характеристикам  $I_1(U_1)$  и  $(I_2 + I_3)(U_2)$  — напряжения  $U_1$  и  $U_2$ ; определив напряжение  $U_2$ , по характеристикам  $I_2(U_2)$  и  $I_3(U_2)$  — токи  $I_2$  и  $I_3$ , которые в данном случае получились равными.

Следует заметить, что так же, как и в цепях постоянного тока, применение при смешанном соединении зависимостей  $z_{ст}(I)$ ,  $z_{ст}(U)$  и т. п. нецелесообразно, так как графические построения при этом сильно усложняются.

### § 3.3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ (НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ИСХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК)

Основные принципы аналитических методов расчета были изложены при рассмотрении цепей постоянного тока (см. § 1.5). Сказанное ранее в принципе справедливо и для квазилинейных цепей переменного тока, однако уравнения, естественно, видоизменяются, что связано с необходимостью учитывать фазовые сдвиги.

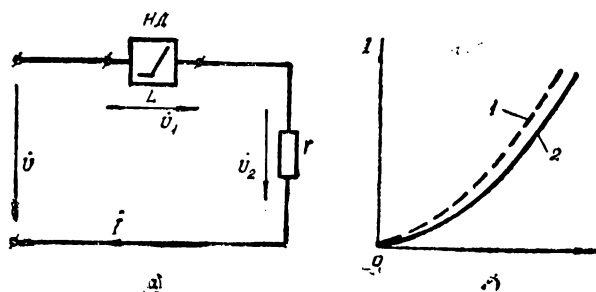


Рис. 3.18. Пример аппроксимации вольт-амперной характеристики:  
а — схема; б — исходная 2 и аппроксимирующая 1 характеристики

Рассмотрим цепь (рис. 3.18, а), состоящую из двух последовательно включенных нелинейного двухполюсника НД( $L$ ) и линейного сопротивления  $r$ . Для двухполюсника задана вольт-амперная характеристика (кривая 2, рис. 3.18, б), которая достаточно точно может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка  $I = aU_1^2$  (кривая 1, рис. 3.18, б).

Для модулей напряжений такой цепи можно записать

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = \frac{1}{a} I + r^2 I^2, \quad (3.18)$$

решить квадратное уравнение и определить ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если же в цепь (рис. 3.18, а) вместо сопротивления  $r$  включено, например, комплексное сопротивление  $Z = r + jx_L$ , то в этом случае для составления уравнения используется известное тригонометрическое соотношение  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$ , если угол между векторами  $A_1$  и  $A_2$  не равен  $90^\circ$ :

$$\begin{aligned} U^2 &= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(90^\circ - \psi_2) = \\ &= I \left( z^2 I + \frac{2z}{\sqrt{a}} \sqrt{I} \sin \psi_2 + \frac{1}{a} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\psi_2 = \arctg \frac{x_L}{r};$$

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2}.$$

Если в качестве исходной характеристики (для цепи рис. 3.18, а) задана зависимость  $x_{Lct}(I)$ , то она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией. Тогда ток найдется из решения уравнения

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = [x_{Lct}(I) I]^2 + (rI)^2. \quad (3.20)$$

### § 3.4. РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Метод компенсации применим также и к цепям переменного тока, если они обладают квазилинейными свойствами.

Если, например, нелинейный двухполюсник НД( $r$ ), включенный последовательно с линейной индуктивностью  $L$  (рис. 3.19, а), имеет вольт-амперную характеристику, приведенную на рис. 3.19, б, то для рабочей точки, определяемой током  $I$  и напряжением  $U_1$ , можно применить метод компенсации. Эквивалентная схема, параметры которой находятся из графических построений рис. 3.19, б, дает возможность составить линейное уравнение (рис. 3.19, в)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = (U_i + r_i I)^2 + (x_L I)^2, \quad (3.21)$$

из которого можно определить ток в цепи:

$$I = \frac{-r_i U_i + \sqrt{(r_i^2 + x_L^2) U^2 - x_L^2 U_i^2}}{r_i^2 + x_L^2} \quad (3.22)$$

(сущность значений  $U_i$  и  $r_i$  см. в § 1.2).

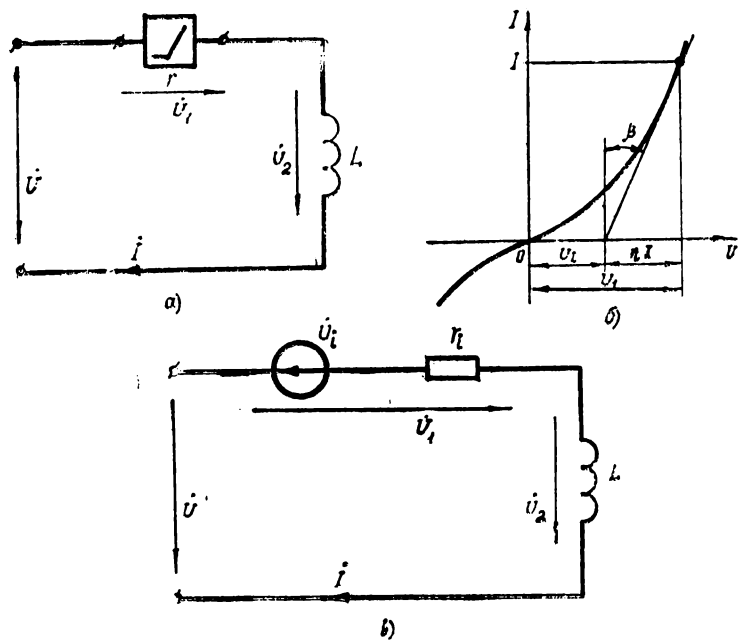


Рис. 3.19. Применение метода компенсации для цепи с нелинейным двухполюсником:  
 а — схема; б — графическое построение для исходной вольт-амперной характеристики; в — эквивалентная схема

Если нелинейный двухполюсник НД имеет индуктивный или емкостный характер и включается последовательно с линейным активным сопротивлением  $r$ , то ток в цепи будет равен

$$I = \frac{-x_i U_i + \sqrt{(r^2 + x_i^2) U^2 - r^2 U_i^2}}{r^2 + x_i^2} \quad (3.23)$$

(сущность значений  $U_i$  и  $x_i$  см. в § 1.2).

Полученные квадратные уравнения (3.22), (3.23) являются как бы аналитическими вариантами метода эллипса.

Следует обратить внимание на фазу напряжения  $\dot{U}_i$ , которая всегда совпадает с фазой составляющей  $r_i \dot{I}$  (рис. 3.19, в) или  $\pm jx_i \dot{I}$ , т. е. определяется соотношением  $\frac{\dot{I}}{I}$  или  $\frac{\dot{I}/\pm 90^\circ}{I}$ . Это иллюстрируется рис. 3.19, б, из которого видно, что модули напряжений  $\dot{U}_i$  и  $r_i \dot{I}$  складываются алгебраически, что возможно только при одинаковых фазах. Если линейное сопротивление  $x_L$  (рис. 3.19, а) или  $r$  изменяется, то изменяется ток  $\dot{I}$  как по модулю, так и по фазе. Это, в свою очередь, приводит к изменению фазы напряжения  $\dot{U}_i$ , которая, следовательно, может быть переменной и зависит от тока  $\dot{I}$ .

Как и в случае постоянного тока, этим методом можно пользоваться, если рабочий режим цепи в дальнейшем определяется такими значениями токов, которые не выходят за пределы приближенно прямолинейного участка вольт-амперной характеристики двухполюсника.

### § 3.5. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПО КРИВЫМ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Этот метод позволяет найти форму выходного сигнала (тока или напряжения на участке цепи), но применяется чаще всего для резистивных цепей. Пусть для нелинейного двухполюсника НД( $r$ ) (рис. 3.20) задана вольт-амперная характеристика для мгновенных значений.

Рассмотрим несколько видов вольт-амперных характеристик.

На рис. 3.21, а показана симметричная вольт-амперная характеристика с насыщением по току. Если приложенное напряжение синусоидально (рис. 3.21, в), то, как видно из рис. 3.21, б, ток имеет несинусоидальную форму, график которого строят следующим образом:

1) ось абсцисс графиков напряжения  $u$  и тока  $i$  разбивают на ряд отрезков  $\left( \text{в данном случае } \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \text{ и т. д.} \right)$ ;

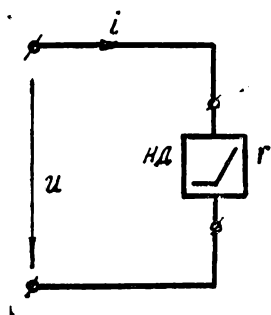


Рис. 3. 20. Схема цепи с двухполюсником  $r$

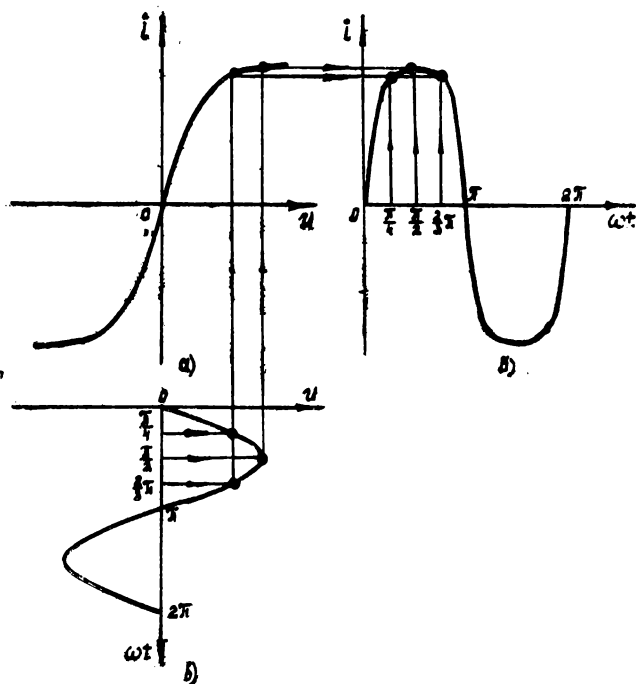


Рис. 3. 21. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:  
 а — симметричная вольт-амперная характеристика с насыщением по току; б — зависимость  $i(\omega t)$ ; в — зависимость  $u(\omega t)$

2) на графике напряжения находят значения мгновенных напряжений, соответствующих выбранным значениям углов, и переносят на вольт-амперную характеристику;

3) мгновенные значения тока, полученные на вольт-амперной характеристике, переносят на график тока до пересечения с одноименными координатами углов.

Отметим следующие особенности несинусоидального тока для симметричной вольт-амперной характеристики с насыщением по току:

- 1) ток содержит только нечетные гармоники;
- 2) форма тока затуплена;
- 3) форма тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем более прямоугольную форму имеет ток;
- 4) в зависимости от амплитуды напряжения изменяются амплитуды гармоник и их фазовые сдвиги.

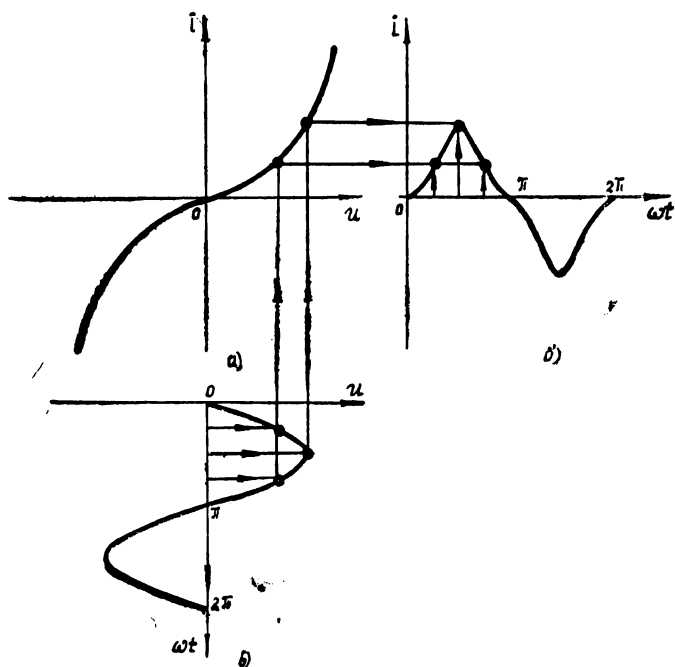


Рис. 3.22. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:

*a* — симметричная вольт-амперная характеристика с насыщением по напряжению; *б* — зависимость  $i(\omega t)$ ; *в* — зависимость  $u(\omega t)$

На рис. 3.22 показано графическое построение тока, если двухполюсник имеет симметричную вольт-амперную характеристику с



насыщением по напряжению. В этом случае несинусоидальный ток имеет следующие особенности:

- 1) замечания 1 и 4 предыдущего случая справедливы и для данной характеристики;
- 2) форма тока заострена;
- 3) форма тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем более острой становится форма тока.

Если задана явно несимметричная вольт-амперная характеристика, как это показано на рис. 3.23, *а*, то, сохраняя особенности формы тока в первом полупериоде для характеристики с насыщением по току, несинусоидальный ток будет иметь все гармоники и постоянную составляющую.

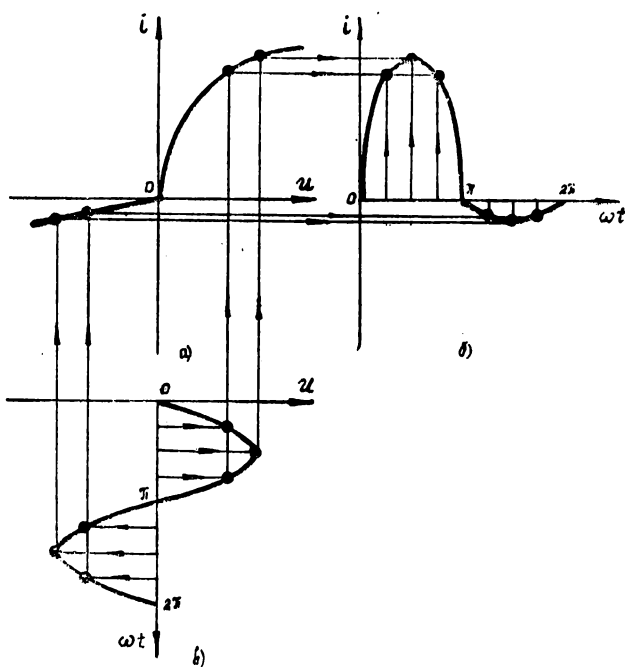


Рис. 3.23. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:

*а* — явно несимметричная вольт-амперная характеристика; *б* — зависимость  $i(\omega t)$ ; *в* — зависимость  $u(\omega t)$

На рис. 3.24, *а* приведена явно несимметричная вольт-амперная характеристика с зоной нечувствительности по напряжению. Несинусоидальный ток (рис. 3.24, *б*) имеет в своем составе постоянную составляющую, все гармоники и разрывы (за счет зоны нечувствительности).

Подобным образом можно построить графически ток для любого вида вольт-амперной характеристики как при синусоидальном, так и несинусоидальном приложенном напряжении.

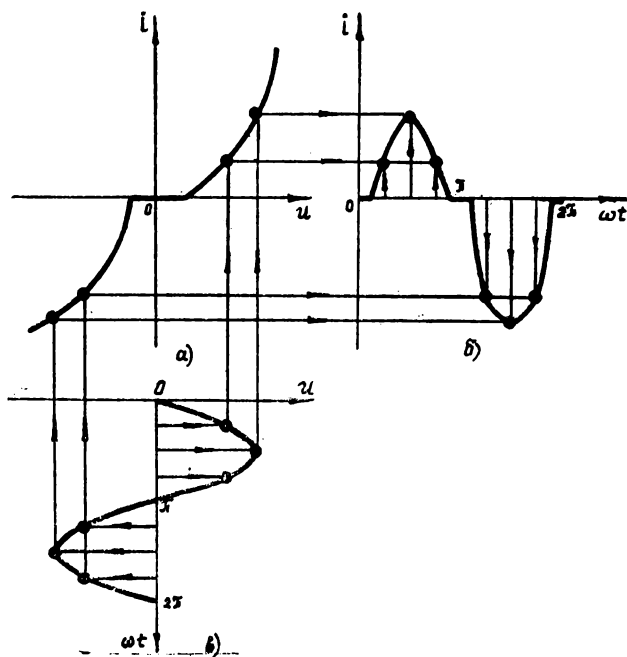


Рис. 3.24. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:  
 а — явно несимметричная вольт-амперная характеристика с зоной нечувствительности по напряжению; б — зависимость  $i(\omega t)$ ; в — зависимость  $u(\omega t)$

Если в цепь включено несколько нелинейных резистивных двухполюсников или нелинейных двухполюсников и линейных сопротивлений, то предварительно необходимо построить эквивалентную характеристику.

Рассмотрим теперь нелинейный емкостный двухполюсник (рис. 3.25), у которого зависимость  $q(u)$  имеет гистерезисный характер (рис. 3.26, а). Построение графика  $q(\omega t)$  отличается от ранее рассмотренных тем, что у гистерезисной кривой имеются восходящая и нисходящая ветви, на которые надо переносить мгновенные значения напряжений соответствующих участков синусоиды: возрастающего и убывающего.

После того как график  $q(\omega t)$  построен,

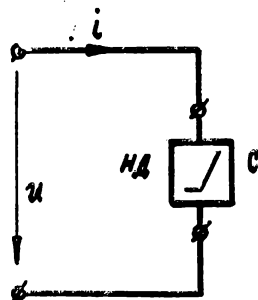


Рис. 3.25. Схема цепи с двухполюсником  $C$

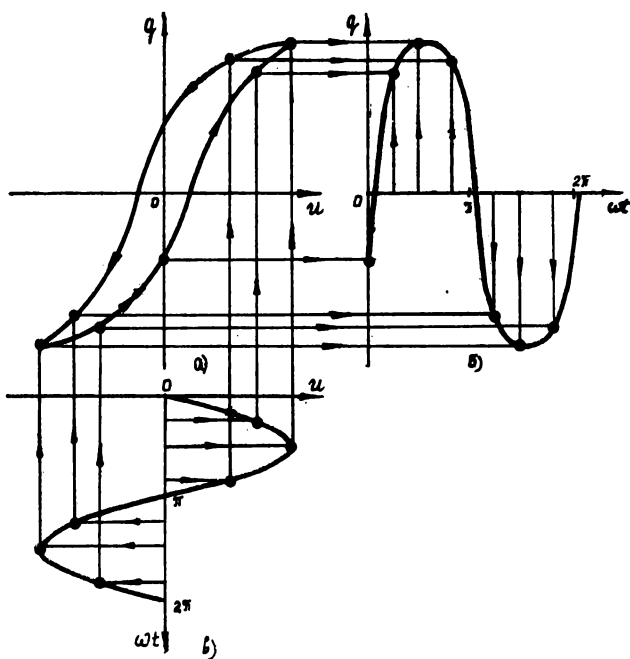


Рис. 3.26. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:  
 а — зависимость  $q(u)$  гистерезисного типа; б — зависимость  $q(\omega t)$ ; в — зависимость  $u(\omega t)$

необходимо продифференцировать графически эту кривую и получить, таким образом, зависимость  $i(\omega t)$ .

Если вольт-амперная характеристика чисто активного двухполюсника имеет гистерезисный характер, то, заменив на рис. 3.26, *а* координаты  $q(u)$  на координаты  $i(u)$ , на рис. 3.26, *б* получим зависимость  $i(\omega t)$ . Так как в этом случае кривая  $i(\omega t)$  сдвинута относительно начала координат, то даже основная гармоника тока будет иметь фазовый сдвиг по отношению к напряжению.

Общий вывод, который может быть сделан в результате проведенного выше рассмотрения характера изменений мгновенных значений сигнала при прохождении через нелинейный двухполюсник, заключается в том, что нелинейная электрическая цепь позволяет преобразовать частотный состав (частотный спектр) сигнала с образованием новых, отсутствовавших во входном сигнале, частотных составляющих. Характер же составляющих определяется видом нелинейности. Спектр выходного сигнала может быть найден разложением полученной кривой в гармонический ряд.

Заметим, что линейная электрическая цепь (линейный фильтр) может преобразовать сигнал только в смысле перераспределения интенсивности и фазовых сдвигов отдельных частотных составляющих, уже имевшихся во входном сигнале (хотя бы и до практически полного подавления частот этих составляющих). Линейный фильтр и используется для выделения нужной гармоники (включая нулевую) или группы гармоник, т. е. соответствующей части спектра выходного сигнала.

### § 3.6. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Этот метод является более точным, чем методы, основанные на квазилинейном подходе, так как позволяет учесть и некоторые гармонические составляющие.

Так как ток и падения напряжений в нелинейной цепи в общем случае несинусоидальны, можно представить ожидаемое решение в виде суммы гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Если подставить теперь эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, написанное для данной искомой величины, то все члены, входящие в дифференциальное уравнение, будут представлены в виде суммы гармоник. Просуммируем справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих  $\sin n \omega t$ , и приравняем эти суммы друг к другу. Проведем ту же операцию и с коэффициентами при  $\cos n \omega t$ . Повторив эти операции для всех значений  $n$ , получим систему из  $2n$  алгебраических уравнений, которые и используются для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называется методом гармонического баланса.

Точное решение задачи этим методом требует учета бесконечного множества гармоник. При решении же конкретных задач ограничивают число гармоник в ожидаемом решении (учитывают,

как правило, две-три); точный баланс гармоник при этом нарушается, и решение становится приближенным.

В качестве примера рассмотрим схему рис. 3.27, а с нелинейным двухполюсником  $\text{НД}(r)$ , симметричная вольт-амперная характеристика которого показана (в первом квадранте) на рис. 3.27, б.

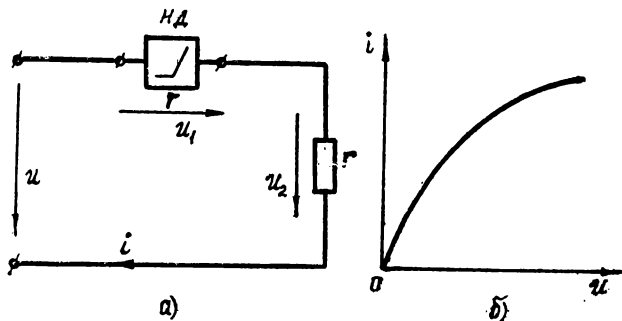


Рис. 3.27. Последовательное соединение двухполюсника  $r$  и линейного активного сопротивления:  
а — схема; б — вольт-амперная характеристика двухполюсника

Если на вход заданной цепи подано синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то ток будет несинусоидальным. Предположим, что вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника достаточно точно аппроксимируется на некотором интервале аналитической зависимостью  $u_1 = ai^3$ . Ищем решение искомой функции (тока) в виде

$$i = I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t, \quad (3.24)$$

т. е. ограничиваемся двумя гармониками. Гармонический состав ожидаемого решения определяется видами симметрии периодической несинусоидальной функции, которые, в свою очередь, зависят от вольт-амперной характеристики (см. § 3.5). Начальные фазы в уравнении (3.24) в данном случае примем равными нулю. Следовательно, неизвестные члены уравнения — амплитудные значения тока первой  $I_{1m}$  и третьей  $I_{3m}$  гармоник.

По второму закону Кирхгофа

$$u = u_1 + u_2 = ai^3 + ri \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} U_m \sin \omega t &= a(I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t)^3 + r(I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t) = \\ &= a(I_{1m}^3 \sin^3 \omega t + 3I_{1m}^2 I_{3m} \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + 3I_{1m} I_{3m}^2 \sin \omega t \sin^2 3\omega t + \\ &\quad + I_{3m}^3 \sin^3 3\omega t) + r(I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t) = \\ &= \frac{3}{4} a I_{1m}^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} a I_{1m}^3 \sin 3\omega t + \frac{3}{2} a I_{1m}^2 I_{3m} \sin 3\omega t - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4} a I_{1m}^2 I_{3m} \sin \omega t - \frac{3}{4} a I_{1m}^2 I_{3m} \sin 5\omega t + \frac{3}{2} a I_{1m} I_{3m}^2 \sin \omega t + \\
& + \frac{3}{4} a I_{1m} I_{3m}^2 \sin 5\omega t - \frac{3}{2} a I_{1m} I_{3m}^2 \sin 7\omega t + \frac{3}{4} a I_{3m}^3 \sin 3\omega t - \\
& - \frac{1}{4} a I_{3m}^3 \sin 9\omega t + r I_{1m} \sin \omega t + r I_{3m} \sin 3\omega t. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Просуммируем коэффициенты при  $\sin \omega t$ , а затем при  $\sin 3\omega t$  в левой и правой частях уравнения (3.26) и приравняем коэффициенты при одноименных гармониках друг другу:

$$\left. \begin{aligned} U_m &= r I_{1m} + \frac{3}{2} a I_{1m} I_{3m}^2 - \frac{3}{4} a I_{1m}^2 I_{3m} + \frac{3}{4} a I_{1m}^3; \\ 0 &= r I_{3m} + \frac{3}{2} a I_{1m}^2 I_{3m} + \frac{3}{4} a I_{3m}^3 - \frac{1}{4} a I_{1m}^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Полученная система уравнений (3.27) дает возможность определить искомые неизвестные.

Нетрудно заметить, что решение получится приближенным не только потому, что бесконечный тригонометрический ряд Фурье был ограничен двумя гармониками (3.24), но также и вследствие неучета пятой, седьмой и девятой гармоник, которые получились в уравнении (3.26).

Если бы в уравнении (3.24) гармоники тока имели начальные фазы, то неизвестных членов уравнения было бы четыре, что привело бы к необходимости решать систему из четырех уравнений.

В заключение следует сказать, что не для всякого вида аппроксимации и ограничения числа гармоник может быть вообще получено решение. В этом случае необходимо или увеличить число гармоник в решении, или задаться другим аппроксимирующим выражением.

### § 3.7. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ (МЕТОД ПРИПАСОВЫВАНИЯ)

Известно, что нелинейная вольт-амперная характеристика может быть представлена одним аналитическим выражением, аппроксимирующим ее в необходимой для данной конкретной задачи области. Если при этом требуется определенная точность расчета, то такая аппроксимация обычно оказывается достаточно сложной, и аналитическое нахождение искомых зависимостей затруднено.

Можно составить также несколько аналитических выражений, справедливых на отдельных участках интересующей нас области. Этот метод называется методом сопряженных интервалов (методом припасовывания), так как решения для отдельных участков (интервалов) должны сопрягаться (припасовываться).

Фактически переход от одного участка к другому равносильен коммутации, так как в точке сопряжения меняются параметры двухполюсника.

Наиболее распространена замена нелинейных характеристик прямолинейными участками, так как при этом уравнения, относящиеся к отдельным участкам, будут линейными.

Рассмотрим цепь с нелинейным двухполюсником НД( $r$ ) (рис. 3.28, а), вольт-амперная характеристика  $i(u_1)$  которого (рис. 3.28, б) идеализированная, т. е. двухполюсник при одной полярности приложенного напряжения имеет сопротивление, равное нулю, а при другой — бесконечность.

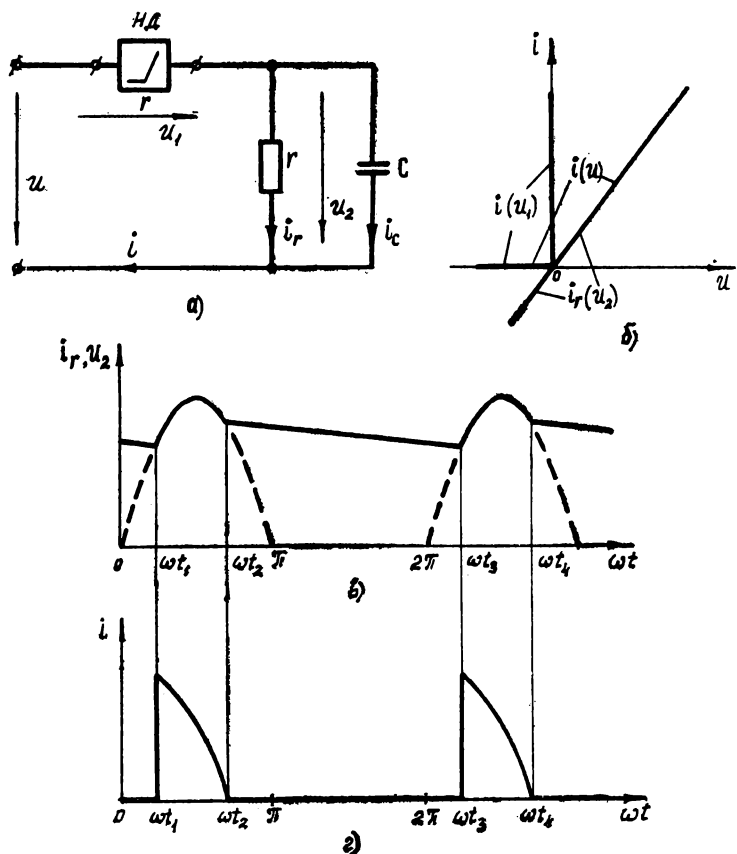


Рис. 3.28. Метод сопряженных интервалов:  
 а — схема; б — вольт-амперные характеристики; в — зависимость  $i_r(\omega t)$ ; г — зависимость  $i(\omega t)$

Если емкость  $C$  в цепи отсутствует, то эквивалентная вольт-амперная характеристика  $i(u)$  (рис. 3.28, б) будет состоять из

ветви характеристики  $i_r(u_2)$  и ветви характеристики  $i(u_1)$ . Таким образом, при синусоидальном напряжении источника питания  $u = U_m \sin \omega t$  ток в цепи  $i (i = i_r)$ , а следовательно, и напряжение  $u_2$  можно рассмотреть на двух интервалах: от 0 до  $\pi$  и от  $\pi$  до  $2\pi$ . На первом интервале ток в цепи  $i$  будет синусоидальным, на втором — равен нулю (пунктирные полусинусоиды на рис. 3.28, в). Происходит выпрямление переменного тока, когда ток имеет хотя и пульсирующее, но всегда положительное значение. При этом конечное значение тока на первом интервале  $i = I_m \sin \pi$  должно быть равно начальному значению тока на втором интервале  $i = 0$ ; конечное значение тока на втором интервале  $i = 0$  должно быть равно начальному значению тока на третьем интервале  $i = I_m \sin 2\pi$  и т. д.

При данной форме несинусоидального тока разложение его в ряд Фурье будет содержать постоянную составляющую, равную

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_m}{r} \sin \omega t \, d\omega t = \frac{1}{\pi} \frac{U_m}{r} \approx 0,318 I_m. \quad (3.28)$$

Как видно из уравнения (3.28), постоянная составляющая имеет небольшое значение, поэтому для ее повышения параллельно активному сопротивлению  $r$  включают емкость  $C$  (рис. 3.28, а).

В этом случае в момент, когда положительное напряжение на входе цепи  $u$  превысит напряжение на емкости  $u_2$ , емкость начинает заряжаться и от источника потребляется ток  $i = i_r + i_c$ . После того как напряжение  $u$  достигнет амплитудного значения, оно начинает падать и становится меньше напряжения  $u_2$ . Емкость начинает разряжаться на сопротивление  $r$ , поддерживая ток  $i_r$  того же направления, что и было раньше. При этом  $i_r = i_c$ , а  $i = 0$ . Затем цикл повторяется.

Установившийся режим (сплошная кривая на рис. 3.28, в) будет состоять из двух интервалов времени: от  $\omega t_1$  до  $\omega t_2$  и от  $\omega t_2$  до  $\omega t_3$ . Фактически этот режим состоит из двух чередующихся переходных процессов и является установившимся лишь в том смысле, что эти два процесса повторяются периодически без изменений. Такие установившиеся режимы называются квазистационарными.

Для решения задачи рассмотрим дифференциальные уравнения на соответствующих интервалах.

При  $\omega t_1 \leq \omega t \leq \omega t_2$

$$u_2 = U_m \sin \omega t; \\ i = i_r + i_c = \frac{u_2}{r} + C \frac{du_2}{dt} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t. \quad (3.29)$$

После прохождения максимума по мере удаления от него возрастает скорость уменьшения мгновенного значения приложенного



напряжения  $\left(\frac{du}{dt}\right)$ , напряжения  $u$  и  $u_2$  сравниваются в момент времени  $\omega t = \omega t_2$ , и ток  $i$  становится равным нулю. Для этого момента времени уравнение (3.29) будет иметь вид

$$0 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 + \omega C U_m \cos \omega t_2, \quad (3.30)$$

откуда

$$-\omega C U_m \cos \omega t_2 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2$$

и

$$\omega t_2 = -\arctg(\omega r C). \quad (3.31)$$

Ток через нелинейный двухполюсник (рис. 3.28, з) из уравнения (3.29) можно представить так:

$$i = \frac{U_m}{r} \sqrt{1 + (\omega r C)^2} \sin(\omega t_2 - \omega t). \quad (3.32)$$

При  $\omega t_2 \leq \omega t \leq \omega t_3$  емкость разряжается по экспоненциальному закону

$$u_2 = A e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega r C}}. \quad (3.33)$$

Постоянная  $A$  определяется из условия, что при  $\omega t = \omega t_2$   $u_2 = U_m \sin \omega t_2$ . Поэтому

$$u_2 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega r C}}. \quad (3.34)$$

При  $\omega t = \omega t_3$  напряжение  $u_2$  опять становится синусоидальным. Уравнение (3.34) для этого момента времени

$$U_m \sin \omega t_3 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t_3 - \omega t_2}{\omega r C}}$$

может быть преобразовано в уравнение

$$\sin \omega t_3 e^{\frac{\omega t_3}{\omega r C}} = \sin \omega t_2 e^{\frac{\omega t_2}{\omega r C}}, \quad (3.35)$$

откуда определяется момент времени  $\omega t_3$ . Очевидно, что  $\omega t_3 = \omega t_1 + 2\pi$  и  $\omega t_4 = \omega t_2 + 2\pi$ .

Постоянная составляющая тока в активном сопротивлении

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} i d\omega t = \frac{1}{2\pi} \frac{U_m}{r} \sqrt{1 + (\omega r C)^2} [1 - \cos(\omega t_2 - \omega t_1)]. \quad (3.36)$$

### § 3.8. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ

В предыдущих параграфах рассматривались методы расчета цепей с нелинейными индуктивными двухполюсниками. При этом в расчетах использовались или вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе), или зависимости потокоцепления самоиндукции от тока.

Конструктивно нелинейный индуктивный двухполюсник (рис. 3.29, а) представляет собой дроссель (дроссели) с насыщенным ферромагнитным сердечником (рис. 3.29, б).

Особенность цепей, рассматриваемых в данном параграфе, заключается в учете взаимосвязи между токами (напряжениями) в обмотках и потоками (индукциями) в сердечниках, т. е. здесь совместно рассматривается электрическая и магнитная цепи.

С одной стороны, магнитный поток в сердечнике зависит от токов в обмотках, и поэтому при исследовании приходится в значительной мере пользоваться методами, разработанными для магнитных цепей при постоянном магнитном потоке (см. § 1.7). С другой стороны, токи в обмотках зависят от характера изменения магнитного потока. Все это значительно усложняет исследования. Поэтому при расчетах вводят ряд допущений (важнейшим из которых является квазилинейность), упрощающих рассмотрение явления.

В соответствии с квазилинейным подходом предполагается, что напряжение, ток и магнитный поток изменяются по синусоидальному закону, а нелинейность учитывается в зависимостях между амплитудным (действующим) значением магнитного потока и амплитудным (действующим) значением н. с. (вебер-амперная характеристика).

Исходной характеристикой для получения зависимости  $\Phi_m^{(1)} = f(I_m \omega)$  является динамическая кривая намагничивания  $B_m = f(H_m)$ . При одном и том же материале сердечника с изменением частоты динамические кривые изменяются. При увеличении частоты они располагаются ниже и становятся более пологими (рис. 3.30, а). Такая же закономерность наблюдается и для вебер-амперных характеристик (рис. 3.30, б). Следует заметить, что для расчетов чаще применяются вебер-амперные характеристики для действующих  $\Phi = f(I\omega)$  (рис. 3.30, в), а не для амплитудных значений потоков и н. с.

Рассмотрим магнитную цепь (рис. 3.29, б) и покажем, что магнитные параметры можно связать с электрическими, т. е. перейти от вебер-амперной характеристики  $\Phi = f(I\omega)$  к вольт-амперной  $I = f(U)$  и определить, таким образом, индуктивность эквивалентной электрической схемы рис. 3.29, а (статическую и дифференциальную). Если пренебречь явлением гистерезиса, вихревыми токами и потоками рассеяния, то

$$u = ri + \frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.37)$$

где  $r$  — сопротивление обмотки.

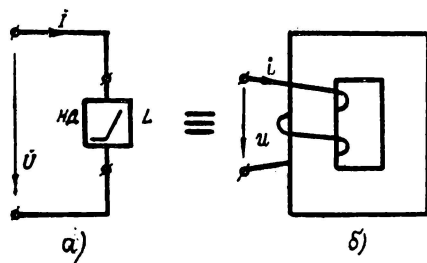


Рис. 3. 29. Нелинейный индуктивный двухполюсник (а) и его магнитный аналог (б)

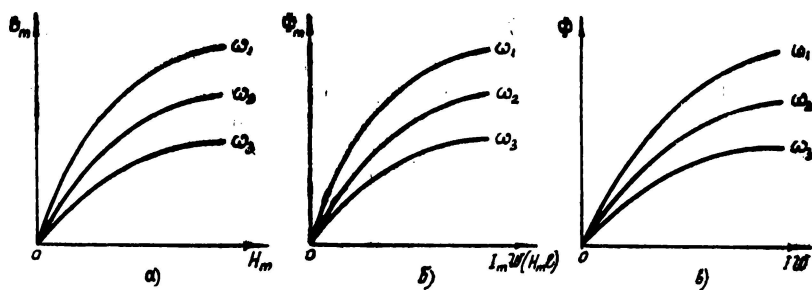


Рис. 3. 30. Динамические кривые намагничивания  $B_m(H_m)$  (а) и вебер-амперные характеристики  $\Phi_m(I_m \omega)$  (б) и  $\Phi(I \omega)$  (в) в зависимости от частоты

Произведением  $ri$  также можно пренебречь, поскольку оно значительно меньше значения  $\frac{d\Psi}{dt}$ . Тогда

$$u = \frac{d\Psi}{dt}. \quad (3.38)$$

Если напряжение, приложенное к обмотке, синусоидально  $u = U_m \sin \omega t$ , то уравнение (3.38) можно представить в следующем виде:

$$U_m \sin \omega t = \omega \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.39)$$

откуда, разделяя переменные,

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega} \int \sin \omega t dt = -\frac{U_m}{\omega \omega} \cos \omega t = -\Phi_m \cos \omega t, \quad (3.40)$$

где  $\omega$  — число витков обмотки.

Таким образом, при сделанных допущениях величина магнитного потока в сердечнике определяется величиной напряжения  $U_m$ , числом витков  $\omega$  и частотой  $\omega$  и не зависит от вебер-амперной характеристики.

Из уравнения (3.40) следует уравнение

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega \omega} = \frac{\sqrt{2} U}{2\pi f \omega} = \frac{U}{4,44 f \omega}, \quad (3.41)$$

которое обычно записывается в виде зависимости напряжения от магнитного потока или магнитной индукции

$$U = 4,44 f \omega \Phi_m = 4,44 f \omega S B_m. \quad (3.42)$$

Уравнение (3.42) дает возможность перейти от координаты  $\Phi$  к координате  $U$ , а соотношение  $I = \frac{I \omega}{\omega}$  — от координаты  $I \omega$  к координате  $I$ .

Таким образом, если необходимо найти ток в обмотке магнитной цепи (рис. 3.31, а), то возможны два пути решения этой задачи: используя вебер-амперную или вольт-амперную характеристики. В первом случае по уравнению (3.41) определяется значение магнитного потока  $\Phi$  ( $\Phi = \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$ ), а затем по вебер-амперной характе-

ристике (рис. 3.31, в) — ток  $I$  ( $I = \frac{I \omega}{\omega}$ ). Во втором случае необходимо перейти от вебер-амперной характеристики (рис. 3.31, в) к вольт-амперной (рис. 3.31, г), т. е. перейти от магнитной цепи (рис. 3.31, а) к эквивалентной электрической (рис. 3.31, б). Далее по

заданному входному напряжению  $U$  определяется значение тока  $I$  (рис. 3.31,  $z$ ).

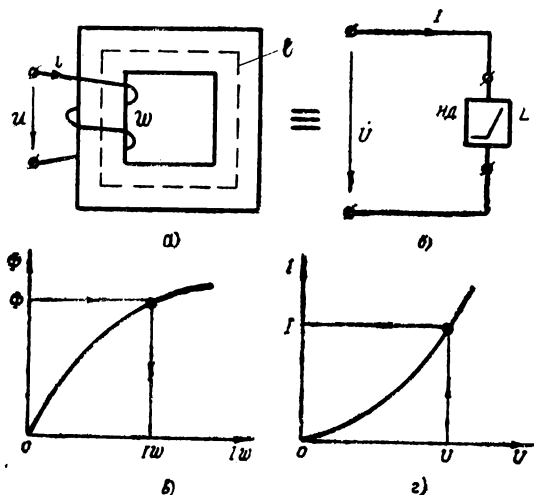


Рис. 3.31. Графический расчет магнитной цепи: а — магнитная цепь; б — ее электрический аналог; в — вебер-амперная характеристика  $\Phi(Iw)$ ; з — вольт-амперная характеристика  $I(U)$

Уравнение (3.42) позволяет сделать вывод, что отличие магнитных цепей при постоянном магнитном потоке от магнитных цепей при переменном магнитном потоке в основном заключается в том, что в данном случае ток обмотки главным образом зависит от геометрических размеров и материала магнитопровода. В магнитных цепях при постоянном магнитном потоке ток обмотки зависит только от сопротивления обмотки. Поэтому, если магнитную цепь запитать от источника тока (переменного), то аналогия между магнитными цепями при переменном и постоянном магнитных потоках будет почти полная.

### § 3.9. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

В предыдущих параграфах рассматривались методы расчета цепей с нелинейными двухполюсниками, и в частности с нелинейными емкостными двухполюсниками. При этом в расчетах использовались или вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе), или зависимости заряда от напряжения.

Конструктивно нелинейный емкостный двухполюсник (рис. 3.32, а) представляет собой конденсатор (конденсаторы) с нелинейным диэлектриком (рис. 3.32, б). В качестве диэлектрика используются сегнетокерамические диэлектрики (вариконды).

Известно, что у нелинейного диэлектрика диэлектрическая проницаемость значительно меняется при изменении напряженности электрического поля, а реактивное сопротивление определяется состоянием диэлектрика. Для характеристики явления в диэлектрике необходимо рассмотреть зависимость электрического смещения (электрической индукции) от напряженности электрического поля  $D = f(E)$ , которая в общем случае изменяется при изменении частоты (рис. 3.33).

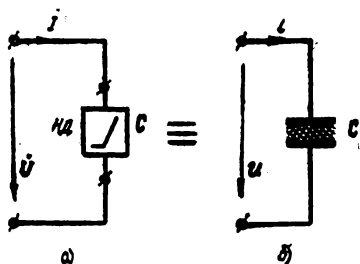


Рис. 3.32. Нелинейный емкостный двухполюсник (а) и его электрический аналог (б)

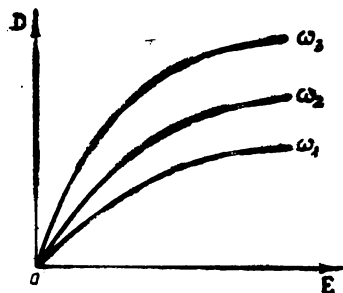


Рис. 3.33. Семейство характеристик  $D(E)$  для разных частот

Если пренебречь сопротивлением утечки и диэлектрическими потерями конденсатора, то для перехода от электрического смещения  $D$  к протекающему через конденсатор току  $I$  можно воспользоваться теоремой Гаусса

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (3.43)$$

где  $S$  — поверхность;  
 $q$  — заряд.

Для обычных источников питания с относительно низкими частотами можно полагать, что поток электрического смещения через наружные стенки диэлектрика и обкладки практически равен нулю (он должен учитываться в той мере и в той форме, в которой учитывается рассеяние в магнитной цепи). Аналогично тому, как ранее от уравнения (1.15) был совершен переход к уравнению (1.16), получим

$$DS = q, \quad (3.44)$$

где  $S$  — поверхность одной обкладки.

В соответствии с квазилинейным рассмотрением

$$D = D_m \sin \omega t$$

и

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(SD_m \sin \omega t)}{dt}, \quad (3.45)$$

а действующее значение тока

$$I = k_1 f D S, \quad (3.46)$$

где  $k_1$  — коэффициент, значение которого определяется тем, какие значения величин (амплитудные, средние или действующие) применены в исходных характеристиках.

Переход от напряженности электрического поля к электрическому напряжению также должен быть выполнен с учетом только что отмеченных обстоятельств, что достигается введением коэффициента  $k_2$ :

$$U = k_2 \int_0^d \bar{E} d\bar{l} = k_2 E d, \quad (3.47)$$

где  $d$  — расстояние между обкладками.

Таким образом, уравнения (3.46), (3.47) позволяют перейти от зависимости  $D = f(E)$  к вольт-амперной характеристике  $I = \varphi(U)$ , подобно тому, как при рассмотрении магнитных цепей совершался переход от динамической кривой намагничивания к вебер-амперной, а затем к вольт-амперной характеристикам.

### § 3.10. РАСЧЕТ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ ЦЕПЕЙ С РЕАКТИВНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

Рассмотрим цепь с линейным сопротивлением и нелинейным индуктивным двухполюсником (рис. 3.34, а), имеющим идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.34, б). Магнитный поток в таком двухполюснике меняется скачком от  $+\Phi_{\text{макс}}$  до  $-\Phi_{\text{макс}}$  и наоборот, т. е. магнитное состояние двухполюсника характеризуется только одним параметром  $|\Phi_{\text{макс}}|$ .

Особенность расчета в этом случае заключается в том, что состояние двухполюсника определяется не мгновенным значением подводимого к нему напряжения (как это имело место для двухполюсника со свойствами активного сопротивления, см. § 3.7), а величиной так называемого импульса напряжения. Действительно,

так как  $u_1 = w \frac{d\Phi}{dt}$ , то, разделяя переменные, получаем

$$\Delta\Phi = \frac{1}{w} \int_{t_1}^{t_2} u_1 dt, \quad (3.48)$$

где  $\Delta\Phi$  — приращение магнитного потока, определяемое импульсом напряжения за интервал времени  $t_1 - t_2$ .

Если напряжение, приложенное к цепи, изменяется по синусоидальному закону  $u = U_m \sin \omega t$ , то в положительный полупериод этого напряжения сердечник начинает перемагничиваться, т. е. значение магнитного потока изменяется от  $-\Phi_{\text{макс}}$  до  $+\Phi_{\text{макс}}$ . При этом индуктивное сопротивление двухполюсника равно бесконеч-

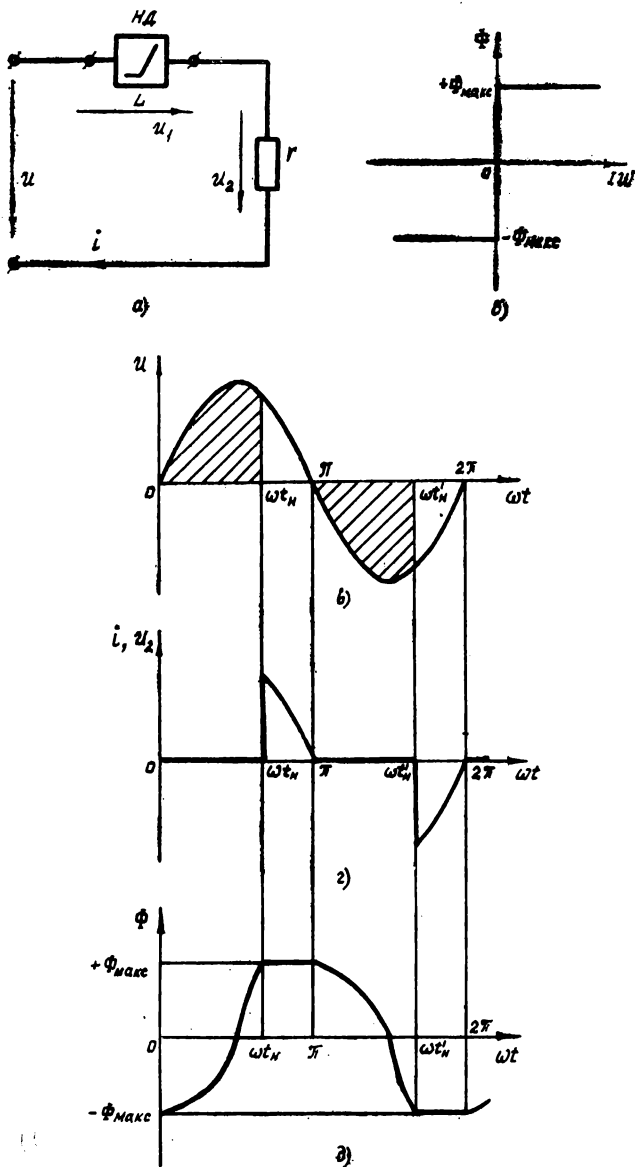


Рис. 3.34. Метод сопряженных интервалов для цепи с нелинейным индуктивным двухполюсником и линейным активным сопротивлением:  
а — схема; б — идеализированная вебер-амперная характеристика; в — зависимость  $u(\omega t)$ ; г — зависимость  $i(\omega t)$ ; д — зависимость  $\Phi(\omega t)$



ности, напряжение  $u_1 = u$ , так как величина подводимого к цепи напряжения полностью уравнивается напряжением на двухполюснике. Ток в цепи равен нулю.

Для того чтобы изменить магнитное состояние двухполюсника на противоположное, нужно создать приращение потока

$$\Delta\Phi = 2\Phi_{\text{макс}}. \quad (3.49)$$

Требуемый для этого импульс напряжения (рис. 3.34, в) будет равен

$$2\Phi_{\text{макс}} = \frac{1}{\omega\tau\omega} \int_0^{\omega t_H} U_m \sin \omega t d\omega t, \quad (3.50)$$

где  $\omega t_H$  — момент времени, когда двухполюсник переманитится и его сопротивление станет равным нулю.

Если проинтегрировать уравнение (3.50), то

$$\cos \omega t_H = 1 - \frac{2\omega\tau\omega\Phi_{\text{макс}}}{U_m}, \quad (3.51)$$

откуда можно определить угол начала импульса тока  $\omega t_H$ :

$$\omega t_H = \arccos \left( \frac{U_m - 4\pi f \omega\tau\omega\Phi_{\text{макс}}}{U_m} \right). \quad (3.52)$$

Так как с момента времени  $\omega t_H$  сопротивление двухполюсника становится равным нулю, то все приложенное к цепи напряжение компенсируется падением напряжения на линейном сопротивлении  $r$ , т. е.  $u_2 = u$ . Ток в цепи в этот промежуток времени (рис. 3.34, г) равен

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t. \quad (3.53)$$

В момент перехода входного напряжения через нуль двухполюсник начинает переманчиваться, т. е. магнитный поток начинает изменяться от  $+\Phi_{\text{макс}}$  до  $-\Phi_{\text{макс}}$ . Сопротивление двухполюсника становится равным бесконечности, и ток прекращается. Таким образом, угол прекращения импульса тока равен  $\pi$ . Из уравнения (3.52) видно, что угол  $\omega t_H$  зависит от амплитуды приложенного напряжения  $U_m$  и максимального значения магнитного потока  $\Phi_{\text{макс}}$ .

Физически это объясняется тем, что амплитудное значение магнитного потока  $\Phi_m$  зависит от напряжения  $U$  (3.41) и в то же время ограничивается величиной  $\Phi_{\text{макс}}$ . В интервалах  $\omega t_H - \pi$ ,  $\omega t_H' - 2\pi$  и т. д. магнитный поток имеет постоянное значение (рис. 3.34, д), что означает равенство нулю производной магнитного потока по времени и, следовательно, равенство нулю напряжения  $u_1$ . Отсюда вытекает, что условием возникновения тока в цепи является следующее неравенство:

$$|\Phi_{\text{макс}}| < \Phi_m. \quad (3.54)$$

Если же  $|\Phi_{\text{макс}}| \geq \Phi_m$ , то ограничения магнитного потока не происходит, и ток в цепи равен нулю при любом значении  $\omega t$ .

Метод сопряженных интервалов может быть применен и к цепи с нелинейным емкостным двухполюсником. В этом случае состояние двухполюсника определяется уже не импульсом напряжения, а импульсом тока. Действительно, используя уравнение (3.44), можно определить ток

$$i = \frac{dq}{dt} = S \frac{dD}{dt}, \quad (3.55)$$

откуда после разделения переменных

$$\Delta D = \frac{1}{S} \int_{t_1}^{t_2} i dt, \quad (3.56)$$

где  $\Delta D$  — приращение электрического смещения, определяемое импульсом тока за интервал времени  $t_1 \rightarrow t_2$ .

Будем полагать, что зависимость  $D = f(E)$  имеет прямоугольный характер и электрическое смещение меняется скачком от  $+D_{\text{макс}}$  до  $-D_{\text{макс}}$ , и наоборот.

Чтобы изменить состояние двухполюсника на противоположное, нужно создать приращение электрического смещения

$$\Delta D = 2D_{\text{макс}}, \quad (3.57)$$

и требуемый импульс синусоидального тока определится соотношением

$$2D_{\text{макс}} = \frac{1}{\omega S} \int_0^{\omega t_H} I_m \sin \omega t d\omega t, \quad (3.58)$$

где  $\omega t_H$  — момент времени, когда двухполюсник скачкообразно меняет свое сопротивление.

Если проинтегрировать уравнение (3.58), то

$$\cos \omega t_H = 1 - \frac{2\omega S D_{\text{макс}}}{I_m}, \quad (3.59)$$

откуда можно определить угол  $\omega t_H$ :

$$\omega t_H = \arccos \left( \frac{I_m - 4\pi f S D_{\text{макс}}}{I_m} \right). \quad (3.60)$$

Сравнение уравнений (3.52) и (3.60) подчеркивает аналогию расчета магнитных и диэлектрических цепей.

Достаточно простые соотношения для определения  $\omega t_H$  (3.52), (3.60) и  $\omega t_H = 0, \pi, 2\pi, \dots$  получаются вследствие того, что для активной нагрузки ток и напряжение совпадают по фазе и переходят через нуль в один и тот же момент времени (рис. 3.34, в, г).

Если же включить в цепь (рис. 3.35, а), например, активно-индуктивную нагрузку, то нелинейный двухполюсник НД ( $L$ ), имеющий идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.35, б), начинает перемагничиваться в те моменты времени, при которых ток в цепи  $i$  становится равным нулю. Эти моменты времени отличны от  $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$ , так как в такой цепи ток и напряжение не совпадают по фазе.

Требуемый для перемагничивания импульс напряжения в этом случае определяется уравнением (3.50), однако нижний предел интеграла будет равен  $\omega t_n$  (рис. 3.35, в). Получившееся при интегрировании соотношение

$$\cos \omega t_n = \cos \omega t_n - \frac{2\omega\tau\Phi_{\text{макс}}}{U_m} \quad (3.61)$$

показывает, что, во-первых, углы начала и прекращения импульса тока в цепи зависят друг от друга и, во-вторых, уравнение (3.51) является частным случаем уравнения (3.61).

Так как в момент времени  $\omega t_n$  происходит коммутация цепи (при нулевых начальных условиях), то для определения тока  $i$  необходимо рассмотреть переходный процесс, расчет которого дает известное соотношение для тока  $i$ :

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.62)$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{x_L}{r};$$

$$\tau = \frac{L}{r}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  может быть найдена из условия, что  $i(\omega t_n) = 0$ :

$$A = -I_m \sin(\omega t_n - \varphi) e^{\frac{\omega t_n}{\omega\tau}}. \quad (3.63)$$

Тогда из выражения для переходного тока

$$i = I_m \left[ \sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t_n - \varphi) e^{-\frac{\omega t - \omega t_n}{\omega\tau}} \right], \quad (3.64)$$

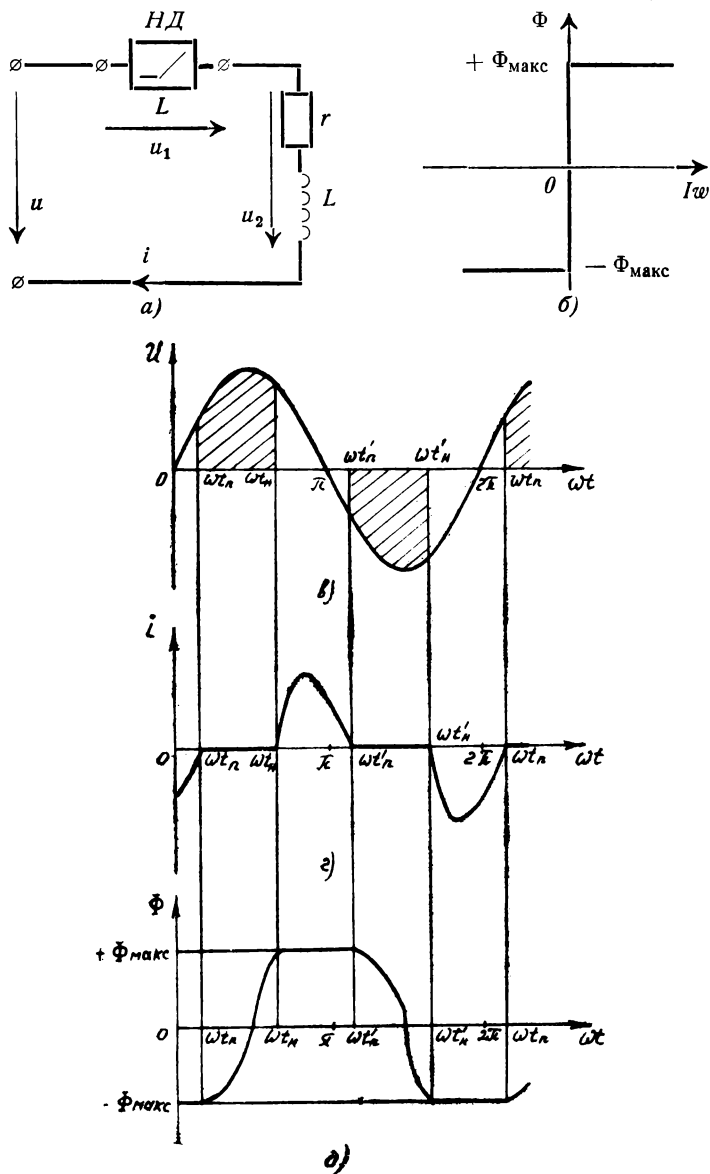


Рис. 3.35. Метод сопряженных интервалов для цепи с нелинейным индуктивным двухполюсником и смешанной нагрузкой:  
 а — схема; б — идеализированная вебер-амперная характеристика; в — зависимость  $u(\omega t)$ ; г — зависимость  $i(\omega t)$ ; д — зависимость  $\Phi(\omega t)$

рассматриваемого в момент времени  $\omega t_{\text{п}}$ , при котором ток равен нулю (рис. 3.35, *г*), можно получить второе уравнение, связывающее  $\omega t_{\text{н}}$  и  $\omega t_{\text{п}}$ :

$$\sin(\omega t_{\text{п}} - \varphi) e^{\frac{\omega t_{\text{п}}}{\omega \tau}} = \sin(\omega t_{\text{н}} - \varphi) e^{\frac{\omega t_{\text{н}}}{\omega \tau}}. \quad (3.65)$$

Совместное решение уравнений (3.61) и (3.65) дает возможность определить  $\omega t_{\text{н}}$  и  $\omega t_{\text{п}}$ .

В заключение следует заметить, что уравнение (3.65) аналогично по своей структуре уравнению (3.35), что показывает на общность методов расчета двухполюсников различного характера, если принято допущение об идеализации их исходных характеристик.

---

## Глава 4. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

### § 4.1. ОСОБЕННОСТИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ И ИХ ИСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Нелинейные пассивные четырехполюсники на переменном токе, так же как и двухполюсники, могут быть со свойствами активного сопротивления (резистивными), чисто реактивными (индуктивными или емкостными) и смешанными (активно-реактивными). В общем случае вход и выход четырехполюсника будут описываться различными исходными характеристиками.

Если применить для расчета цепей с четырехполюсниками квазилинейный подход, то семейства входных и выходных вольт-амперных характеристик будут иметь аналитические выражения, например, такого вида:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1 (U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2 (U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

которые геометрически представляют собой четырехмерные гиперобъемы.

Положительные направления токов и напряжений для четырехполюсника в квазилинейном рассмотрении показаны на рис. 4.1. Для мгновенных значений эти направления аналогичны.

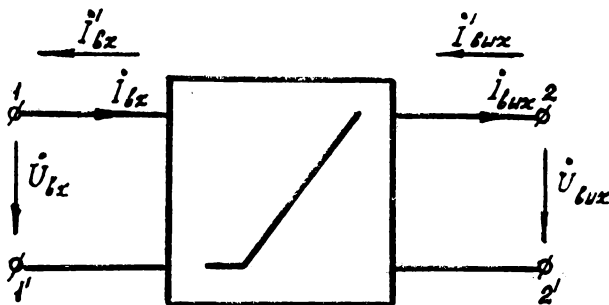


Рис. 4.1. Положительные направления напряжений  
и токов

Если частота источников входной и выходной цепи одинакова, то каждое из семейств будет геометрически соответствовать объему, представляющему собой совокупность поверхностей. Аналитические выражения при этом упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Обычно на практике частоты источников  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  (рис. 4.2, а) остаются постоянными в процессе работы (очень часто при этом  $\omega_{\text{вх}} \ll \omega_{\text{вых}}$ ), что позволяет рассматривать семейства вольт-амперных характеристик на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

частным случаем которых (при  $\omega = 0$ ) являются характеристики на постоянном токе.

Нетрудно видеть, что система уравнений (4.3) представляет собой нелинейный вариант формы  $Y$ -параметров. Следовательно, если возможна линеаризация этих характеристик, то аналитическое выражение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вх}} &= Y_{11}\dot{U}_{\text{вх}} + Y_{12}\dot{U}_{\text{вых}}; \\ i'_{\text{вых}} &= Y_{21}\dot{U}_{\text{вх}} + Y_{22}\dot{U}_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\}$$

Исходными характеристиками для четырехполюсника могут быть также семейства зависимостей комплексных статических или дифференциальных сопротивлений или проводимостей либо безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого вида должно быть четыре, так же как и на постоянном токе.

Так же как и при расчете цепей с двухполюсниками на переменном токе, семейства исходных характеристик четырехполюсника не могут иметь универсальный характер (см. § 3.2). В дальнейшем будем полагать, что те исходные характеристики, которые будут применяться в расчетах, сняты в режиме, близком к ожидаемому, и что частоты источников входной и выходной цепи не изменяются.

Следует также отметить, что если характер сопротивления  $Z_1$  и входного сопротивления четырехполюсника (рис. 4.2) одинаков, то расчет такой цепи ничем не отличается от расчета на постоянном токе (см. гл. 2). То же относится и к выходной цепи четырехполюсника. В противном случае необходимо учитывать фазовые сдвиги между токами и напряжениями. В этом и состоит, как будет пока-

зано ниже, особенность расчета цепей с четырехполусниками на переменном токе.

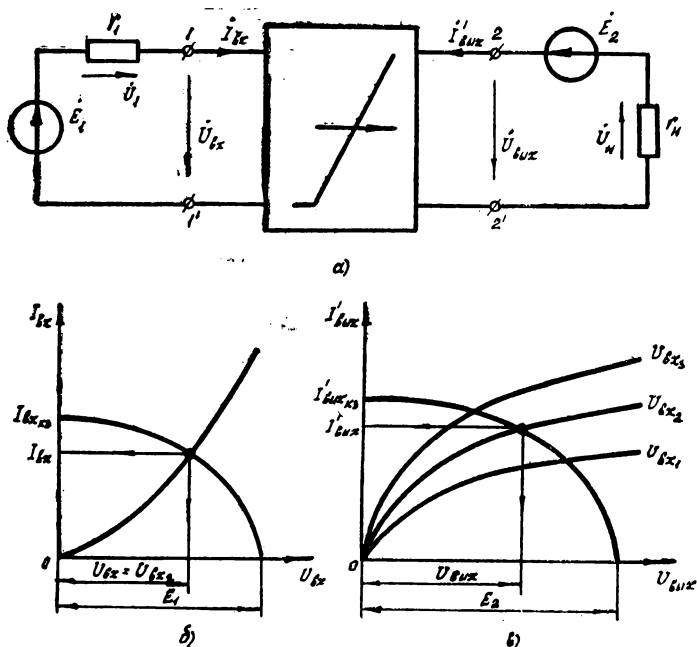


Рис. 4.2. Графический расчет цепи с направленным четырехполусником:  
а — схема; б — расчет входной цепи; в — расчет выходной цепи

#### § 4.2. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКАМИ

Рассмотрим цепь с направленным четырехполусником (рис. 4.2, а), у которого входное и выходное сопротивления имеют, например, индуктивный характер. Четырехполусник задан входной вольт-амперной характеристикой (рис. 4.2, б) и семейством выходных характеристик (рис. 4.2, в). Кроме того, известны э. д. с. источников  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  и сопротивления  $r_1$  и  $r_N$ .

Расчет начинается со входной цепи, для которой можно написать уравнение для действующих значений

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{BX}^2 = (r_1 I_{BX})^2 + U_{BX}^2, \quad (4.4)$$

ввести входной условный ток короткого замыкания

$$I_{BXK3} = \frac{E_1}{r_1} \quad (4.5)$$



и применить метод эллипса (см. § 3.2)

$$\frac{U_{\text{вх}}^2}{E_1^2} + \frac{I_{\text{вх}}^2}{I_{\text{вхкз}}^2} = 1. \quad (4.6)$$

На рис. 4.2, б строится эллипс с полуосями  $E_1$  и  $I_{\text{вхкз}}$ , точка пересечения которого с вольт-амперной характеристикой определяет рабочий режим входной цепи, т. е. входной ток  $I_{\text{вх}}$  и напряжение на входных зажимах четырехполюсника  $U_{\text{вх}} = U_{\text{вх}_2}$ . Напряжение  $U_1$  находится по закону Ома:  $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$ .

Для выходной цепи также можно применить метод эллипса:

$$E_2^2 = U_{\text{н}}^2 + U_{\text{вых}}^2 = (r_{\text{н}} I'_{\text{вых}})^2 + U_{\text{вых}}^2; \quad (4.7)$$

$$I'_{\text{выхкз}} = \frac{E_2}{r_{\text{н}}}; \quad (4.8)$$

$$\frac{U_{\text{вых}}^2}{E_2^2} + \frac{I_{\text{вых}}'^2}{I_{\text{выхкз}}'^2} = 1, \quad (4.9)$$

точка пересечения которого с одной из характеристик семейства (в данном случае с характеристикой  $U_{\text{вх}}$ ) (рис. 4.2, в) определяет выходной ток  $I'_{\text{вых}}$  и выходное напряжение четырехполюсника  $U_{\text{вых}}$ . Напряжение на нагрузке  $U_{\text{н}} = r_{\text{н}} I'_{\text{вых}}$ .

Если в цепи вместо активных сопротивлений  $r_1$  и  $r_{\text{н}}$  включены комплексные сопротивления  $Z_1$  и  $Z_{\text{н}}$ , то применяется подход, изложенный в § 3.2 («последовательное соединение»): поворот эллипсов вокруг центра или суммирование (вычитание) координат эллипса и линейной характеристики.

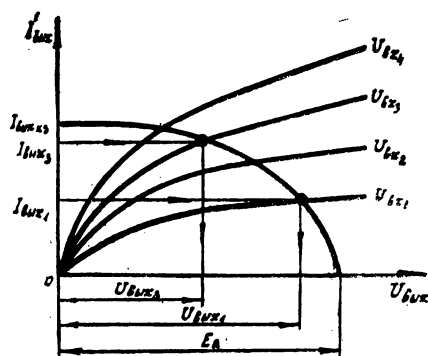
Иногда в выходной цепи требуется обеспечить не фиксированное значение тока, а некоторый его диапазон, например, от  $I'_{\text{вых}_1}$  до  $I'_{\text{вых}_2}$  (рис. 4.3, а). Как видно из рисунка, требуемый диапазон выходного тока можно получить, если изменить входное напряжение четырехполюсника от  $U_{\text{вх}_1}$  до  $U_{\text{вх}_2}$ . Этого можно достичь путем изменения модуля э. д. с.  $E_1$  или сопротивления  $r_1$  (рис. 4.2, а). Рассмотрим два случая.

На рис. 4.3, б показано, что, отложив на оси абсцисс значения  $U_{\text{вх}_1}$  и  $U_{\text{вх}_2}$ , можно определить токи  $I_{\text{вх}_1}$  и  $I_{\text{вх}_2}$ , т. е. определить требуемый рабочий диапазон на входной характеристике. Если при этом считать, что сопротивление  $r_1 = \text{const}$ , а изменяется э. д. с.  $E_1$ , то необходимо определить значения  $E'_1$  и  $E''_1$  или из уравнений эллипсов, подставив туда текущие координаты  $U_{\text{вх}_1}$ ,  $I_{\text{вх}_1}$  и  $U_{\text{вх}_2}$ ,  $I_{\text{вх}_2}$ , или из уравнений для входной цепи четырехполюсника (рис. 4.2, а):

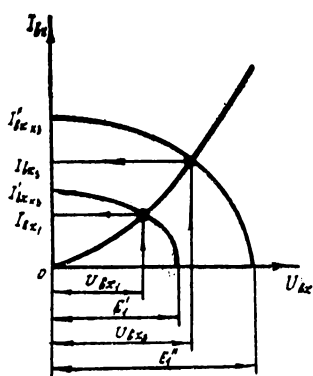
$$E'_1 = \sqrt{U_{\text{вх}_1}^2 + (r_1 I_{\text{вх}_1})^2}; \quad (4.10)$$

$$E''_1 = \sqrt{U_{\text{вх}_2}^2 + (r_1 I_{\text{вх}_2})^2}. \quad (4.11)$$

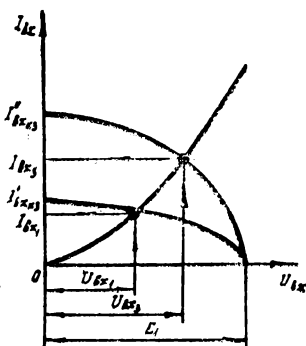
Если во входной цепи изменяется сопротивление  $r_1$  при  $E_1 = \text{const}$  (рис. 4.3, в), то, определив значения токов  $I_{\text{вх}_1}$  и  $I_{\text{вх}_2}$  по



а)



б)



в)

Рис. 4.3. Графический расчет цепи с направленным четырехполусником:  
а — характеристики выходной цепи; б — изменение  $E_1$  при  $r_1 = \text{const}$ ; в — изменение  $r_1$  при  $E_1 = \text{const}$

известным значениям напряжений  $U_{вх1}$  и  $U_{вх2}$ , можно также воспользоваться или уравнениями эллипсов, или уравнениями входной цепи четырехполюсника:

$$r_1' = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{вх1}^2}}{I_{вх1}}; \quad (4.12)$$

$$r_1'' = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{вх2}^2}}{I_{вх2}}. \quad (4.13)$$

Очевидно, что требуемый диапазон выходного тока может быть получен не только за счет изменения  $E_1$  и  $r_1$ , но и путем изменения э. д. с.  $E_2$  и сопротивления  $r_2$  в выходной цепи (рис. 4.2, а).

#### § 4.3. РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником (рис. 4.2, а), вход и выход которого имеют, например, реактивный характер и описываются зависимостями, представленными на рис. 4.4, а, б.

Из входной характеристики четырехполюсника (рис. 4.4, а) уравнение входного напряжения, используя метод компенсации, можно записать следующим образом:

$$U_{вх} = U_{i_{вх}} + x_{i_{вх}} I_{вх} \quad (4.14)$$

(сущность значений  $U_{i_{вх}}$  и  $x_{i_{вх}}$  см. в § 1.2).

Уравнение выходного напряжения можно получить из рис. 4.4, б:

$$U_{вых} = U_{i_{вых}} + k U_{вх} + x_{i_{вых}} I'_{вых}, \quad (4.15)$$

где  $k = \frac{\Delta U_{вых}}{\Delta U_{вх}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах (сущность значений  $U_{i_{вых}}$  и  $x_{i_{вых}}$  см. в § 1.2).

В соответствии с уравнениями (4.14) и (4.15) можно составить схему замещения четырехполюсника, а также всей цепи в целом, которая состоит из двух частей, относящихся к входу (рис. 4.4, в) и выходу (рис. 4.4, г). Из рассмотрения этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения  $k|U_{вх}|$ , а выходная цепь на вход не влияет. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является направленным, однако, в отличие от исходного (рис. 4.2, а), — линейным.

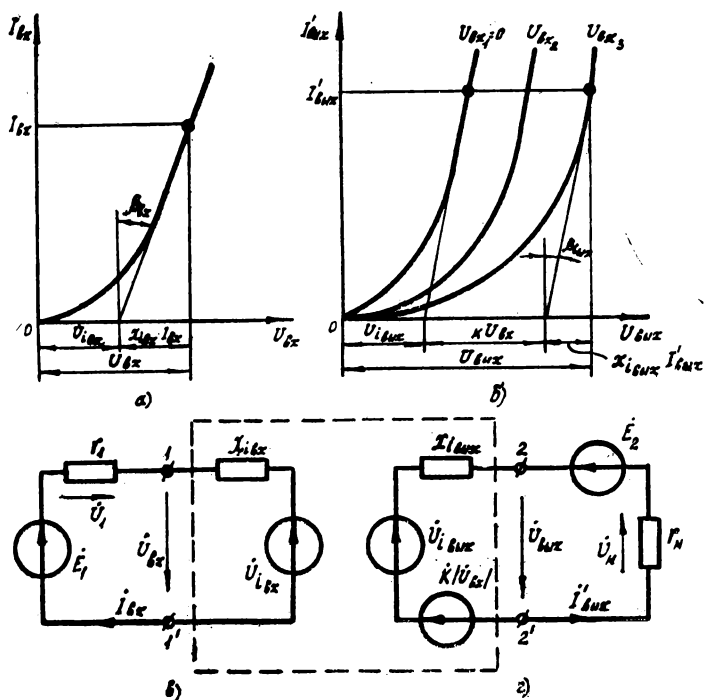


Рис. 4.4. К расчету цепи с направленным четырехполосником методом компенсации:  
 а — входная характеристика; б — выходные характеристики;  
 в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Следует обратить внимание, что фаза напряжения  $\dot{U}_{i_{\text{вых}}}$  и комплексного коэффициента  $\dot{k}$  всегда совпадает с фазой составляющей  $\pm jx_{i_{\text{вых}}} \dot{I}'_{\text{вых}}$  (см. § 3.4), определяется соотношением

$$\frac{\dot{I}'_{\text{вых}} / \pm 90^\circ}{I'_{\text{вых}}}$$

и, следовательно, изменяется при изменении выходного тока  $\dot{I}'_{\text{вых}}$ . Со множитель зависимого источника напряжения  $|\dot{U}_{\text{вх}}|$  учитывается только по модулю и на фазу выходного напряжения  $\dot{U}_{\text{вых}}$  не влияет. Это объясняется тем, что от фазы входного напряжения зависит фаза выходного тока  $\dot{I}'_{\text{вых}}$ , следовательно, влияние  $U_{\text{вх}}$  в выходной цепи уже учтено.

Из схемы рис. 4.4, в можно записать уравнение для входной цепи четырехполюсника в комплексной форме

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_1 + \dot{U}_{\text{вх}} = r_1 \dot{I}_{\text{вх}} + \dot{U}_{i_{\text{вх}}} \pm jx_{i_{\text{вх}}} \dot{I}_{\text{вх}}, \quad (4.16)$$

а затем для модулей этих напряжений —

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{\text{вх}}^2 = (r_1 I_{\text{вх}})^2 + (U_{i_{\text{вх}}} + x_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}})^2 \quad (4.17)$$

и найти значение входного тока

$$I_{\text{вх}} = \frac{-x_{i_{\text{вх}}} U_{i_{\text{вх}}} + \sqrt{(r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - r_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2} \quad (4.18)$$

и входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = \frac{r_1^2 U_{i_{\text{вх}}} + x_{i_{\text{вх}}} \sqrt{(r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - r_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2}. \quad (4.19)$$

Из схемы рис. 4.4, г

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_{\text{н}} + \dot{U}_{\text{вых}} = r_{\text{н}} \dot{I}'_{\text{вых}} + \dot{U}_{i_{\text{вых}}} + \dot{k} |\dot{U}_{\text{вх}}| \pm jx_{i_{\text{вых}}} \dot{I}'_{\text{вых}} \quad (4.20)$$

и

$$E_2^2 = U_{\text{н}}^2 + U_{\text{вых}}^2 = (r_{\text{н}} I'_{\text{вых}})^2 + (U_{i_{\text{вых}}} + k U_{\text{вх}} + x_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}})^2, \quad (4.21)$$

откуда можно найти значение выходного тока

$$I'_{\text{вых}} = \frac{-x_{i_{\text{вых}}} (U_{i_{\text{вых}}} + k U_{\text{вх}}) + \sqrt{(r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2) E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{вых}}} + k U_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2}, \quad (4.22)$$

а затем напряжение на нагрузке

$$U_{\text{н}} = r_{\text{н}} \frac{-x_{i_{\text{ввых}}} (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}}) + \sqrt{(r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{ввых}}}^2) E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{ввых}}}^2}. \quad (4.23)$$

Падение напряжения на сопротивлении  $r_1$  и выходное напряжение четырехполосника можно найти соответственно как  $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$  и  $U_{\text{ввых}} = \sqrt{E_2^2 - U_{\text{н}}^2}$  или из уравнения (4.15).

Если сопротивление нагрузки имеет активно-реактивный характер ( $Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} \pm jx_{\text{н}}$ ), то вместо выражений (4.22) и (4.23) будем иметь

$$I'_{\text{ввых}} = \frac{-(x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}}) (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}}) + \sqrt{[r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2] E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2} \quad (4.24)$$

и

$$U_{\text{н}} = \sqrt{r_{\text{н}}^2 + x_{\text{н}}^2} \times \frac{-(x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}}) (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}}) + \sqrt{[r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2] E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2}, \quad (4.25)$$

где  $x_{\text{н}}$  и  $x_{i_{\text{ввых}}}$  складываются, если оба эти сопротивления имеют индуктивный или емкостный характер, и вычитаются (из большего меньшее), если характер этих сопротивлений различный.

Полученное выше аналитическое выражение (4.24), а также и (4.25) могут быть записаны в виде обобщенной формулы

$$I'_{\text{ввых}} = -b_{\text{ввых}} M + \sqrt{y_{\text{ввых}}^2 E_2^2 - g_{\text{ввых}}^2 M^2}, \quad (4.26)$$

где

$$b_{\text{ввых}} = \frac{x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}}}{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2}; \quad (4.27)$$

$$g_{\text{ввых}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2}; \quad (4.28)$$

$$y_{\text{ввых}} = \frac{1}{\sqrt{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{ввых}}})^2}}; \quad (4.29)$$

$$M = U_{i_{\text{ввых}}} + kU_{\text{вх}}. \quad (4.30)$$

Нетрудно видеть, что величины  $b_{\text{ввых}}$ ,  $g_{\text{ввых}}$  и  $y_{\text{ввых}}$  представляют собой соответственно реактивную, активную и полную проводи-

мости выходной цепи и сразу могут быть определены из схемы рис. 4.4, з.

Во многих случаях значениями  $U_{i_{\text{вх}}}$  и  $U_{i_{\text{вых}}}$  можно пренебречь, и тогда выражения, приведенные выше, упрощаются.

Для расчета рассматриваемой цепи (рис. 4.4, в, з) можно также воспользоваться одной из общепринятых форм уравнений линейного активного четырехполюсника, например формой  $Y$ -параметров:

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вх}} &= \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{\text{вх}} - \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{i_{\text{вх}}} = Y_{11} (\dot{U}_{\text{вх}} - \dot{U}_{i_{\text{вх}}}); \\ i'_{\text{вых}} &= -\frac{k}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} |\dot{U}_{\text{вх}}| + \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{i_{\text{вых}}} - \\ &\quad - \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{i_{\text{вых}}} = Y_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + Y_{22} (\dot{U}_{i_{\text{вых}}} - \dot{U}_{i_{\text{вх}}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

или для случая, когда  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{вых}}} = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вх}} &= Y_{11} \dot{U}_{\text{вх}}; \\ i'_{\text{вых}} &= Y_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + Y_{22} \dot{U}_{i_{\text{вых}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Схемы замещения четырехполюсника, отвечающие уравнениям (4.31) и (4.32), приведены соответственно на рис. 4.5, а и 4.5, б.

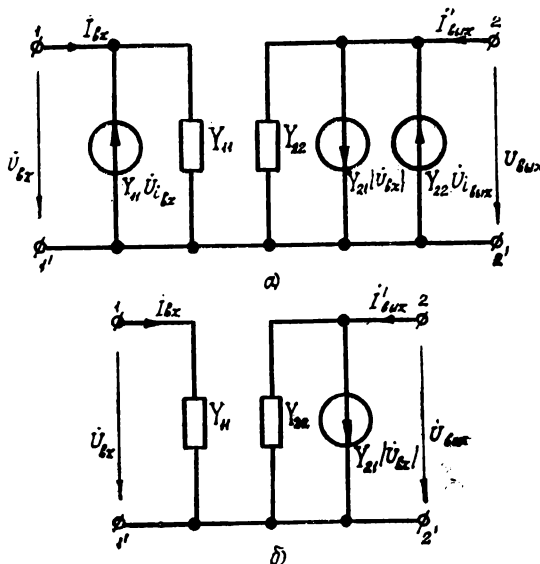


Рис. 4.5. К расчету цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:

а — полная схема замещения четырехполюсника (с  $Y$ -параметрами); б — схема замещения при условии  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{вых}}} = 0$

Подобным же образом можно получить систему уравнений в форме  $Z$ -параметров,  $H$ -параметров и т. д. Источники тока можно заменить источниками напряжения. Но всегда линеаризованный направленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться тремя параметрами (например,  $k$ ,  $x_{i_{вх}}$  и  $x_{i_{вых}}$ ).

#### § 4.4. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

Если ненаправленный четырехполюсник, вход и выход которого имеют, например, реактивный характер, включен в цепь (рис. 4.6), то для расчета такой цепи, т. е. определения токов  $I_{вх}$  и  $I'_{вых}$ , можно применить графический метод. Этот метод для аналогичной цепи на постоянном токе был изложен в § 2.5.

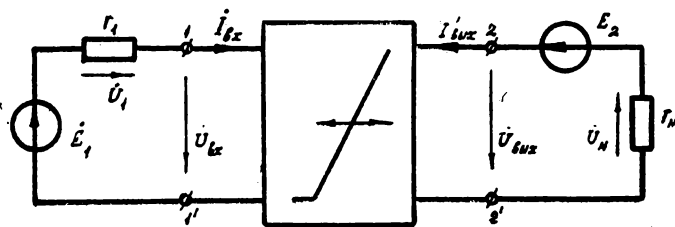


Рис. 4.6. Схема включения ненаправленного четырехполюсника в цепь

В данном случае применяется та же последовательность графических построений, за исключением того, что вместо прямых нагрузочных линий на рис. 2.11, а и 2.11, б необходимо построить эллипсы с полуосями соответственно  $E_2$ ,  $I'_{выхкз} = \frac{E_2}{r_n}$  и  $E_1$ ,  $I_{вхкз} = \frac{E_1}{r_1}$ .

#### § 4.5. РАСЧЕТ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполюсником (рис. 4.6), характеристики которого показаны на рис. 4.7, а, б. Пусть вход и выход этого четырехполюсника имеют реактивный характер.

Из входных характеристик четырехполюсника (рис. 4.7, а) применяя метод компенсации, можно записать уравнение входного напряжения

$$U_{вх} = U_{i_{вх}} + k_{вх} U_{вых} + x_{i_{вх}} I_{вх}, \quad (4.33)$$

где  $k_{вх} = \frac{\Delta U_{вх}}{\Delta U_{вых}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых входных зажимах (сущность значений  $U_{i_{вх}}$  и  $x_{i_{вх}}$  см. в § 1.2).



Для выходного напряжения

$$U_{\text{ВЫХ}} = U_{i_{\text{ВЫХ}}} + k_{\text{ВЫХ}} U_{\text{ВХ}} + x_{i_{\text{ВЫХ}}} I'_{\text{ВЫХ}}, \quad (4.34)$$

где  $k_{\text{ВЫХ}} = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}}$  — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах (сущность значений  $U_{i_{\text{ВЫХ}}}$  и  $x_{i_{\text{ВЫХ}}}$  см. в § 1.2).

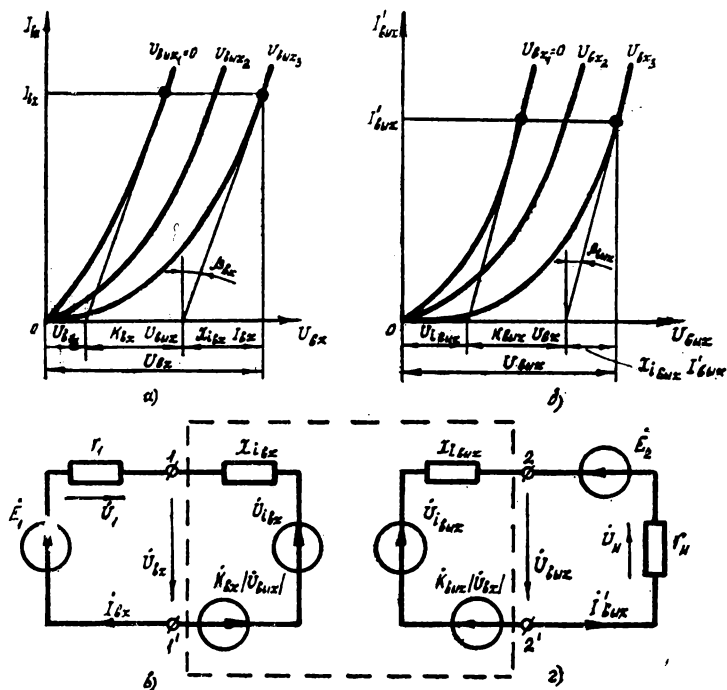


Рис. 4.7. К расчету цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:  
 а — входные характеристики; б — выходные характеристики;  
 в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Согласно уравнениям (4.33) и (4.34) можно составить схему замещения для четырехполюсника, а также всей цепи в целом, состоящую из двух частей: входной (рис. 4.7, в) и выходной (рис. 4.7, г). Влияние выхода на вход и входа на выход осуществляется соответственно через зависимые источники напряжения  $k_{\text{ВХ}} |U_{\text{ВЫХ}}|$  и  $k'_{\text{ВЫХ}} |U_{\text{ВХ}}|$ . Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является линейным, в отличие от исходного (рис. 4.6).

Фаза напряжения  $\dot{U}_{i_{\text{BX}}}$  и комплексного коэффициента  $\dot{k}_{\text{BX}}$  всегда совпадает с фазой составляющей  $\pm jx_{i_{\text{BX}}} \dot{I}_{\text{BX}}$ , а напряжения  $\dot{U}_{i_{\text{ВЫХ}}}$  и  $\dot{k}_{\text{ВЫХ}}$  — с фазой составляющей  $\pm jx_{i_{\text{ВЫХ}}} \dot{I}'_{\text{ВЫХ}}$ . Таким образом, фазовые сдвиги для входной цепи определяются соотношением

$$\frac{\dot{I}_{\text{BX}} / \pm 90^\circ}{I_{\text{BX}}},$$

а для выходной цепи —

$$\frac{\dot{I}'_{\text{ВЫХ}} / \pm 90^\circ}{I'_{\text{ВЫХ}}}.$$

Сомножители зависимых источников  $|\dot{U}_{\text{ВЫХ}}|$  и  $|\dot{U}_{\text{BX}}|$  учитываются только по модулю и на фазы напряжений  $\dot{U}_{\text{BX}}$  и  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  не влияют.

Из схем рис. 4.7, в и 4.7, г можно получить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= r_1 \dot{I}_{\text{BX}} + \dot{U}_{i_{\text{BX}}} + \dot{k}_{\text{BX}} |\dot{U}_{\text{ВЫХ}}| \pm jx_{i_{\text{BX}}} \dot{I}_{\text{BX}}; \\ \dot{E}_2 &= r_{\text{II}} \dot{I}'_{\text{ВЫХ}} + \dot{U}_{i_{\text{ВЫХ}}} + \dot{k}_{\text{ВЫХ}} |\dot{U}_{\text{BX}}| \pm jx_{i_{\text{ВЫХ}}} \dot{I}'_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

а затем

$$\left. \begin{aligned} E_1^2 &= (r_1 I_{\text{BX}})^2 + (U_{i_{\text{BX}}} + k_{\text{BX}} U_{\text{ВЫХ}} + x_{i_{\text{BX}}} I_{\text{BX}})^2; \\ E_2^2 &= (r_{\text{II}} I'_{\text{ВЫХ}})^2 + (U_{i_{\text{ВЫХ}}} + k_{\text{ВЫХ}} U_{\text{BX}} + x_{i_{\text{ВЫХ}}} I'_{\text{ВЫХ}})^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

которая при  $U_{i_{\text{BX}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$  преобразуется относительно двух неизвестных  $I_{\text{BX}}$  и  $I'_{\text{ВЫХ}}$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1^2 &= r_1^2 I_{\text{BX}}^2 + k_{\text{BX}}^2 (E_2^2 - r_{\text{II}}^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2) + 2k_{\text{BX}} x_{i_{\text{ВЫХ}}} I_{\text{BX}} \sqrt{E_2^2 - r_{\text{II}}^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2} + x_{i_{\text{BX}}}^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2; \\ E_2^2 &= r_{\text{II}}^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2 + k_{\text{ВЫХ}}^2 (E_1^2 - r_1^2 I_{\text{BX}}^2) + 2k_{\text{ВЫХ}} x_{i_{\text{ВЫХ}}} I'_{\text{ВЫХ}} \sqrt{E_1^2 - r_1^2 I_{\text{BX}}^2} + x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2. \end{aligned} \right\}$$

Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} (E_1^2 - k_{\text{BX}}^2 E_2^2)^2 &= -(r_1^2 + x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2)^2 I_{\text{ВЫХ}}'^4 + 2[E_1^2 (r_1^2 + x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2) - \\ &\quad - k_{\text{ВЫХ}}^2 E_2^2 (r_1^2 - x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2)] I_{\text{ВЫХ}}'^2 + 2k_{\text{ВЫХ}}^2 r_{\text{II}}^2 (r_1^2 - x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2) I_{\text{ВЫХ}}'^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2 - \\ &\quad - 2k_{\text{ВЫХ}}^2 r_{\text{II}}^2 (E_1^2 - k_{\text{ВЫХ}}^2 E_2^2) I_{\text{ВЫХ}}'^2 - k_{\text{ВЫХ}}^4 r_{\text{II}}^4 I_{\text{ВЫХ}}'^4; \\ (E_2^2 - k_{\text{ВЫХ}}^2 E_1^2)^2 &= -(r_{\text{II}}^2 + x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2)^2 I_{\text{ВЫХ}}'^4 + 2[E_2^2 (r_{\text{II}}^2 + x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2) - \\ &\quad - k_{\text{ВЫХ}}^2 E_1^2 (r_{\text{II}}^2 - x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2)] I_{\text{ВЫХ}}'^2 + 2k_{\text{ВЫХ}}^2 r_1^2 (r_{\text{II}}^2 - x_{i_{\text{ВЫХ}}}^2) I_{\text{ВЫХ}}'^2 I_{\text{ВЫХ}}'^2 - \\ &\quad - 2k_{\text{ВЫХ}}^2 r_1^2 (E_2^2 - k_{\text{ВЫХ}}^2 E_1^2) I_{\text{ВЫХ}}'^2 - k_{\text{ВЫХ}}^4 r_1^4 I_{\text{ВЫХ}}'^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Совместное решение двух уравнений системы (4.37) даст возможность определить входной и выходной токи, а зная токи — напряжения  $U_{\text{ВЫХ}}$ ,  $U_{\text{ВЫХ}}$ ,  $U_1$  и  $U_{\text{H}}$ . В силу достаточной сложности уравнений (4.37) решать их целесообразно с использованием ЦВМ, что

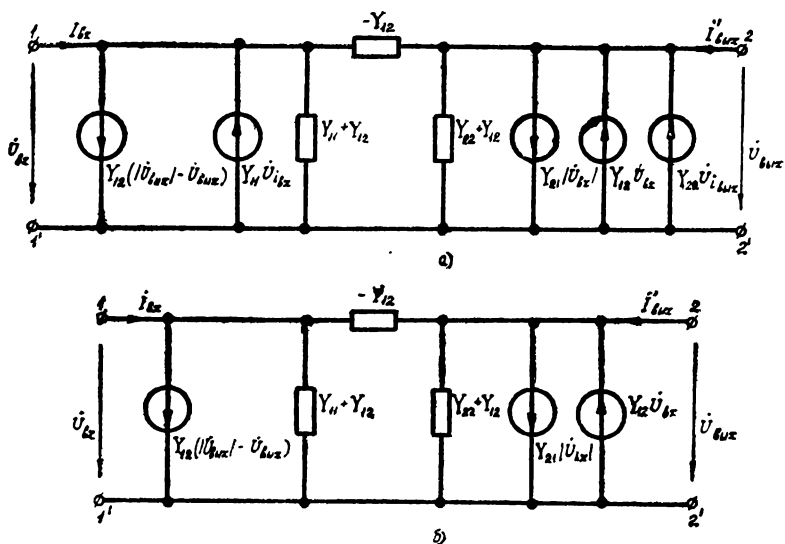


Рис. 4. 8. К расчету цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:  
 а — полная схема замещения четырехполюсника (с  $Y$ -параметрами);  
 б — схема замещения при условии  $U_{l_{вх}} = 0$  и  $U_{i_{вых}} = 0$

указывает на ограниченность упрощенных методов применительно к сложным схемам.

Из схем замещения рис. 4.7, *в* и 4.7, *г* можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать их для расчета, например, в форме  $Y$ -параметров:

$$\left. \begin{aligned} \dot{i}_{\text{вх}} &= \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{\text{вх}} - \frac{\dot{k}_{\text{вх}}}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} |\dot{U}_{\text{вых}}| - \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{i_{\text{вх}}} = \\ &= Y_{11} (\dot{U}_{\text{вх}} - \dot{U}_{i_{\text{вх}}}) + Y_{12} |\dot{U}_{\text{вых}}|; \\ \dot{i}_{\text{вых}} &= -\frac{\dot{k}_{\text{вых}}}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} |\dot{U}_{\text{вх}}| + \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{\text{вых}} - \\ &- \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{i_{\text{вых}}} = Y_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + Y_{22} (\dot{U}_{\text{вых}} - \dot{U}_{i_{\text{вых}}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

или с учетом, что в некоторых случаях  $U_{i_{\text{вх}}} = 0$  и  $U_{i_{\text{вых}}} = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{i}_{\text{вх}} &= Y_{11} \dot{U}_{\text{вх}} + Y_{12} |\dot{U}_{\text{вых}}|; \\ \dot{i}_{\text{вых}} &= Y_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + Y_{22} \dot{U}_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Из уравнений (4.38) и (4.39) видно, что линеаризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами  $Y_{11}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$  и  $Y_{22}$  ( $k_{\text{вх}}$ ,  $k_{\text{вых}}$ ,  $x_{i_{\text{вх}}}$  и  $x_{i_{\text{вых}}}$ ).

На рис. 4.8, *а* и 4.8, *б* приведены П-образные схемы замещения, отвечающие уравнениям (4.38) и (4.39) соответственно.

В случае необходимости можно получить системы уравнений в форме  $Z$ -параметров,  $H$ -параметров и т. д., заменить П-образную схему замещения Т-образной, от источников тока перейти к источникам напряжения, но всегда линеаризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

#### § 4.6. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С НАПРАВЛЕННЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Как было указано ранее в § 1.4, ток в цепи имеет релейный (импульсный) характер, если дифференциальное сопротивление соответствующих участков вольт-амперных характеристик отрицательно.

Рассмотрим вначале направленный четырехполюсник, входное и выходное сопротивления которого являются чисто активными. Такой же характер имеет и нагрузка.

Для упрощения расчета можно применить метод пусковых характеристик, который служит для определения угла начала импульса тока и сочетается с методом приспособывания.

Суть метода пусковых характеристик заключается в том, что выходное сопротивление четырехполюсника до точки перегиба полагается равным бесконечности, а после точки перегиба — равным нулю, т. е. вместо семейства характеристик рис. 4.9, *а* рассматривается семейство характеристик рис. 4.9, *б*. При необходимости далее всегда можно учесть то приблизительно постоянное по величине падение напряжения  $U_0$  (рис. 4.9, *а*), которое возникает при протекании в выходной цепи тока.

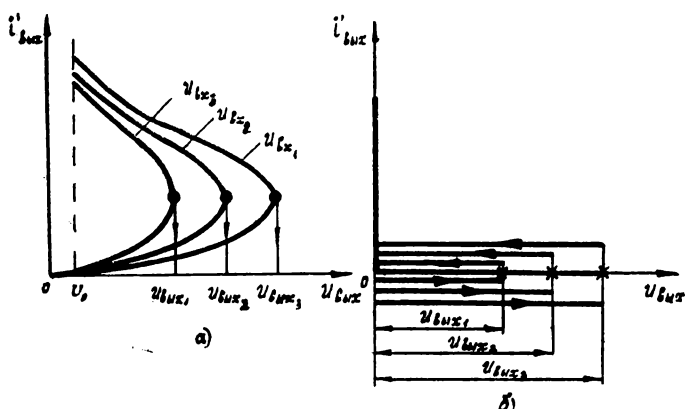


Рис. 4.9. Выходные характеристики четырехполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением:  
а — исходные; б — идеализированные

Графически пусковая характеристика может быть найдена из семейства выходных характеристик как зависимость  $u_{\text{вых}} = f_1(u_{\text{вх}})$  (рис. 4.10, *а*) или  $u_{\text{вых}} = f_2(i_{\text{вх}})$ , где значения  $u_{\text{вых}}$  соответствуют точкам перегиба, которые показаны на рис. 4.9, *а*:  $u_{\text{вых}1}$ ,  $u_{\text{вых}2}$ ,  $u_{\text{вых}3}$ . Физический смысл пусковой характеристики можно определить как зависимость наименьших значений выходных напряжений, при которых величина выходного сопротивления четырехполюсника изменяется от бесконечности до нуля, от величины сигнала (напряжения или тока) на входе.

Графически выходную цепь рассчитывают следующим образом.

Вначале строят пусковую характеристику (рис. 4.10, *а*), которую можно получить или экспериментальным путем, или, как было показано выше, используя семейство выходных характеристик. Естественно, что характер пусковых характеристик может отличаться от рис. 4.10, *а*. Он зависит от их положения относительно начала координат для реальных нелинейностей. Если теперь отложить на оси абсцисс значение входного напряжения  $u_{\text{вх}1}$  и перенести точку пересечения этого напряжения с пусковой характе-

ристической на синусоиду э. д. с. источника питания  $e_2 = E_{2m} \sin \omega t$  (рис. 4.10, б), то можно определить угол начала импульса  $\omega t_{нi}$ , с которого в цепи начинает протекать ток. Угол прекращения тока в цепи  $\omega t_{п}$  равен  $\pi$ , так как в этот момент э. д. с.  $e_2$  равна нулю.

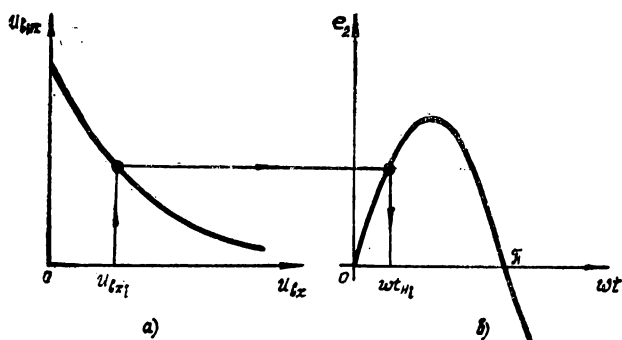


Рис. 4.10. Графическое определение угла начала импульса тока ( $U_0 = 0$ , нагрузка —  $r_H$ ):  
а — пусковая характеристика; б — график э. д. с.  $e_2$

Таким образом, выходное напряжение четырехполосника состоит из части синусоиды от 0 до  $\omega t_{нi}$ , а падение напряжения на сопротивлении нагрузки  $u_H$  и ток  $i'_{вых}$  имеют форму остальной части синусоиды, т. е. от  $\omega t_{нi}$  до  $\pi$ .

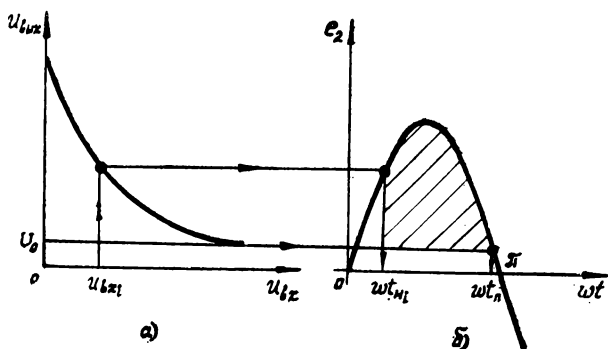


Рис. 4.11. Графическое определение углов начала и прекращения импульса тока ( $U_0 \neq 0$ , нагрузка —  $r_H$ ):  
а — пусковая характеристика; б — график э. д. с.  $e_2$

Если необходимо учесть напряжение  $U_0$ , то графические построения проводятся так, как это показано на рис. 4.11. В этом случае  $\omega t_{п}$  не равно  $\pi$ , и напряжение на нагрузке  $u_H$ , а следовательно, и ток  $i'_{вых}$  имеют форму, показанную на рис. 4.11, б заштрихованной частью. Остальная часть синусоиды — выходное напряжение четырехполосника.

Зная форму несинусоидальных функций (рис. 4.10, б и 4.11, б), можно разложить кривые в ряд Фурье и определить средние значения функций, основную гармонику и т. д.

Для метода пусковых характеристик можно составить две схемы замещения (рис. 4.12, а, б). На первой схеме (рис. 4.12, а) выходная часть четырехполюсника представлена в виде ключа  $K$ , который замыкается в моменты времени  $\omega t_{н1}$  и размыкается при  $\omega t_{п} = \pi$  ( $U_0 = 0$ ), тем самым имитируя в определенные промежутки времени бесконечности. Если необходимо учесть напряжение  $U_0$ , то в схему замещения должен быть введен источник э. д. с.  $U_0$  и еще один ключ  $K_2$ , размыкающийся одновременно с замыканием ключа  $K_1$  (рис. 4.12, б).

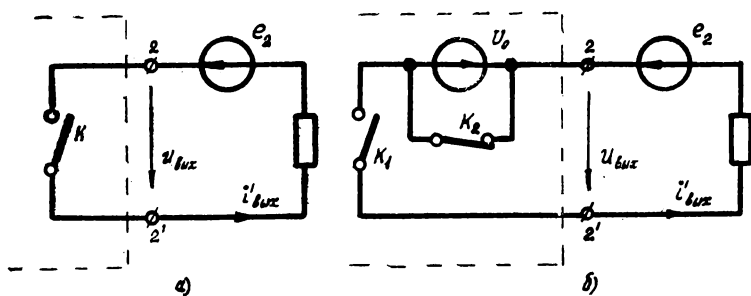


Рис. 4.12. Схемы замещения выходной цепи четырехполюсника: а — в случае, когда  $U_0 = 0$ ; б — при наличии  $U_0$

В аналитическом варианте метода пусковых характеристик необходимо аппроксимировать характеристику  $u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$  прямой линией (рис. 4.13). Если теперь записать уравнение прямой линии в виде

$$u_{\text{вх}} = U_{\text{вх макс}} - k u_{\text{вых}}, \quad (4.40)$$

где коэффициент  $k$  определяется тангенсом угла наклона аппроксимирующей прямой  $\alpha$ , то для неизменного по величине входного сигнала  $u_{\text{вх}1}$ , применяя метод припасовывания, момент начала импульса тока  $\omega t_{н1}$  определится из уравнения

$$u_{\text{вх}1} = U_{\text{вх макс}} - k E_{2m} \sin \omega t_{н1}, \quad (4.41)$$

откуда

$$\omega t_{н1} = \arcsin \left( \frac{U_{\text{вх макс}} - u_{\text{вх}1}}{k E_{2m}} \right). \quad (4.42)$$

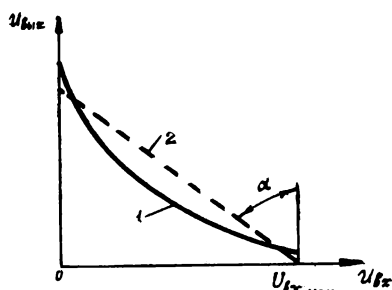


Рис. 4.13. Пусковая характеристика: 1 — исходный график; 2 — аппроксимирующая прямая

Если входным сигналом является ток, а не напряжение, то из уравнения прямой линии для этого случая ( $i_{\text{вх}} = I_{\text{вх макс}} - k u_{\text{вых}}$ ) угол  $\omega t_{\text{н}i}$  определяется аналогично:

$$\omega t_{\text{н}i} = \arcsin \left( \frac{I_{\text{вх макс}} - i_{\text{вх}i}}{k E_{2m}} \right). \quad (4.43)$$

Угол прекращения импульса тока находится из очевидного условия

$$E_{2m} \sin \omega t_{\text{п}} = U_0, \quad (4.44)$$

из которого следует

$$\omega t_{\text{п}} = \arcsin \frac{U_0}{E_{2m}}. \quad (4.45)$$

Из уравнения (4.45) видно, что для случая  $U_0 = 0$   $\arcsin$  равен нулю, а  $\omega t_{\text{п}} = \pi$ .

Рассмотрим теперь цепь с направленным четырехполюсником, входное и выходное сопротивления которого имеют индуктивный характер, а нагрузка — активное сопротивление.

Если выходные вебер-амперные характеристики могут быть приняты прямоугольными (рис. 4.14), то для определения угла начала импульса тока можно применить тот же способ, который был рассмотрен в § 3.10 применительно к реактивным двухполюсникам. Как будет показано ниже, использование идеализированных прямоугольных характеристик по глубине допущений является аналогом допущений метода пусковых характеристик.

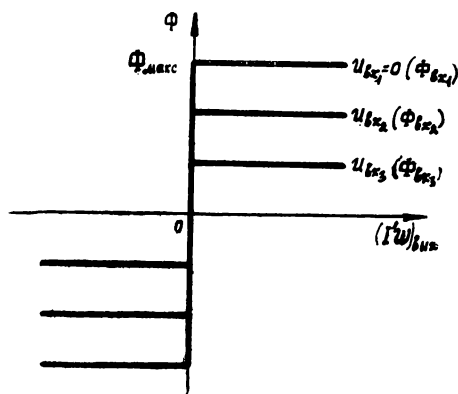


Рис. 4.14. Семейство идеализированных вебер-амперных характеристик

При нулевом входном сигнале, применяя последовательность рассуждений § 3.10 (уравнения (3.48) — (3.52)), получим выражение

$$\omega t_{\text{н}0} = \arccos \left( \frac{E_{2m} - 4\pi f \omega_{\text{вых}} \Phi_{\text{макс}}}{E_{2m}} \right). \quad (4.46)$$



Если на входе четырехполюсника появится сигнал  $u_{\text{вх}l}$ , то это приведет к изменению магнитного состояния четырехполюсника, который теперь будет перемагничиваться в пределах  $\pm \Phi_{\text{макс}l}$ . В этом случае для изменения магнитного состояния выходной цепи четырехполюсника на противоположное нужно создать несколько меньшее приращение потока:

$$\Delta\Phi_l = 2\Phi_{\text{макс}l} = 2\Phi_{\text{макс}} - \Phi_{\text{вх}l}, \quad (4.47)$$

откуда угол начала импульса тока

$$\omega t_{\text{н}l} = \arccos \left[ \frac{E_{2m} - 2\pi f \omega_{\text{вх}} (2\Phi_{\text{макс}} - \Phi_{\text{вх}l})}{E_{2m}} \right]. \quad (4.48)$$

Величина  $\Phi_{\text{вх}l}$  пропорциональна входному сигналу  $u_{\text{вх}l}$ .

Если входное и выходное сопротивления четырехполюсника имеют емкостный характер, то по аналогии с уравнением (3.60) можно записать следующее соотношение для нулевого входного сигнала:

$$\omega t_{\text{н}0} = \arccos \left( \frac{I'_{\text{вх}m} - 4\pi f S D_{\text{макс}}}{I'_{\text{вх}m}} \right). \quad (4.49)$$

При ненулевом входном сигнале

$$\omega t_{\text{н}l} = \arccos \left[ \frac{I'_{\text{вх}m} - 2\pi f S (2D_{\text{макс}} - D_{\text{вх}l})}{I'_{\text{вх}m}} \right], \quad (4.50)$$

т. е. получается выражение, аналогичное по структуре уравнению (4.48).

Нетрудно видеть, что выражения (4.48) и (4.50), в свою очередь, по своей структуре близки к выражениям (4.42) и (4.43). Поэтому можно сделать вывод, что рассмотренный метод, по существу, является вариантом метода пусковых характеристик. На основании соответствия указанных двух пар уравнений нетрудно убедиться, что и в случае реактивных четырехполюсников возможно применение графического варианта расчета, подобно выполненному на рис. 4.10. Разница состоит лишь в том, что здесь должны быть использованы косинусоиды  $\Phi = f_1(\omega t)$  и  $D = f_2(\omega t)$  как интегральные кривые от синусоид в соответствии с выражениями (3.48) и (3.56). Пусковые характеристики в этих случаях представляют собой зависимости  $\Phi = \Phi_1(u_{\text{вх}})$  и  $D = \Phi_2(i_{\text{вх}})$  соответственно.

Во многих случаях параметры выбирают так, что в отсутствии входного сигнала соблюдается условие

$$\omega t_{\text{н}0} = \pi, \quad (4.51)$$

т. е. выходное сопротивление четырехполюсника при этом равно бесконечности, а ток — нулю.

Если подставить соотношение (4.51) в уравнение (4.46), то можно определить значение  $\Phi_{\text{макс}}$ , которое будет равно в данном случае амплитудному значению потока  $\Phi_m$ :

$$\Phi_{\text{макс}} = \Phi_m = \frac{E_{2m}}{2\pi f \omega_{\text{вых}}}. \quad (4.52)$$

Выражение (4.52) позволяет привести уравнение (4.48) к виду

$$\omega t_{\text{н}i} = \arccos \left( \frac{\frac{1}{2\pi f \omega_{\text{вых}}} E_{2m} - \Phi_{\text{вх}i}}{\frac{1}{2\pi f \omega_{\text{вых}}} E_{2m}} \right). \quad (4.53)$$

Аналогичная подстановка (4.51) в уравнение (4.49) дает возможность преобразовать выражение (4.50):

$$\omega t_{\text{н}i} = \arccos \left( \frac{\frac{1}{2\pi f r_{\text{н}} S} E_{2m} - D_{\text{вх}i}}{\frac{1}{2\pi f r_{\text{н}} S} E_{2m}} \right), \quad (4.54)$$

где

$$\frac{E_{2m}}{r_{\text{н}}} = I'_{\text{вых}m}.$$

Очевидно, что все четыре полученные выражения (4.42), (4.43), (4.53) и (4.54) могут быть представлены в виде обобщенной формулы

$$\omega t_{\text{н}i} = \arccos F \left( \frac{M - X_{\text{вх}i}}{N E_{2m}} \right), \quad (4.55)$$

в которой значения  $F$ ,  $M$ ,  $N$  и  $X_{\text{вх}i}$  легко находятся из сопоставления с исходными формулами.

В заключение укажем, что величины  $\Phi_{\text{вх}i}$  и  $D_{\text{вх}i}$  легко приводятся к соответствующим значениям входных токов и напряжений. Так, при синусоидальном входном сигнале

$$\Phi_{\text{вх}i} = \frac{U_{\text{вх}im}}{\omega \omega_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} \sin \omega t d\omega t = \frac{U_{\text{вх}im}}{2\pi f \omega_{\text{вх}}}, \quad (4.56)$$

при постоянном сигнале

$$\Phi_{\text{вх}i} = \frac{U_{\text{вх}i}}{\omega \omega_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} d\omega t = \frac{U_{\text{вх}i}}{2f \omega_{\text{вх}}} \quad (4.57)$$

и при линейном нарастающем сигнале

$$\Phi_{\text{вх}l} = \frac{U_{\text{вх}l}}{\omega^2 \omega_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} \omega t d\omega t = \frac{U_{\text{вх}l}}{8f^2 \omega_{\text{вх}}} \quad (4.58)$$

Полученные выше соотношения для определения углов начала и прекращения импульса тока позволяют определить средние и действующие значения функций, основную гармонику и т. д.

Так, например, среднее значение выходного напряжения четырехполюсника для рис. 4.10, б

$$U_{\text{вых}l\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega t_{Hl}} E_{2m} \sin \omega t d\omega t = \frac{E_{2m}}{2\pi} (1 - \cos \omega t_{Hl})$$

после замены  $\cos \omega t_{Hl}$  на  $\sqrt{1 - \sin^2 \omega t_{Hl}}$  и подстановки вместо вид

$$U_{\text{вых}l\text{ср}} = \frac{E_{2m}}{\pi} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{U_{\text{вх}l\text{макс}} - u_{\text{вх}l}}{k E_{2m}} \right)^2} \right] \quad (4.59)$$

Среднее значение напряжения на нагрузке находят аналогичным  $\sin \omega t_{Hl}$  его значения, найденного из уравнения (4.41), будет иметь обрзом:

$$\begin{aligned} U_{l\text{ср}} &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_{Hl}}^{\pi} E_{2m} \sin \omega t d\omega t = \frac{E_{2m}}{\pi} (1 + \cos \omega t_{Hl}) = \\ &= \frac{E_{2m}}{\pi} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{U_{\text{вх}l\text{макс}} - u_{\text{вх}l}}{k E_{2m}} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Получение безразрывных характеристик для схемы в целом ( $u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$  имеет плавный характер) позволяет линеаризовать их. Для цепей, содержащих четырехполюсники со скачкообразно меняющимися выходными параметрами, это возможно только при условии питания выходной части схемы от источника переменного напряжения (пилообразного, прямоугольного и синусоидального). Это явление называется вибрационной линеаризацией.

В заключение необходимо отметить, что для несколько более сложных случаев нагрузок и схем можно далее применять хорошо развитые методы анализа цепей с переменными периодически и скачкообразно меняющимися параметрами, если только идеализация на базе метода пусковых характеристик и сведение задачи к коммутирующему ключу в выходной части схемы (рис. 4.12, а, б) являются допустимыми.

## Глава 5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### § 5.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Переходные процессы в цепях с нелинейными двухполюсниками и четырехполюсниками описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых нет общих методов решения (даже для цепей первого и второго порядка найдены аналитические решения только для некоторых частных случаев).

Очень существенно, что характер решения этих уравнений зависит, в отличие от случая линейных уравнений, от величин подводимых напряжений, а принцип наложения к нелинейным цепям неприменим.

Из сказанного следует, что для нелинейных цепей не существует стандартных сигналов, реакции на которые, например на единичную функцию  $1(t)$  или импульсную функцию  $\delta(t)$ , полностью определили бы динамические свойства цепи. Понятия передаточной функции  $W(p)$  и частотной характеристики  $W(j\omega)$  в прежнем смысле здесь также не существует. В общем случае для определения свойств нелинейной цепи надо исследовать ее для всех ожидаемых при практическом использовании воздействий.

В то же время характер переходных процессов в нелинейных цепях намного разнообразнее, чем в цепях линейных, и соответствующие особенности используются для разработки различных электротехнических устройств, реализация которых линейными цепями невозможна.

Ниже будет кратко рассмотрен ряд наиболее распространенных методов исследования переходных процессов в нелинейных цепях, иллюстрируемых, как правило, одним и тем же простым примером.

Приводимые оценки рассматриваемых методов не следует считать категорическими, так как приемлемость того или иного метода зависит, во-первых, от особенностей конкретной задачи и, во-вторых, от располагаемого уровня вычислительной техники.

В заключение заметим, что применительно к нелинейным цепям, в отличие от цепей линейных, ни один метод не может применяться

формально, без предварительного выяснения физических процессов в схеме.

## § 5.2. МЕТОД ИНТЕГРИРУЕМОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод интегрируемой аппроксимации применяется, когда удается подобрать приближенное аналитическое выражение для нелинейности, которое в данной конкретной задаче приводит к дифференциальному уравнению, имеющему решение в аналитической форме. Это удается практически редко и только для уравнений невысокого порядка.

В качестве примера рассмотрим расчет переходного процесса в схеме рис. 5.1, а, где постоянное напряжение включается на последовательно соединенные нелинейный двухполюсник НД( $r$ ) и катушку индуктивности. Переходный процесс в цепи описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$L \frac{di}{dt} + ri + f(i) = U. \quad (5.1)$$

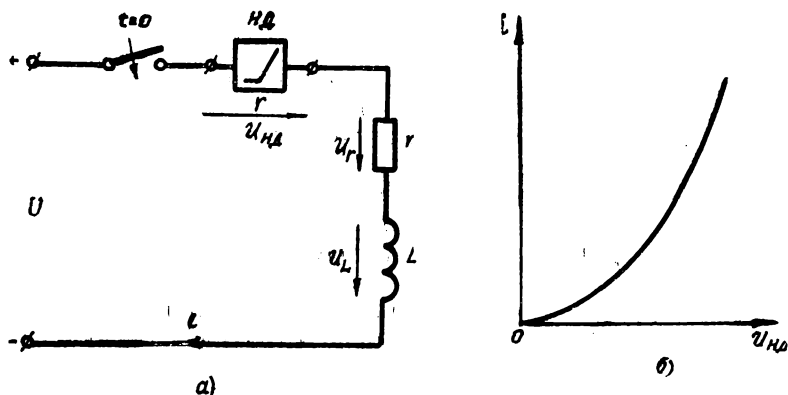


Рис. 5.1. Включение цепи  $r, L$  с нелинейным двухполюсником:  
а — схема; б — вольт-амперная характеристика двухполюсника

Предположим, что характеристика  $i = f(u)$  (рис. 5.1, б) может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка  $i = au^2$  или  $u = \sqrt{\frac{i}{a}}$ . Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$L \frac{d}{dt} (au^2) + rau^2 + u = U \quad (5.2)$$

или

$$2Lau \frac{du}{dt} + rau^2 + u = U, \quad (5.3)$$

откуда после разделения переменных

$$t = -2La \int_0^u \frac{u}{rau^2 + u - U} du = \\ = \frac{L}{r} \left( \ln \frac{U}{U - ri - \sqrt{\frac{i}{a}}} + \frac{1}{\Delta} \ln \frac{2r\sqrt{ai} + 1 - \Delta}{2r\sqrt{ai} + 1 + \Delta} - \Lambda \right), \quad (5.4)$$

где

$$\Delta = \sqrt{4raU + 1};$$

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}.$$

Полученная функция  $t = f(i)$  не может быть представлена как явная функция  $i = \varphi(t)$ , поэтому для построения графика  $i = \varphi(t)$  необходимо задаться несколькими значениями  $i$  и определить соответствующие значения  $t$ .

### § 5.3. МЕТОД ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Методы графического интегрирования, в общем, достаточно трудоемки и практически пригодны для относительно простых случаев. Так, очень удобен вариант для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями с разделяемыми переменными, так как здесь становится возможным построение функции, кривая которой ограничивает площадь, пропорциональную соответствующему значению времени.

Проиллюстрируем метод на той же схеме рис. 5.1, а.

Разделив переменные в уравнении (5.1)

$$dt = L \frac{1}{U - ri - f(i)} di \quad (5.5)$$

и проинтегрировав левую и правую части по соответствующим переменным, с учетом нулевых начальных условий получим

$$t = \int_0^t dt = \int_0^i \frac{L}{U - ri - f(i)} di. \quad (5.6)$$

Построив далее зависимость

$$\varphi(i) = \frac{L}{U - ri - f(i)}, \quad (5.7)$$

по соответствующей площади (с учетом масштабов) можно найти зависимости  $t = f(i)$  либо  $i = \varphi(t)$ , как это показано для значения тока  $i_k$  на рис. 5.2.

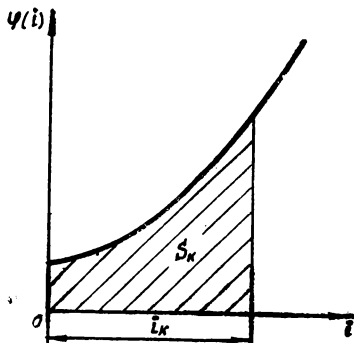


Рис. 5.2. Графическое интегрирование

#### § 5.4. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Обычно при исследовании переходных процессов в электрических цепях выясняют зависимости различных ее координат от времени и в соответствии с этим при построении графиков по оси абсцисс откладывают время  $t$ , а по оси ординат — исследуемые координаты: ток, напряжение, заряд и т. д. Однако те же явления можно рассматривать в иной системе координат. Например, можно откладывать по оси абсцисс исследуемую величину  $(i, u, q)$ , а по оси ординат — скорость изменения этой величины во времени  $\left(\frac{di}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{dq}{dt}\right)$ . Координатная плоскость, в которой по одной оси (обычно по оси абсцисс) откладывается исследуемая величина  $x$ , а по другой (обычно оси ординат) — скорость изменения этой величины во времени  $y = \frac{dx}{dt}$ , называется фазовой плоскостью. При таком рассмотрении время не будет явно фигурировать на графике, но последний дает полную информацию о процессе.

Переходный процесс на фазовой плоскости изображается некоторой прямой или кривой, если он описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Для исследования цепей выше второго порядка метод фазовой плоскости практически не пригоден.

Изменение состояний системы можно изображать движением некоторой точки на фазовой плоскости. Эту точку называют изображающей или представляющей точкой. Координаты изображающей точки  $x$  и  $y$  определяют ее положение на фазовой плоскости и характеризуют состояние процесса в рассматриваемый момент времени. С течением времени изображающая точка перемещается, описывая на фазовой плоскости линию, которую называют фазовой траекторией. Вид фазовой траектории зависит от схемы и параметров цепи.

В случае периодического процесса фазовая траектория представляет замкнутую кривую (для линейной цепи окружность или эллипс), описываемую изображающей точкой в течение каждого периода. Для непериодического процесса фазовая траектория представляет незамкнутую кривую.

В верхней полуплоскости производная координаты  $y > 0$ , и, следовательно, изображающая точка может перемещаться только вправо — в направлении возрастающих значений  $x$ . В нижней полуплоскости  $y < 0$ , и изображающая точка может перемещаться только влево. Поэтому изображающая точка всегда движется по фазовой траектории по направлению движения часовой стрелки. В зависимости от начальных условий получают различные фазовые траектории, которые никогда не пересекаются. Так как на оси

абсцисс  $\frac{dx}{dt} = 0$ , фазовые траектории пересекают эту ось под прямым углом.

Семейство фазовых траекторий, изображающих процессы, возможные в данной цепи, называют фазовым портретом. Фазовый портрет дает возможность охватить всю совокупность движений в рассматриваемой системе, которые могут возникнуть при различных начальных условиях. Заключение о характере движений выводится без предварительного отыскания аналитических выражений интегралов исходных уравнений даже и тогда (что очень важно), когда эти выражения не могут быть получены.

Точки фазовой плоскости, в которых одновременно  $\frac{dx}{dt} = 0$  и  $\frac{dy}{dt} = 0$ , называются особыми точками. Они соответствуют условиям равновесия (покоя) рассматриваемой цепи и могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Особая точка, через которую не проходит ни одна фазовая траектория и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называется центром. Центр соответствует случаю безразличного равновесия.

Особая точка, которая является асимптотической для фазовых траекторий, называется фокусом. Фокус называется устойчивым, если изображающая точка приближается к нему, и неустойчивым, — если удаляется.

Особая точка, через которую проходят фазовые траектории, называется узлом. Если движение по фазовой траектории направлено к узлу, то такой узел называется устойчивым, если оно направлено от узла, — неустойчивым.

Для переходных процессов (колебательных, апериодических и т. п.) в линейных цепях первого и второго порядка имеются фазовые портреты, с которыми можно сравнить получившийся фазовый портрет исследуемой цепи. Для некоторых нелинейных цепей также имеются фазовые портреты, однако число разновидностей таких цепей настолько велико, что для всех их создать фазовые портреты трудно.

Фазовые портреты составляются, как правило, для цепей без источника питания, т. е. для свободного режима, однако в некоторых случаях можно получить фазовый портрет и с учетом принужденного режима.

Для построения зависимости  $i(t)$  необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого совершается переход от  $k$ -й точки  $(x_k, y_k)$  фазовой траектории к близкой к ней  $k+1$ -й точке  $(x_{k+1},$



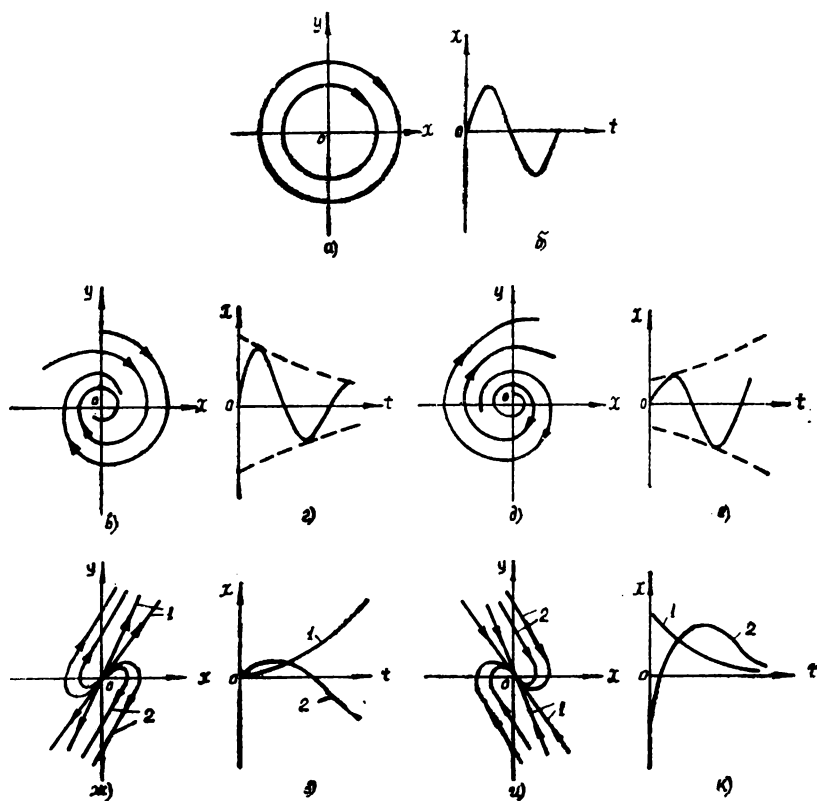


Рис. 5.3. Фазовые портреты и зависимости  $x(t)$  в линейных цепях (свободный режим):  
 а, б — незатухающие колебания; в, г — затухающие колебания; д, е — нарастающие колебания; ж, з — нарастающие аperiodические процессы; и, к — затухающие аperiodические процессы

$y_{k+1}$ ), можно приближенно рассчитать следующим образом. Так как  $y = \frac{dx}{dt}$ , то

$$\Delta t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{y} dx.$$

Обозначив  $\frac{1}{y} = f(x)$ , имеем по теореме о среднем

$$\Delta t = f(\xi)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi) \Delta x \quad (x_k < \xi < x_{k+1}).$$

При небольшом интервале  $\Delta t$  и монотонном изменении  $y$  в этом интервале можно принять

$$f(\xi) \approx \frac{1}{y_{\text{ср}}},$$

где

$$y_{\text{ср}} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Тогда

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{y_{\text{ср}}}.$$

На рис. 5.3 показаны некоторые фазовые портреты для линейных цепей (свободный режим) и особые точки, а также зависимости  $x = f(t)$  (для одной фазовой траектории), которые определяют соответствующие фазовые портреты.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а и построим для нее фазовую траекторию переходного процесса (с учетом принужденного режима).

Представим дифференциальное уравнение (5.1) в виде

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [U - ri - f(i)] \quad (5.8)$$

и, задавшись различными значениями  $i$ , найдем соответствующие значения  $\frac{di}{dt}$  (рис. 5.4). Полученный график говорит об апериодическом нарастающем характере переходного процесса с установившимися значениями  $\frac{di}{dt} = 0$ ,  $i = I_{\text{уст}}$ .

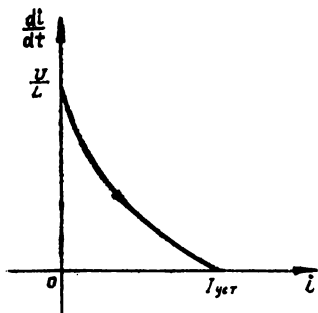


Рис. 5.4. Фазовая траектория переходного процесса в схеме рис. 5.1, а

Зависимость  $i(t)$  можно получить из рис. 5.4, если разбить участок оси абсцисс от 0 до  $I_{уст}$  на малые интервалы  $\Delta i$ , найти для этих интервалов  $y_{cp} = \left(\frac{di}{dt}\right)_{cp}$  и определить соответствующие значения  $\Delta t$ .

### § 5.5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Данный метод состоит в последовательном уточнении первоначально полученного тем или иным способом первого грубого приближения, нахождение которого, помимо громоздкости операций, составляет одну из основных трудностей метода.

По-прежнему рассмотрим схему рис. 5.1, а, однако для удобства расчета заменим нелинейный двухполюсник НД( $r$ ) и линейное сопротивление  $r$  эквивалентным нелинейным двухполюсником, воспользовавшись методом суммирования вольт-амперных характеристик (см. § 1.3). Характеристика эквивалентного двухполюсника  $i(u_r + u_{нд})$  показана на рис. 5.5, б.

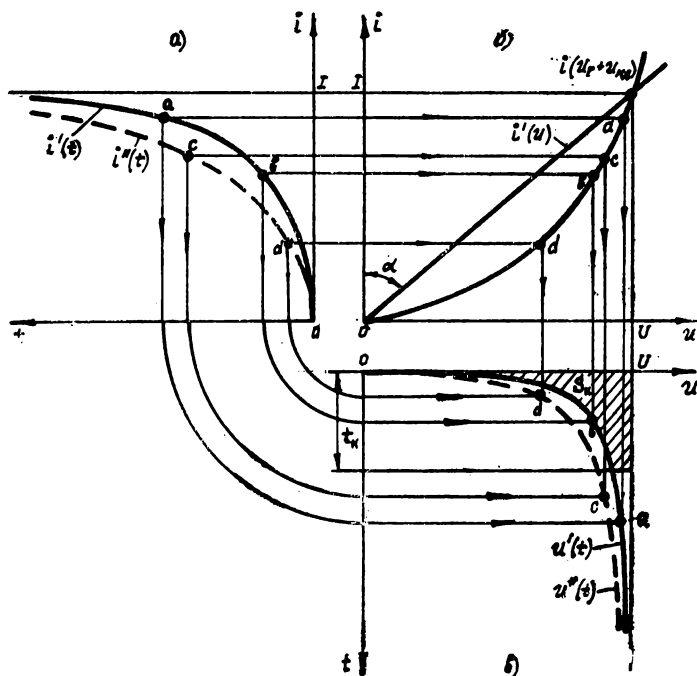


Рис. 5.5. Метод последовательных приближений:  
а — зависимости  $i(t)$ ; б — зависимости  $i(u)$ ; в — зависимости  $u(t)$

Дифференциальное уравнение такой цепи

$$L \frac{di}{dt} + f_1(i) = U \quad (5.9)$$

нелинейно, однако в данном случае можно в первом (грубом) приближении линеаризовать его, заменив кривую  $i(u_r + u_{нд})$  прямой линией  $i'(u)$  (рис. 5.5, б), которая проходит через начало координат и точку на характеристике  $i(u_r + u_{нд})$ , соответствующую установившемуся режиму. Так как все сопротивления при этом линейные, установившееся значение тока

$$I = \frac{U}{r_{1\text{ст}}} = \frac{U}{r + r_{нд}}, \quad (5.10)$$

где

$$r_{1\text{ст}} = \text{tg } \alpha.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее процесс в такой цепи, линейно

$$L \frac{di'}{dt} + r_{1\text{ст}} i' = U \quad (5.11)$$

и, как известно, имеет решение

$$i' = I \left( 1 - e^{-\frac{r_{1\text{ст}}}{L} t} \right). \quad (5.12)$$

Построив зависимость  $i'(t)$  в линейной цепи (рис. 5.5, а), используем нелинейную характеристику  $i(u_r + u_{нд})$  для того, чтобы найти точки кривой  $u'(t)$ . Графическое построение зависимости  $u'(t)$  показано на рис. 5.5 для двух точек (а, б). Таким образом, проведем первый этап уточнения решения, поскольку для построения кривой  $u'(t)$  используется не прямая линия  $i'(u)$  (рис. 5.5, б), а исходная нелинейная характеристика  $i(u_r + u_{нд})$ .

Зависимость  $u'(t)$  строится для дальнейшего уточнения решения, так как на основании (5.9)

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t (U - u) dt, \quad (5.13)$$

что позволяет воспользоваться методом графического интегрирования и найти для произвольного момента времени  $t_k$  (рис. 5.5, в) соответствующий ток (с учетом масштабов)

$$i_k = \frac{S_k}{L}. \quad (5.14)$$

Задаваясь значениями времени  $t_1, t_2$  и т. д., можно найти значения токов  $i_1, i_2$  и т. д. и построить на рис. 5.5, а новую кривую  $i''(t)$ , более точно выражающую зависимость тока от времени, чем приближенная функция (5.12). По этой новой кривой и нелинейной характеристике  $i(u_r + u_{нд})$  строят зависимость  $u''(t)$ , как это показано на рис. 5.5, для двух точек (с, d).

Далее опять задаются значениями времен  $t_1, t_2$  и т. д. и уточняют зависимость  $i(t)$ . Следует отметить, что этот метод требует проверки на сходимость.

### § 5.6. МЕТОД ПРИПАСОВЫВАНИЯ

Метод припасовывания уже рассматривался ранее при расчете квазиустановившихся режимов в цепях переменного тока (см. § 3.6).

Напомним, что идея метода заключается в разбивке процесса на ряд следующих друг за другом интервалов, внутри которых переходный процесс может быть описан точно или приблизительно линейным или интегрируемым нелинейным дифференциальным уравнением. Постоянные интегрирования этих уравнений определяются по граничным условиям исходя из требования непрерывности решения (эта операция и называется припасовыванием).

Метод припасовывания в принципе универсален, но для цепей высокого порядка и при длительно протекающем переходном процессе, а также при желании повысить точность расчета путем уменьшения выбираемых интервалов вычисления становятся громоздкими. При этом, конечно, использовать цифровые вычислительные машины можно, однако в последнем случае обычно более удобен (по числу требуемых операций) описанный ниже метод конечных приращений.

Рассмотрим применение метода припасовывания к схеме рис. 5.1, а.

Разобьем вольт-амперную характеристику на участки, что удобнее всего сделать, применив кусочно-линейную аппроксимацию (рис. 5.6, а). Тогда:

для первого участка

$$i = \frac{i_1}{u_1} u = \frac{u}{r_1};$$

$$r_1 = \frac{u_1}{i_1}; \quad (5.15)$$

$$u = r_1 i; \quad (5.16)$$

для второго участка

$$i = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1} (u - u_1) = i_1 + \frac{u - u_1}{r_2}.$$

$$r_2 = \frac{u_2 - u_1}{i_2 - i_1}; \quad (5.17)$$

$$u = r_2 i + u_1 \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (5.18)$$

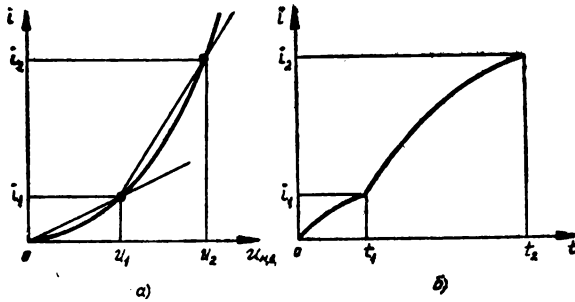


Рис. 5.6. Метод припасовывания:  
а — кусочно-линейная аппроксимация вольт-амперной характеристики; б — зависимость  $i(t)$

Используя полученные значения, вместо уравнения (5.1) будем иметь два линейных уравнения:  
для первого участка

$$r_1 i + ri + L \frac{di}{dt} = E = E_1 \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq i_1; \\ 0 \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (5.19)$$

для второго участка

$$r_2 i + ri + L \frac{di}{dt} = E - u_1 \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} \right) = E_2 \quad \begin{cases} i_1 \leq i \leq i_2; \\ t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (5.20)$$

Решения дифференциальных уравнений для участков имеют вид:

$$i = \frac{E_1}{r_1 + r} + A_1 e^{-\frac{r_1 + r}{L} t}, \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad (5.21)$$

$$i = \frac{E_2}{r_2 + r} + A_2 e^{-\frac{r_2 + r}{L} t}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.22)$$

Постоянная интегрирования  $A_1$  находится из условия, что при  $t=0$   $i=0$ , откуда

$$A_1 = -\frac{E_1}{r_1 + r}.$$

Тогда для первого участка

$$i = \frac{E_1}{r_1 + r} \left( 1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t} \right), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (5.23)$$

Подстановка в полученное уравнение  $i=i_1$  и  $t=t_1$  дает

$$i_1 = \frac{E_1}{r_1 + r} \left( 1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t_1} \right), \quad (5.24)$$

откуда определяется момент времени  $t_1$ :

$$t_1 = -\frac{L}{r_1 + r} \ln \left( 1 - \frac{r_1 + r}{E_1} i_1 \right). \quad (5.25)$$

Постоянная интегрирования  $A_2$  определяется из уравнения тока для второго участка. При  $t=t_1$   $i=i_1$  и

$$A_2 = i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r}.$$

Уравнение тока для второго участка

$$i = \frac{E_2}{r_2 + r} + \left( i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r} \right) e^{-\frac{r_2 + r}{L} t}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.26)$$

Момент времени  $t_2$  находится из условия, что при  $i=i_2$   $t=t_2$ . Тогда

$$i_2 = \frac{E_2}{r_2 + r} + \left( i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r} \right) e^{-\frac{r_2 + r}{L} t_2}, \quad (5.27)$$

откуда определяется момент времени  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 - \frac{L}{r_2 + r} \ln \left[ 1 + \frac{r_2 + r}{E_2} (i_1 - i_2) \right]. \quad (5.28)$$

По уравнениям для токов различных участков можно построить зависимость  $i = \varphi(t)$ , характер которой показан на рис. 5.6, б.

## § 5.7. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ)

Данный метод относится к наиболее общим методам, но для его применения требуется большая затрата труда. Рассматриваемый

Интервал времени разбивается на достаточно малые промежутки времени  $\Delta t$ , и в соответствии с этим дифференциалы величин, входящие в эти уравнения, заменяются их конечными приращениями в течение этого промежутка времени.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а. Характеристика нелинейного двух-полюсника, входящего в эту схему, показана на рис. 5.7, а.

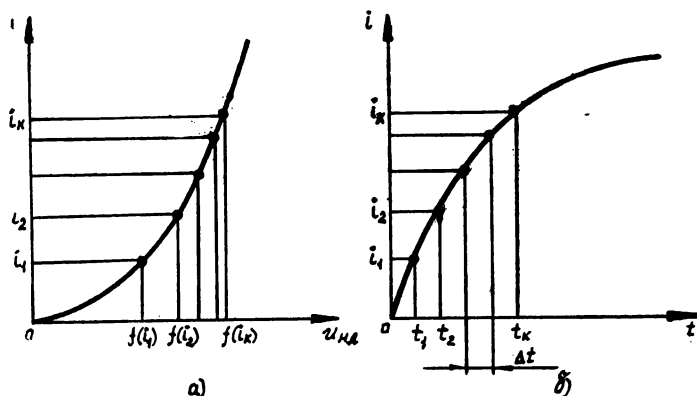


Рис. 5.7. Метод конечных приращений:  
а — вольт-амперная характеристика; б — зависимость  $i(t)$

Нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) может быть представлено уравнением (5.8):

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [U - ri - f(i)].$$

Заменив производную  $\frac{di}{dt}$  отношением конечных приращений, получим приближенное уравнение

$$\Delta i \approx \frac{1}{L} [U - ri - f(i)] \Delta t. \quad (5.29)$$

Разобьем время переходного процесса на ряд малых одинаковых интервалов  $\Delta t$ . Тогда для любого  $(k+1)$ -го интервала ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

$$\Delta i_{k+1} = i_{k+1} - i_k \approx \frac{1}{L} [U - ri_k - f(i_k)] \Delta t, \quad (5.30)$$

где  $i_k$  и  $i_{k+1}$  — мгновенные значения тока в начале и в конце рассматриваемого интервала времени.

Таким образом, можно шаг за шагом вычислить ряд мгновенных значений тока: по начальному значению тока  $i_0$  определяется ток в конце первого интервала  $i_1$ , по значению  $i_1$  находится  $i_2$  и т. д. (рис. 5.7, б).



Расчет удобно вести в табличной форме, которая в зависимости от условий задачи может иметь разный вид. Например, для рассматриваемой задачи составлена нижеследующая таблица:

Т а б л и ц а

$k$	$t_k = k\Delta t$	$i_k$	$ri_k$	$f(i_k)$	$U - ri_k - f(i_k)$	$\Delta i_{k+1}$	$i_{k+1} = i_k + \Delta i_{k+1}$
0	0	$i_0 = 0$	0	0	$U$	$\Delta i_1$	$i_1 = i_0 + \Delta i_1$
1	$t_1 = \Delta t$	$i_1$	$ri_1$	$f(i_1)$	$U - ri_1 - f(i_1)$	$\Delta i_2$	$i_2 = i_1 + \Delta i_2$
2	$t_2 = 2\Delta t$	$i_2$	$ri_2$	$f(i_2)$	$U - ri_2 - f(i_2)$	$\Delta i_3$	$i_3 = i_2 + \Delta i_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Результат решения получается тем точнее (рис. 5.7), чем меньше интервал времени  $\Delta t$ . Однако вследствие роста суммарного количества интервалов увеличивается общая погрешность расчета, так как происходит постепенное наращивание ошибки, и все последующие вычисления зависят от погрешностей, вносимых при расчетах предшествующих интервалов. В этом состоит основной недостаток указанного метода. Поэтому необходимо, уменьшая интервал времени  $\Delta t$ , применять специально разработанные приемы коррекции ошибок, что приводит к еще большему увеличению расчетных операций. Указанные интервалы могут быть выбраны весьма малыми, если использовать для расчета цифровые вычислительные машины.

Метод конечных приращений в той или иной его разновидности обычно и используется для расчета нелинейных электрических цепей на ЦВМ.

## § 5.8. МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ

Методы усреднения основаны на не всегда возможном допущении, что параметр цепи на некотором интервале времени меняется незначительно и поэтому он может быть принят для этого интервала постоянным, равным усредненному его значению. Эти методы являются частными и приближенными.

Упрощенный вариант такого подхода был фактически использован для нахождения первого приближения в § 5.5, где величина сопротивления нелинейного двухполюсника вначале была принята постоянной для всего времени протекания переходного процесса. Правда, это сопротивление определялось грубо, так как усреднялось оно только по начальному и конечному значениям.

Наиболее развиты эти методы применительно к цепям переменного и вообще периодически меняющегося тока, в которых какая-то координата цепи (огibaющая амплитуд синусоиды, постоянная

составляющая) меняется медленно и в пределах периода может быть принята постоянной.

Случай медленного изменения огибающей амплитуд позволяет применить вариант метода усреднения, называемый методом медленно меняющихся амплитуд. Математические операции метода заключаются в том, что выражение огибающей представляется в виде гармонического ряда и уравнение цепи интегрируется в пределах периода. Тогда все гармонические члены дают нуль, и остается только достаточно простое приближенное решение, соответствующее постоянным членам и показывающее изменение амплитуды основной (первой) гармоники в переходном процессе (без учета составляющих).

Для цепи периодического тока с постоянной составляющей соответствующий вариант метода усреднения (метод медленно меняющейся постоянной составляющей) дает приближенное решение для закона изменения постоянной составляющей (без учета переменных составляющих).

---

## ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Изложенный выше материал имел своей основной целью ознакомить в общих чертах с существующими методами расчета принужденных и переходных процессов в нелинейных электрических цепях, а также в какой-то степени систематизировать эти методы, исходя из соображений конфигурации схем и распространенных режимов работы нелинейностей. Поэтому изложение велось на достаточно простых примерах. В случаях же более сложных схем и особенно режимов работы (не сводимых в условиях конкретных задач к применению методов компенсации и пусковых характеристик), когда надо использовать сложные аппроксимации нелинейностей, применение современной вычислительной техники становится необходимым. Тем более вычислительная техника необходима для задач синтеза нелинейных цепей\*.

В зависимости от конкретных задач здесь возможно использование как цифровых (ЦВМ), так и аналоговых (АВМ) вычислительных машин.

Нужно заметить, что зависящие от исследуемых схем структурные схемы АВМ составляются по особым правилам, и эти схемы не всегда являются подобными или дуальными исследуемым схемам в электрическом смысле [3], [9]. Другими словами, как и при исследовании на ЦВМ, здесь требуется предварительное программирование.

Можно полагать, что для расчета достаточно сложных схем, особенно при одновременной необходимости достаточно точно описать нелинейности, наиболее экономным будет применить смешанные вычислительные устройства, которые принято разделять на комбинированные, использующие сочетание различных вычислительных устройств (АВМ — ЦВМ) и их элементов в рамках решения одной задачи, и гибридные, использующие элементы с неразделимыми и цифровыми признаками. Конечной целью более или менее отдаленного будущего здесь, как и в других областях применения вычислительной техники, является разработка автоматического проектирования, т. е. в данном случае — автоматического анализа и синтеза нелинейных цепей, соответствующих наиболее распространенным схемам и режимам конкретных электротехнических устройств.

Решение этой проблемы должно включать следующие этапы:

1) дальнейшую систематизацию нелинейных цепей по видам схем и режимам работы (подсхемы);

---

\* Методика синтеза цепей, к которым применим метод компенсации, разработана достаточно глубоко [4].

2) систематизацию возникающих при этом вычислительных операций и выбор вычислительных средств, наиболее целесообразно выполняющих эти операции;

3) разработку подпрограмм, соответствующих отдельным под-схемам;

4) разработку операционной системы, позволяющей проектировщику составить и ввести в машину программу для данного конкретного случая, набранную из подпрограммы.

Поставленная выше конечная цель требует для своего осуществления большого объема памяти и высокого быстродействия и, по-видимому, будет решена только на машинах третьего поколения с интегральным исполнением элементов.

В настоящее время какие-либо общие рекомендации отсутствуют и приходится решать вопрос об использовании вычислительной техники в каждом отдельном случае, исходя из конкретных задач и имеющихся в распоряжении вычислительных устройств. Здесь можно лишь заметить, что в этих условиях не следует слишком увлекаться применением вычислительной техники, особенно цифровой, и перекладывать на ЦВМ все решения задачи — с начала и до конца. В принципе всегда возможны два подхода к исследованиям. В одном случае старательно готовятся исходные данные и определяется их математическая связь, чтобы иметь возможность получить численные результаты в данном конкретном случае. Такие результаты обычно бывает трудно истолковать, так как между постановкой задачи и ее решением процесс идет формально. В другом случае предварительно по возможности глубоко разбираются в физике процессов, которые разбиваются на легко контролируемые этапы. Это дает известную гарантию от ошибок, а само решение становится логической цепью отдельных результатов и гораздо легче может быть осмыслено и оценено качественно.

Применительно к использованию вычислительной техники это означает, что нужно максимально прорабатывать аналитические решения на основе изложенных ранее методов, которые для сложных задач будут неминуемо охватывать только отдельные этапы. Однако между аналитическим и численным решением данного этапа имеется существенное различие. В результате аналитического решения исходная информация этапа преобразуется в компактную, обобщимую форму, представляемую в виде ограниченной совокупности изученных функций. По своей природе аналитическое решение содержит в себе информацию о множестве подобных процессов в различных цепях не только электрических, но и магнитных и иных аналогов, отличающихся только значениями параметров. Такой результат может быть использован и в других случаях, а объем вычислений при этом также сокращается. Численное же решение этапа — формализованный процесс, дающий информацию только об одном конкретном (даже без вариаций) случае. К тому же численное преобразование также неминуемо приводит к искажению исход-

ной информации, например, при замене дифференциальных уравнений разностными, итерациях, округлениях и т. д. Попытка добиться нужной точности уменьшением шага сетки приводит к увеличению числа неизвестных значений искомой функции, вследствие чего резко растет объем вычислений и накопление ошибок.

Таким образом, в настоящее время для решения сложных задач представляется целесообразным сочетать аналитический подход и использование смешанной аналого-цифровой техники.

Вышесказанное относилось непосредственно к исследованию электротехнических устройств, сводимому к аппарату теории электрических цепей. Однако эти соображения в полной мере могут быть отнесены и к исследованиям, требующим применения аппарата теории электромагнитного поля с учетом нелинейности сред. При этом в последнем случае также намечается четкая тенденция в развитии поэтапного аналитического рассмотрения с более широким, чем это принято сейчас, использованием самого общего подхода с позиций математической физики.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков Г. И., Тимофеев А. Б., Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. «Энергия», 1970.
  2. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2, ч. 3. «Энергия», 1966.
  3. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. Под ред. П. А. Ионкина. «Высшая школа», 1965.
  4. Основы инженерной электрофизики. Ч. 2. Под ред. П. А. Ионкина. «Высшая школа», 1972.
  5. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. «Энергия», 1965.
  6. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи. «Высшая школа», 1964.
  7. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. «Энергия», 1968.
  8. Хьюз В. Нелинейные электрические цепи. «Энергия», 1967.
  9. Колосов С. П., Калмыков И. В., Нефедова В. И. Элементы автоматики. «Машиностроение», 1970.
  10. Сотсков Б. С. Элементы автоматической и телемеханической аппаратуры. Госэнергоиздат, 1950.
-

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналоговое моделирование 150
- Аппроксимация 30
- Вариконд 104
- Вебер-амперная характеристика 38
  - идеализированная 106, 107, 111, 131
- Вольт-амперная характеристика 9
  - гистерезисного типа 11
  - идеализированная 18
  - кусочно-линейная 16, 17
  - линеаризуемая 15
  - мнимо несимметричная 12, 13
  - несимметричная 12
  - симметричная 12
  - с насыщением по напряжению 11
  - с насыщением по току 10, 11
  - с неоднозначностью по напряжению 11
  - с неоднозначностью по току 11
  - существенно нелинейная 15
  - явно несимметричная 12, 13, 14
- Гистерезис 34
- Глубина обратной связи 54
- Двухполюсник 9
  - магнитный 39
  - активный 41
  - пассивный 41
  - электрический нелинейный 9
  - активный 12
  - пассивный 12
  - активно-реактивный 66, 67
  - емкостный 66
  - индуктивный 66
  - реактивный 66
  - резистивный 66
  - смешанный (см. активно-реактивный)
  - со свойствами активного сопротивления (см. резистивный)
- Диэлектрическая проницаемость 105
  - цепь 104
- Дроссель 101
- Емкость 7
  - дифференциальная 68, 69
  - нелинейная 7
  - статическая 68, 69
- Закон Кирхгофа для магнитной цепи первый 36
  - второй 37
  - полного тока 35
- Зона нечувствительности 11

- по напряжению 11, 12, 13
- по току 11, 12, 13
- Индуктивность 7
  - дифференциальная 68
  - нелинейная 7
  - статическая 68
- Изображающая точка 138
- Импульс напряжения 106, 107
  - тока 109
- Квазилинейность 69
- Квазиустановившийся режим 99
- Конденсатор 104
- Кривая намагничивания динамическая 101
  - начальная 33, 34
  - основная 35
  - размагничивания 41
- Коэрцитивная сила 34, 35
- Коэффициент возврата 30
  - передачи 56, 62, 118, 123, 124
- Линеаризация 8, 15
  - вибрационная 134
- Магнитная индукция 33, 35
  - остаточная 34
  - постоянная 38
  - проницаемость 38
  - характеристика (см. вебер-амперная характеристика)
  - цепь 33
  - неоднородная 33
  - неразветвленная 33
  - однородная 33
  - разветвленная 33
- Магнитный поток 35
  - узел 36
- Магнитодвижущая сила 35
- Магнитопровод 33
- Магнитотвердый материал 41
- Метод гармонического баланса 95
  - графического интегрирования 137
  - интегрируемой аппроксимации 136
  - компенсации 15, 16
  - конечных приращений 146
  - медленно меняющихся амплитуд 149
  - пересечения 20
  - последовательных интервалов (см. метод конечных приращений)
  - приближений 142
  - припасовывания 97, 144
  - пусковых характеристик 128
  - сопряженных интервалов (см. метод припасовывания)
  - эквивалентного генератора 26, 27
  - эквивалентных характеристик 19
  - эллипса 77, 78, 79, 80
- Намагничивающая сила (см. магнитодвижущая сила)
  - остаточная 41
- Напряженность магнитного поля 33, 35
  - электрического поля 105
- Напряжение магнитное 36
  - отпускания 28, 29
  - срабатывания 28, 29
- Нелинейная цепь 7



- Нелинейное уравнение 7
- Неустойчивое равновесие 28, 29
- Обратная связь 52, 53
  - внешняя 52, 53, 54, 55
  - внутренняя 54, 55
  - отрицательная 53, 54
  - положительная 53, 54
  - по напряжению 52, 53
  - по току 52
- Особые точки фазовой плоскости 138, 140
- Петля гистерезиса 34
  - предельная 34
  - частная 34
- Принцип непрерывности магнитного потока 35
- Проводимость 45, 58, 63, 64, 114, 122, 126, 127
  - дифференциальная магнитная 39
  - электрическая 10
  - магнитная 38
  - статическая магнитная 39
  - электрическая 10
- Постоянный магнит 41
- Представляющая точка (см. изображающая точка)
- Припасовывание 97
- Пусковая характеристика 128
- Резонанс напряжений 81
  - диэлектрический 82
  - ферромагнитный 82
- Резонанс токов 84
  - диэлектрический 85
  - ферромагнитный 85
- Релейный эффект 28, 29
- Сердечник (см. магнитопровод)
- Сопrotивление 7
  - воздушного зазора 39
  - дифференциальное 9
  - активное 67, 70
  - емкостное 70
  - индуктивное 70
  - магнитное 39
  - полное 70, 71
  - магнитное 38
  - нелинейное электрическое 7
  - статическое 9
  - активное 67, 70
  - емкостное 70
  - индуктивное 70
  - магнитное 39
  - полное 70, 71
- Средняя силовая линия магнитопровода 35, 36
- Теорема Гаусса 105
- Угловой коэффициент 31, 32
- Узел 139, 140
- Условный ток короткого замыкания 77
- Участок магнитной цепи 36, 37
- Фазовая плоскость 138, 140
  - траектория 138, 140
- Фазовый портрет 139, 140
- Ферромагнитный материал 33
- Фокус 139, 140

Функция единичная 135

- импульсная 135

- передаточная 135

Центр 139, 140

Частный цикл (см. петля гистерезиса частная)

Частотная характеристика 135

Четырехполюсник 45

- нелинейный 8, 45, 46

- - направленный 48

- - ненаправленный 49

Электрическая индукция 105

Электрическое смещение (см. электрическая индукция)

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
Обозначение электрических и магнитных величин, применяемых в конспекте лекций . . . . .	5
Обозначения неэлектрических величин, применяемых в конспекте лекций	6
Введение . . . . .	7
Г л а в а 1. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока с нелинейными двухполюсниками . . . . .	9
§ 1.1. Исходные характеристики двухполюсников и их классификация . . . . .	9
§ 1.2. Упрощение и линеаризация вольт-амперных характеристик. Метод компенсации. Идеализация характеристик . . . . .	14
§ 1.3. Графический расчет цепей с двухполюсниками методом эквивалентных характеристик и методом пересечения . . . . .	18
§ 1.4. Релейный эффект в цепи с двухполюсником с отрицательным дифференциальным сопротивлением . . . . .	28
§ 1.5. Основные принципы аналитических методов расчета (нелинейная аппроксимация исходных характеристик) . . . . .	30
§ 1.6. Расчет цепей с двухполюсниками методом компенсации . . . . .	32
§ 1.7. Магнитные цепи при постоянном магнитном потоке . . . . .	33
Г л а в а 2. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока с нелинейными четырехполюсниками . . . . .	45
§ 2.1. Исходные характеристики четырехполюсников и их систематизация . . . . .	45
§ 2.2. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками . . . . .	49
§ 2.3. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками и обратными связями . . . . .	52
§ 2.4. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации . . . . .	55
§ 2.5. Графический расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками . . . . .	59
§ 2.6. Расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации . . . . .	61
Г л а в а 3. Установившиеся режимы в цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками . . . . .	66
§ 3.1. Особенности двухполюсников на переменном токе, их исходные характеристики и классификация . . . . .	66
§ 3.2. Графический расчет квазилинейных цепей методом эквивалентных характеристик и методом эллипса . . . . .	72
§ 3.3. Аналитический расчет квазилинейных цепей (нелинейная аппроксимация исходных характеристик) . . . . .	86
§ 3.4. Расчет квазилинейных цепей методом компенсации . . . . .	87
§ 3.5. Графический расчет цепей по кривым мгновенных значений воздействий . . . . .	89
§ 3.6. Метод гармонического баланса . . . . .	95

	<i>Стр.</i>
§ 3.7. Метод сопряженных интервалов (метод припасовывания) . . .	97
§ 3.8. Магнитные цепи при переменном магнитном потоке . . .	101
§ 3.9. Диэлектрические цепи . . .	104
§ 3.10. Расчет методом сопряженных интервалов цепей с реактивными двухполюсниками . . .	106
Г л а в а 4. Установившиеся режимы в цепях переменного тока с нелиней- ными четырехполюсниками . . .	113
§ 4.1. Особенности четырехполюсников на переменном токе и их исходные характеристики . . .	113
§ 4.2. Графический расчет квазилинейных цепей с направлен- ными четырехполюсниками . . .	115
§ 4.3. Расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсни- ками методом компенсации . . .	118
§ 4.4. Графический расчет квазилинейных цепей с ненаправлен- ными четырехполюсниками . . .	123
§ 4.5. Расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюс- никами методом компенсации . . .	123
§ 4.6. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками с отрица- тельным дифференциальным сопротивлением выходных харак- теристик . . .	127
Г л а в а 5. Переходные процессы в нелинейных цепях . . .	135
§ 5.1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях . . .	135
§ 5.2. Метод интегрируемой аппроксимации . . .	136
§ 5.3. Метод графического интегрирования . . .	137
§ 5.4. Метод фазовой плоскости . . .	138
§ 5.5. Метод последовательных приближений . . .	142
§ 5.6. Метод припасовывания . . .	144
§ 5.7. Метод конечных приращений (последовательных интервалов) . . .	146
§ 5.8. Методы усреднения . . .	148
Приложение. Применение вычислительной техники к расчету нелинейных цепей . . .	150
Литература . . .	153
Предметный указатель . . .	154

*Сергей Петрович Колосов, Юрий Алексеевич Сидоров*

### Конспект лекций

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

по курсу

### «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

Редактор *Р. М. Белозерова*

Техн. редактор *А. Г. Мухина*

Л 70849 от 3/VII-1974 г.

Объем 10,00 печ. л.

Заказ 1193/6885

Цена 40 коп.

Тираж 2000

Типография МАИ

Цена 40 коп.