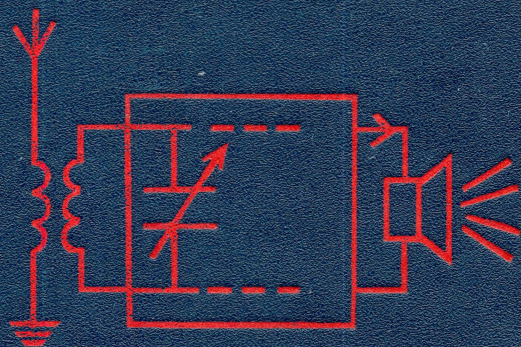


В. В. ЯЦКЕВИЧ

# ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



$\alpha$	$e^{\pm j\alpha}$
0	1
$\pi/6$	$0,866 \pm j 0,5$
$\pi/3$	$0,5 \pm j 0,866$
$\pi/2$	$\pm j$
$\pi$	-1
$3\pi/2$	$\mp j$
$2\pi$	1

$$\cos \alpha =$$

$$= \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin \alpha =$$

$$= \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{j} \frac{e^{j2\alpha} - 1}{e^{j2\alpha} + 1}$$

# ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$\underline{A} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{ja} = A \angle \alpha$$

$$\underline{A}^* = a - jb = A \angle -\alpha \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2 = a^2 + b^2$$

$$\underline{A}_1 \pm \underline{A}_2 = a_1 \pm a_2 + j(b_1 \pm b_2)$$

$$A_1 \angle \alpha_1 \cdot A_2 \angle \alpha_2 = A_1 A_2 \angle (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\frac{A_1 \angle \alpha_1}{A_2 \angle \alpha_2} = \frac{A_1}{A_2} \angle (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(A \angle \alpha)^n = A^n \angle n\alpha$$

$$A \angle \alpha = A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = a + jb$$


---

**В. В. ЯЦКЕВИЧ**

# **ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

**СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ**

**Минск „Вышэйшая школа” 1990**

ББК 31.211я73  
Я93  
УДК 621.3.011.71(035.5) (075.8)

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *В.И. Луковников*, д-р техн. наук,  
проф. *И.А. Федорова*

**Яцкевич В.В.**

Я93 Теория линейных электрических цепей: Справ. пособие. — Мн.: Вышш.  
шк., 1990. — 264 с.: ил.  
ISBN 5-339-00210-1.

Рассмотрены основные свойства и методы анализа линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами в установившихся и переходных режимах. Приведены вопросы, задания и типовые задачи с решениями. Основное содержание глав вынесено на мнемонические схемы.

Для студентов электро- и радиотехнических специальностей вузов.

я 2202020000 – 005 71–89  
М304 (03) –90

ББК 31.211я73

ISBN 5-339-00210-1

© В.В. Яцкевич, 1990

## Предисловие

Теория линейных электрических цепей (ТЛЭЦ) является одной из первых специальных дисциплин, изучаемых студентами электротехнических и радиотехнических специальностей вузов. Она вводит в мир основных профессиональных понятий, определений и терминов, которые используются в последующих теоретических и специальных дисциплинах. Установленные ГОСТами буквенные обозначения основных величин, условные графические обозначения в электрических схемах, а также соотношения величин составляют азбуку инженера, его повседневный язык, владеть которым он должен свободно. Без прочного знания понятийного и математического аппарата трудно пользоваться справочной литературой, бесполезно читать книги по специальности.

Электрические цепи, состоящие из идеализированных элементов, классифицируют по различным признакам. Различают цепи линейные и нелинейные, инвариантные (неизменные во времени) и параметрические, с сосредоточенными и распределенными параметрами, активные и пассивные. Они могут находиться в установившемся или переходном режиме. Кроме того, цепи классифицируют по типу образующих элементов и их сочетанию: по количеству полюсов (выводов), назначению, форме кривой питающего напряжения. ТЛЭЦ изучает все цепи, за исключением нелинейных и параметрических (хотя и для последних могут быть применены отдельные методы расчета, особенно численные с применением ЭВМ).

Предлагаемое справочное пособие является попыткой изложить основы предмета и в то же время помочь студенту организовать самостоятельную работу. Материал систематизирован не по признакам электрических цепей, количество которых велико, а по типам задач. Отправным пунктом является эквивалентная схема определенного электротехнического устройства (составление эквивалентных схем — задача других наук). Заданы конфигурация схемы, параметры ветвей и источников энергии; к последним относятся также индуктивный и емкостный элементы как накопители энергии. Общая задача состоит в определении токов (напряжений) ветвей — всех или одной из них, причем ответ представляется числом (в установившемся режиме) или функцией времени (в переходном процессе). Частной задачей является случай, когда задан ток (напряжение) на входе цепи, называемый воздействием, и требуется найти ток (напряжение) на выходе, т.е. найти реакцию цепи на заданное воздействие. Отношение вынужденной реакции к входному воздействию называется функцией цепи. Она может выражаться в единицах сопротивления, проводимости или быть безразмерной. В последнем случае ее называют передаточной. Анализируя функции цепей, можно решать и другие задачи, например оценивать полосу пропускания, устойчивость и т.д. Обе задачи называются задачами анализа.

Часто требуется построить такую цепь, которая соответствовала бы заданной функции. Это уже задача синтеза. В этой книге мы рассматриваем первые две задачи на примере цепей с сосредоточенными параметрами.

Четыре относительно законченных раздела состоят из глав, примерно равных по объему. Их основное содержание в виде логической последовательности формул, графиков и электрических схем показано на отдельном плакате — мнемонической схеме. Мнемосхемы отличаются от опорных сигналов известного педагога В.Ф. Шаталова тем, что не имеют поясняющего текста. Последний создавал бы иллюзию знания, тогда как специалист должен узнавать приведенную символику без затруднений и комментариев. К каждому разделу дано небольшое введение, а в конце — заключение. Приведен список литературы для более углубленного изучения предмета.

Автор признателен рецензентам — д-ру техн. наук, проф. В.И. Луковникову и д-ру техн. наук., проф. И.А. Федоровой — за ценные замечания, которые способствовали улучшению рукописи.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство "Вышэйшая школа".

*Автор*

## Методические указания

В начале каждого раздела помещены мнемосхемы, отражающие основное содержание глав. Номер мнемосхемы соответствует номеру главы.

Откройте первую мнемосхему. Если представленные на ней формулы, графики, электрические схемы вам знакомы, прокомментируйте их вслух, а затем воспроизведите содержание плаката в тетради. После этого можно переходить к следующей главе. Если же мнемосхема непонятна, если при ее чтении возникают затруднения, изучайте материал соответствующей главы. Прочтите текст параграфа один раз, а если он для вас сложен, то и два. Затем отвечайте на вопросы вслух или письменно. Советский психолог П.Я. Гальперин, создавший теорию поэтапного формирования умственных действий, громкую речь считает одним из важнейших этапов в обучении, без которого умственное действие не может быть сформировано. Если вы затрудняетесь ответить на вопросы, то выборочно просмотрите текст параграфа в третий (или четвертый) раз. Ответив на вопросы, переходите ко второму параграфу. После него приведены задачи, но это задачи, как правило, по материалу предыдущего параграфа. Об этом напоминает первая цифра в номере задачи. Такая перестановка соответствует рекомендациям психологов: в мозгу человека одновременно с поступлением новой информации идет и процесс забывания; ранее поступившая информация стирается, исчезает из памяти. Чтобы затормозить забывание, надо повторить ту же информацию, и повторить не позднее чем через 30 минут. Задачи и возвращают нас к не забытым пока формулам и понятиям предыдущего параграфа. При необходимости можно и освежить их в памяти, отвернув назад 1–2 страницы. Нумерация задач двойная – первая цифра указывает параграф, по материалу которого составлена задача, вторая – порядковый номер задачи.

Данные для некоторых задач записаны в виде таблицы, например:

$E$	1	2	$R$	1	2	3
$V$	12	24	кОм	7	5	9

В первой строке таблицы содержатся ЭДС  $E$  и сопротивление  $R$ , за ними стоят их порядковые номера в схеме (индексы). Во второй строке указаны единицы (вольт, килоом), а под индексом – численное значение  $E$  или  $R$ . Читаем: ЭДС  $E_1 = 12$  В,  $E_2 = 24$  В; сопротивления  $R_1 = 7$  кОм,  $R_2 = 5$  кОм,  $R_3 = 9$  кОм.

Над задачей работайте так: начертите схему, запишите условие и попробуйте решать самостоятельно. Если не получается, то прочтите решение, затем отложите книгу и вновь решайте. Задачи подобраны простые, с целью пояснения новых терминов и понятий, наполнения их конкретным содержанием. Ни в коем случае не пропускайте задач, так как они несут не менее важную информацию, чем теоретический материал.

Два первых параграфа составляют содержание одного занятия, ориентировочно 45–50 минут. Производительность труда будет значительно выше, если вы сделаете перерыв на 5–10 минут, притом желательно с физическими упражнениями. Обработав третий и четвертый параграфы, сделайте второй перерыв, а затем по такой же методике пройдите пятый параграф. Но это еще не конец занятия. Всякая работа нуждается в завершении (убрать станок, вымыть машину, придать продукции товарный вид и т.д.), и вам надо подвести итог, собрать воедино раздробленный материал параграфов, выделить из него главное, из этого главного отобрать материал для запоминания. Поэтому вернитесь к

мнемосхеме и расскажите ее содержание. На изучение одной главы планируйте ориентировочно три часа.

На другой день или через день, но не позднее чем через три дня, мнемосхему со своими добавлениями и пояснениями перечертите цветными карандашами и повесьте на видном месте для привыкания. Только после этого приступайте к работе над следующей главой. Изучив раздел, постарайтесь сформировать о нем четкое представление, а затем, по разделам, и обо всей книге.

## Основные обозначения

$A$	— фаза трехфазной цепи
$a$	— коэффициент ряда Фурье, амплитуда при косинусоидальной составляющей
$B$	— фаза трехфазной цепи; магнитная индукция
$b$	— реактивная проводимость; коэффициент ряда Фурье, амплитуда при синусоидальной составляющей
$b_C$	— емкостная проводимость
$b_L$	— индуктивная проводимость
$C$	— емкость; фаза трехфазной цепи
$E$	— постоянная ЭДС; действующее значение переменной ЭДС
$e$	— мгновенное значение ЭДС; основание натурального логарифма
$F(j\omega)$	— спектральная функция
$F(p)$	— изображение функции по Лапласу
$f$	— частота колебаний
$g$	— активная проводимость
$g(t)$	— переходная проводимость
$H(j\omega)$	— комплексная передаточная функция
$H(p)$	— операторная передаточная функция
$h(t)$	— переходная характеристика цепи
$I$	— постоянный ток; действующее значение переменного тока
$\underline{I}$	— комплексный ток
$\dot{i}$	— мгновенное значение тока
$J$	— внутренний ток источника тока
$j$	— мнимая единица
$K_I$	— коэффициент передачи по току
$K_U$	— коэффициент передачи по напряжению
$k$	— коэффициент связи
$L$	— индуктивность
$M$	— взаимная индуктивность
$m$	— индекс, обозначающий амплитуду переменной величины
$P$	— активная мощность
$p$	— мгновенная мощность; корень характеристического уравнения; оператор в преобразовании Лапласа
$Q$	— реактивная мощность; добротность
$q$	— заряд
$R$	— активное сопротивление
$S$	— полная мощность; полоса пропускания; площадь
$T$	— период колебаний
$t$	— время
$U$	— постоянное напряжение; действующее значение переменного напряжения
$\underline{U}$	— комплексное напряжение
$u$	— мгновенное значение напряжения
$W$	— энергия
$X$	— реактивное сопротивление
$X_C$	— емкостное сопротивление

$X_L$	– индуктивное сопротивление
$X_M$	– сопротивление взаимной индукции
$Y$	– полная проводимость
$\underline{Y}$	– комплексная проводимость
$\underline{Z}$	– полное сопротивление
$\underline{Z}$	– комплексное сопротивление
$\delta(t)$	– единичная импульсная функция
$\Delta$	– определитель системы уравнений
$\rho$	– характеристическое сопротивление контура
$\tau$	– постоянная времени цепи с одним реактивным элементом; текущее значение времени от 0 до $t$
$\varphi$	– разность фаз двух колебаний
$\Psi$	– потокосцепление
$\psi$	– начальная фаза
$\omega$	– угловая частота; угловая скорость
$\diamond$	– начало решения задачи
$\square$	– конец решения задачи

## 1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

В теории линейных электрических цепей решаются задачи нескольких типов. Например: заданы цепь и параметры ее элементов (сопротивления, ЭДС источников и др.). Требуется вычислить все токи или только один из них.

Для решения этой задачи разработано несколько методов. Наша цель — выяснить, как они получены, научиться их применять, уметь выбрать для решения конкретной задачи наиболее целесообразный из них.

По ходу изложения рассмотрим теорему компенсации, свойство взаимности и др.

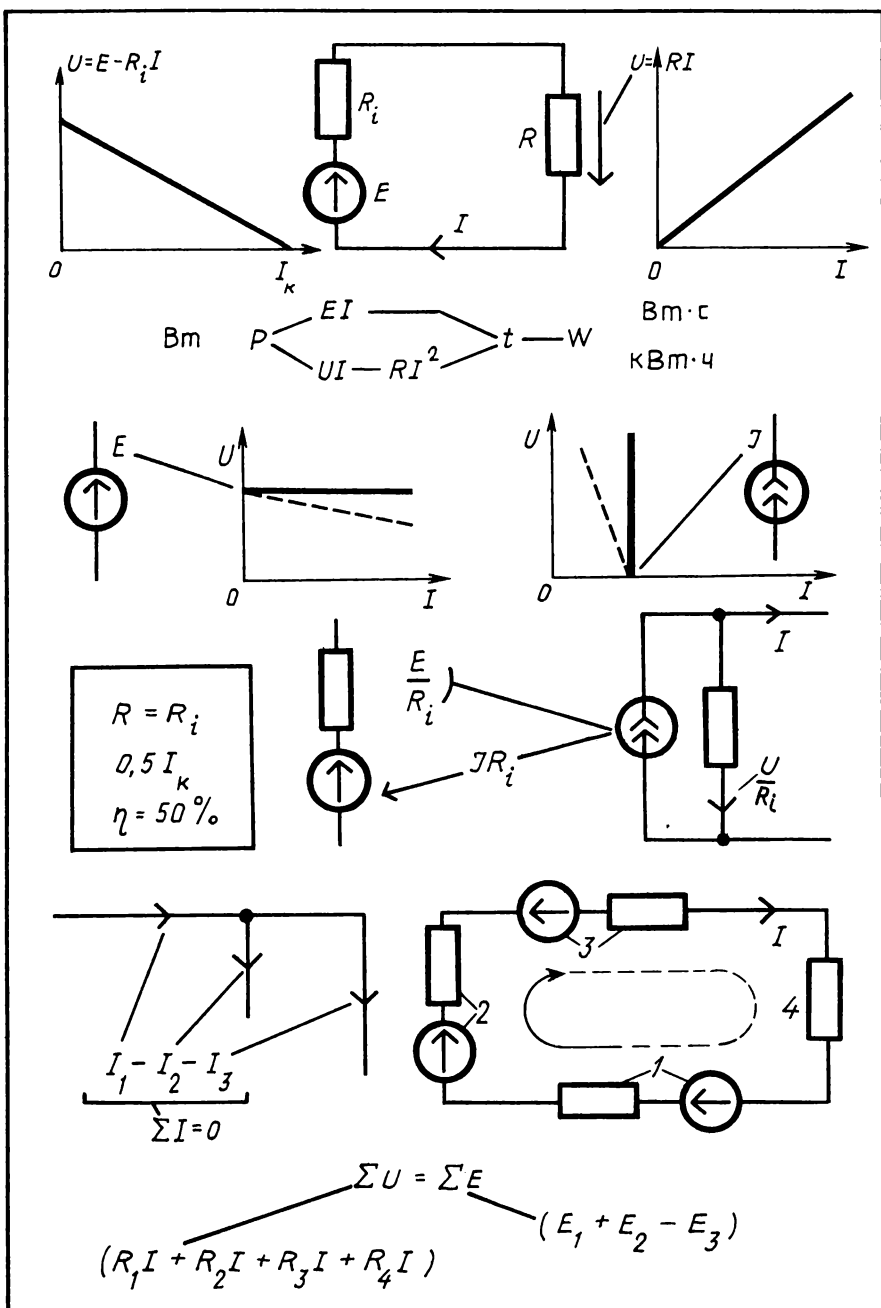
Методы расчета электрических цепей и их краткие характеристики даны в приведенной ниже таблице.

Метод	Теоретическая основа	Вид уравнения	Промежуточные расчетные величины
Узловых напряжений	Первый закон Кирхгофа	$[Y][U] = [J]$	Напряжения узлов
Контурных токов	Второй закон Кирхгофа	$[Z][I] = [E]$	Токи контуров
Наложения	Принцип наложения	$I_n = \sum Y_{nk} E_k$	Входные и взаимные проводимости ветвей
Эквивалентного источника	Теорема об активном двухполюснике	$I = \frac{E_{\text{эк}}}{Z_{i \text{ эк}} \pm Z}$	ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника

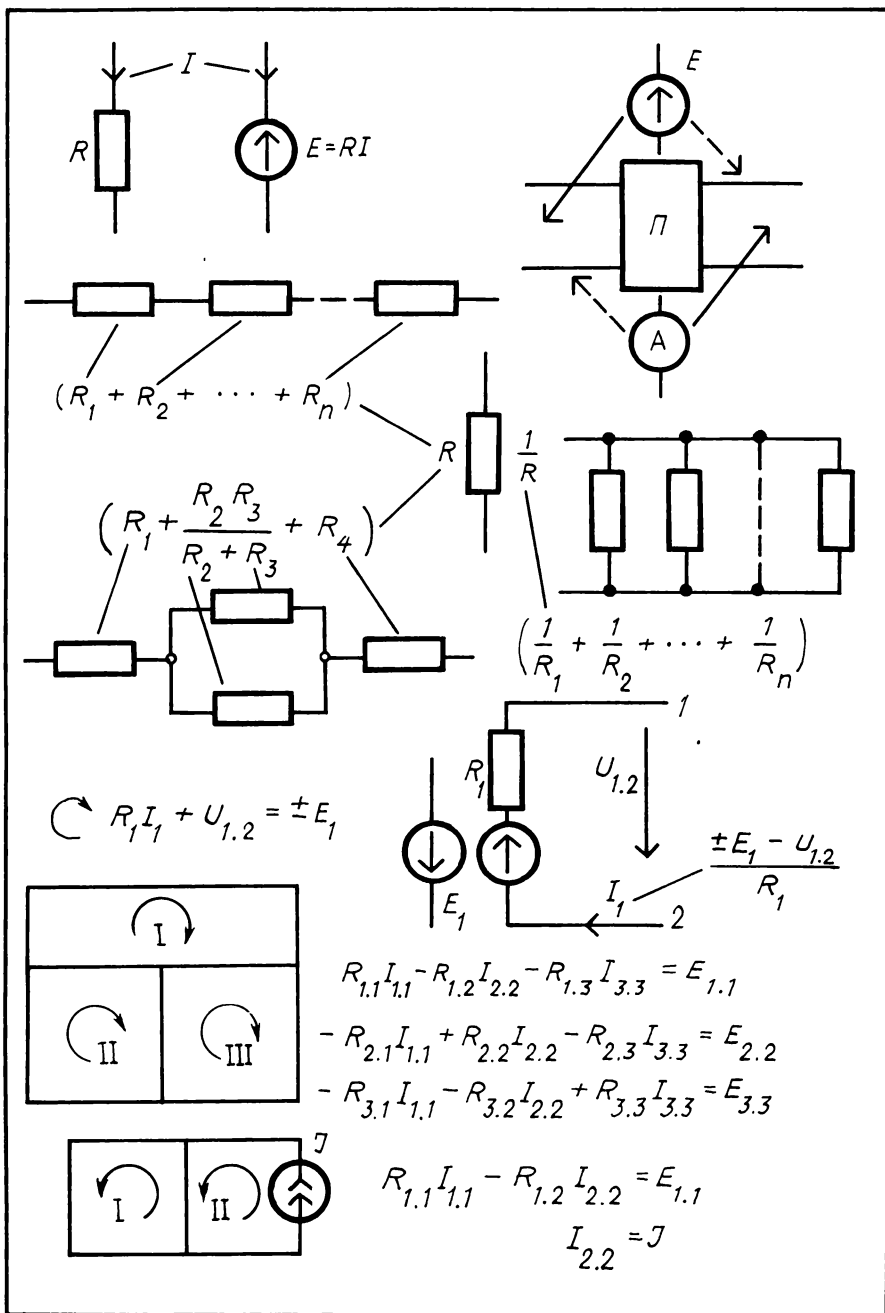
В наиболее общем случае в уравнения входят комплексные электрические величины.

Методы узловых напряжений и контурных токов основаны на законах Кирхгофа. Уравнения в таблице приведены в матричной форме. Размер матрицы, или количество уравнений, определяется числом узлов (контуров) минус единица. Решая уравнения, находят узловые напряжения (контурные токи), а затем токи ветвей. Это универсальные, наиболее общие и часто применяемые методы. Метод наложения из-за своей громоздкости используется для вычисления токов ветвей сравнительно редко. На сам принцип наложения является хорошей теоретической базой при обосновании других подходов к решению задач. Мы неоднократно будем ссылаться на него при изучении переходных процессов. Метод эквивалентного источника позволяет находить ток только одной ветви, и его целесообразно использовать в тех случаях, когда не нужно вычислять токи остальных ветвей.

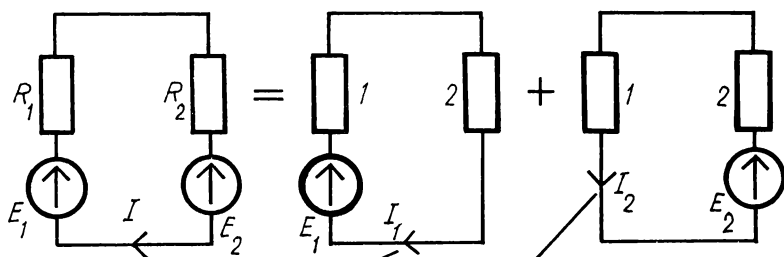
Обоснование методов, и их применение рассмотрим на примере цепей постоянного тока.



Мнемосхема 1

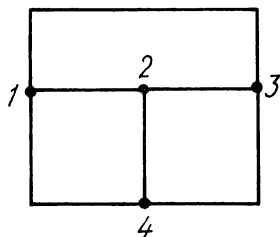


Мнемосхема 2



$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} - \frac{E_2}{R_1 + R_2} = I_1 - I_2$$

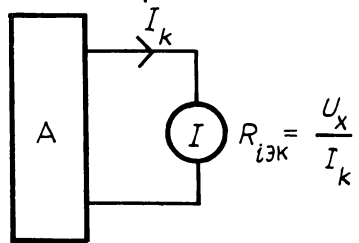
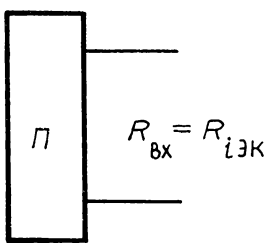
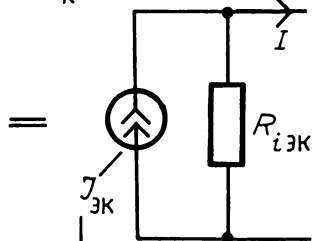
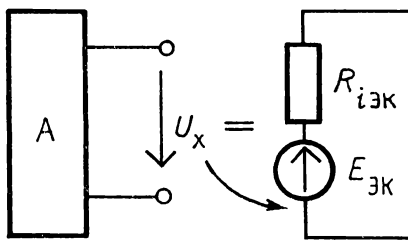
$$(g_{1.1}E_1 - g_{1.2}E_2)$$



$$\begin{aligned} g_{1.1}U_1 - g_{1.2}U_2 - g_{1.3}U_3 &= J_{1.1} \\ -g_{2.1}U_1 + g_{2.2}U_2 - g_{2.3}U_3 &= J_{2.2} \\ -g_{3.1}U_1 - g_{3.2}U_2 + g_{3.3}U_3 &= J_{3.3} \end{aligned}$$

$$g_{1.1} = \sum_{k=1}^n g_k \quad (k - \text{номер ветви})$$

$$J_{1.1} = \pm \frac{E_k}{R_k} \pm J_k, \quad U_1 = \dots, U_2 = \dots, U_3 = \dots$$



Мнемосхема 3

## 1. Электрическая цепь

### 1.1. Двухполюсники. Цепи линейные и нелинейные

Простейшая электрическая цепь состоит из источника электрической энергии, приемника и соединительных проводов. Условное графическое изображение цепи называют *схемой*.

Согласно закону Ома, ток

$$I = E / (R + R_i), \quad (1.1)$$

где  $E$  – ЭДС источника;  $R$  – сопротивление приемника;  $R_i$  – внутреннее сопротивление источника.

По количеству полюсов (клемм) источник и приемник являются *двухполюсниками*. Первый из них – *активный* двухполюсник (в нем есть ЭДС), второй – *пассивный*.

Зависимость тока в двухполюснике от напряжения называется *вольт-амперной характеристикой*. Для пассивного двухполюсника

$$U = RI, \quad (1.2)$$

Формуле (1.2) соответствует прямая, выходящая из начала координат.

Вольт-амперная характеристика активного двухполюсника получается из равенства (1.1):

$$U = E - RI. \quad (1.3)$$

Ее можно построить по двум точкам: при  $I = 0$  напряжение  $U = E$ , при  $U = 0$  ток короткого замыкания  $I_k = E / R_i$ .

Вольт-амперные характеристики могут быть *линейными* и *нелинейными*. Соответственно характеристикам все двухполюсники, а затем и цепи подразделяют на линейные и нелинейные.

Линейная цепь состоит только из линейных двухполюсников. Если в ней есть хоть один нелинейный элемент, она нелинейна.

Расчет линейных цепей значительно проще, чем нелинейных. Поэтому при решении многих задач изменением сопротивлений пренебрегают и считают цепи линейными, состоящими из идеальных линейных двухполюсников.

Энергию двухполюсников вычисляют по закону Джоуля–Ленца:

$$W = RI^2 t; \quad W = EIt$$

(где  $t$  – время), а мощность – по формулам:

$$P = RI^2; \quad P = EI.$$

### 1.2. Источник напряжения и источник тока

Источник электрической энергии без внутреннего сопротивления ( $R_i = 0$ ) называется *идеальным источником напряжения*. Вольт-амперная характеристика его представляет собой горизонтальную прямую, т.е. напряжение при любом токе равно  $E$  (см. равенство (1.3) при  $R_i = 0$ ).

Источник с бесконечно большим внутренним сопротивлением называется *идеальным источником тока*. В условном графическом изображении это

свойство ( $R_i = \infty$ ) показано двойной стрелкой с разрывом. Вольт-амперная характеристика идеального источника тока — прямая, параллельная оси ординат.

Реальный источник с определенным внутренним сопротивлением  $0 < R_i < \infty$  можно показать на схеме идеальным источником напряжения с последовательно подключенным активным сопротивлением (рис. 1.1, а) либо идеальным источником тока с внутренним сопротивлением, подключенным параллельно (рис. 1.1, б). Эти схемы взаимозаменяемы. Разделим обе части равенства (1.3) на  $R_i$  :

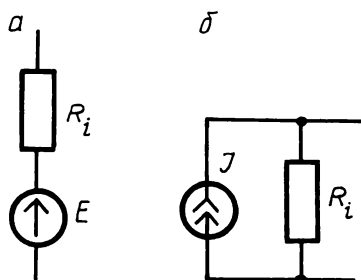


Рис. 1.1

$$U/R_i = E/R_i - I.$$

Здесь  $E/R_i = J$  — внутренний ток источника;  $U/R_i$  — та часть тока, которая замыкается через внутреннее сопротивление.

Ток нагрузки

$$I = J - U/R_i. \quad (1.4)$$

Если внутренний ток источника тока равен току короткого замыкания

источника напряжения, то обе схемы эквивалентны. Условие эквивалентности:

$$J = E/R_i; \quad E = R_i J.$$

Вольт-амперные характеристики реальных источников строят по уравнениям (1.3), (1.4). В результате получаются наклонные прямые, показанные на номосхеме 1 штриховыми линиями.

### 1.3. Согласованный режим. Законы Кирхгофа

Режим, в котором мощность приемника максимальна, называется *согласованным*.

Мощность пассивного двухполюсника  $P = UI$ . При холостом ходе ( $I = 0$ ) или коротком замыкании ( $U = 0$ ) она равна нулю. Определим ток, при котором мощность максимальна. Для этого запишем  $P$  как разность мощностей источника  $EI$  и потерь  $R_i I^2$  на его внутреннем сопротивлении:  $P = EI - R_i I^2$ . Возьмем производную по току и приравняем ее нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = E - 2R_i I = 0. \quad (1.5)$$

Решив уравнение (1.5), найдем ток в согласованном режиме:

$$I_{\text{сг}} = E/(2R_i) = E/(R_i + R_i). \quad (1.6)$$

При сравнении уравнений (1.1) и (1.6) видно, что сопротивление двухполюсника равно внутреннему сопротивлению источника:  $R = R_i$ .

Мощность источника в согласованном режиме

$$P_{1\text{сг}} = E^2/(2R_i). \quad (1.7)$$

## Мощность приемника

$$P_{2\text{ср}} = R_i I_{\text{ср}}^2 = R_i \left( \frac{E}{2R_i} \right)^2 = \frac{E^2}{4R_i}. \quad (1.8)$$

Сравнив выражения (1.7) и (1.8), видим, что в согласованном режиме мощность приемника равна половине мощности источника, а КПД  $\eta$  как отношение  $P_{2\text{ср}}/P_{1\text{ср}}$  равен 0,5.

Точку цепи, в которой сходится не менее трех проводов, называют *узлом*.

В узле алгебраическая сумма токов равна нулю. Это *первый закон Кирхгофа*.

Участок цепи, заключенный между двумя узлами, называется *ветвью*. При обходе по ветвям можно получить *контур* — замкнутый путь, образующий неразветвленную цепь.

В контуре алгебраическая сумма напряжений равна алгебраической сумме ЭДС. Это *второй закон Кирхгофа*.

1. Начертите условные обозначения и вольт-амперные характеристики источника тока и источника напряжения: идеальных; реальных. Запишите условие эквивалентности источника тока и источника напряжения.

2. Какой режим называется согласованным? Как согласовать нагрузку с источником?

3. Заучите формулировки законов Кирхгофа.

1.1. Постройте вольт-амперную характеристику активного двухполюсника, если:

а)  $E = 6 \text{ В}$ ,  $R_i = 2 \text{ кОм}$ .

♦ В режиме холостого хода  $U = E = 6 \text{ В}$ ,  $I = 0$ . При коротком замыкании  $U = 0$ ,  $I_{\text{к}} = E/R_i = 3 \text{ А}$ .

Строим на графике точки и соединяем их прямой линией; □

б)  $E = 25 \text{ В}$ ,  $R_i = 5 \text{ Ом}$ .

2.1. Замените эквивалентным источником тока источник напряжения с параметрами:

а)  $E = 100 \text{ В}$ ,  $R_i = 2 \text{ Ом}$  [ $J = 50 \text{ А}$ ];

б)  $E = 25 \text{ В}$ ,  $R_i = 5 \text{ Ом}$  [ $J = 5 \text{ А}$ ].

2.2. Замените эквивалентным источником напряжения источник тока с параметрами:

а)  $J = 8,8 \text{ мкА}$ ,  $R_i = 500 \text{ кОм}$  [ $4,4 \text{ В}$ ];

б)  $J = 2 \text{ мА}$ ,  $R_i = 100 \text{ кОм}$  [ $200 \text{ В}$ ].

3.1. Определите ток короткого замыкания, ток и мощности в согласованном режиме, если параметры источника:

а)  $E = 6 \text{ В}$ ,  $R_i = 0,3 \text{ Ом}$ .

♦ Согласованная нагрузка  $R = R_i = 0,3 \text{ Ом}$ . Токи  $I_{\text{к}} = E/R_i = 20 \text{ А}$ ,  $I_{\text{ср}} = E/(R + R_i) = 10 \text{ А}$ .

Находим мощности источника и приемника:

$$P_{1\text{ср}} = EI_{\text{ср}} = 60 \text{ Вт}; \quad P_{2\text{ср}} = RI_{\text{ср}}^2 = 30 \text{ Вт}; \quad \square$$

б)  $E = 24 \text{ В}$ ,  $R_i = 2 \text{ Ом}$  [ $12 \text{ А}$ ,  $6 \text{ А}$ ,  $144 \text{ Вт}$ ,  $72 \text{ Вт}$ ].

## 2. Теоремы компенсации и взаимности. Эквивалентное преобразование пассивных схем. Метод контурных токов

### 2.1. Теорема компенсации. Последовательное, параллельное и смешанное соединение приемников

**Теорема компенсации:** токи в цепи не изменятся, если резистор заменить идеальным источником напряжения, ЭДС которого численно равна напряжению на этом резисторе и направлена встречно току.

Для доказательства теоремы из электрической цепи, обозначенной на рис. 2.1, а прямоугольником, выделим одну ветвь с сопротивлением  $R$  и током  $I$ . Ток ветви не изменится, если включить в нее два идеальных источника напряжения, ЭДС которых направлены противоположно и численно равны напряжению на резисторе:  $RI = E$  (рис. 2.1, б). Примем потенциал точки 2 равным нулю. Тогда потенциалы точек 1 и 3 равны ( $\varphi_1 = \varphi_3$  больше  $\varphi_2$  на одну и ту же величину  $RI$ ). Точки 1 и 3 можно объединить в одну, исключив  $E$  и  $R$ . Получится цепь, схема которой показана на рис. 2.1, в. В ней сопротивление заменено ЭДС  $E = RI$ , направленной встречно току.

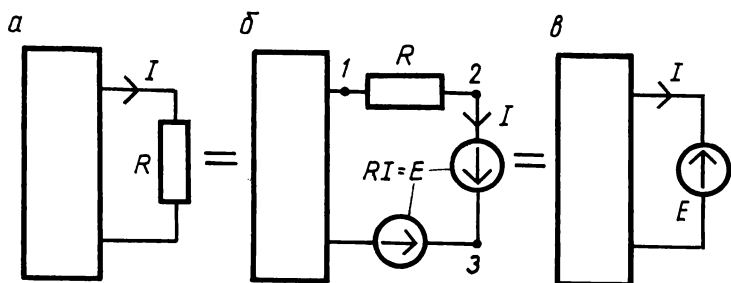


Рис. 2.1

При последовательном соединении (рис. 2.2) входное напряжение по второму закону Кирхгофа равно сумме напряжений на отдельных участках:

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I \text{ или } U = (R_1 + R_2 + R_3) I = RI,$$

где  $R = R_1 + R_2 + R_3$  — эквивалентное сопротивление.

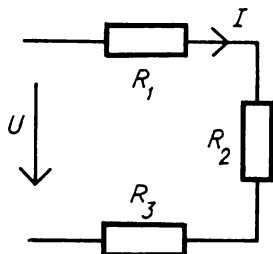


Рис. 2.2

Ток  $I = U/R$ .

Если соединены последовательно  $n$  приемников, эквивалентное сопротивление равно

$$\text{сумме их сопротивлений: } R = \sum_{k=1}^n R_k.$$

При параллельном соединении (рис. 2.3) все приемники присоединены к двум узлам с напряжением  $U$ . По первому закону Кирхгофа  $I = I_1 + I_2 + I_3$ .

Применим для каждой ветви закон Ома:

$$I = U/R_1 + U/R_2 + U/R_3 = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)U = gU,$$

где  $g = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = g_1 + g_2 + g_3$  — эквивалентная проводимость. Следовательно, для параллельной цепи  $I = gU$ .

Если соединены параллельно  $n$  приемников, их эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей ветвей:  $g = \sum_{k=1}^n g_k$ .

Для двух параллельно соединенных приемников  $g = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_1 + R_2)/(R_1 R_2)$ . Отсюда эквивалентное сопротивление

$$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2). \quad (2.1)$$

Если  $R_1 = R_2$ , то  $R = R_1/2$ .

Для разветвления из  $n$  одинаковых приемников  $g = 1/R_1 + 1/R_1 + \dots + 1/R_1 = n/R_1$ , откуда  $R = R_1/n$ .

Параллельно включают приемники, рассчитанные на одно и то же напряжение. Включение либо отключение одного из них не отражается на работе остальных приемников.

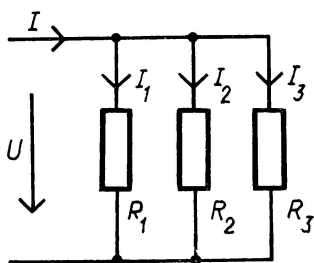


Рис. 2.3

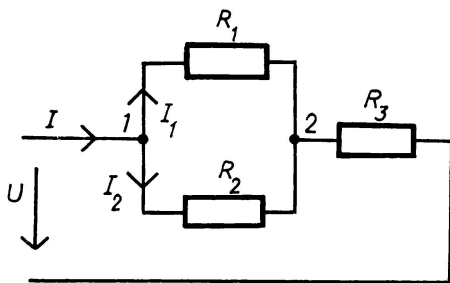


Рис. 2.4

При смешанном соединении часть приемников включена последовательно, часть параллельно (рис. 2.4). Эквивалентное сопротивление такой цепи равно сумме сопротивлений последовательных участков:  $R = R_{1,2} + R_3$ . Сопротивление  $R_{1,2}$  вычисляется по формуле (2.1). Входной ток  $I = U/R$ . Ток одной из параллельных ветвей

$$I_1 = \frac{U_{1,2}}{R_1} = \frac{R_{1,2} I}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (2.2)$$

т.е. входной ток надо разделить на сумму сопротивлений ветвей и умножить на сопротивление противоположной ветви. По аналогии для второй ветви

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.3)$$

1. Требуется резистор заменить источником напряжения. Чему должна быть равна ЭДС и как направлена?
2. Когда складывают  $R$ , а когда  $g$  и почему?
3. Выведите формулу эквивалентного сопротивления двух параллельно включенных приемников.
4. Как подсчитать эквивалентное сопротивление смешанной схемы?

## 2.2. Определение токов по уравнениям Кирхгофа.

Закон Ома для ветви с ЭДС

Пусть для цепи (рис. 2.5) заданы ЭДС и сопротивления. Требуется определить токи ветвей.

Для решения этой задачи надо составить столько уравнений, сколько неизвестных, т.е. ветвей. Покажем стрелками на ветвях схемы произвольные направления токов. Наметим один из узлов (верхний) и запишем все его токи (входящие — с плюсом, выходящие — с минусом):  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ . Чтобы уравнения были независимыми, число их должно быть на одно меньше, чем количество узлов. В рассматриваемой схеме два узла, значит, можно записать только одно уравнение.

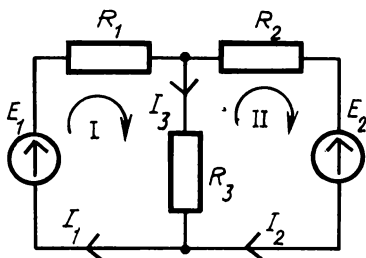


Рис. 2.5

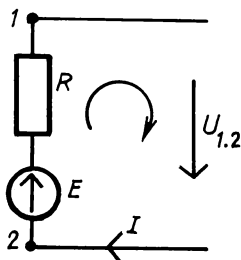


Рис. 2.6

Покажем на схеме стрелкой направление обхода контуров (например, по ходу часовой стрелки). Контуры выберем так, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не учтенная в предыдущих контурах. Лишь при этом условии уравнения будут взаимно независимыми. Затем обойдем контур и поочередно запишем напряжения  $RI$ : со знаком плюс, если напряжение направлено в сторону обхода контура; со знаком минус, если оно встречное (за направление напряжения примем направление тока в ветви). Поставим знак равенства и еще раз обойдем контур. Все ЭДС занесем в правую часть уравнения. Знак при ЭДС определим, сравнив направления стрелок ЭДС и обхода. Обойдем первый контур:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1.$$

При обходе второго контура встретим и напряжения, и ЭДС:

$$-R_3 I_3 - R_2 I_2 = -E_2.$$

Решив систему уравнений, найдем токи как алгебраические числа. Плюс

подтверждает выбранное произвольно направление тока, минус показывает, что направление тока противоположно указанному на схеме.

Уравнение Кирхгофа можно составить и для отдельной ветви, если учесть напряжение на ее разомкнутом участке. Такую схему будем называть *условным контуром* (рис. 2.6). Условный контур превращается в контур (замкнутую часть схемы), если мысленно подключить к зажимам ветви вольтметр с бесконечно большим входным сопротивлением (его включение или отключение не изменяет ток ветви). Обойдем условный контур:  $RI + U_{1,2} = E$ , откуда  $I = (E - U_{1,2})/R$ . Если направление ЭДС противоположно указанному на рис. 2.6, то она войдет в уравнение с отрицательным знаком. В общем случае

$$I = (\pm E - U_{1,2})/R.$$

Эту формулу называют *законом Ома для ветви с ЭДС*. Знак при ЭДС определяем из уравнения Кирхгофа для условного контура.

1. В какой последовательности составляются уравнения Кирхгофа?
2. Как выбрать контуры, направления токов и обхода? С каким знаком следует записывать  $E$ ,  $U$ ,  $I$ ?
3. Сколько уравнений Кирхгофа можно составить (из них для контуров, для узлов)?
4. Как определить знаки при  $E$  и  $U$  в формуле, выражающей закон Ома для ветви с ЭДС?

1.1. Определите ЭДС, которой можно заменить  $R_2$  (рис. 2.7, а), если  $E_1 = 12$  В,  $R_1 = 8$  Ом и  $R_2 = 4$  Ом.

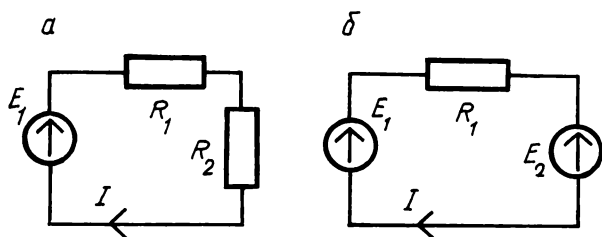


Рис. 2.7

♦ Находим:  $I = E_1 / (R_1 + R_2) = 1$  А,  $R_2 I = 4$  В. По теореме компенсации вместо  $R_2$  можно показать ЭДС  $E_2 = 4$  В и направить ее встречно току (рис. 2.7, б). □

1.2. Вычислите эквивалентное сопротивление цепи (см. рис. 2.2), если  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом.

1.3. Вычислите эквивалентную проводимость и входной ток цепи (см. рис. 2.3), если  $U = 24$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 12$  Ом [ 0,17 см, 4 А ].

1.4. Вычислите токи в цепи (см. рис. 2.4), если  $U = 24$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 12$  Ом.

♦ Эквивалентное сопротивление

$$R_{1,2} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 12 \text{ Ом}.$$

Находим входные сопротивление и ток:

$$R = R_{1,2} + R_3 = 24 \text{ Ом}; \quad I = U/R = 1 \text{ А}.$$

По формулам (2.2), (2.3)

$$I_1 = 1 \cdot \frac{30}{20 + 30} = 0,6 \text{ A}; \quad I_2 = 1 \cdot \frac{20}{20 + 30} = 0,4 \text{ A}.$$

(Проверьте, выполняется ли первый закон Кирхгофа.) □

1.5. Вычислите входные токи и напряжение, если при тех же сопротивлениях (см. задачу 1.4) ток  $I_2 = 1 \text{ A}$  [2,5 A, 60 В] .

### 2.3. Метод контурных токов

В расчет вводят вспомогательные неизвестные — *контурные токи*. Это условные, расчетные токи.

Пусть в первом контуре — контурный ток  $I_{1,1}$ , а во втором —  $I_{2,2}$  (рис. 2.8). Эти токи в отличие от токов ветвей обозначим двумя цифрами в индексе (один-один, два-два и т.д.), соответствующими номеру контура, и покажем на схеме дугowymi стрелками. Запишем уравнение Кирхгофа для первого контура, обойдя его в направлении контурного тока (при этом учтем ток второго контура  $I_{2,2}$ , замыкающийся через ветвь с сопротивлением  $R_2$  первого контура):

$$(R_1 + R_2)I_{1,1} - R_2I_{2,2} = E_1 - E_2.$$

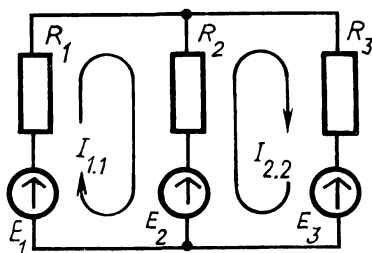


Рис. 2.8

Введем следующие обозначения:  $R_1 + R_2 = R_{1,1}$  — *контурное сопротивление*,  $E_1 - E_2 = E_{1,1}$  — *контурная ЭДС*,  $R_2 = R_{1,2}$  — *общее сопротивление первого и второго контуров*. Тогда

$$R_{1,1}I_{1,1} - R_{1,2}I_{2,2} = E_{1,1}.$$

Контурные сопротивления и контурные ЭДС равны сумме соответствующих величин, получающейся при последовательном обходе контура. Эти понятия позволяют записать остальные уравнения. Так, для второго контура уравнение Кирхгофа имеет вид

$$-R_{2,1}I_{1,1} + R_{2,2}I_{2,2} = E_{2,2},$$

где общее сопротивление  $R_{2,1} = R_2$ ; контурное сопротивление  $R_{2,2} = R_2 + R_3$ ; контурная ЭДС  $E_{2,2} = E_2 - E_3$ .

Члены, содержащие контурные сопротивления, входят в уравнения с положительным знаком, члены с общими сопротивлениями контуров — с от-

рицательным (при одинаковом направлении всех контурных токов). Расчет производим в следующем порядке: подсчитываем число взаимно независимых контуров и записываем столько же уравнений в общем виде. Например, для схемы из трех независимых контуров имеем:

$$\left. \begin{aligned} R_{1.1} I_{1.1} - R_{1.2} I_{2.2} - R_{1.3} I_{3.3} &= E_{1.1}; \\ -R_{2.1} I_{1.1} + R_{2.2} I_{2.2} - R_{2.3} I_{3.3} &= E_{2.2}; \\ -R_{3.1} I_{1.1} - R_{3.2} I_{2.2} + R_{3.3} I_{3.3} &= E_{3.3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Обойдем контуры и, сложив  $R$  (или  $E$ ) ветвей, вычислим контурные сопротивления и ЭДС. Контурная ЭДС (правая часть уравнения) равна нулю, если в контуре нет ЭДС. Вместо общего сопротивления поставим нуль, если контуры не имеют общей ветви. Решив систему уравнений, вычислим контурные токи.

Токи ветвей находим так: ток ветви, по которой замыкается только один контурный ток, равен контурному току; ток ветви, по которой замыкается несколько контурных токов, равен их алгебраической сумме.

1. Как обозначают контурные токи? Чему равны: контурное сопротивление; контурная ЭДС; общее сопротивление контуров?

2. С какими знаками входят в уравнение члены с контурными и общими сопротивлениями?

3. Если известны контурные токи, как определить токи ветвей?

4. Сравните методы контурных токов и уравнений Кирхгофа по числу уравнений.

2.1. Запишите уравнение Кирхгофа для контуров, показанных на рис. 2.7, а, б.

2.2. Начертите схему, приведенную на рис. 2.8; контурные токи  $I_{1.1}$  и  $I_{2.2}$  не показывайте. Обозначьте токи ветвей и составьте уравнения Кирхгофа для узла и двух контуров.

2.3. Запишите уравнения Кирхгофа для цепи, схема которой показана на рис. 2.9.

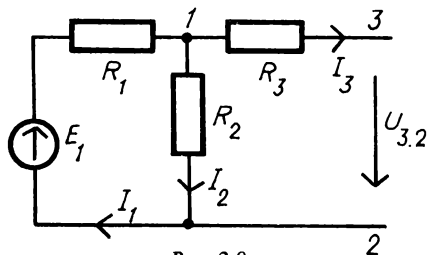


Рис. 2.9

♦ Покажем на схеме стрелками направления токов  $I_1, I_2, I_3$ . Обойдем первый контур в направлении, совпадающем с направлением движения часовой стрелки:  $R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1$ . Для второго контура  $-R_2 I_2 + R_3 I_3 + U_{3.2} = 0$ . По первому закону Кирхгофа  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ . □

#### 2.4. Принцип взаимности

Пусть единственный в цепи источник включен в первую ветвь (рис. 2.10, а). Измерим ток  $I_2$  второй ветви. Затем тот же источник перенесем во вторую ветвь и измерим ток  $I_1$  первой ветви. Токи  $I_1, I_2$  оказываются равными.

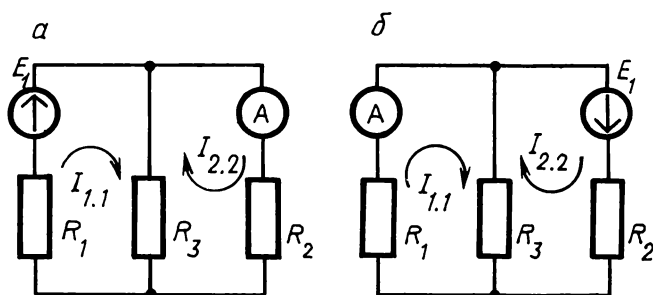


Рис. 2.10

Если в цепи с одним источником поменять местами источник и амперметр, показания амперметра не изменятся. Докажем это, используя метод контурных токов. Для первой схемы (рис. 2.10, а) контурные уравнения имеют вид:

$$R_{1.1}I_{1.1} - R_{1.2}I_{2.2} = E_1; \quad -R_{2.1}I_{1.1} + R_{2.2}I_{2.2} = 0,$$

откуда

$$I_2 = I_{2.2} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1.1} & E_1 \\ -R_{2.1} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_{2.1}}{\Delta} E_1,$$

где  $\Delta = R_{1.1}R_{2.2} - R_{1.2}R_{2.1}$ .

После переноса источника во вторую ветвь (рис. 2.10, б) имеем:

$$R_{1.1}I_{1.1} - R_{1.2}I_{2.2} = 0; \quad -R_{2.1}I_{1.1} + R_{2.2}I_{2.2} = E_1,$$

откуда

$$I_1 = I_{1.1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_{1.2} \\ E_1 & R_{2.2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_{1.2}}{\Delta} E_1.$$

Так как общее сопротивление контуров одинаковое ( $R_{2.1} = R_{1.2} = R_3$ ), то токи  $I_1$  и  $I_2$  равны, что и требовалось доказать.

1. Сколько источников должно быть в цепи, для которой можно применить принцип взаимности?

2. В третьей ветви (см. рис. 2.10, а)  $I_3 = 5$  А. Вычислите ток первой ветви, если источник  $E_1$  из первой ветви переключить в третью.

3. Как доказывается принцип взаимности?

3.1. Для цепи, схема которой приведена на рис. 2.8, дано:

$E$	1	2	3	$R$	1	2	3
$V$	50	20	30	Ом	10	15	20

Вычислите контурные  $R_{1.1}$  и  $R_{2.2}$ ,  $E_{1.1}$  и  $E_{2.2}$ . Чему равно общее сопротивление первого и второго контуров? Составьте контурные уравнения. Запишите токи ветвей через контурные токи [25 и 35 Ом, 30 и 10 В].

## 2.5. Расчет цепей методом контурных токов

Вычислим токи ветвей цепи, схема которой показана на рис. 2.8, если:

$E$	1	2	3	$R$	1	2	3
$B$	4	1	6,3	Ом	60	6	45

◇ Схема имеет два независимых контура. Покажем стрелками направления контурных токов и запишем уравнения:

$$R_{1,1}I_{1,1} - R_{1,2}I_{2,2} = E_{1,1}; \quad -R_{2,1}I_{1,1} + R_{2,2}I_{2,2} = E_{2,2}.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{1,1} & -R_{1,2} \\ -R_{2,1} & R_{2,2} \end{vmatrix} = R_{1,1}R_{2,2} - R_{1,2}^2.$$

Контурные токи:

$$I_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} E_{1,1} & -R_{1,2} \\ E_{2,2} & R_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_{2,2}}{\Delta} E_{1,1} + \frac{R_{1,2}}{\Delta} E_{2,2};$$

$$I_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1,1} & E_{1,1} \\ -R_{2,1} & E_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_{1,1}}{\Delta} E_{2,2} + \frac{R_{2,1}}{\Delta} E_{1,1}.$$

Подставим численные значения. Контурные сопротивления  $R_{1,1} = R_1 + R_2 = 66 \text{ Ом}$ ,  $R_{2,2} = 51 \text{ Ом}$ ; контурные ЭДС  $E_{1,1} = E_1 - E_2 = 3 \text{ В}$ ,  $E_{2,2} = -5,3 \text{ В}$ ; общее сопротивление  $R_{1,2} = R_{2,1} = 6 \text{ Ом}$ ; главный определитель  $\Delta = 66 \cdot 51 - 6^2 = 3330$ . Контурные токи:

$$I_{1,1} = \frac{51}{3330} \cdot 3 + \frac{6(-5,3)}{3330} = 0,036 \text{ А} = 36 \text{ мА};$$

$$I_{2,2} = \frac{-66 \cdot 5,3 + 6,3}{3330} = -0,1 \text{ А} = -100 \text{ мА}.$$

Токи ветвей:  $I_1 = I_{1,1} = 36 \text{ мА}$ ,  $I_2 = I_{1,1} - I_{2,2} = 136 \text{ мА}$ ,  $I_3 = I_{2,2} = -100 \text{ мА}$  (минус указывает на то, что ток ветви  $I_3$  направлен встречно контурному току  $I_{2,2}$ ). □

Для схемы с источником тока контуры надо выбирать так, чтобы ветвь с источником тока входила только в один контур (остальные ветви контура не должны содержать источников тока). Тогда контурный ток равен току ветви, т.е. внутреннему току источника. Так как последний задан, то уравнение для этого контура не составляется и число неизвестных уменьшается на число источников тока в схеме.

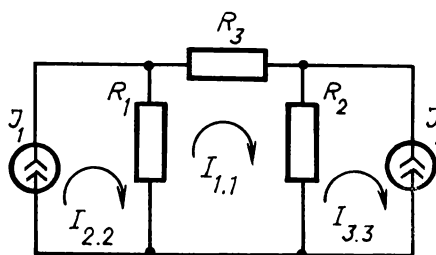


Рис. 2.11

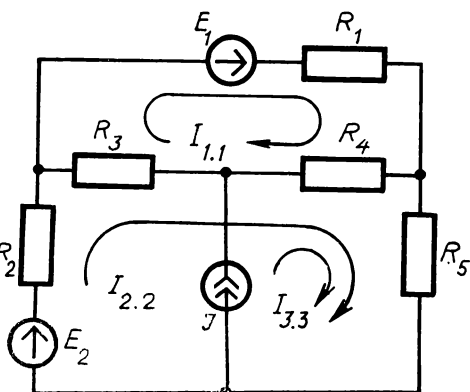


Рис. 2.12

Найдем токи ветвей цепи (рис. 2.11), если:

$J$	1	2	$R$	1	2	3
мА	100	50	Ом	20	50	30

◇ Наметим контуры по вышеизложенному правилу. Контурные токи крайних контуров:

$$I_{2.2} = J_1 = 100 \text{ мА}; \quad I_{3.3} = -J_2 = -50 \text{ мА}.$$

Для среднего контура составим уравнение Кирхгофа:

$$R_{1.1} I_{1.1} - R_{1.2} I_{2.2} - R_{1.3} I_{3.3} = 0,$$

где  $R_{1.1} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_{1.2} = R_1$ ;  $R_{1.3} = R_2$ .

Контурный ток

$$I_{1.1} = (20 \cdot 100 - 50 \cdot 50) / 100 = -5 \text{ мА}.$$

Токи ветвей:

$$I_1 = I_{2.2} - I_{1.1} = 105 \text{ мА}; \quad I_2 = I_{1.1} - I_{3.3} = 45 \text{ мА}; \quad I_3 = I_{1.1} = -5 \text{ мА}. \quad \square$$

Составим контурные уравнения для схемы, приведенной на рис. 2.12.

◇ В третьем контуре  $I_{3.3} = J$ ; для первого и второго контуров получаем соответственно:

$$R_{1.1} I_{1.1} - R_{1.2} I_{2.2} - R_{1.3} I_{3.3} = E_{1.1}; \quad -R_{2.1} I_{1.1} + R_{2.2} I_{2.2} + R_{2.3} I_{3.3} = E_{2.2}.$$

Слагаемое  $R_{2.3} I_{3.3}$  записано с плюсом, так как токи  $I_{2.2}$  и  $I_{3.3}$  совпадают по направлению. Запишите самостоятельно, чему равны контурные и общие сопротивления.  $\square$

1. Какова последовательность расчета методом контурных токов?
2. Как выбрать контуры, если в схеме указаны источники тока?
3. Запишите в общем виде уравнения для трех независимых контуров.

### 3. Методы наложения, узловых напряжений, эквивалентного источника

#### 3.1. Метод наложения. Входные и взаимные проводимости ветвей

Ранее для цепи, схема которой показана на рис. 2.8, методом контурных токов был найден ток первой ветви в таком виде:

$$I_1 = \frac{R_{2.2}}{\Delta} E_{1.1} + \frac{R_{1.2}}{\Delta} E_{2.2}.$$

Подставим в полученное уравнение выражения для контурных ЭДС:

$$I_1 = \frac{R_{2.2}}{\Delta} (E_1 - E_2) + \frac{R_{1.2}}{\Delta} (E_2 - E_3).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$I_1 = \frac{R_{2.2}}{\Delta} E_1 + \frac{R_{1.2} - R_{2.2}}{\Delta} E_2 - \frac{R_{1.2}}{\Delta} E_3.$$

Это алгебраическая сумма трех токов от ЭДС  $E_1, E_2, E_3$ . Так как главный определитель  $\Delta$  содержит произведение сопротивлений, то коэффициенты при ЭДС измеряются в единицах проводимости. Тогда последнее уравнение примет вид

$$I_1 = g_{1.1} E_1 + g_{1.2} E_2 + g_{1.3} E_3. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) математически выражает *принцип наложения*: ток ветви равен алгебраической сумме токов, вызванных каждой из ЭДС в отдельности.

Проводимость, обозначенная двумя одинаковыми индексами ( $g_{1.1}, g_{2.2}, \dots$ ), называется *входной проводимостью ветви* (первой, второй и т.д.). Двумя различными индексами обозначены *взаимные проводимости ветвей* ( $g_{1.2}$  — первой и второй,  $g_{1.3}$  — первой и третьей).

Входные и взаимные проводимости ветвей можно рассчитать или определить экспериментально. Пусть ЭДС  $E_2$  и  $E_3$  в формуле (3.1) равны нулю, тогда  $I_1 = g_{1.1} E_1$ , откуда

$$g_{1.1} = I_1 / E_1. \quad (3.2)$$

Входная проводимость ветви равна отношению тока к ЭДС при условии, что в остальных ветвях ЭДС нет.

Если же в уравнении (3.1)  $E_1 = E_3 = 0$ , то  $I_1 = g_{1.2} E_2$ , откуда

$$g_{1.2} = I_1 / E_2, \quad (3.3)$$

т.е. взаимная проводимость двух ветвей равна отношению тока первой ветви к ЭДС второй при условии, что в остальных ветвях ЭДС нет. Если индексы ветвей переставить, то  $g_{1.2} = g_{2.1} = I_2 / E_1$ . Уравнения вида (3.1) можно записать для любой ветви.

Проведем опыт: включим источник с ЭДС  $E_1$  в первую ветвь и измерим (или вычислим) токи  $I_1, I_2, I_3$ . По формуле (3.2) вычислим  $g_{1.1}$ , по форму-

ле (3.3) найдем  $g_{1,2}$ . Аналогично  $g_{1,3} = I_3/E_1$ . Перенесем источник в другую ветвь и вновь измерим (или вычислим) токи ветвей, а по ним — проводимости:  $g_{2,2} = I_2/E_2$ ,  $g_{2,3} = I_3/E_2$ , и так для каждой ветви. Определив проводимости всех ветвей, по уравнению вида (3.1) можно вычислить ток ветви.

Метод наложения эффективен для расчета цепей, в которых ЭДС могут принимать несколько значений.

1. Сформулируйте принцип наложения.
2. Что такое входная и взаимная проводимости ветвей? Как их вычислить?

### 3.2. Метод узловых напряжений

На схеме, приведенной на рис. 3.1, пронумеруем узлы и покажем направления токов  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Для узла 1 уравнение Кирхгофа имеет вид

$$I_1 + I_2 + I_3 + J = 0. \quad (3.4)$$

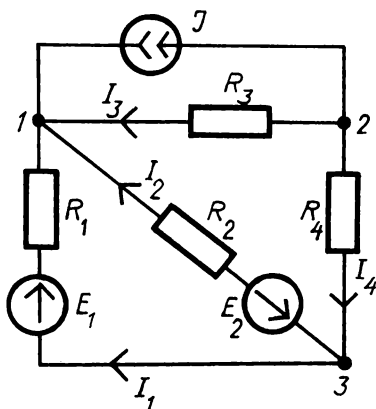


Рис. 3.1

Примем один из узлов, например третий, за опорный узел (базу); потенциал базы будем считать равным нулю. Направления напряжений остальных узлов относительно базы (узловых напряжений  $U_1, U_2$ ) покажем стрелками, направленными от узлов к базе. Токи ветвей можно выразить по закону Ома через узловые напряжения:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{-E_2 - U_1}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_2 - U_1}{R_3}. \quad (3.5)$$

Подставим их в уравнение (3.4) и сгруппируем подобные члены:

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_1 - \frac{1}{R_3} U_2 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J. \quad (3.6)$$

Введем обозначение:  $1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = g_{1,1}$ . Это собственная проводимость узла 1, она равна сумме проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле. Правая часть равенства (3.6)  $E_1/R_1 - E_2/R_2 + J = J_{1,1}$ . Это узловой

ток, равный алгебраической сумме внутренних токов источников, примыкающих к узлу (ток, направленный к узлу, считаем положительным, направленный от узла — отрицательным).

Проводимость ветви, соединяющей два узла, называется *общей проводимостью* этих узлов и обозначается двумя различными индексами:  $g_{1,2}$  (общая проводимость первого и второго узлов). Чтобы придать единообразие слагаемым уравнения, записываем  $g_{1,2}$  или  $g_{2,1}$ . Из схемы видно, что  $g_{1,2} = 1/R_3$ . С учетом этих обозначений уравнение (3.6) примет вид

$$g_{1,1} U_1 - g_{1,2} U_2 = J_{1,1} \quad (3.7)$$

Собственная проводимость входит в это уравнение с положительным знаком, общая — с отрицательным.

Аналогично для узла 2 имеем

$$-g_{2,1} U_1 + g_{2,2} U_2 = J_{2,2} \quad (3.8)$$

где  $g_{2,1} = 1/R_3$ ;  $g_{2,2} = 1/R_3 + 1/R_4$ ;  $J_{2,2} = -J$ .

В итоге мы получили два уравнения с двумя неизвестными. Решив их, найдем узловые напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и затем по формулам (3.5) вычислим токи ветвей.

При расчете цепей методом узловых напряжений нет необходимости повторять весь вывод уравнений (3.7), (3.8). Их можно сразу записать в общем виде. Так, для цепи с четырьмя узлами надо записать  $4 - 1 = 3$  уравнения четвертый узел опорный, т.е.  $U_4 = 0$  (см. мнемосхему 3). Затем для конкретной цепи вычислим проводимости (собственные и общие), узловые токи и, решив уравнения, найдем напряжения узлов  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  относительно базы. По формуле Ома вычислим токи ветвей.

1. Чему равны проводимости: собственная узла; общая двух узлов? С какими знаками они входят в уравнения?

2. Что такое узловой ток? Как его вычислить?

3. Сколько уравнений надо составить при расчете цепи методом узловых напряжений?

1.1. Найдите методом наложения токи в цепи, схема которой показана на рис. 3.2, а, если:

$E$	1	2	$R$	1	2	3
$B$	3,6	4,8	Ом	3	2	6

♦ Заменяем данную схему двумя расчетными схемами (рис. 3.2, б, в), каждая из которых содержит только один источник. Вычислим частичные (только от одного источника) токи.

Для схемы "б" имеем:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = 0,8 \text{ А}; \quad I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,6 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,2 \text{ А}.$$

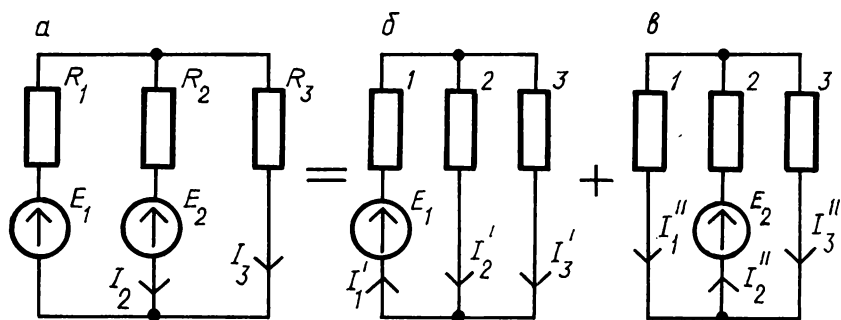


Рис. 3.2

Для схемы "в" получим :

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + R_1 R_3 (R_1 + R_3)} = 1,2 \text{ А}; \quad I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 0,8 \text{ А};$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0,4 \text{ А}.$$

Направления токов на одной из схем, например "б", примем за положительные. Сравнив токи  $I_1'$  и  $I_1''$ , видим, что они направлены встречно:  $I_1 = I_1' - I_1'' = 0$ . Аналогично  $I_2 = I_2' - I_2'' = -0,6 \text{ А}$ . Токи  $I_3'$  и  $I_3''$  совпадают по направлению, поэтому  $I_3 = I_3' + I_3'' = 0,6 \text{ А}$ . Направление тока  $I_2 = -0,6 \text{ А}$  противоположно показанному на схеме "а". □

1.2. Используя частичные токи, вычисленные в примере 1.1, найдите входную и взаимные проводимости первой ветви. Запишите через них уравнение для тока первой ветви.

♦ В схеме, приведенной на рис. 3.2, б,  $E_1 = 3,6 \text{ В}$ ,  $I_1' = 0,8 \text{ А}$ . Согласно формуле (3.2), входная проводимость равна отношению тока ветви к ЭДС:  $g_{1,1} = I_1'/E_1 = 2,9 \text{ См}$ . Взаимная проводимость первой и второй ветвей  $g_{1,2} = I_2'/E_1 = 1,6 \text{ См}$ , первой и третьей ветвей  $g_{1,3} = I_3'/E_1 = 1/18 \text{ См}$ . Согласно уравнению (3.1),

$$I_1 = \frac{2}{9} E_1 + \frac{1}{6} E_2 + \frac{1}{18} E_3. \quad \square$$

1.3. Используя вычисленные в примере 1.1 частичные токи ( см. рис. 3.2, в), определите входную проводимость  $g_{2,2}$  второй ветви и взаимные проводимости  $g_{2,1}$  и  $g_{2,3}$ . Сравните  $g_{2,1}$  и  $g_{1,2}$  из примера 1.2. Запишите выражение для  $I_2$  через проводимости ветвей и ЭДС.

### 3.3. Теорема об активном двухполюснике. Метод эквивалентного источника

**Теорема об активном двухполюснике:** активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником, ЭДС которого равна напряжению холостого хода двухполюсника, а внутреннее сопротивление — его входному сопротивлению.

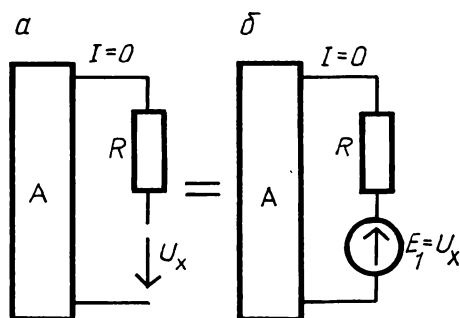


Рис. 3.3

Для доказательства теоремы выделим одну ветвь цепи (рис. 3.3, а), а остальную ее часть покажем активным двухполюсником. Разомкнув ветвь, измерим (или вычислим) напряжение холостого хода  $U_x$ . По теореме компенсации его можно заменить встречно направленной ЭДС  $E_1 = U_x$  (рис. 3.3, б). При этом ток в ветви останется равным нулю.

Ток ветви (рис. 3.4, а) не изменится, если включить в нее две противоположно направленные ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 3.4, б), численно равные  $U_x$ . Воспользуемся принципом наложения и определим ток  $I$  как алгебраическую сумму токов, создаваемых отдельными источниками. Вместо одной схемы (рис. 3.4, б) будем рассматривать две, одна из которых включает источник с ЭДС  $E_1$  и активный двухполюсник  $A$  (рис. 3.4, в), а вторая — источник с ЭДС  $E_2$  и пассивный двухполюсник  $\Pi$  (рис. 3.4, г). В двухполюснике  $\Pi$  нет источников, оставлены только их внутренние сопротивления.

В цепи, схема которой показана на рис. 3.4, в, так же, как и в цепи, схема которой показана на рис. 3.3, б, ток равен нулю. Для схемы, приведенной на рис. 3.4, г,

$$I = E_2 / (R_{\text{вх}} + R),$$

где  $R_{\text{вх}}$  — входное сопротивление пассивного двухполюсника. Этому уравнению соответствует эквивалентная схема (рис. 3.5, а), где активный двухпо-

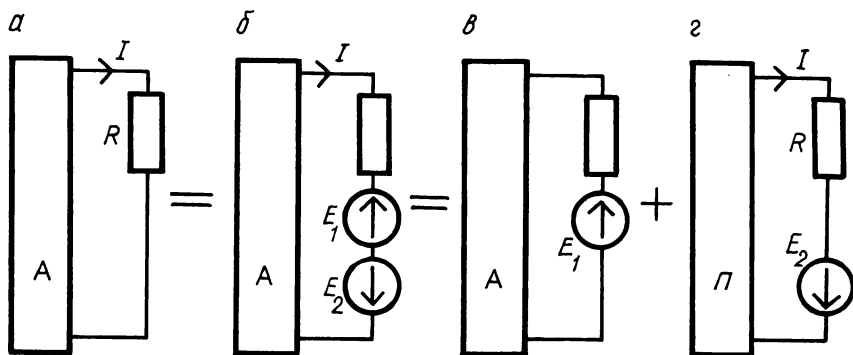


Рис. 3.4

люсник представлен в виде источника напряжения с ЭДС  $E_{\text{эк}} = U_x$  и внутренним сопротивлением  $R_{i\text{эк}}$ .

Схему, приведенную на рис. 3.5, а, можно заменить схемой (рис. 3.5, б), в которой внутренний ток источника равен току короткого замыкания двухполюсника:

$$J = E_{\text{эк}} / R_{i\text{эк}} , \quad (3.9)$$

т.е. активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником тока. Внутренний ток источника равен току короткого замыкания двухполюсника. Для схемы, представленной на рис. 3.5, б,

$$I = J_{\text{эк}} \frac{R_{i\text{эк}}}{R_{i\text{эк}} + R} .$$

Метод, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным источником, позволяет определить ток в какой-либо одной ветви.

При расчете поочередно чертим и анализируем три схемы. В первой схеме (с разомкнутой ветвью) вычисляем напряжение холостого хода  $U_x$ .

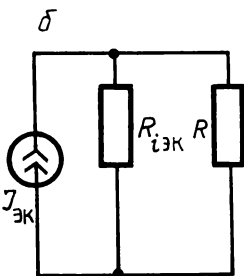
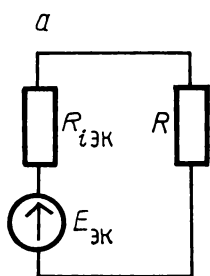


Рис. 3.5

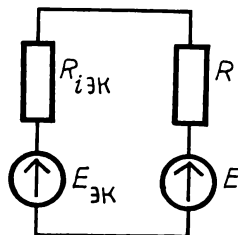


Рис. 3.6

Затем чертим схему, в которой участки с ЭДС замкнуты накоротко, а ветви с источниками тока разомкнуты. По ней вычисляем входное сопротивление путем эквивалентного преобразования пассивных двухполюсников.

Входное сопротивление можно определить и другим способом. В исходной схеме (с источниками) замкнем ветвь накоротко и вычислим ток короткого замыкания  $I_k = J$ . Из формулы (3.9) следует

$$R_{i\text{эк}} = E_{\text{эк}} / J = R_{\text{вх}} .$$

Последним способом удобно определять  $R_{\text{вх}}$ , если можно измерить напряжение  $U_x$  на зажимах разомкнутой ветви и ток  $I_k$  в короткозамкнутой ветви.

Зная параметры эквивалентного источника ( $E_{\text{эк}} = U_x$ ,  $R_{i\text{эк}} = R_{\text{вх}}$ ), можно начертить третью схему – схему эквивалентного источника с ветвью (рис. 3.6). Ток в ней находим по закону Ома:

$$I = (E_{\text{эк}} \pm E) / (R_{i\text{эк}} + R) .$$

Знак ЭДС выясняется при обходе контура:  $+E$ , если обе ЭДС направлены одинаково, и  $-E$ , если они направлены встречно. Для пассивной ветви следует принять в этой формуле  $E = 0$ .

При вычислении тока методом эквивалентного источника решают сначала две более простые задачи: ищут напряжение на разомкнутой и ток в короткозамкнутой ветви. Отсюда его второе название — *метод холостого хода и короткого замыкания*.

1. Активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником. Чему равны его ток, ЭДС и внутреннее сопротивление?

2. Как определить  $R_{i\text{эк}}$ ,  $E_{\text{эк}}$  и  $J_{\text{эк}}$  расчетом и экспериментально?

3. По каким формулам следует вычислять ток ветви, если известны: а)  $E_{\text{эк}}$  и  $R_{i\text{эк}}$ ; б)  $J_{\text{эк}}$  и  $R_{i\text{эк}}$ ?

2.1. Найти токи в цепи, схема которой показана на рис. 3.1, если  $J = 5$  А,  $E_1 = 70$  В,  $E_2 = 40$  В,  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = R_4 = 20$  Ом.

◇ Нумеруем узлы: 1, 2, 3. Последний примем за опорный. Для оставшихся двух узлов запишем уравнения в общем виде :

$$g_{1,1}U_1 - g_{1,2}U_2 = J_{1,1}; \quad -g_{2,1}U_1 + g_{2,2}U_2 = J_{2,2}.$$

Находим собственные проводимости:

$$g_{1,1} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 0,17 \text{ См}; \quad g_{2,2} = 1/R_3 + 1/R_4 = 0,1 \text{ См}.$$

Общая проводимость первого и второго узлов

$$g_{1,2} = g_{2,1} = 1/R_3 = 0,05 \text{ См}.$$

Узловые токи :

$$J_{1,1} = E_1/R_1 - E_2/R_2 + J = 11,2 \text{ А}; \quad J_{2,2} = -5 \text{ А}.$$

Запишем те же уравнения с числовыми коэффициентами:

$$0,17U_1 - 0,05U_2 = 11,2; \quad -0,05U_1 + 0,1U_2 = -5.$$

Вычислим главный определитель и напряжения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,17 & -0,05 \\ -0,05 & 0,1 \end{vmatrix} = 0,0145 \text{ См}^2;$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11,2 & -0,05 \\ -5 & 0,1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 60 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,17 & 11,2 \\ -0,05 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -20 \text{ В}.$$

По закону Ома находим токи ветвей:

$$I_1 = (E_1 - U_1)/R_1 = 1 \text{ А}; \quad I_2 = (-E_2 - U_1)/R_2 = -2 \text{ А};$$

$$I_3 = (U_2 - U_1)/R_3 = -4 \text{ А}; \quad I_4 = U_2/R_4 = -1 \text{ А}.$$

Для первого узла закон Кирхгофа выполняется:  $1-2-4+5 = 0$ . Для второго и третьего узлов составьте уравнения Кирхгофа самостоятельно. □

### 3.4. Расчет цепей методом узловых напряжений

Найдем токи ветвей в цепи, схема которой приведена на рис. 3.7, если:

$E$	1	2	$R$	3	4	5	6
$V$	1,6	2	Ом	100	100	150	40

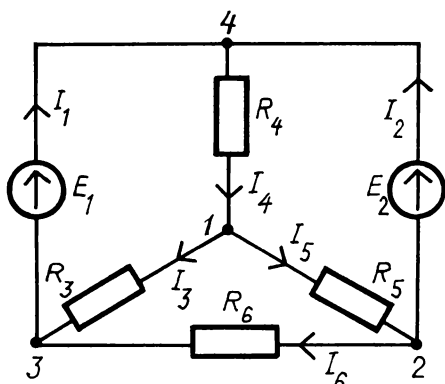


Рис. 3.7

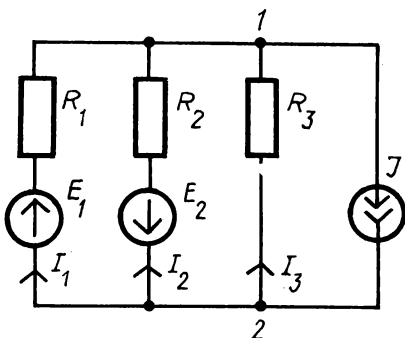


Рис. 3.8

Если к одному узлу примыкают ветви с идеальными источниками напряжения ( $R_i \approx 0$ ), то надо этот узел пронумеровать последним и принять его за базу. Потенциалы узлов, примыкающих к базе, численно равны ЭДС. Так, если принять за базу узел 4, общий для источников с ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ , то напряжения узлов 2 и 3 соответственно равны:  $U_2 = -E_2 = -1$  В,  $U_3 = -E_1 = -1,6$  В. Чтобы найти напряжение узла 1, достаточно составить одно уравнение:

$$g_{1,1}U_1 - g_{1,2}U_2 - g_{1,3}U_3 = 0.$$

В правой части уравнения — нуль, так как к узлу 1 не примыкают ветви с источниками.

Вычислим собственную и общую проводимости:

$$g_{1,1} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 4/150 \text{ См};$$

$$g_{1,2} = 1/R_5 = 0,02 \text{ См}; \quad g_{1,3} = 1/R_4 = 0,01 \text{ См}.$$

Узловое напряжение

$$U_1 = \frac{g_{1,2}U_2 + g_{1,3}U_3}{g_{1,1}} = -0,85 \text{ В}.$$

Найдем напряжения между остальными узлами и токи ветвей:

$$U_{1,2} = U_1 - U_2 = 0,15 \text{ В}; \quad I_5 = U_{1,2}/R_5 = 1 \text{ мА};$$

$$U_{1,3} = U_1 - U_3 = 0,75 \text{ В}; \quad I_3 = U_{1,3}/R_3 = 7,5 \text{ мА};$$

$$U_{2,3} = U_2 - U_3 = 0,6 \text{ В}; \quad I_6 = U_{2,3}/R_6 = 15 \text{ мА};$$

$$U_{1.4} = U_1 = -0,85 \text{ В}; \quad I_4 = U_{4.1}/R_4 = 8,5 \text{ мА}.$$

(Напряжение  $U_{1.4}$  взято с противоположным знаком, оно соответствует направлению тока  $I_4$  на схеме.)

Токи  $I_1$  и  $I_2$  найдем из уравнений Кирхгофа. Для узла 3  $I_1 = I_3 + I_6 = 22,5 \text{ мА}$ , для узла 4  $I_2 = I_4 - I_1 = -14 \text{ мА}$ . Направление тока  $I_2$  противоположно указанному на схеме.

Вычислим токи ветвей цепи, схема которой показана на рис. 3.8, если  $E_1 = 48 \text{ В}$ ,  $E_2 = 12 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ мА}$ ,  $R_1 = R_2 = 4 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 2 \text{ кОм}$ .

Схема имеет только два узла. Один из них примем за базу. Членов с общей проводимостью нет, и из уравнения (3.7) получаем

$$g_{1.1} U_1 = J_{1.1}. \quad (3.10)$$

Пусть  $U_2 = 0$ . Собственная проводимость

$$g_{1.1} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Узловой ток

$$J_{1.1} = E_1/R_1 - E_2/R_2 - J_3 = 8 \text{ мА}.$$

Узловое напряжение находим из формулы (3.10):

$$U_1 = J_{1.1}/g_{1.1} = 8 \text{ В}.$$

Считая, что токи ветвей направлены к узлу 1, имеем:

$$I_1 = (E_1 - U_1)/R_1 = 10 \text{ мА}; \quad I_2 = (-E_2 - U_1)/R_2 = -5 \text{ мА};$$

$$I_3 = U_{2.1}/R_3 = (0 - U_1)/R_3 = -4 \text{ мА}.$$

(Минус при  $I_2$  и  $I_3$  указывает на то, что эти токи направлены от узла 1 к узлу 2.)

1. В какой последовательности нумеруются узлы, если в цепи есть идеальный источник напряжения?

2. Запишите узловые уравнения для цепи, в которой узлов: а) четыре; б) два.

3. Для цепи, схема которой показана на рис. 3.9, запишите выражения для  $g_{1.1}$ ,  $J_{1.1}$ ,  $U_1$ .

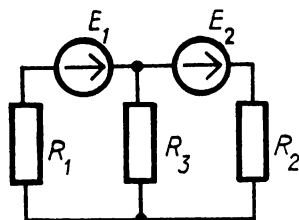


Рис. 3.9

### 3.5. Расчет цепей методом эквивалентного источника

Пусть для схемы, приведенной на рис. 3.10, а, требуется определить зависимость  $I_2$  ( $E_2$ ), если  $E_1 = 3,6 \text{ В}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ .

Схема упростится, если заменить первую и третью ветви одним эквивалентным источником. Определим  $E_{\text{эк}}$  и  $R_{\text{эк}}$ . Для этого отключим вторую

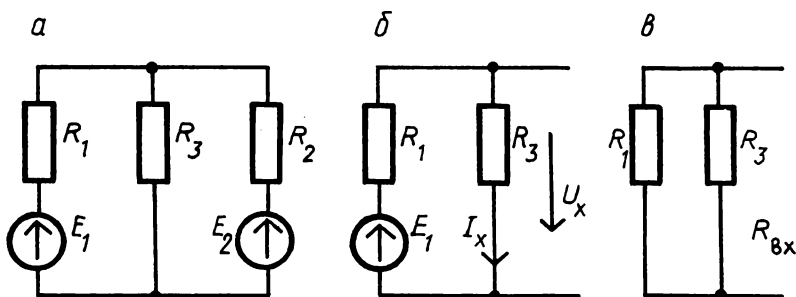


Рис. 3.10

ветвь (рис. 3.10, б): ток  $I_x = E_1 / (R_1 + R_3) = 0,4$  А, напряжение холостого хода  $U_x = R_3 I_x = E_{эк} = 2,4$  В.

Вычислим входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно разомкнутых зажимов (рис. 3.10, в):

$$R_{вх} = R_1 R_3 (R_1 + R_3) = 2 \text{ Ом}$$

(или через ток короткого замыкания второй ветви (рис. 3.11)  $I_k = E_1 / R_1 = 1,2$  А,  $R_{вх} = U_x / I_k = 2$  Ом).

Начертим схему с эквивалентным источником (рис. 3.12, а), где  $E_{эк} = U_x = 2,4$  В,  $R_{эк} = R_{вх} = 2$  Ом, и добавим ранее отключенную вторую ветвь.

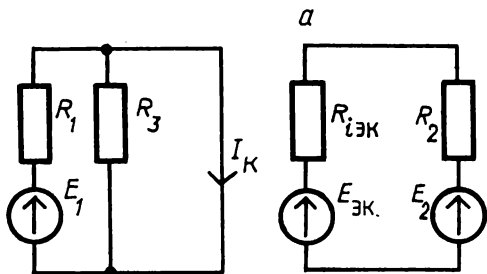


Рис. 3.11

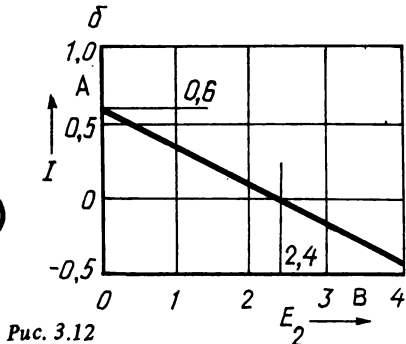


Рис. 3.12

По закону Ома

$$I_2 = \frac{E_{эк} - E_2}{R_{эк} + R_2} = \frac{E_{эк}}{R_{эк} + R_2} - E_2 \frac{1}{R_{эк} + R_2} = 0,6 - 0,25 E_2.$$

При  $E_2 = 0$  ток  $I_2 = 0,6$  А, при  $I_2 = 0$   $E_2 = 2,4$  В.

Построим точки на графике (рис. 3.12, б) и проведем через них прямую — вольт-амперную характеристику, т.е. график зависимости  $I_2 (E_2)$ .

Определим ток  $I_3$  в цепи (рис. 3.10, а), если:

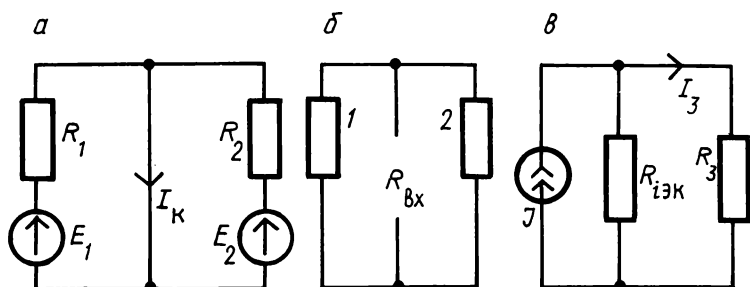


Рис. 3.13

$E$	1	2	$R$	1	2	3
$V$	12	18	Ом	4	6	21,6

Исключив ветвь с  $R_3$ , заменим оставшуюся часть схемы эквивалентным источником тока. Внутренний ток его равен току ветви при коротком замыкании (рис. 3.13, а):

$$I_{\kappa} = E_1/R_1 + E_2/R_2 = 6 \text{ A.}$$

Входное сопротивление пассивной цепи (рис. 3.13, б)

$$R_{\text{вх}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2,4 \text{ Ом.}$$

В эквивалентной схеме (рис. 3.13, в)

$$I_3 = J \frac{R_{i \text{ эк}}}{R_{i \text{ эк}} + R_3} = 0,6 \text{ A.}$$

1. Для решения каких задач целесообразно применять метод эквивалентного источника?
2. Объясните два способа вычисления  $R_{i \text{ эк}}$ .
3. Когда эквивалентный источник следует представлять источником напряжения и когда — источником тока?

\* \*  
\*

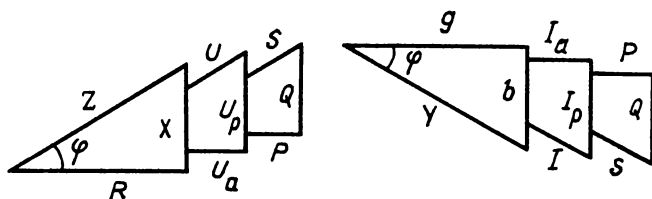
Методы контурных токов, узловых напряжений, эквивалентного источника, формулу Ома для ветви с ЭДС, теоремы компенсации, об активном двухполюснике и другие можно применить и для расчета схем при переменных токах, если записать напряжения, токи, сопротивления не действительными, а комплексными числами. Об этом пойдет речь в следующем разделе.

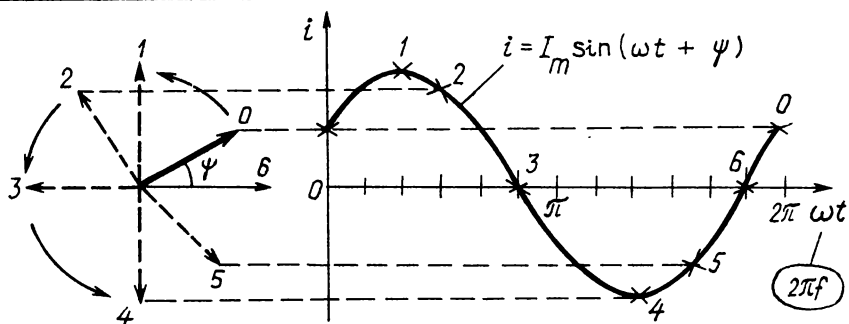
## II. ЦЕПИ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭДС

В зависимости от типа элемента электрические величины — напряжение и сопротивление, ток и проводимость, мощность — могут быть активными, индуктивными или емкостными. При сочетании элементов они становятся активными, реактивными либо комплексными. В приведенной ниже таблице даются буквенные обозначения этих величин.

основное	Наименование величины					
	дополнительное					
	активн.	индуктивн.	емкостн.	реактивн.	полн.	комплексн.
Сопротивление	$R$	$X_L$	$X_C$	$X$	$Z$	$\underline{Z}$
Напряжение	$U_a$	$U_L$	$U_C$	$U_p$	$U$	$\underline{U}$
Проводимость	$g$	$b_L$	$b_C$	$b$	$Y$	$\underline{Y}$
Ток	$I_a$	$I_L$	$I_C$	$I_p$	$I$	$\underline{I}$
Мощность	$P$	$Q_L$	$Q_C$	$Q$	$S$	$\underline{S}$

Активным и реактивным величинам соответствуют (в масштабе) катеты прямоугольного треугольника, приведенного ниже, а полным — гипотенуза. Напротив катета (реактивной величины) расположен угол  $\varphi$ , равный разности фаз тока и напряжения. Соотношения величин выражаются формулами прямоугольного треугольника.





$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt$$

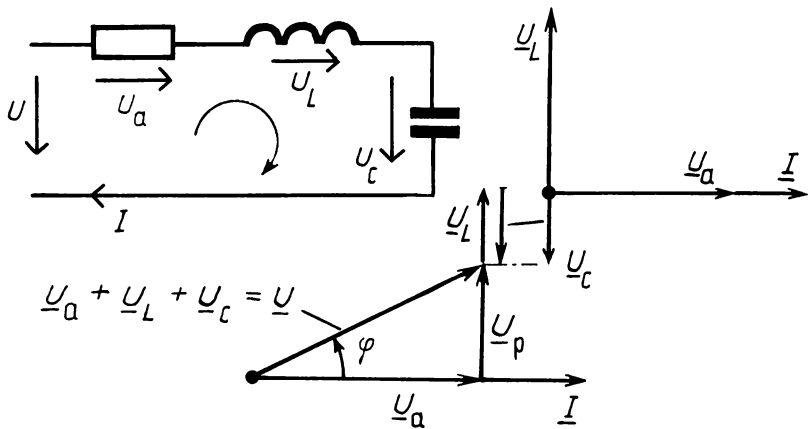
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

$$\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = I_m^2 \frac{T}{2}$$

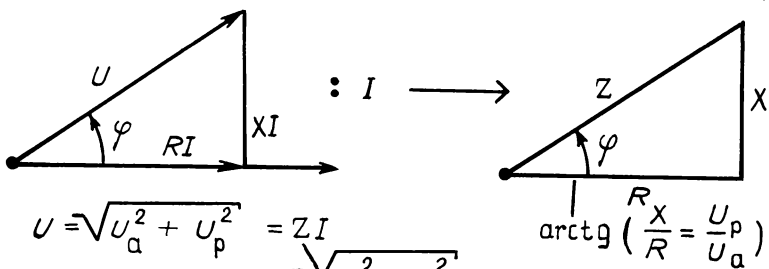
$$I = I_m / \sqrt{2}$$

$u_a = Ri$	$u_L = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du_C}{dt}$
$R$	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
$U / R$	$U / X_L$	$U / X_C$

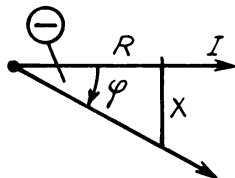
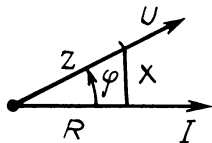
Мнемосхема 4



$$\underline{U}_p = \underline{U}_L - \underline{U}_c = X_L I - X_C I = (X_L - X_C) I = X I$$

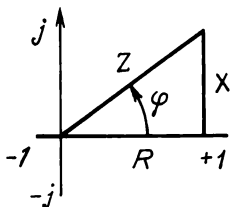


$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = Z I = \sqrt{R^2 + X^2} I$$



$$R = Z \quad U \quad I$$

$\varphi = 0$   
 $X_L = X_C$

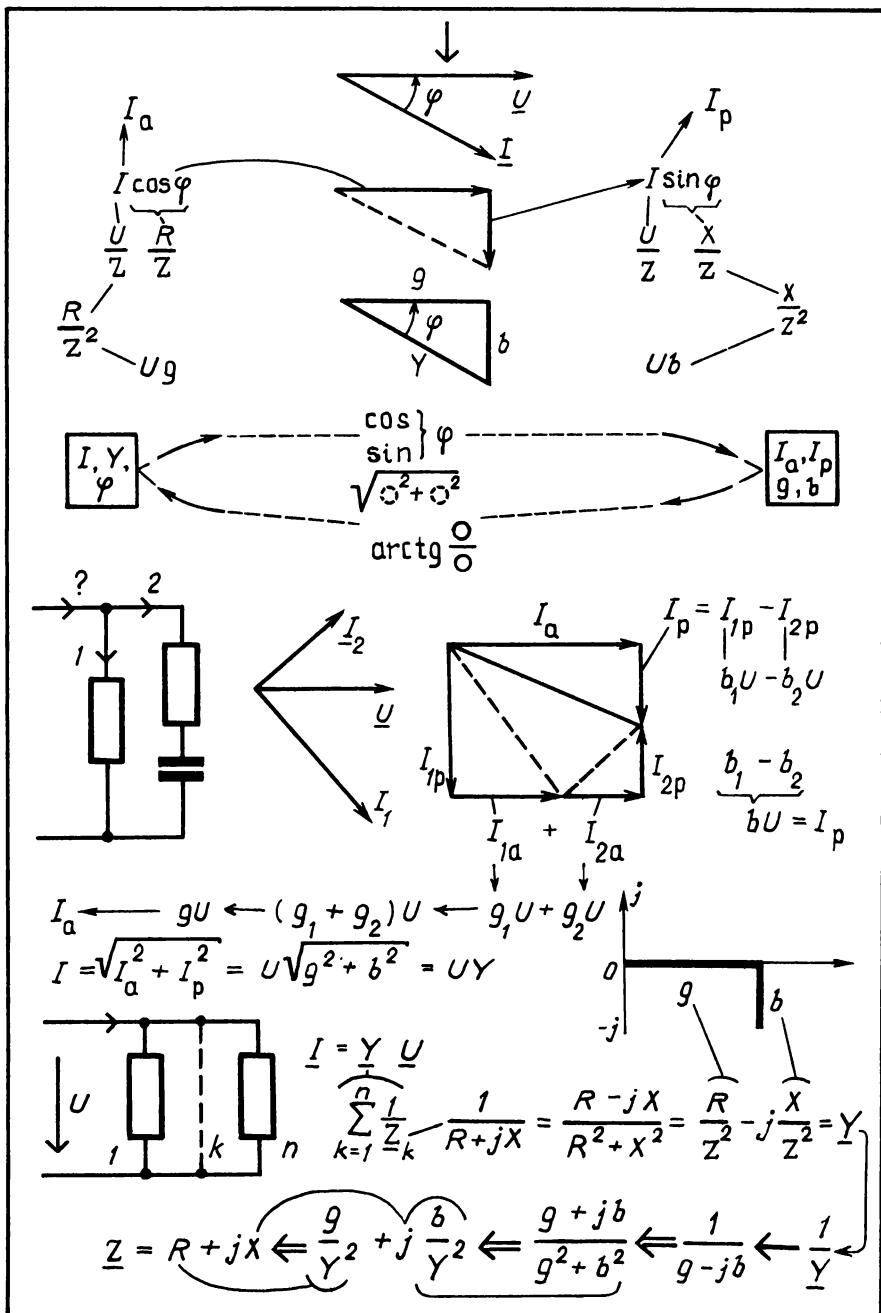


$$\underline{Z} = \begin{cases} R + jX \\ Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi \\ Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ Z e^{j\varphi} \\ Z \angle \varphi \end{cases}$$

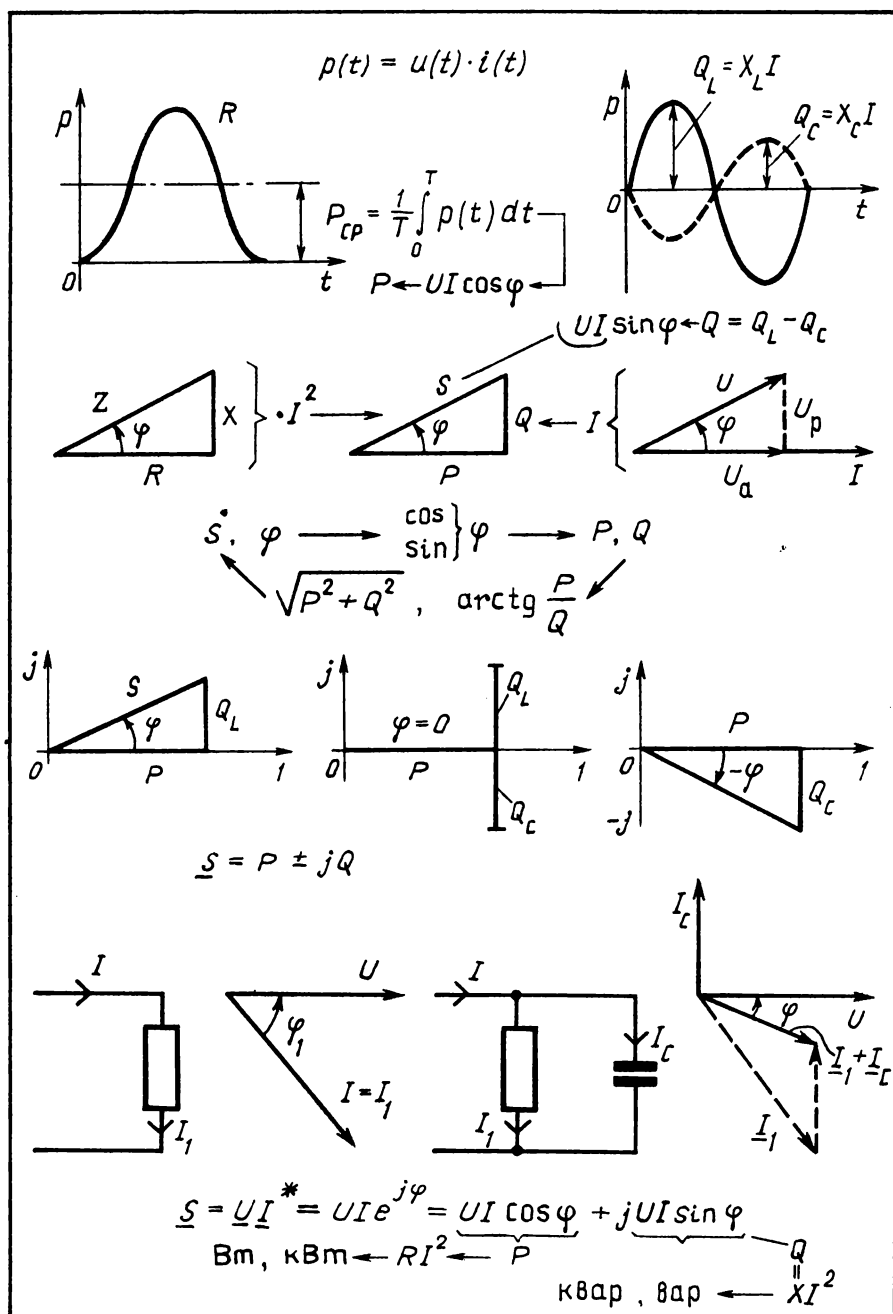
$$\underline{U} e^{j\psi_u} \rightleftharpoons U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u)$$

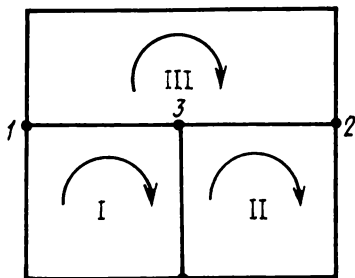
$$\underline{I} = \begin{cases} I e^{j\psi_i} \\ I \angle \psi_i \\ 5 \angle 30^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Мнемосхема 5



Мнемосхема 6





$$Z_{1,1}I_{1,1} - Z_{1,2}I_{2,2} - Z_{1,3}I_{3,3} = E_{1,1}$$

$$-Z_{2,1}I_{1,1} + Z_{2,2}I_{2,2} - Z_{2,3}I_{3,3} = E_{2,2}$$

$$-Z_{3,1}I_{1,1} - Z_{3,2}I_{2,2} + Z_{3,3}I_{3,3} = E_{3,3}$$

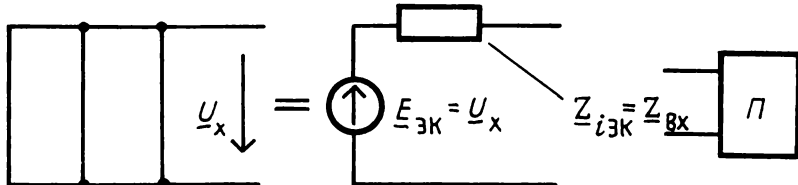
$$Y_{1,1}U_1 - Y_{1,2}U_2 - Y_{1,3}U_3 = J_{1,1}$$

$$-Y_{2,1}U_1 + Y_{2,2}U_2 - Y_{2,3}U_3 = J_{2,2}$$

$$-Y_{3,1}U_1 - Y_{3,2}U_2 + Y_{3,3}U_3 = J_{3,3}$$

$$[Z] [I] = [E]$$

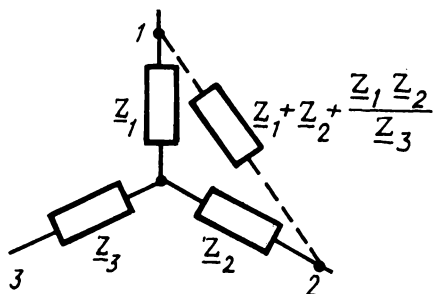
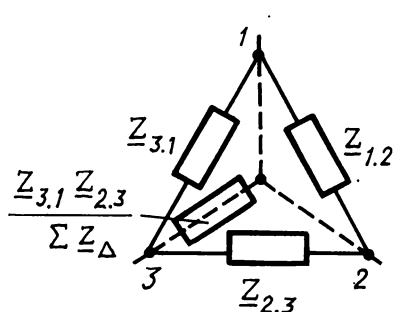
$$[Y] [U] = [J]$$



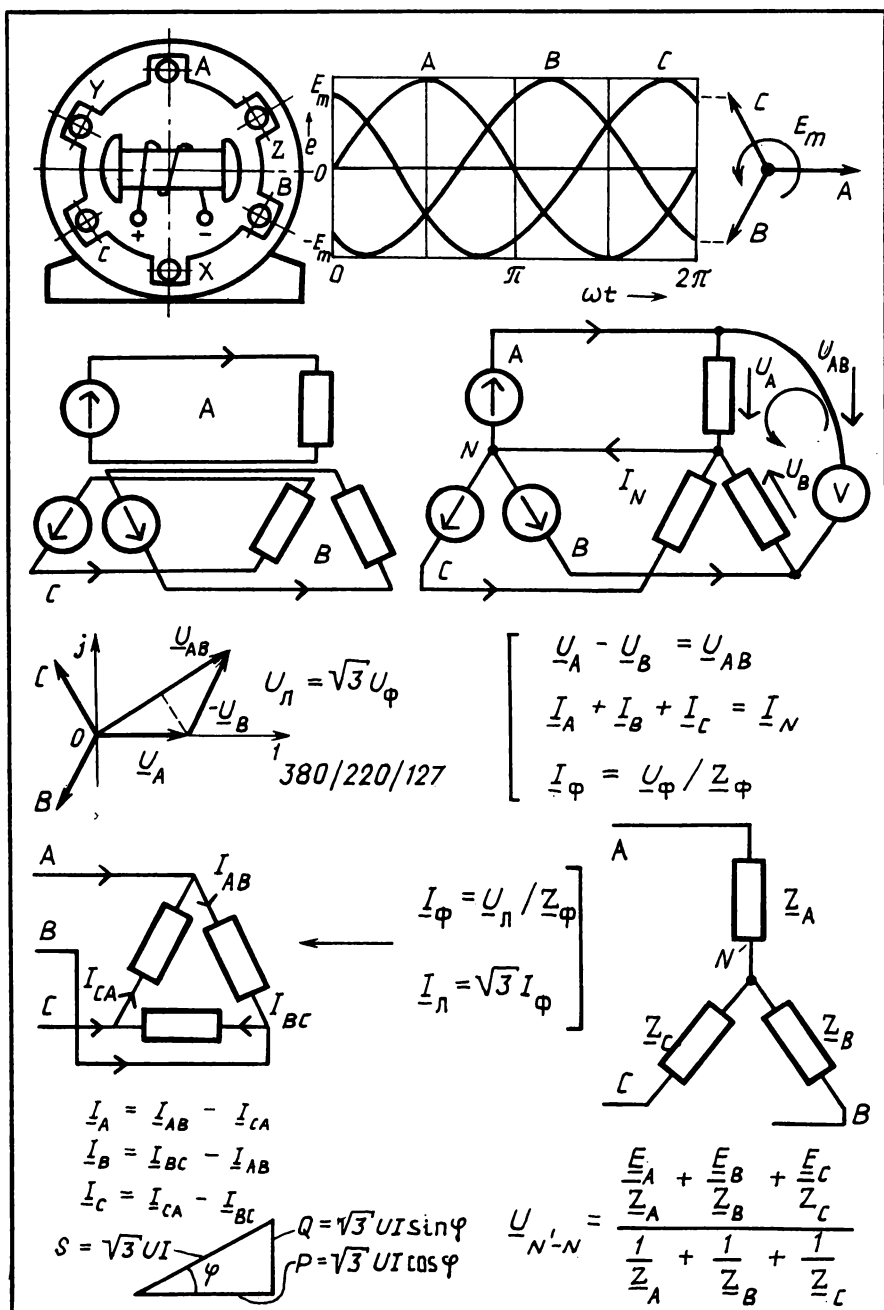
$$S = UI^* = P + jQ$$

$$\sum P_n = \sum P_{np}$$

$$\sum Q_n = \sum Q_{np}$$



Мнемосхема 8



Мнемосхема 9

## 4. Синусоидальный ток

### 4.1. Основные понятия

Переменный ток, который описывается синусоидальной (или косинусоидальной) функцией, называется *синусоидальным током*. Его максимальное значение (амплитуду) обозначают прописной буквой латинского алфавита с индексом  $m$  (max):  $I_m$ . Другие значения, называемые *мгновенными*, вычисляют по формуле

$$i = I_m \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — аргумент (или фаза).

Пусть, например,  $I_m = 1$  А. Тогда ток численно равен значениям  $\sin \alpha$ . Откладывая по оси абсцисс отрезки, соответствующие углам, кратным  $\pi/6$ , а по оси ординат значения  $\sin \alpha = 0, \pm 0,5, \pm 0,865, \pm 1$ , построим синусоиду (рис. 4.1) — график функции тока за один период  $T$ . Величина, обратная периоду, называется *частотой*:  $f = 1/T$ .

Электрическая энергия вырабатывается и передается при частоте 50 Гц. В авиации используют 400 Гц, в электротермических установках — от 500 Гц до 50 МГц. Электрифицированный транспорт работает на частоте 25 и 16,66 Гц. Частоты от 20 Гц до 10 кГц называют *низкими*, от 10 кГц до 100 МГц — *высокими*, от 100 МГц и выше — *сверхвысокими*. В технике связи используется весь диапазон частот.

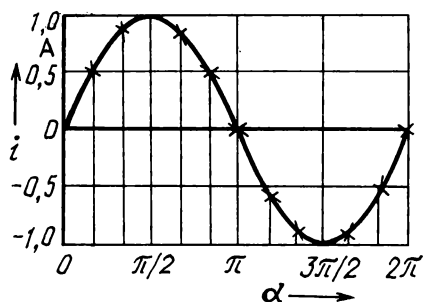


Рис. 4.1

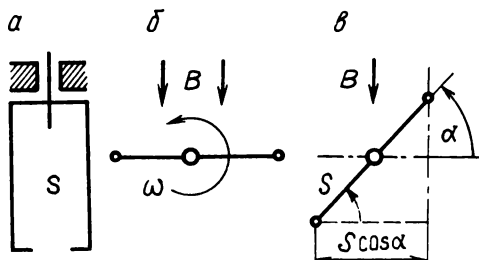


Рис. 4.2

Получение синусоидальных ЭДС и тока рассмотрим на примере витка площадью  $S$ , который вращается в равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 4.2, а, б). В соответствии с законом электромаг-

нитной индукции в витке наводится ЭДС  $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ .

Площадь, которую пронизывает магнитный поток, зависит от положения витка относительно вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 4.2, в). Она равна  $S \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол, образованный плоскостью витка и горизонталью, проведенной через его ось вращения.

Умножив индукцию на площадь, будем иметь магнитный поток  $BS \cos \alpha$ . Его максимальное значение  $\Phi_m = BS$ , а угол  $\alpha = \omega t$ . Получим

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t .$$

Подставим выражение для магнитного потока под знак производной:

$$e = \frac{-d(\Phi_m \cos \omega t)}{dt} = \omega \Phi_m \sin \omega t .$$

Здесь максимальное значение ЭДС (ее амплитуда)  $\omega \Phi_m = E_m$ , сама ЭДС  $e = E_m \sin \omega t$  изменяется по синусоидальному закону. Если замкнуть концы витка на сопротивление, возникает синусоидальный ток

$$i(t) = I_m \sin \omega t .$$

На этом принципе основана работа генераторов с частотой 50 и 400 Гц. Синусоидальные ЭДС более высоких частот получают от полупроводниковых генераторов, основу которых составляет резонансный контур, образованный индуктивностью и емкостью.

Так как  $\alpha = \omega t$  зависит от времени, то и ток является функцией времени. Значения тока (напряжения) в любой момент времени называют *мгновенными значениями*. Так, для момента времени, соответствующего углу  $\alpha = \pi/6$ , мгновенное значение тока равно 0,5 А (см. рис. 4.1). На протяжении одного периода можно взять множество мгновенных значений; их обозначают строчными буквами латинского алфавита:  $i, u, e$ . На бесконечно малом промежутке времени  $\Delta t$  мгновенное значение можно считать величиной постоянной, следовательно, к нему применимы формулы постоянного тока, включая и законы Кирхгофа:  $u = Ri$ ,  $\sum i = 0$ ,  $\sum u = \sum e$ .

1. Какой ток называется синусоидальным? Что такое период, частота, мгновенные и амплитудные значения? Как они обозначаются?

2. Запишите последовательность формул и по ним объясните, почему в витке, вращающемся в магнитном поле, ЭДС изменяется по синусоидальному закону.

#### 4.2. Синусоида и вращающийся радиус-вектор. Угловая частота.

Фаза, начальная фаза и разность фаз

Синусоидальную функцию можно задать уравнением, а по уравнению построить график. Есть и другой путь — изобразить синусоиду вращающимся радиусом-вектором.

Пусть длина вектора в принятом масштабе соответствует амплитуде  $E_m$ , например 1 см соответствует 1 В (рис. 4.3). Конец вектора закреплен так, что сам вектор может вращаться в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, с угловой скоростью  $\omega$ . Угол  $\alpha = \omega t$  непрерывно изменяется. Проекция вращающегося вектора 1—1' на вертикальную ось равна произведению длины вектора  $E_m$  на  $\sin \alpha$ , т.е. она изменяется по закону синуса:  $e = E_m \sin \omega t$ .

На горизонтальной оси откладываем в масштабе отрезки, кратные времени  $t$  или соответствующим этому времени углам  $\omega t$ . Проводя перпендикуляры, равные проекциям вращающегося вектора, и соединяя их концы плавной кривой, получаем синусоиду  $e(t)$ .

Синусоидальную функцию времени — напряжение  $u(t)$ , ток  $i(t)$  или ЭДС

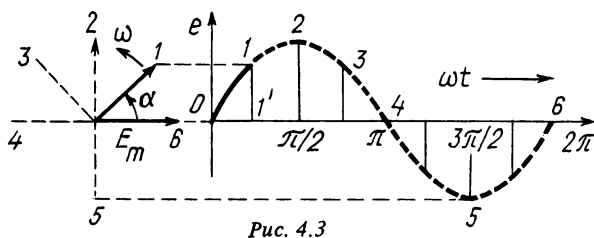


Рис. 4.3

$e(t)$  — можно представить вращающимся радиусом-вектором. Длина его равна амплитуде синусоиды.

Вектор, изображающий синусоидальную функцию времени, будем обозначать так же, как и комплексное число:  $\underline{U}, \underline{I}, \underline{E}$  (ГОСТ допускает также обозначение точкой сверху:  $\dot{I}, \dot{U}, \dot{E}$ ).

Угол  $\alpha = \omega t$ , определяющий мгновенное значение синусоидальной функции, получил название *фазового угла* или *фазы*. Фазовый угол за период  $T$  может принимать любые значения от 0 до  $2\pi$ .

Ток — величина, переменная во времени:  $i = f(t)$ . Но поскольку синусоидальная функция — это функция угла, время выражают через угол и говорят не об изменении времени, а об изменении угла  $\alpha = \omega t$ , где  $\omega$  — скорость изменения фазового угла.

Итак, изменение тока во времени определяется угловой скоростью вектора или витка. Эту скорость можно определить, измерив время, за которое виток повернулся на угол  $\alpha$ :

$$\omega = \alpha / t .$$

(Так же определяют и скорость движущегося тела:  $v = s/t$ , где  $s$  — путь, пройденный телом за время  $t$ .)

Примем время  $t$  равным периоду. Виток за один период повернулся на угол  $\alpha = 2\pi$ , и угловая скорость  $\omega = 2\pi/T$ . Здесь  $1/T = f$ , тогда  $\omega = 2\pi f$ . Эта величина называется *угловой частотой тока*. Для промышленной частоты 50 Гц  $\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$ .

Уравнение  $i = I_m \sin \omega t$  справедливо в частном случае, когда начало отсчета  $t_0$  совпадает с нулевым значением функции. Но в общем случае на оси времени можно выбрать любой момент отсчета  $t_1$ . Из графика, приведенного на рис. 4.4, видно, что при  $t = 0$  мгновенное значение тока  $i = I_m \sin \psi$ , где  $\psi$  — угол, который соответствует положению вектора в момент времени, принятый за начало отсчета. В общем виде для любого момента времени уравнение тока имеет вид

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi) .$$

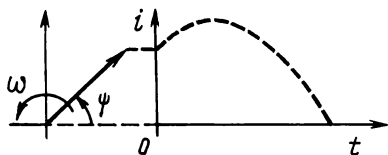


Рис. 4.4

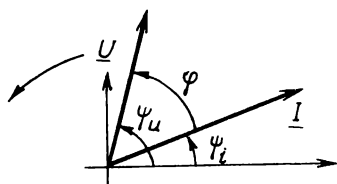


Рис. 4.5

Угол  $\psi$ , определяющий значение ЭДС или тока в начальный момент времени  $t = 0$ , получил название *начальной фазового угла* или *начальной фазы*. Вращающийся радиус-вектор, изображающий синусоиду, следует расположить под углом  $\psi$  к горизонтали.

Пусть известны начальные фазы напряжения  $\psi_u$  и тока  $\psi_i$  (рис. 4.5). Векторы образуют угол  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ . Он называется *разностью фаз*. Оба вектора вращаются. Один из них приходит в точку наблюдения раньше, другой отстает на угол  $\varphi$ . Говорят, что напряжение опережает ток на угол  $\varphi$ .

Если начальные фазы обоих векторов равны между собой, то разность фаз  $\varphi = 0$ . Векторы в этом случае располагаются на одной линии, а синусоидальные функции имеют одновременно нули и максимумы, т.е. ток и напряжение совпадают по фазе.

1. Почему вращающийся радиус-вектор соответствует синусоидальной функции? С какой скоростью он вращается? В какую сторону?

2. Что такое фаза, начальная фаза, разность фаз? В каких единицах они измеряются?

3. Как вычислить угловую частоту тока? Чему она равна, если  $f = 500$  Гц?

1.1. Синусоидальный ток  $i(t) = 5 \sin(314t + \pi/4)$  А. Чему равны амплитуда, фазовый угол, начальная фаза, угловая частота?

1.2. Вычислите период  $T$ , если частота равна 50 Гц, 100 Гц, 1 кГц, 1 мГц.

1.3. Вычислите  $f$  и  $\omega$ , если  $T = 2$  мс.

#### 4.3. Действующее и среднее значения

Действующее значение переменного тока равно такому постоянному току, который на одном и том же сопротивлении за время  $T$  выделяет такое же количество теплоты, что и переменный ток за период.

За время  $T$  постоянный ток выделяет энергию  $RI^2 T$ . При переменном токе энергия за бесконечно малое время  $\Delta t$  равна  $Ri^2 \Delta t$ , а за период

$$\int_0^T Ri^2 dt.$$

По определению  $RI^2 T = R \int_0^T i^2 dt$ . Решив это равенство относительно  $I$ ,

получаем формулу для вычисления действующего значения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (4.1)$$

Действующее значение равно среднеквадратичному мгновенных значений за период. Подставив в формулу (4.1)  $I_m \sin \omega t$  и  $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$ , возьмем стоящий под корнем интеграл:

$$\frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} I_m^2 \left( \int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) = I_m^2 T/2$$

(интеграл от косинусоидальной функции за целое число периодов равен нулю). Чтобы не повторять этот вывод в дальнейшем, заметим, что

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = T/2; \quad \int_0^T i^2 dt = I_m^2 T/2. \quad (4.2)$$

Подставим выражения (4.2) в формулу (4.1):  $I = I_m / \sqrt{2}$ , т.е. действующее значение меньше амплитуды в  $\sqrt{2}$  раз.

Аналогично получаем действующие значения напряжения и ЭДС:

$$U = U_m / \sqrt{2}; \quad E = E_m / \sqrt{2}.$$

Амперметры, вольтметры проградуированы, как правило, на действующие значения. Так, если амперметр показывает 10 А, то амплитуда  $I_m = \sqrt{2} \cdot 10 = 14,1$  А; если вольтметр показывает 100 В, то  $U_m = \sqrt{2} \cdot 100 = 141$  В.

Среднее значение синусоидального тока определяют за полпериода:

$$I_{\text{ср}} = \frac{\int_0^{T/2} i dt}{T/2}.$$

Подставим сюда  $i = I_m \sin \omega t$ , а  $T/2$  заменим фазовым углом  $\pi$ :

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi} I_m (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,637 I_m.$$

Аналогично определяют среднее значение ЭДС и напряжения:

$$U_{\text{ср}} = 0,637 U_m; \quad E_{\text{ср}} = 0,637 E_m.$$

1. Заучите определение действующего значения. Как оно обозначается?

2. Выведите формулы для действующего и среднего значений.

2.1. По уравнению  $i(t) = 2 \sin(2512t - \pi/6)$  постройте график. Изобразите синусоиду вращающимся радиусом-вектором.

◇ При  $t = 0$

$$i(0) = 2 \sin(-\pi/6) = -1 \text{ А}.$$

Ток  $i(t) = 0$ , если равна нулю фаза, т.е.  $2512t = \pi/6$ . Отложим эти две точки на графике (рис. 4.6). Далее ведем отсчет от начала положительной полуволны: через  $\pi/2$  ток  $I_m = 2$  А, через  $\pi$  он равен нулю и т.д. По точкам проводим синусоиду. Вычисляем частоту и период:

$$f = \omega / (2\pi) = 400 \text{ Гц}; \quad T = 1/f = 0,0025 \text{ с} = 2,5 \text{ мс}.$$

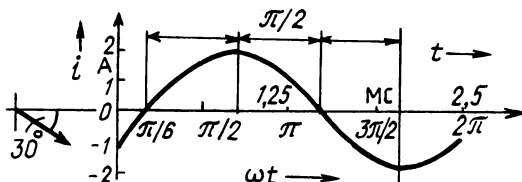


Рис. 4.6

Выбираем шкалу времени: углу  $\omega t = 2\pi$  соответствует время 2,5 мс. Длина вектора в принятом масштабе равна 8 мм; располагаем его под углом  $30^\circ$  к горизонтали, тогда проекция вектора на вертикальную ось равна мгновенному значению при  $t = 0$ .  $\square$

2.2. Определите разность фаз:

$$u(t) = 100 \sin(157t + \pi/6); \quad i(t) = 5 \sin(157t - \pi/12).$$

2.3. Начертите две синусоиды, совпадающие на фазе; запишите уравнения. Изобразите синусоиды векторами (см. рис. 4.7).

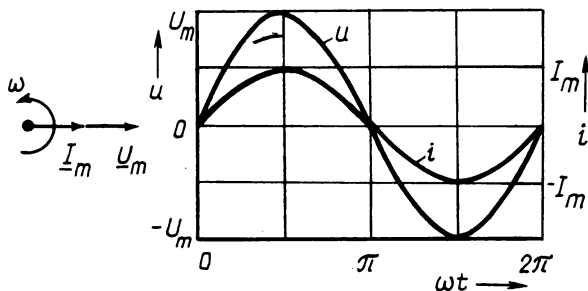


Рис. 4.7

#### 4.4. Цепи, содержащие один из элементов

Пусть синусоидальное напряжение  $U_m \sin \omega t$  подано на вход сопротивления. По закону Ома находим ток:

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t.$$

Сравним начальные фазы: обе они равны нулю. Синусоиды  $u(t)$ ,  $i(t)$  совпадают по фазе, а изображающие их векторы  $\underline{U}_m$ ,  $\underline{I}_m$  расположены на одной линии (см. рис. 4.7). В тот момент, когда  $\sin \omega t = 1$ , ток максимальный:  $I_m = U_m/R$ . Разделив обе части равенства на  $\sqrt{2}$ , получим знакомую формулу:  $I = U/R$ , только здесь  $I$ ,  $U$  — действующие значения.

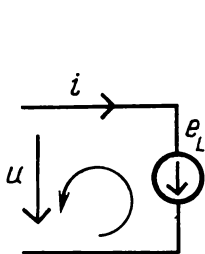


Рис. 4.8

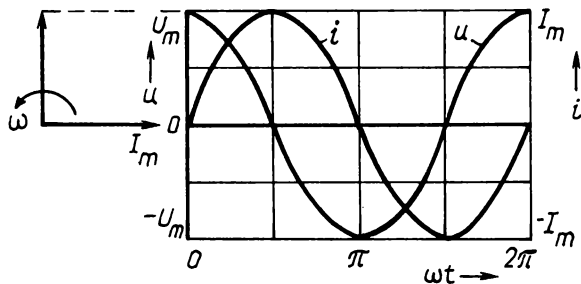


Рис. 4.9

Из курса физики известно явление самоиндукции. Направление ЭДС  $e_L$  совпадает с направлением тока (рис. 4.8). Обходим контур в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки:

$$u = -e_L = +L \frac{di}{dt}.$$

Подставляя  $i = I_m \sin \omega t$ , находим

$$u(t) = \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (4.3)$$

По этим уравнениям строим графики зависимостей  $u$  и  $i$  от  $t$  и соответствующие им вращающиеся радиусы-векторы (рис. 4.9). Разность фаз  $\pi/2$ , вектор напряжения направлен вверх, он опережает вектор тока.

Заметим, что в формуле (4.3) появилось произведение  $\omega L$ . Оно называется *индуктивным сопротивлением* и обозначается  $X_L$ .

Из формулы (4.3) при  $\sin(\omega t + \pi/2) = 1$  амплитудное значение

$$U_m = X_L I_m.$$

Разделим обе части равенства на  $\sqrt{2}$  и запишем через действующие значения:  $I = U/X_L$ .

Индуктивное сопротивление  $X_L$  принципиально отличается от активного  $R$ . В простейшем представлении активное сопротивление — свойство кристаллической решетки металла препятствовать движению свободных электронов. Понятие "индуктивное сопротивление" позволяет количественно учесть влияние ЭДС самоиндукции на ток. Оно связывает между собой амплитуды (или действующие значения) напряжения и тока, но не мгновенные значения. Мгновенное значение индуктивного напряжения  $u_L = L \frac{di}{dt}$  пропорционально

не току, а скорости его изменения во времени  $di/dt$ . Производная от синусоидальной функции представляет собой синусоиду, смещенную по оси времени влево на четверть периода.

Заряд  $q = Cu$ ; ток как изменение заряда во времени  $dq/dt$  при начальной фазе напряжения, равной нулю,

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt}.$$

Возьмем производную;  $\cos \omega t$  заменим на  $\sin(\omega t + \pi/2)$ . В результате

$$i = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (4.4)$$

Сравним начальные фазы напряжения и тока (0 и  $\pi/2$ ). Ток опережает напряжение на  $\pi/2$ . Если вектор  $\underline{U}$  расположить по оси абсцисс (рис. 4.10), то вектор  $\underline{I}$  следует направить по вертикали.

Спроецируем векторы на вертикальную ось; через отрезки, кратные  $\pi/2$ , отметим точки максимумов, нулевые точки. Проведем синусоиды  $u(t)$ ,  $i(t)$ .

Из выражения (4.4) найдем амплитуду тока:

$$I_m = \omega C U_m.$$

Перейдем к действующим значениям, разделив обе части этого равенства на  $\sqrt{2}$ . Запишем его в виде

$$I = \frac{U}{1/(\omega C)}.$$

В знаменателе  $1/(\omega C) = X_C$  — емкостное сопротивление. Окончательно получим  $I = U/X_C$ .

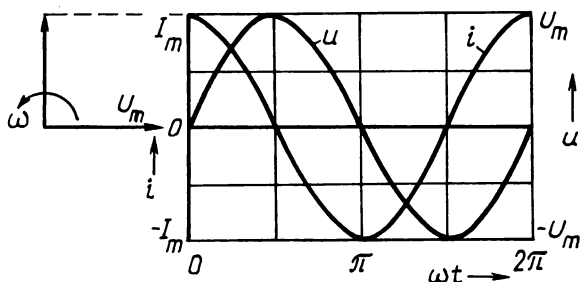


Рис. 4.10

Заряженный конденсатор стремится разрядиться в направлении, обратном тому, в котором он был заряжен. Между его обкладками возникает ЭДС, препятствующая его дальнейшей зарядке. Понятие "емкостное сопротивление" позволяет количественно учесть влияние возникающей ЭДС на ток.

1. Выясните математически, как ориентированы векторы  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$  в цепи: а) с активным сопротивлением; б) с индуктивностью; в) с емкостью. Начертите для каждого случая графики зависимости  $u$  и  $i$  от  $t$ .

2. Заучите формулы для нахождения индуктивного и емкостного сопротивлений. Как они зависят от частоты  $f$ ?

3.1. Чему равны  $U$  и  $U_{\text{ср}}$ , если  $U_m = 100 \text{ В}$ ?

3.2. Вычислите  $I_m$  и  $I_{\text{ср}}$ , если  $I = 1 \text{ А}$ .

#### 4.5. Векторные диаграммы

Графики (временные диаграммы) синусоидальных функций позволяют наглядно представить их амплитуды и начальные фазы. Однако при расчетах электрических цепей над этими функциями приходится выполнять математические операции. Чтобы сложить графически (перестраивая диаграммы) или аналитически (преобразовывая уравнения синусоид) только две функции, например  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ , понадобится много времени. Если же изобразить синусоидальные функции векторами, то операции над синусоидами сведутся к графическому сложению или вычитанию векторов.

Так как для всех синусоидальных функций действующие значения меньше амплитудных в  $\sqrt{2}$  раз, то на векторной диаграмме можно строить векторы, модули которых в масштабе равны действующим значениям. Один из векторов можно расположить произвольно, но остальные векторы по отношению к нему будут строго ориентированы. Это видно на векторных диаграммах, состоящих только из двух векторов. Для сложных схем векторные диаграммы строят по уравнениям Кирхгофа.

Так как напряжения на различных элементах не совпадают по фазе, их надо различать. В цепи с активным сопротивлением напряжение совпадает по фазе с током. Такое напряжение называют *активным* ( $\underline{U}_a$ ). В цепи с индуктивностью напряжение опережает ток на  $\pi/2$ , это индуктивное напряжение ( $\underline{U}_L$ ). Емкостное напряжение ( $\underline{U}_C$ ) отстает от тока на  $\pi/2$ .

1. В чем различие временной и векторной диаграмм? Почему модули векторов могут быть равны действующим значениям?

2. Покажите на диаграмме  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$  и запомните их расположение относительно  $\underline{I}$ .

4.1. Пусть  $L = 0,2$  Гн,  $C = 32$  мкФ. Вычислите индуктивное и емкостное сопротивление на частоте:

а) 50 Гц.

♦ Находим:  $X_L = \omega L = 62,8$  Ом;  $X_C = 1/(\omega C) = 100$  Ом; □

б) 500 Гц [ 688 Ом, 10 Ом ] .

4.2. Катушка с индуктивностью  $L = 175$  мГн и весьма малым активным сопротивлением включена на напряжение 110 В с частотой 100 Гц. Запишите выражения для  $u(t)$ ,  $i(t)$ . Постройте графики и векторную диаграмму, приняв начальную фазу напряжения  $\psi_u = \pi/4$ .

♦ Находим угловую частоту и индуктивное сопротивление:  $\omega = 2\pi f = 628 \text{ с}^{-1}$ ,  $X_L = \omega L = 110$  Ом. Действующее значение тока  $I = U/X_L = 1$  А. Уравнение для мгновенных значений напряжения

$$u(t) = 110\sqrt{2} \sin(628t + \pi/4) \text{ В.}$$

Так как цепь с индуктивностью, то ток отстает от напряжения на  $\pi/2$ . Начальная фаза  $\psi_i = \pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$ . Уравнение для мгновенных значений тока

$$i(t) = 1,41 \sin(628t - \pi/4) \text{ А.}$$

По условию вектор напряжения расположен под углом  $45^\circ$  к горизонтальной оси. Под углом  $90^\circ$  к вектору напряжения проведем вектор тока. Проекции векторов на вертикальную ось дают мгновенные значения при  $t = 0$ . Через  $\pi/4$  от начала отсчета, в момент времени  $t_1$ , напряжение достигает максимума, а ток становится равным нулю. От точки  $t_1$  откладываем отрезки, пропорциональные  $T/4$ , на концах которых известны ординаты ( $\pm U_m$ ,  $\pm I_m$  или нуль). Проведем синусоиды (рис. 4.11). □

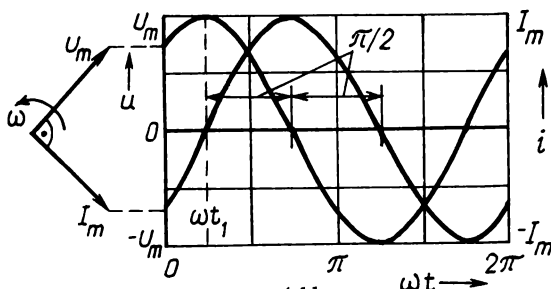


Рис. 4.11

4.3. На конденсаторе емкостью  $C = 3,62$  мкФ измерены напряжение  $U = 220$  В и частота  $f = 400$  Гц. Запишите выражения для мгновенных значений напряжения и тока, приняв начальную фазу напряжения равной  $-\pi/6$ .

♦ Находим:  $\omega = 2\pi f = 2512 \text{ с}^{-1}$ ,  $X_C = 1/(\omega C) = 110$  Ом.

Вычисляем действующее, амплитудные и мгновенные значения тока и напряжения:

$$I = U/X_C = 2 \text{ A};$$

$$I_m = 2\sqrt{2} = 2,82 \text{ A}; \quad U_m = 220\sqrt{2} = 312 \text{ В};$$

$$U(t) = 312 \sin(2512t - \pi/6) \text{ В}; \quad i(t) = 2,82 \sin(2512t + \pi/3) \text{ А. } \square$$

## 5. Последовательное соединение элементов цепи

### 5.1. Условные положительные направления тока и напряжения.

Векторная диаграмма. Треугольник напряжений

Активное сопротивление, индуктивность и емкость соединены последовательно и подключены к источнику. ЭДС источника каждые полпериода изменяет направление. Чтобы записать уравнения Кирхгофа, надо одно из направлений ЭДС принять за положительное. Выберем его произвольно и укажем на схеме стрелкой (рис. 5.1, а). Направления остальных величин примем по аналогии с цепями постоянного тока: ток направлен от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом; направления входного напряжения  $u$  и напряжения участков  $u_a, u_L, u_C$  совпадают с условным положительным направлением тока (рис. 5.1, б). Вместо мгновенных значений можно использовать вращающиеся радиусы-векторы. Знак напряжения в уравнении Кирхгофа определим, сопоставив его условно-положительное направление на схеме с направлением обхода контура.

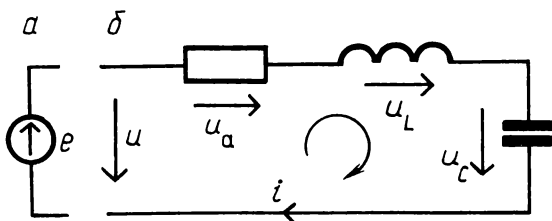


Рис. 5.1

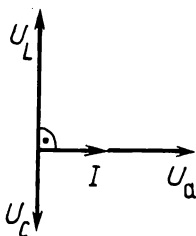


Рис. 5.2

Примем начальную фазу синусоиды тока равной нулю. Ей будет соответствовать вектор, направленный по горизонтальной оси (рис. 5.2). Покажем векторы напряжений. На участке с активным сопротивлением напряжение совпадает по фазе с током, вектор  $\underline{U}_a$  направлен параллельно вектору  $\underline{I}$ . На участке с индуктивностью напряжение опережает ток на  $\pi/2$ , следовательно, вектор  $\underline{U}_L$  направлен вверх относительно  $\underline{I}$ . На участке с емкостью напряжение отстает от тока на  $\pi/2$ , а вектор  $\underline{U}_C$  направлен вниз.

Вектор входного напряжения найдем из уравнения Кирхгофа. Обойдем контур по часовой стрелке (рис. 5.1, б):  $\underline{U}_a + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}$ . Чтобы сложить эти три вектора, к концу вектора  $\underline{U}_a$  надо "пристроить" вектор  $\underline{U}_L$ , а к концу вектора  $\underline{U}_L$  — вектор  $\underline{U}_C$  (рис. 5.3). Соединив начало координат (точку  $O$ ) с концом последнего вектора, найдем вектор  $\underline{U}$ . Длина вектора укажет значение входного напряжения, а угол  $\varphi$  — разность фаз между током и напряжением.

Векторы напряжений  $\underline{U}_L$  и  $\underline{U}_C$  направлены противоположно. Их разность называют *реактивным напряжением*:

$$U_L - U_C = U_p. \quad (5.1)$$

На векторной диаграмме (рис. 5.3) образовался прямоугольный треугольник — *треугольник напряжений*. Катеты его — активная  $U_a$  и реактивная  $U_p$

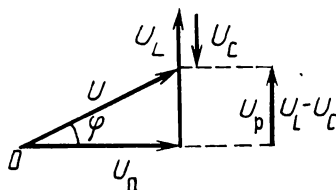


Рис. 5.3

составляющие напряжения, гипотенуза — входное напряжение  $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$ . Как проекции вектора напряжения  $U_a = U \cos \varphi$ ,  $U_p = U \sin \varphi$ .

1. Из каких соображений выбраны условные положительные направления тока и напряжений?

2. Начертите схему, показанную на рис. 5.1, б, запишите уравнение Кирхгофа, постройте векторную диаграмму.

3. Что такое реактивная составляющая напряжения?

4. Как образовался треугольник напряжений? Запишите формулы для вычисления  $U_a$ ,  $U_p$ ,  $U$  и  $\varphi$ .

## 5.2. Треугольник сопротивлений. Закон Ома. Разность фаз напряжения и тока

Вычитая из индуктивного напряжения  $X_L I$  емкостное  $X_C I$ , можно записать выражение (5.1) в виде  $U_p = (X_L - X_C) I$ . Разность  $X_L - X_C = X$  называется *реактивным сопротивлением*. Это алгебраическая величина. Знак ее зависит от соотношения  $X_L$  и  $X_C$ . Если  $X_L > X_C$ , то реактивное сопротивление индуктивное и положительное. При  $X_L < X_C$  реактивное сопротивление емкостное и должно быть записано с отрицательным знаком. Разделив теперь все стороны треугольника напряжений (рис. 5.4) на  $I$ , получим подобный треугольник (*треугольник сопротивлений*) с катетами  $R$  и  $X$ , гипотенузой которого является величина  $U/I = Z$  — *полное сопротивление*.

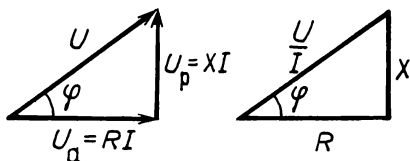


Рис. 5.4

По теореме Пифагора  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ . Если заданы  $Z$  и  $\varphi$ , можно вычислить:

$$R = Z \cos \varphi; X = Z \sin \varphi.$$

Из определения полного сопротивления следует закон Ома для последовательной цепи:

$$I = U/Z.$$

Разность фаз между током и напряжением (см. треугольник сопротивлений)

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Величина угла и знак его зависят от соотношения индуктивного и емкостного сопротивлений. Если  $X_L > X_C$ , то реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$  индуктивное, положительное. Угол  $\varphi$  положительный, он отсчитывается в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки (рис. 5.5, а). Ток отстает от напряжения. При  $X_L < X_C$  реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$  емкостное, отрицательное. Угол  $\varphi$  отрицательный, так как он отсчитывается в направлении движения часовой стрелки (рис. 5.5, б). Ток опережает напряжение. Если  $X_L = X_C$ , то реактивное сопротивление, а следовательно, и угол  $\varphi$  равны нулю, т.е. ток совпадает по фазе с напряжением (рис. 5.5, в). Это явление называется *резонансом напряжений*.

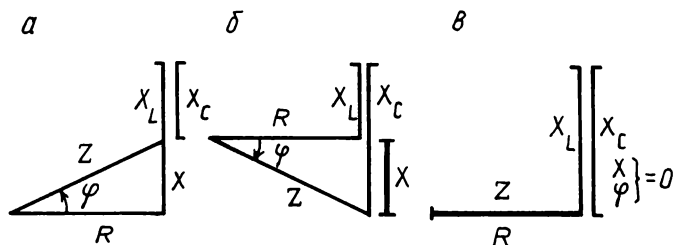


Рис. 5.5

В зависимости от соотношения  $R$  и  $X$  угол  $\varphi$  может принимать значения в пределах от  $\pi/2$  ( $X_L, R = 0$ ) до  $-\pi/2$  ( $X_C, R = 0$ ). Возможные положения вектора  $\underline{U}$  показаны на рис. 5.6.

1. Объясните, почему  $X$  — алгебраическая величина.

2. Как получен треугольник сопротивлений? Начертите его, запишите формулы для вычисления  $R$  и  $X$ ,  $Z$  и  $\varphi$ .

3. Какие значения может принимать угол  $\varphi$ ?

1.1. Пусть  $U = 100$  В. Вычислите активную и реактивную составляющие напряжения, если:

а)  $\varphi = \pi/6$ .

Находим:  $U_a = U \cos \varphi = 86,5$  В,  $U_p = U \sin \varphi = 50$  В; □

б)  $\varphi = \pi/3$  [ 50 В, 86,5 В ].

1.2. В условиях примера 1.1 постройте треугольники напряжений.

1.3. Для цепи, схема которой приведена на рис. 5.1, б,  $U_a = 30$  В,  $U_L = 60$  В,  $U_C = 20$  В. Постройте векторную диаграмму, определите входное напряжение.

◇ Векторную диаграмму строим по уравнению Кирхгофа (рис. 5.7). Находим:  $U_p = U_L - U_C = 40 \text{ В}$ ,  $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = 50 \text{ В}$ ,  $\varphi = \arctg (U_p/U_a) = 53^\circ$ . □

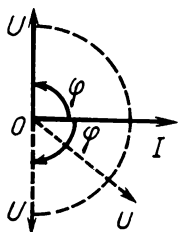


Рис. 5.6

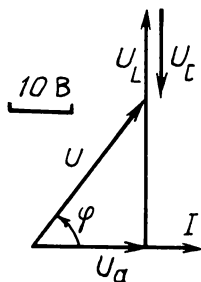


Рис. 5.7

1.4. Постройте векторную диаграмму, если  $U_a = 30 \text{ В}$ ,  $U_L = 20 \text{ В}$ ,  $U_C = 60 \text{ В}$ . Вычислите входное напряжение и угол  $\varphi$  [  $50 \text{ В}$ ,  $-53^\circ$  ].

### 5.3. Последовательное соединение нескольких приемников.

#### Топографическая векторная диаграмма

При последовательном соединении любого количества приемников векторы активного напряжения направлены одинаково (совпадают по фазе с током), поэтому их можно сложить:

$$U_a = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = RI,$$

где  $R$  — эквивалентное сопротивление, сумма всех активных сопротивлений.

Напряжения на индуктивных сопротивлениях опережают ток на  $\pi/2$ , на емкостных — отстают на угол  $\pi/2$ . Суммарное напряжение на реактивных элементах

$$U_p = I (\Sigma X_L - \Sigma X_C) = XI,$$

где  $X$  — эквивалентное реактивное сопротивление.

$$\text{Входное напряжение } U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I \sqrt{R^2 + X^2} = ZI.$$

Порядок расчета следующий: подсчитав эквивалентные активное  $R$  и реактивное  $X$  сопротивления, определим полное сопротивление  $Z$ . По закону Ома найдем ток. Относительно напряжения он сдвинут по фазе на угол  $\varphi = \arctg (X/R)$ .

Для неразветвленной цепи с несколькими участками можно построить топографическую векторную диаграмму. Каждая точка топографической диаграммы соответствует определенной точке электрической цепи. Этим она отличается от обычной векторной диаграммы. Чтобы точки диаграммы соответствовали точкам цепи, векторы напряжений на топографическую диаграмму наносят в той же последовательности, в какой обходят электрическую цепь. Направление обхода принимают противоположным направлению тока. За ис-

ходный вектор выбирают вектор тока и обходят контур, начиная с последнего элемента цепи.

Построим топографическую векторную диаграмму для схемы, приведенной на рис. 5.8. Нанесем на схему стрелки, указывающие положительные направления тока и напряжений; пронумеруем точки, начиная с последнего элемента и продвигаясь к началу схемы: 0, 1, 2, 3. Вычислим напряжения на отдельных участках:  $R_1 I = 60$  В,  $X_C I = 280$  В,  $R_2 I = 100$  В,  $X_L I = 160$  В. Пусть 1 мм соответствует 10 В. Тогда длина векторов  $U_{R1}$ ,  $U_C$ ,  $U_{R2}$ ,  $U_L$  равна соответственно 10; 6; 28 и 16 мм.

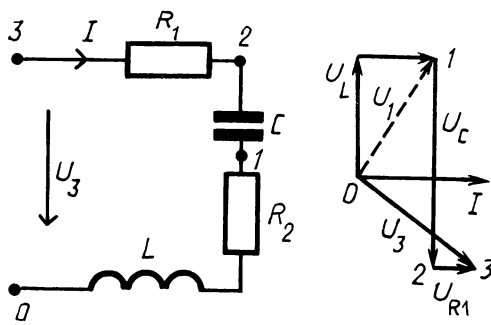


Рис. 5.8

Отложим вектор тока по горизонтальной оси; относительно его ориентиром векторы напряжений. Из точки  $O$  под углом  $90^\circ$  вверх (в сторону опережения) отложим вектор  $\underline{U}_L$ . От конца вектора  $\underline{U}_L$  параллельно вектору тока проведем вектор  $\underline{U}_{R2}$ . Конец его обозначим цифрой 1, как и на схеме. Вектор  $\underline{U}_1$  изображает напряжение на катушке (между точками 1 и 0 на схеме). Вектор  $\underline{U}_C$  отстает от вектора тока на  $\pi/2$ . Отложим его от точки 1 вниз, перпендикулярно к вектору тока. Из конца вектора  $\underline{U}_C$  (точка 2) параллельно вектору тока проведем вектор  $\underline{U}_{R1}$ . Геометрическая сумма векторов напряжений  $\underline{U}_3$  равна вектору входного напряжения.

Топографическая векторная диаграмма позволяет определить напряжение между любыми точками цепи и его фазу.

1. Почему при вычислении реактивного сопротивления емкостные сопротивления вычитаются, а не складываются?

2. В схеме известны сопротивления последовательно соединенных элементов. Как вычислить эквивалентное сопротивление: а) активное; б) реактивное; в) полное?

3. В чем особенность топографической векторной диаграммы? Какова последовательность ее построения?

2.1. Вычислите  $X$ , если при последовательном соединении  $X_L$  и  $X_C$  равны соответственно:

а) 9 и 4 Ом; б) 4 и 9 Ом; в) 4 и 4 Ом.

2.2. Вычислите  $Z$  и  $\varphi$ , если при последовательном соединении:

а)  $R = 6$  Ом;  $X_L = 20$  Ом,  $X_C = 12$  Ом.

♦ Находим сопротивления: реактивное  $X = X_L - X_C = 8$  Ом, полное  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10$  Ом. Угол  $\varphi = \arctg(X/R) = 53^\circ$ ; □

б)  $R = 8$  Ом,  $X_L = 10$  Ом,  $X_C = 16$  Ом [ 10 Ом,  $-37^\circ$  ].

2.3. В условиях примера 2.2 постройте треугольники сопротивлений.

2.4. Вычислите  $R$  и  $X$ , если  $Z = 10 \text{ Ом}$ , а угол  $\varphi$  равен:

а)  $30^\circ$ .

$$\diamond R = Z / \cos \varphi = 8,65 \text{ Ом}; X = Z \sin \varphi = 5 \text{ Ом}; \square$$

б)  $60^\circ$  [ 5; 8,65 Ом ].

#### 5.4. Комплексное сопротивление

Комплексному числу  $\underline{A}$  на комплексной плоскости соответствует точка (рис. 5.9). Ее координаты можно указать длиной вектора, соединяющего точку с началом координат, и углом, который образует вектор с вещественной осью:  $A \angle \psi$ . Это *полярная форма комплексного числа*. Например, запись  $Z = 10 \angle 30^\circ \text{ Ом}$  означает: полное сопротивление  $Z = 10 \text{ Ом}$  образует на комплексной плоскости угол  $30^\circ$  с вещественной осью. Можно координаты точки  $A$  (см. рис. 5.9) записать через проекции на вещественную  $a$  и мнимую  $b$  оси:

$$\underline{A} = a + jb,$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, оператор поворота вектора на  $90^\circ$ ;  $j$  означает, что, прежде чем сложить, надо вектор, соответствующий числу  $b$ , повернуть на  $90^\circ$  в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Это *алгебраическая форма* комплексного числа.

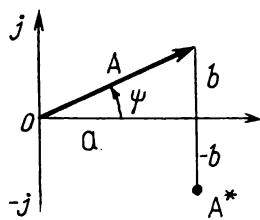


Рис. 5.9

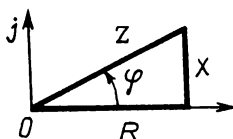


Рис. 5.10

Подставив проекции вектора  $a = A \cos \psi$ ,  $b = A \sin \psi$ , запишем то же комплексное число в *тригонометрической форме*:  $A \cos \psi + j A \sin \psi$ . Вынесем  $A$  за скобки:  $A (\cos \psi + j \sin \psi)$ . Применяв формулу Эйлера

$$\cos \psi + j \sin \psi = e^{j\psi}, \quad (5.2)$$

получим *показательную форму* комплексного числа:  $A e^{j\psi}$ . Число  $A$  — модуль, угол  $\psi$  — аргумент комплексного числа.

Если известны действительная  $a$  и мнимая  $b$  части комплексного числа, то

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \psi = \arctg(b/a).$$

Спряженному комплексному числу соответствует зеркальное отображение точки относительно вещественной оси (см. рис. 5.9):  $\underline{A}^* = a - jb$ , от  $\underline{A}$  оно отличается знаком мнимой части. Перемножим:

$$\underline{A} \underline{A}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 + b^2 = A^2,$$

так как  $j^2 = \sqrt{(-1)^2} = -1$ .

Произведение комплексного числа на сопряженное комплексное число дает действительное число, равное квадрату модуля.

Расположим треугольник сопротивлений на комплексной плоскости так, чтобы его сторона, соответствующая активному сопротивлению  $R$ , совпадала с действительной осью (рис. 5.10). Тогда в алгебраической форме комплексное сопротивление  $\underline{Z} = R + jX$ . Подставим сюда  $R = Z \cos \varphi$ ,  $X = Z \sin \varphi$  и учтем формулу (5.2):

$$\underline{Z} = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) = Ze^{j\varphi}.$$

Это комплексное сопротивление в показательной форме. Модулем комплексного сопротивления  $\underline{Z}$  является полное сопротивление  $Z$ , а аргументом – угол  $\varphi = \arctg(X/R)$ .

Так как реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$ , то знак мнимой части комплексного сопротивления зависит от соотношения  $X_L$  и  $X_C$ . Если  $X_L > X_C$  или  $X_C = 0$ , то  $\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$ , угол  $\varphi$  положительный. Если же  $X_L = 0$  или  $X_L < X_C$ , то  $\underline{Z} = R - jX = Ze^{j\varphi}$ , угол  $\varphi$  отрицательный.

Чтобы сложить (вычесть) комплексные сопротивления, надо сложить (вычесть) их вещественные и мнимые части:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2).$$

1. Назовите четыре формы комплексного числа.

2. Комплексное сопротивление записано в алгебраической форме. Как вычислить его модуль и аргумент?

3. Запишите формулы для вычисления  $R$  и  $X$ , если  $\underline{Z}$  задано в показательной форме.

4. Как сложить или вычесть два комплексных сопротивления?

3.1. Резистор, сопротивление которого  $R_1 = 30$  Ом, конденсатор емкостью  $C = 159$  мкФ и катушка индуктивности с параметрами  $R_2 = 50$  Ом,  $L_2 = 0,255$  Гн соединены последовательно и включены в сеть с напряжением 220 В и частотой 50 Гц (см. рис. 5.8). Найдите ток и угол  $\varphi$ .

♦ Угловая частота  $\omega = 2\pi f = 314$  с<sup>-1</sup>. Найдём сопротивления: емкостное  $X_C = 1/(\omega C) = 140$  Ом, индуктивное  $X_L = \omega L = 80$  Ом, реактивное  $X = X_L - X_C = -60$  Ом, эквивалентное активное  $R = R_1 + R_2 = 80$  Ом, полное  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 100$  Ом. Ток  $I = U/Z = 2,2$  А. Разность фаз между напряжением и током  $\varphi = \arctg(X/R) = -37^\circ$ . На рис. 5.11 показаны в масштабе треугольник сопротивлений и направления векторов  $\underline{U}, \underline{I}$ . □

3.2. В последовательно соединенной цепи  $R = 6$  Ом,  $X_L = 10$  Ом. Напряжение на входе 120 В. Определите ток в цепи, если  $X_C$  равно: а) 2 Ом; б) 10 Ом. Постройте векторные диаграммы и сравните их.

♦ а) Вычислим реактивное и полное сопротивления:

$$X = X_L - X_C = 8 \text{ Ом}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10 \text{ Ом}.$$

Ток  $I = U/Z = 12$  А, напряжения:

$$U_a = RI = 72 \text{ В}; \quad U_L = X_L I = 120 \text{ В}; \quad U_C = X_C I = 24 \text{ В}.$$

Угол  $\varphi = \arctg(X/R) = 53^\circ$ .

Выбираем масштаб для напряжения. Вектор тока откладываем на горизонтали, относительно его ориентируем векторы  $\underline{U}_a, \underline{U}_L, \underline{U}_C$  (рис. 5.12).

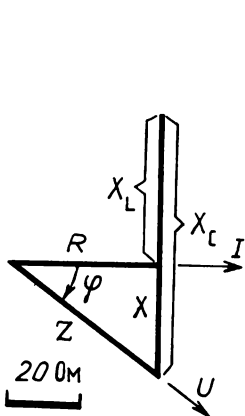


Рис. 5.11

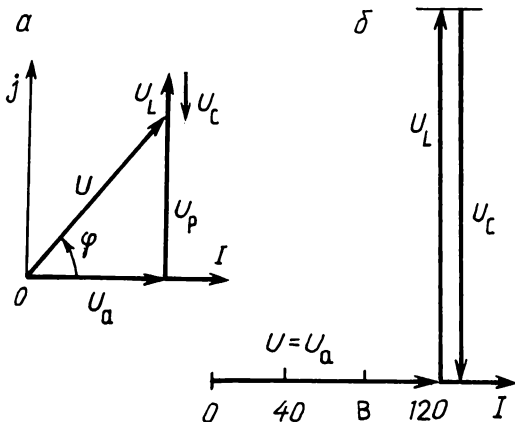


Рис. 5.12

б) Реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C = 0$ . В цепи резонанс напряжений ( угол  $\varphi = \arctg(X/R) = 0$  ). Полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R = 6 \text{ Ом}$ . Ток  $I = U/R = 20 \text{ А}$ . Находим напряжения:  $U_a = 120 \text{ В}$ ,  $U_L = 200 \text{ В}$ ,  $U_C = 200 \text{ В}$ . Реактивная составляющая напряжения  $U_p = U_L - U_C = 0$ .

Сравним векторные диаграммы на рис. 5.12, а и б: при резонансе ток и напряжения на отдельных участках цепи увеличились. □

#### 5.5. Комплексное напряжение. Переход от мгновенного напряжения к комплексному, и наоборот

Расположим вектор напряжения  $\underline{U}_m$  на комплексной плоскости (рис. 5.13). В показательной форме

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}. \quad (5.3)$$

Это комплексное амплитудное напряжение. Например:  $\underline{U}_m = 141 j^{30^\circ}$  В – амплитуда напряжения 141 В, начальная фаза  $\psi_u = 30^\circ$ , вектор расположен на комплексной плоскости под углом  $30^\circ$  к действительной оси.

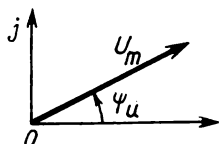


Рис. 5.13

Если разделить левую и правую части равенства (5.3) на  $\sqrt{2}$ , получим комплексное действующее напряжение:  $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$ . Оно отличается от ампли-

тудного  $\underline{U}_m$  только модулем (меньше в  $\sqrt{2}$  раз), аргумент не изменяется. Так, если амплитудное напряжение  $\underline{U}_m = 141 e^{j30^\circ}$  В, то действующее  $\underline{U} = 100 e^{j30^\circ}$  В. Комплексные амплитудное  $\underline{U}_m$  и действующее  $\underline{U}$  напряжения не зависят от времени, при их записи указываются только длина вектора и его начальная фаза. Эти две величины можно взять из уравнения для мгновенных значений. Пусть

$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4).$$

Здесь  $U_m = 10\sqrt{2}$  В,  $\psi_u = 45^\circ$ . Комплексные напряжения: амплитудное  $\underline{U}_m = 14,1 e^{j45^\circ}$ , действующее  $\underline{U} = 10 e^{j45^\circ}$  В.

Иногда возникает обратная задача: как от комплексного напряжения  $\underline{U}$  перейти к уравнению  $u(t)$ ? Прежде чем ответить на этот вопрос, выясним, какую математическую операцию надо проделать, чтобы повернуть вектор на определенный угол.

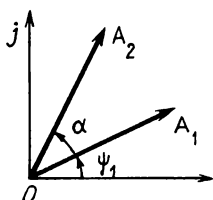


Рис. 5.14

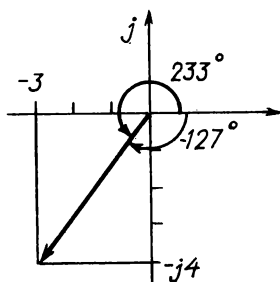


Рис. 5.15

Расположим на комплексной плоскости два вектора одинаковой длины, но с разными аргументами (рис. 5.14):

$$\underline{A}_1 = A e^{j\psi_1}; \quad \underline{A}_2 = A e^{j(\psi_1 + \alpha)}$$

Вектор  $\underline{A}_2 = A e^{j\psi_1} e^{j\alpha} = \underline{A}_1 e^{j\alpha}$ . Отсюда следует вывод: чтобы повернуть вектор на угол  $\alpha$  в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, надо соответствующее ему комплексное число умножить на коэффициент  $e^{j\alpha}$ .

Пусть  $\alpha = 90^\circ$ . По формуле Эйлера (5.2)

$$e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j. \quad (5.4)$$

Умножая комплексное число на  $j$ , поворачиваем вектор в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, на  $90^\circ$ . При  $\alpha = -90^\circ$  получаем  $e^{-j90^\circ} = -j$ , при  $\alpha = 180^\circ$  имеем  $-1$ .

Множитель  $e^{j\alpha}$  называют *оператором поворота* вектора на угол  $\alpha$ ,  $j$  — оператор поворота вектора на  $90^\circ$ .

Фаза вращающегося вектора зависит от времени: в момент  $t_1$  угол  $\alpha_1 = \omega t_1$ , при  $t_2$  угол  $\alpha_2 = \omega t_2$  и т.д. Для произвольного момента времени  $t$  угол  $\alpha = \omega t$ . Подставив это выражение в формулу (5.2), получим *оператор вращения* вектора:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Вращающемуся радиусу-вектору соответствует комплексное напряжение, умноженное на оператор вращения вектора:  $U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}$ . Сложим показатели степени:  $U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}$  и переведем полученное выражение в тригонометрическую форму (см. формулу (5.2)):

$$U_m \cos(\omega t + \psi_u) + j U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Здесь мнимая часть  $\text{Im}$  совпадает с уравнением для мгновенных значений  $u(t)$ .

Для того чтобы по комплексной амплитуде записать уравнение для мгновенных значений, надо  $\underline{U}_m$  умножить на оператор вращения  $e^{j\omega t}$  и взять мнимую часть выражения без  $j$ :

$$u(t) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}). \quad (5.5)$$

Так, если  $\underline{U}_m = 6 e^{j45^\circ}$  В, то

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{Im}(6 e^{j45^\circ} e^{j\omega t}) = \text{Im}(6 \cos(\omega t + \pi/4) + \\ &+ j 6 \sin(\omega t + \pi/4)) = 6 \sin(\omega t + \pi/4). \end{aligned}$$

На практике две промежуточные записи с  $\text{Im}$  опускают.

Чтобы от выражения для комплексного напряжения (тока) перейти к уравнению для мгновенных значений, надо взять из него амплитуду и начальную фазу. Угловая частота, как и в формуле (5.5), должна быть задана дополнительно. Запись синусоидальной функции в виде (5.5) упрощает ее дифференцирование и интегрирование.

1. Как записать вектор, повернутый на угол  $\alpha$ ?

2. Вектор  $\underline{U} = 100$  В расположен на действительной оси. Запишите вектор  $\underline{U}$ , повернутый на  $90^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $180^\circ$ .

3. Задан ток  $i = 5\sqrt{2} \sin(314t - \pi/6)$  А. Запишите:  $\underline{I}_m = \dots$  и  $\underline{I} = \dots$

4. Как от выражения для комплексной амплитуды перейти к уравнению для мгновенных значений?

4.1. Запишите в показательной форме числа:

а)  $-3 - j4$ .

б) Отложим действительную и мнимую части числа на осях комплексной плоскости (рис. 5.15). Число расположено в третьем квадранте, аргумент можно выразить как

$\pi + \arctg \frac{4}{3}$  либо  $-(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{3}{4})$ . Модуль  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . В показательной форме  $5 e^{j233^\circ}$  или  $5 e^{-j127^\circ}$ ; □

б)  $3 - j4, 3 + j4, -3 + j4$ .

4.2. Запишите в алгебраической и показательной формах:

а)  $\underline{Z} = 10 \angle 37^\circ \text{ Ом}$ .

◇  $\underline{Z} = 10 e^{j37^\circ} = 10 (\cos 37^\circ + j \sin 37^\circ) = 8 + j6 \text{ Ом}; \square$

б)  $\underline{Z} = 10 \angle 45^\circ \text{ Ом} (10 \angle 135^\circ, 10 \angle 225^\circ, 10 \angle -45^\circ \text{ Ом})$ .

У к а з а н и е. Сначала расположите векторы на комплексной плоскости и определите знак действительной и мнимой части.

4.3. Вычислите  $\underline{Z}$  для последовательной цепи, если:

а)  $R = 6 \text{ Ом}, X_L = 2 \text{ Ом}, X_C = 10 \text{ Ом}$ .

◇ В алгебраической форме  $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 - j8 \text{ Ом}$ .

Полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10 \text{ Ом}$ , фаза  $\varphi = \arctg(X/R) = -53^\circ$ . В показательной форме  $\underline{Z} = 10 e^{-j53^\circ} \text{ Ом}$ . □

5.1. Запишите комплексные напряжение и ток по уравнениям:

а)  $u(t) = 220 \sqrt{2} \sin(314t - \pi/4) \text{ В}, i(t) = 7 \sqrt{2} \sin(314t + \pi/3) \text{ А}$ .

◇  $\underline{U} = 220 \angle -45^\circ \text{ В}, \underline{I} = 7 \angle 60^\circ \text{ А}; \square$

б)  $u(t) = 380 \sqrt{2} \sin(314t + \pi/6) \text{ В}, i(t) = \sqrt{2} \sin(314t - \pi/2) \text{ А}$ .

5.2. Запишите уравнения для тока и напряжения при частоте  $f = 150 \text{ Гц}$ , если:

а)  $\underline{I} = 5 \angle -30^\circ \text{ А}$ .

◇ Находим амплитуду и угловую частоту:

$$I_m = 5 \sqrt{2} \text{ А}; \omega = 2\pi f = 942 \text{ с}^{-1}.$$

Запишем:

$$i(t) = 5 \sqrt{2} \sin(942t - \pi/6) \text{ А}; \square$$

б)  $\underline{U} = 220 e^{j45^\circ} \text{ В}$ .

## 6. Параллельное соединение пассивных двухполюсников

### 6.1. Активная и реактивная составляющие тока. Треугольник токов

Два приемника переменного тока соединены параллельно (рис. 6.1). Полное сопротивление  $Z$  каждого из них в общем случае состоит из активного  $R$  и реактивного  $X = X_L - X_C$  сопротивлений. Пусть  $Z_1$  включает  $R_1$  и  $X_{L1}$ , а  $Z_2$  — емкость  $C$  и активное сопротивление  $R_2$ . Дано напряжение  $U$ . Требуется определить входной ток.

Токи ветвей можно определить по закону Ома:

$$I_1 = U/Z_1; \quad I_2 = U/Z_2,$$

где  $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}; \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$ .

Разность фаз токов и напряжений (углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) найдем из треугольников сопротивлений для каждого приемника (см. рис. 6.1):

$$\varphi_1 = \arctg (X_1/R_1); \quad \varphi_2 = \arctg (X_2/R_2).$$

Зная модули токов  $I_1$ ,  $I_2$  и углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , построим векторную диаграмму (рис. 6.2). Начнем с вектора напряжения  $\underline{U}$ , направив его по горизонтальной оси. Ток  $\underline{I}_1$  индуктивного характера, он отстает от напряжения на угол  $\varphi_1$ , а ток  $\underline{I}_2$  емкостного характера, он опережает напряжение на угол  $\varphi_2$ .

В случае, когда ветвь включает все три элемента (активное сопротивление, индуктивность и емкость), ток будет отставать по фазе от напряжения или опережать его в зависимости от того, какое сопротивление преобладает — индуктивное или емкостное (см. § 5.2).

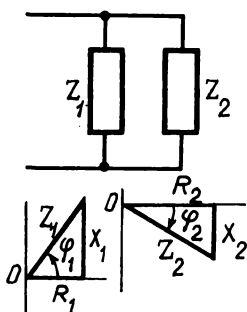


Рис. 6.1

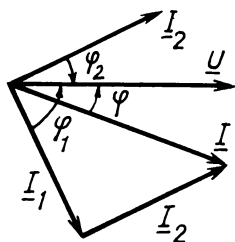
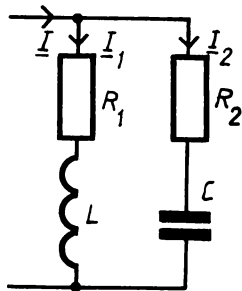


Рис. 6.2

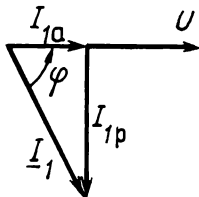


Рис. 6.3

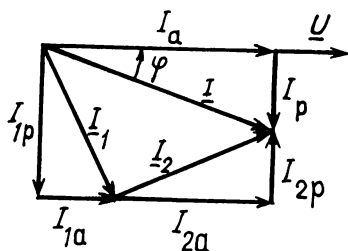


Рис. 6.4

Согласно первому закону Кирхгофа, в неразветвленной части цепи ток  $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ . Сложив векторы  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , найдем длину вектора  $\underline{I}$  и запишем ток. Транспортиром измерим угол  $\varphi$ .

Так можно рассчитать схему с двумя ветвями. При большем числе ветвей векторная диаграмма становится громоздкой. В этом случае следует применять аналитический метод.

Спроецируем вектор тока  $\underline{I}_1$  на две взаимно перпендикулярные оси, одна из которых совпадает с направлением вектора напряжения (рис. 6.3). Вектор  $\underline{I}_{1a}$ , совпадающий по фазе с вектором напряжения, называют *активной составляющей тока*, а вектор  $\underline{I}_{1p}$ , отстающий по фазе от вектора напряжения на угол  $\pi/2$ , — *реактивной составляющей тока*.

Ток  $\underline{I}_1$ , его активная  $I_{1a}$  и реактивная  $I_{1p}$  составляющие образуют пря-

моугольный треугольник — *треугольник токов*, из которого находим:

$$I_{1a} = I_1 \cos \varphi_1, \quad I_{1p} = I_1 \sin \varphi_1. \quad (6.1)$$

Ток любой ветви можно рассматривать как геометрическую сумму его активной и реактивной составляющих:  $\underline{I} = \underline{I}_a + \underline{I}_p$ .

С учетом сказанного перечертим векторную диаграмму, приведенную на рис. 6.2, показав на ней активные и реактивные составляющие токов ветвей (рис. 6.4).

Активная и реактивная составляющие входного тока равны соответственно:  $I_a = I_{1a} + I_{2a}$ ;  $I_p = I_{1p} - I_{2p}$ . Запишем через них модуль и фазу:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}; \quad \varphi = \arctg(I_p / I_a).$$

Разложение токов ветвей на активную и реактивную составляющие позволяет вычислить входной ток аналитически и обосновать метод проводимостей.

1. В какой последовательности строилась векторная диаграмма (какой вектор нацртили первым)? Как расположили векторы токов? Откуда взяли их модули и фазы?

2. Почему можно складывать активные и реактивные составляющие токов? Как их вычислить?

3. Начертите треугольник токов, запишите формулы (6.1).

## 6.2. Активная и реактивная проводимости. Треугольник проводимостей.

**Полная проводимость**

Активная  $I_a$  и реактивная  $I_p$  составляющие тока пропорциональны напряжению. Докажем это на примере ветви с сопротивлением  $Z_1$  (см. рис. 6.1).

Активная составляющая  $I_{1a} = I_1 \cos \varphi_1$ . По закону Ома  $I_1 = U / Z_1$ . Из треугольника сопротивлений находим:  $\cos \varphi_1 = R_1 / Z_1$ . Тогда

$$I_{1a} = \frac{R_1}{Z_1^2} U = g_1 U,$$

т.е. активная составляющая тока пропорциональна напряжению. Опуская индекс (порядковый номер ветви), получаем  $I_a = gU$ , где

$$g = R / Z^2. \quad (6.2)$$

Коэффициент пропорциональности напряжения и активной составляющей тока называется *активной проводимостью*.

Реактивная составляющая  $I_{1p}$  также пропорциональна напряжению. Из треугольника токов (см. рис. 6.3)  $I_{1p} = I_1 \sin \varphi_1$ . Подставив  $I_1 = U / Z_1$ ,  $\sin \varphi_1 = X_1 / Z_1$ , получим

$$I_{1p} = \frac{X_1}{Z_1^2} U = b_1 U.$$

В общем случае для любой ветви реактивная составляющая тока пропорциональна напряжению:  $I_p = bU$ , где

$$b = X / Z^2. \quad (6.3)$$

Коэффициент пропорциональности напряжения и реактивной составляющей тока называется *реактивной проводимостью*.

Активная проводимость (6.2) — величина положительная. Реактивная же проводимость записывается алгебраическим числом, с плюсом или минусом. В общем случае, когда ветвь содержит индуктивность и емкость, ее реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$ . Если  $X_L > X_C$ , то реактивная проводимость индуктивная, положительная:

$$b = (X_L - X_C) / Z^2 = b_L.$$

Если же  $X_L < X_C$  или индуктивности нет, то реактивная проводимость емкостная, с отрицательным знаком:

$$b = (X_L - X_C) / Z^2 = b_C.$$

Для ветвей только с одним параметром формулы (6.2) и (6.3) упрощаются. Рассмотрим их поочередно:

а) ветвь с активным сопротивлением: полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R$ , так как  $X = 0$ ; проводимость  $g = R / Z^2 = 1 / R$ ;

б) ветвь с индуктивностью:  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = X_L$ ,  $b = X / Z^2 = 1 / X_L$ ;

в) ветвь с емкостью:  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = X_C$ ,  $b = (X_L - X_C) / X_C^2 = -1 / X_C$ .

Таким образом, если ветвь имеет один из элементов, то проводимости обратны сопротивлениям:

$$g = 1 / R; \quad b_L = 1 / X_L; \quad b_C = 1 / X_C.$$

В остальных случаях их вычисляют по формулам (6.2) и (6.3).

Пользуясь понятиями активной и реактивной проводимостей, треугольник токов можно представить так, как показано на рис. 6.5. Разделив каждую

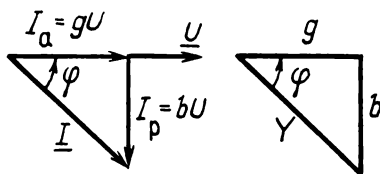


Рис. 6.5

его сторону на  $U$ , получим подобный ему треугольник — *треугольник проводимостей*. Величина  $1/Z$ , обратная полному сопротивлению, называется *полной проводимостью*. Обозначается она  $Y$ .

Активная, реактивная и полная проводимости связаны между собой формулами прямоугольного треугольника:

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg(b/g);$$

$$g = Y \cos \varphi; \quad b = Y \sin \varphi.$$

1. Дайте определение активной и реактивной проводимостей.

2. Начертите треугольник проводимостей, запишите формулы для  $g$  и  $b$ ,  $Y$  и  $\varphi$ .

1.1. Ток  $I = 10$  А. Определите активную и реактивную составляющие, если:

а)  $\varphi = 30^\circ$ .

♦ Находим:  $I_a = I \cos \varphi = 8,65$  А,  $I_p = I \sin \varphi = 5$  А; □

б)  $\varphi = 60^\circ$  [ 5 А; 8,65 А ].

1.2. Вычислите модуль и фазу тока по его составляющим  $I_a$  и  $I_p$ , соответственно равным:

а) 3 и 4 А.

♦  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = 5$  А,  $\varphi = \arctg(I_p/I_a) = 53^\circ$ ; □

б) 4 и 3 А [ 5 А,  $37^\circ$  ].

1.3. Для примеров 1.1 и 1.2 начертите треугольники токов.

### 6.3. Преобразование последовательного соединения в эквивалентное параллельное и обратно. Расчет параллельной схемы

Пассивный двухполюсник можно показать на схеме, соединив последовательно активное и реактивное сопротивления или параллельно проводимости (рис. 6.6). Обе схемы являются эквивалентными, если они при одинаковом напряжении имеют равные по величине и фазе входные токи.

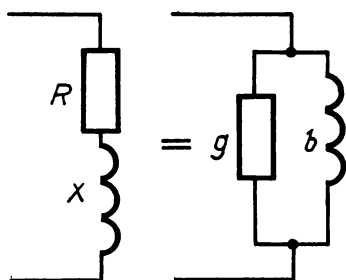


Рис. 6.6

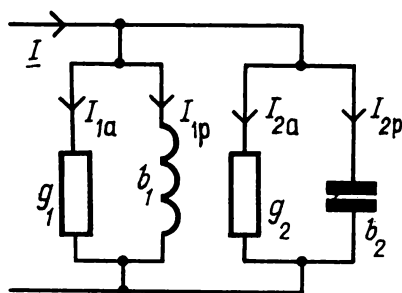


Рис. 6.7

Если известны  $R$  и  $X$ , то проводимости эквивалентной схемы вычисляют по формулам (6.2), (6.3). От заданных  $g$  и  $b$  можно перейти к последовательной схеме. Из треугольника сопротивлений находим:  $R = Z \cos \varphi$ ,  $X = Z \sin \varphi$ . Подставляя сюда  $Z = 1/Y$ ,  $\cos \varphi = g/Y$ ,  $\sin \varphi = b/Y$  (из треугольника проводимостей), получаем:

$$R = g/Y^2; \quad X = b/Y^2. \quad (6.4)$$

Заменим эквивалентным параллельным соединением каждую из ветвей схемы, приведенной на рис. 6.1, вычислив проводимости  $g_1$  и  $b_1$ ,  $g_2$  и  $b_2$  (рис. 6.7). Сложив активные и реактивные составляющие токов ветвей:

$$I_{1a} + I_{2a} = g_1 U + g_2 U; \quad I_{1p} - I_{2p} = b_1 U - b_2 U,$$

найдем составляющие входного тока:

$$I_a = (g_1 + g_2)U = gU; \quad I_p = (b_1 - b_2)U = bU,$$

где  $g$  — эквивалентная активная проводимость, равная сумме активных проводимостей ветвей;  $b$  — эквивалентная реактивная проводимость, равная алгебраической сумме реактивных проводимостей ветвей ( $b_L$  с плюсом,  $b_C$  с минусом).

Входной ток  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ . Подставив  $I_a = gU$  и  $I_p = bU$ , получим

$$I = U\sqrt{g^2 + b^2}.$$

Так как  $\sqrt{g^2 + b^2} = Y$  — полная проводимость, то

$$I = UY.$$

Эту формулу называют законом Ома для параллельной цепи.

Знак угла  $\varphi = \arctg(b/g)$  зависит от знака числа  $b = b_L - b_C$ . При равенстве индуктивной и емкостной проводимостей  $\varphi = 0$ , входные ток и напряжение совпадают по фазе. Это резонанс токов.

Если требуется найти входной ток в схеме из  $n$  параллельных ветвей, то поочередно вычисляют:

1) проводимости ветвей и их сумму:

$$\begin{array}{ll} g_1 = R_1 / Z_1^2 = \dots & b_1 = X_1 / Z_1^2 = \dots \\ g_2 = \dots & b_2 = \dots \\ \dots & \dots \\ g_n = \dots & b_n = \dots \end{array}$$

$$g = \sum_{k=1}^n g_k = \dots \quad b = \sum_{k=1}^n b_k = \dots$$

(реактивные проводимости ветвей войдут под знак суммы с плюсом либо с минусом);

2) полную проводимость  $Y = \sqrt{g^2 + b^2} = \dots$ ;

3) ток  $I = UY = \dots$  и фазу  $\varphi = \arctg(b/g)$ .

1. Какими эквивалентными схемами можно заменить пассивный двухполюсник?

2. Выразите  $g$  и  $b$  через  $R$  и  $X$ . Чему равны  $R$  и  $X$ , если известны  $g$  и  $b$ ?

3. Как вычислить входной ток параллельной схемы?

2.1. Вычислите проводимости, если  $Z = 10 \text{ Ом}$ , а угол  $\varphi$  равен:

а)  $\pi/6$ .

♦ Находим полную, активную и реактивную проводимости:

$$Y = 1/Z = 0,1 \text{ См}; \quad g = Y \cos \varphi = 0,1 \cos \pi/6 = 0,086 \text{ См};$$

$$b = 0,1 \sin \pi/6 = 0,05 \text{ См}; \quad \square$$

б)  $\pi/3$  [ 0,1; 0,05 и 0,086 См ].

2.2. Полная проводимость  $Y = 0,2$  См,  $\varphi = 37^\circ$ . Вычислите  $g$  и  $b$ .

2.3. Вычислите  $Y$  и  $\varphi$ , если  $g = 0,12$  См,  $b = 0,16$  См.

#### 6.4. Комплексная проводимость ветви

*Комплексная проводимость* — величина, обратная комплексному сопротивлению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = Ye^{-j\varphi}. \quad (6.5)$$

Здесь модуль  $Y$  — это полная проводимость, обратная полному сопротивлению; аргумент — угол  $\varphi$ , только с обратным знаком.

Заменяв  $e^{-j\varphi}$  на  $\cos\varphi - j\sin\varphi$ , запишем правую часть равенства (6.5) в алгебраической форме:  $Y\cos\varphi - jY\sin\varphi$ . Здесь первое слагаемое — активная проводимость  $g$ , второе — реактивная проводимость  $b$ . Тогда

$$\underline{Y} = g - jb. \quad (6.6)$$

Активная проводимость является вещественной, а реактивная — мнимой частью комплексной проводимости. В выражении (6.6) модуль, т.е. полная проводимость,  $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ , аргумент  $\varphi = -\arctg(b/g)$ . Минус в формуле (6.6) указывает на то, что реактивная проводимость на комплексной плоскости повернута относительно  $g$  на  $90^\circ$  в направлении движения часовой стрелки.

Закон Ома в комплексной форме:

$$\underline{I} = \underline{U}\underline{Y}.$$

Подставив сюда комплексную проводимость в алгебраической форме, придем к понятиям активной  $I_a$  и реактивной  $I_p$  составляющих тока:

$$\underline{I} = g\underline{U} - jb\underline{U} = I_a - jI_p.$$

Для ветви с последовательно соединенными активным и реактивным сопротивлениями комплексное сопротивление  $\underline{Z} = R + jX$ , а проводимость  $\underline{Y} = 1/(R + jX)$ . Умножив числитель и знаменатель правой части последнего равенства на сопряженное комплексное число, получим

$$\underline{Y} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)}.$$

В знаменателе имеем  $R^2 - (jX)^2 = R^2 + X^2 = Z^2$ ; числитель делим почленно:  $Y = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2}$ . Получились формулы (6.2), (6.3) для вычисления активной и реактивной проводимостей ветвей.

Если известна комплексная проводимость ветви  $\underline{Y} = g - jb$ , по ней можно вычислить комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = 1/(g - jb).$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное комплексное число:

$$\underline{Z} = \frac{g + jb}{(g + jb)(g - jb)}.$$

В знаменателе имеем  $g^2 + b^2 = Y^2$ , поэтому

$$\underline{Z} = \frac{g}{Y^2} + j \frac{b}{Y^2} = R + jX.$$

Здесь выражения  $g/Y^2 = R$ ,  $b/Y^2 = X$  совпадают с формулами (6.4).

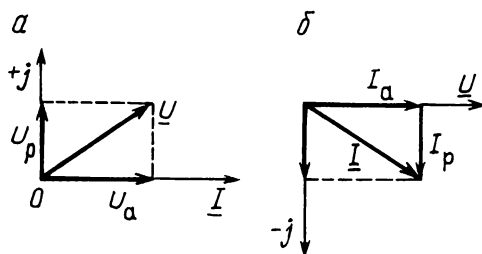


Рис. 6.8

В заключение поясним, почему аргумент комплексной проводимости противоположен по знаку фазе  $\underline{Z}$ . На рис. 6.8, а вектор напряжения спроецирован на вектор тока. Реактивная составляющая  $U_p$  направлена по положительной мнимой оси, так что  $U_a$  суммируется с  $jU_p$ . Но если расположить  $\underline{U}$  по действительной оси и спроецировать вектор тока на вектор напряжения (рис. 6.8, б), то реактивная составляющая тока будет направлена по отрицательной мнимой оси,  $jI_p$  вычитается. Это же видно из формулы (6.5). Таким образом, при переходе от  $\underline{Z}$  к  $\underline{Y}$  фаза изменяет знак.

1. Что такое комплексная проводимость? Запишите ее в показательной и алгебраической формах.

2. По сопротивлению  $R + jX$  найдите  $\underline{Y}$ .

3. От проводимости  $g - jb$  перейдите к  $\underline{Z}$ .

4. Из закона Ома в комплексной форме получите активную и реактивную составляющие тока.

3.1. Вычислите активную, реактивную и полную проводимости, если:

а)  $R = 6$  Ом,  $X = 8$  Ом.

♦ Полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10$  Ом. Находим проводимости:  $g = R/Z^2 = 0,06$  См,  $b = X/Z^2 = 0,08$  См,  $Y = 1/Z = 0,1$  См; □

б)  $R = 8$  Ом;  $X = 6$  Ом [ 0,08; 0,06 и 0,1 См ].

3.2. Вычислите  $R, X, Z$ , если:

а)  $g = 0,12$  См,  $b = 0,16$  См.

♦ Полная проводимость  $Y = \sqrt{g^2 + b^2} = 0,2$  См. Находим сопротивления:  $R = g/Y^2 = 3$  Ом,  $X = b/Y^2 = 4$  Ом,  $Z = 1/Y = 5$  Ом; □

б)  $g = 0,16$  См,  $b = 0,12$  См [ 4; 3 и 5 Ом ].

3.3. Вычислите эквивалентную проводимость для схемы, приведенной на рис. 6.1, если  $R_1 = 4$  Ом,  $X_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $X_2 = -4$  Ом.

◇ По формуле  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  находим полные сопротивления  $Z_1 = Z_2 = 5$  Ом. Проводимости ветвей:

$$g_1 = R_1 / Z_1^2 = 0,16 \text{ См}; b_1 = X_1 / Z_1^2 = 0,12 \text{ См}; g_2 = 0,16 \text{ См}; b_2 = -0,16 \text{ См}.$$

Вычисляем эквивалентные активную, реактивную и полную проводимости:

$$g = g_1 + g_2 = 0,28 \text{ См}; b = b_1 + b_2 = -0,04 \text{ См};$$

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2} \approx 0,28 \text{ См}. \square$$

3.4. В цепи (рис. 6.1)  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $L = 0,05$  Гн,  $C = 100$  мкФ. Напряжение 220 В, частота 50 Гц. Найдите токи.

◇ Угловая частота  $\omega = 2\pi f = 314 \text{ с}^{-1}$ . Находим сопротивления и токи. Для первой ветви  $X_1 = \omega L = 15,7$  Ом,  $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = 16,5$  Ом,  $I_1 = U / Z_1 = 13,33$  А. Для второй ветви  $X_2 = 1 / (\omega C_2) = 31,8$  Ом,  $Z_2 = 32,2$  Ом,  $I_2 = U / Z_2 = 6,84$  А.

Вычисляем проводимости первой ветви:  $g_1 = R_1 / Z_1^2 = 0,018$  См,  $b_1 = R_1 / Z_1^2 = 0,058$  См. Для второй ветви  $g_2 = R_2 / Z_2^2 = 0,005$  См,  $b_2 = -X_2 / Z_2^2 = -0,031$  См (минус, так как в ветви емкость).

Находим эквивалентные проводимости:  $g = g_1 + g_2 = 0,023$  См,  $b = b_1 - b_2 = 0,027$  См,  $Y = \sqrt{g^2 + b^2} = 0,036$  См.

По закону Ома  $I = UY = 7,8$  А. Разность фаз тока и напряжения  $\varphi = \arctg(b/g) = \arctg 1,15 = 46^\circ$ .

## 6.5. Расчет параллельной схемы в комплексной форме

Законы Кирхгофа справедливы для мгновенных токов, напряжений и ЭДС либо для изображающих их векторов. Последние можно записать комплексными числами. Законы Кирхгофа в комплексной форме:

$$\Sigma \underline{I} = 0; \quad \Sigma \underline{ZI} = \underline{E}.$$

Применим первый закон Кирхгофа к параллельной схеме с  $n$  ветвями. Входной ток ее равен сумме комплексных токов ветвей:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n.$$

Выразив токи по закону Ома:  $\underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_1$ ,  $\underline{I}_2 = \underline{U} / \underline{Z}_2$  и т.д., получим

$$\underline{I} = (1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + \dots + 1/\underline{Z}_n) \underline{U}.$$

Стоящая в скобках сумма проводимостей ветвей эквивалентна комплексной проводимости  $\underline{Y}$ . Эта формула выражает закон Ома в комплексной форме для параллельного соединения:

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y}.$$

1. Запишите законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

2. Чему равна эквивалентная проводимость?

4.1. Вычислите  $\underline{Y}$ ,  $g$ ,  $b$ , если:

а)  $\underline{Z} = 10 \angle 53^\circ$  Ом.

◇ Комплексная проводимость

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = 0,1 e^{-j53^\circ} \text{ См},$$

в алгебраической форме

$$\underline{Y} = 0,1(\cos 53^\circ - j \sin 53^\circ) = (0,06 - j0,08) \text{ См.}$$

Активная проводимость 0,06 См, реактивная 0,08 См; □

б)  $\underline{Z} = 10 \angle -53^\circ \text{ Ом};$

в)  $\underline{Z} = 6 - j8 \text{ Ом.}$

◇ Комплексная проводимость

$$\underline{Y} = \frac{1}{6 - j8} = \frac{6 + j8}{6^2 + 8^2} = 0,06 + j0,08 = 0,1 \angle 53^\circ \text{ См.}$$

Здесь  $g = 0,06 \text{ См}$ ,  $b = 0,08 \text{ См}$ ,  $Y = 0,1 \text{ См}$ ; □

г)  $\underline{Z} = 8 - j6 \text{ Ом.}$

5.1. В цепи (рис. 6.1)  $\underline{Z}_1 = 5 + j15,7 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_2 = 5 - j31,8 \text{ Ом}$ ,  $U = 220 \text{ В}$ . Вычислите входной ток.

◇ Находим комплексные и эквивалентную проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = (0,018 - j0,058) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{5 - j31,8} = \frac{5 + j31,8}{5^2 + 31,8^2} = (0,005 + j0,031) \text{ См};$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 0,023 - j0,027 = (0,036 \angle -49,6^\circ) \text{ См.}$$

$$\text{Ток } \underline{I} = \underline{UY} = 7,8 \angle -49,6^\circ \text{ А. } \square$$

## 7. Мощность

### 7.1. Мгновенная мощность. Активная мощность

При постоянном токе энергию и мощность вычисляют по формулам:

$$W = UIt; \quad P = W/t = UI.$$

Применим эти формулы для переменного тока. На бесконечно малом промежутке времени  $\Delta t$  ток и напряжение можно считать постоянными, равными мгновенным значениям  $u_1, i_1$ :

$$\Delta W = u_1 i_1 \Delta t; \quad p_1 = \frac{\Delta W}{\Delta t} = u_1 i_1.$$

В следующее мгновение мощность будет иметь уже другое значение:  $p_2 = u_2 i_2$ . Произведение мгновенных значений тока и напряжения называется *мгновенной мощностью*:

$$p = u(t)i(t).$$

Мгновенная мощность — это функция времени, она непрерывно изменяется и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, когда один из множителей имеет отрицательный знак. Поясним это с помощью схемы (рис. 7.1, а). В источнике ток совпадает по направлению с ЭДС или направлен встречно, например при зарядке аккумулятора (рис. 7.1, б). Чтобы разделить эти два режима, в случае, когда ток и ЭДС имеют одинаковые знаки, а источник отдает энергию, мощность считают положительной. При противоположных направлениях тока и ЭДС источник сам потребляет энер-

гию, мощность его отрицательная. В цепи переменного тока оба режима наблюдаются на протяжении одного периода: источник кратковременно (доли периода) может как отдавать энергию в сеть ( $p > 0$ ), так и получать энергию от сети. Аналогичные режимы наблюдаются в цепях с индуктивностью и емкостью.

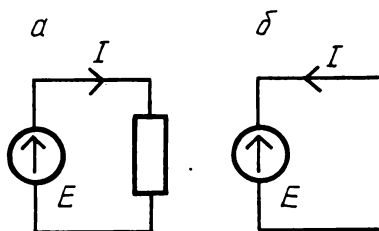


Рис. 7.1

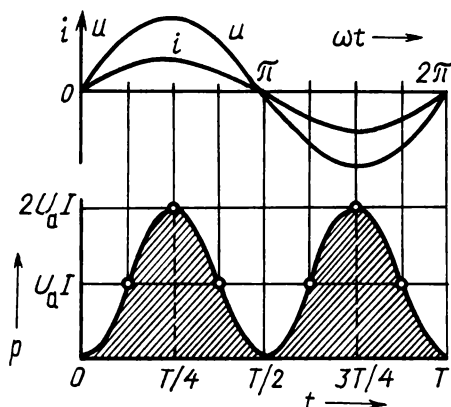


Рис. 7.2

В цепи с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе:

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t ; u = \sqrt{2}U_a \sin \omega t .$$

Вычислим значения мощности для времени, соответствующего  $\pi/4$  и  $\pi/2$ :

$$p(\omega t = \pi/4) = \sqrt{2}I \cdot \sqrt{2}U_a (\sqrt{2}/2)^2 = U_a I ;$$

$$p(\omega t = \pi/2) = 2U_a I .$$

Отложим полученные значения (и другие, равные им, для углов, кратных  $\pi/4$ ) на оси ординат и построим график зависимости  $p(t)$  (рис. 7.2). Полученной кривой соответствует математическое выражение

$$p = ui = 2U_a I \sin^2 \omega t . \quad (7.1)$$

После замены  $\sin^2 \omega t$  на  $(1 - \cos 2\omega t)/2$  имеем

$$p = U_a I - U_a I \cos 2\omega t . \quad (7.2)$$

Здесь два слагаемых — постоянное и переменное. Сумма их соответствует косинусоиду удвоенной частоты с осью симметрии, поднятой на высоту постоянного слагаемого  $U_a I$ . Мгновенная мощность пульсирует от нуля (при  $t = 0, T/2, T$ ) до максимального значения  $2U_a I$  (при  $t = T/4, 3T/4$ ), оставаясь положительной. Энергия поступает от источника: за время  $\Delta T$   $W = p \Delta t$ , за один период  $W = \int_0^T p dt$ . Интеграл численно равен площади, ограниченной кривой

мгновенной мощности  $p(t)$  и осью абсцисс (на рис. 7.2 она заштрихована). Подставим вместо  $p$  выражение (7.2):

$$W = \int_0^T U_a I dt - \int_0^T U_a I \cos 2\omega t dt .$$

Так как интеграл со второго слагаемого равен нулю, то  $W = U_a IT$ .

Средняя мощность за период

$$P = W/T = U_a I . \quad (7.3)$$

Среднее за период значение мощности называют *активной мощностью*.

Активная мощность равна произведению действующих значений активно-го напряжения и тока. Подставив в формулу (7.3)  $U_a = RI$ , получим привыч-ное выражение  $P = RI^2$ .

Единицы активной мощности — милливатт (мВт), ватт (Вт), киловатт (кВт).

1. Что такое мгновенная мощность? Какие режимы характеризуют поло-жительная и отрицательная мгновенные мощности?

2. Как изменяется мощность в цепи с активным сопротивлением? Начертите графики зависимостей  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$ .

3. Заучите определение активной мощности. Выведите формулы для вы-числения  $P$ .

## 7.2. Индуктивная и емкостная мощности

В цепи с индуктивностью напряжение опережает ток на  $\pi/2$ :

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t ; u = \sqrt{2} U_L \sin (\omega t + \pi/2) .$$

Запишем мгновенную мощность:  $p = ui$ . Учтем, что  $\sin (\omega t + \pi/2) = \cos \omega t$ , а  $2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \sin 2\omega t$ , поэтому

$$p_L = U_L I \sin 2\omega t . \quad (7.4)$$

Индуктивная мгновенная мощ-ность изменяется синусоидально с двойной частотой. Амплитуда синусои-ды  $U_L I$ .

На рис. 7.3 по кривым тока и напряжения построен график мгновен-ной мощности; он соответствует вы-ражению (7.4). Мощность  $p_L = u_L i$  равна нулю, когда один из множе-телей (напряжение или ток) равен нулю.

В течение первой четверти периода тока в цепи нарастает до положитель-ного максимума  $I_m$ , совпадая по нап-равлению с напряжением. Мощность положительная: в индуктивности создается магнитное поле. Энергия магнитно-го поля графически изображается заштрихованной площадью, ограничен-ной осью абсцисс и кривой мгновенной мощности в пределах первой четверти пе-

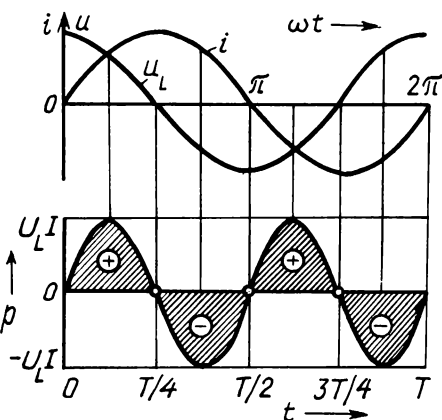


Рис. 7.3

риода. Во вторую четверть периода ( $\omega t = \pi/2 \dots \pi$ ) ток в цепи убывает от  $I_m$  до нуля, оставаясь положительным. Напряжение и ток направлены противоположно, поэтому мгновенная мощность  $p_L = u_L i$  имеет отрицательный знак. На этом отрезке времени индуктивность сама является источником электрической энергии, она возвращает в сеть накопленную энергию магнитного поля. На протяжении периода мощность изменяет знак четыре раза.

За один период количество энергии

$$W = \int_0^T p_L dt = \int_0^T U_L I \sin 2\omega t dt = 0.$$

Средняя мощность за период  $P = W/T$  (активная мощность) также равна нулю.

Для количественной оценки процесса колебаний энергии в цепи с индуктивностью введено понятие *индуктивной мощности*  $Q_L$ . Индуктивная мощность равна амплитуде мгновенной мощности (7.4):  $Q_L = U_L I$ . Так как  $U_L = X_L I$ , то  $Q_L = X_L I^2$ .

В цепи с емкостью относительно тока  $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$  напряжение отстает на  $\pi/2$ :

$$u_C = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t - \pi/2) = -U_C \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Мгновенная мощность

$$p_C = u i = -U_C I \sin^2 \omega t, \quad (7.5)$$

как и в цепи с индуктивностью, изменяется с двойной частотой, принимая положительные и отрицательные значения.

Дважды за период конденсатор заряжается и дважды разряжается. Активная мощность равна нулю.

Процесс колебаний энергии характеризуется амплитудой мгновенной мощности (см. формулу (7.5)):  $Q_C = U_C I$ . Эта величина называется *емкостной мощностью*. Так как  $U_C = X_C I$ , то  $Q_C = X_C I^2$ .

В цепи с активным сопротивлением электромагнитная энергия необратимо преобразуется в тепловую. В индуктивности и емкости такого преобразования нет, энергия лишь периодически передается от источника к этим элементам и обратно. В этом принципиальное отличие  $P$  и  $Q$ .

Единица индуктивной и емкостной мощностей — вольт-ампер реактивный (вар) или киловольт-ампер реактивный (квар).

1. Начертите график зависимостей  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$ . Объясните, как изменяется за период мгновенная мощность в индуктивности; в емкости.

2. Запишите формулы для вычисления  $Q_L$  и  $Q_C$ .

1.1. Ток и напряжение заданы уравнениями:

$$u = 220 \sqrt{2} \sin \omega t; \quad i = 2 \sqrt{2} \sin \omega t.$$

Вычислите мгновенную мощность для углов  $\omega t$ , равных  $\pi/6$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ . Постройте график зависимости  $p(\omega t)$ . (Образец:  $p = 220 \cdot 4 \sin^2(\pi/3) = 660$  Вт.)

1.2. Напряжение 220 В. Вычислите активную мощность, если:

а)  $R = 55 \text{ Ом}$ .

♦ Ток  $I = U/R = 4 \text{ А}$ , мощность  $P = U_a I = RI^2 = 880 \text{ Вт}$ ; □

б)  $R = 110 \text{ Ом}$  [  $440 \text{ Вт}$  ].

### 7.3. Активная и реактивная мощности

Пусть напряжение опережает ток на угол  $\varphi$ .

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t; u = \sqrt{2} U \sin (\omega t + \varphi).$$

Перемножив мгновенные значения  $u, i$ , построим кривую изменения мгновенной мощности  $p(\omega t)$  (рис. 7.4). На участке  $0 \dots (\omega t)_1$  ток и напряжение положительные, следовательно, и мощность положительная, энергия поступает от источника. На участке  $(\omega t)_1 \dots (\omega t)_2$  напряжение и ток имеют разные знаки, мощность отрицательная, энергия возвращается к источнику. Во втором полупериоде, когда оба сомножителя (ток и напряжение) отрицательные, мощность имеет положительный знак, а затем — отрицательный.

Математически кривая мгновенной мощности описывается выражением

$$p = ui = \sqrt{2} U \sin (\omega t + \varphi) \sqrt{2} I \sin \omega t.$$

С учетом формулы  $\sin (\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$  получим

$$p = 2 UI \cos \varphi \sin^2 \omega t + UI \sin \varphi \cdot \sin 2 \omega t. \quad (7.6)$$

Учтем, что  $U \cos \varphi = U_a$  — активная составляющая напряжения, а  $U \sin \varphi = U_L$  — реактивная составляющая. Тогда

$$p = 2 U_a I \sin^2 \omega t + U_L I \sin 2 \omega t.$$

Здесь первое слагаемое выражает активную мгновенную мощность, а второе — индуктивную (см. формулы (7.1) и (7.4)). Таким образом, мгновенная мощность равна сумме активной и индуктивной мгновенных мощностей:

$$p = p_a + p_L. \quad (7.7)$$

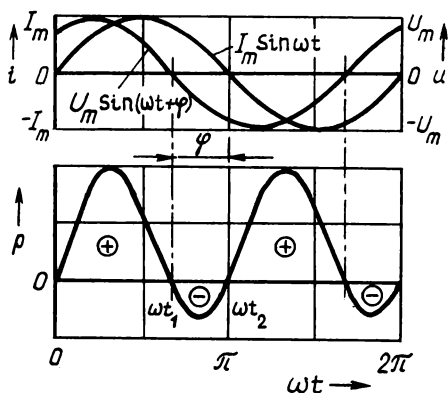


Рис. 7.4

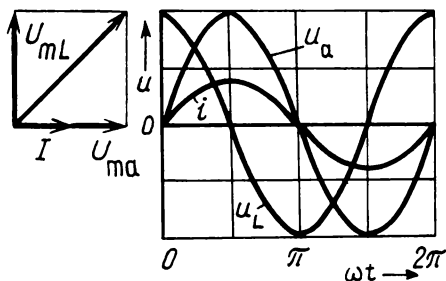


Рис. 7.5

Этот вывод, полученный математически, можно проиллюстрировать с помощью графиков. Разложим вектор напряжения  $\underline{U}_m$  на активную и реактивную составляющие (рис. 7.5). Это равносильно разложению синусоиды напряжения на две синусоиды  $u_a$  и  $u_L$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\pi/2$ . В любой момент времени  $u = u_a + u_L$ , и мгновенная мощность

$$p = ui = (u_a + u_L)i = u_a i + u_L i = p_a + p_L$$

(см. формулу 7.7)).

Перемножив значения тока и активного напряжения  $u_a$ , можно построить график, аналогичный приведенному на рис. 7.2, а по произведению  $u_L$  — график, аналогичный приведенному на рис. 7.3. Сложив ординаты обоих графиков, получим суммарную кривую мгновенной мощности, показанную на рис. 7.4.

Среднее значение мощности за период

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

Подставим вместо  $p$  выражение (7.6). Учтем, что интеграл от второго слагаемого как от симметричной функции за период равен нулю. Постоянные величины вынесем за знак интеграла:

$$P = \frac{1}{T} 2UI \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Так как  $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = T/2$  (см. формулу (4.2)), то

$$P = UI \cos \varphi. \quad (7.8)$$

Активная мощность равна произведению действующих значений тока, напряжения и  $\cos \varphi$  ( $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности).

Подставив в формулу (7.8)  $U = ZI$  и  $\cos \varphi = R/Z$ , получим  $P = RI^2$ . Принимая во внимание, что  $U \cos \varphi$  — это активная составляющая напряжения, а  $I \cos \varphi = I_a$  — активная составляющая тока, выражение (7.8) для активной мощности запишем в виде

$$P = U_a I = UI_a.$$

График мгновенной мощности  $p_L(t)$  на рис. 7.3 иллюстрирует периодический процесс обмена энергией между источником и приемником. Этот процесс мы условились характеризовать амплитудой колебания. Согласно формуле (7.6),  $Q = UI \sin \varphi$ . Так как  $U \sin \varphi$  — это реактивная составляющая напряжения  $U_p = XI$ , то

$$Q = XI^2 = (X_L - X_C)I^2 = Q_L - Q_C,$$

где  $Q_L = X_L I^2$ ,  $Q_C = X_C I^2$  — соответственно индуктивная и емкостная мощности.

Разность индуктивной и емкостной мощностей называют *реактивной мощностью*. Это алгебраическая величина, знак ее определяется соотношением  $Q_L$  и  $Q_C$ .

В двухполюснике с активным и реактивным сопротивлениями одновременно идут два процесса, описанных выше для цепей с одним элементом: преобразование энергии в активном сопротивлении и ее колебания между источником и реактивным элементом. Первый процесс количественно характеризует активная мощность, а второй — реактивная.

1. Как изменяется мгновенная мощность в двухполюснике, содержащем активное и реактивное сопротивления?

2. Выведите формулу для активной мощности.

3. Что такое реактивная мощность? Запишите формулу для ее вычисления. Покажите тождественность формул  $UI \sin \varphi$  и  $XI^2$ .

2.1. Пусть  $i = 2\sqrt{2} \sin \omega t$  А,  $u = 100 \sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/2)$  В. Постройте график мгновенной мощности  $p(\omega t)$  за полпериода.

♦ Вычислим  $p = ui$  для нескольких значений фазы  $\omega t$ . Так, если  $\omega t = 0, \pi/2, \pi$ , то один из сомножителей равен нулю и  $p = 0$ . При  $\omega t = \pi/4$   $p = 2\sqrt{2} \sin 45^\circ \cdot 100 \sqrt{2} \sin 135^\circ = 200$  вар. Если  $\omega t = \pi/2 + \pi/4$ , то  $p = -200$  вар. Вычислите  $p$  для  $\omega t$ , равного  $\pi/6, \pi/2 + \pi/6$ . Отложив на графике расчетные точки, постройте кривую, аналогичную приведенной на рис. 7.3. □

2.2. Вычислите индуктивную мощность, если:

а)  $L = 0,1$  Гн,  $f = 50$  Гц,  $I = 10$  А.

♦ Находим:  $X_L = \omega L = 31,4$  Ом,  $Q_L = X_L I^2 = 3140$  вар = 3,14 квар; □

б)  $X_L = 20$  Ом,  $I = 3$  А [ 180 вар ] .

2.3. Вычислите емкостную мощность, если:

а)  $C = 64$  мкФ,  $f = 50$  Гц,  $U = 220$  В.

♦ Емкостное сопротивление  $X_C = 1/(\omega C) = 50$  Ом, ток  $I = U/X_C = 4,5$  А, мощность  $Q_C = X_C I^2 = 1000$  вар = 1 квар; □

б)  $X_C = 100$  Ом,  $I = 4$  А [ 1,6 квар ] .

7.4. Треугольник мощностей. Полная мощность.

Коэффициент мощности

Если все стороны треугольника напряжений умножить на ток (или стороны треугольника сопротивлений — на квадрат тока), то получим подобный ему треугольник — *треугольник мощностей* (рис. 7.6). В нем катеты пропорциональны мощностям: горизонтальный — активной

$$P = U_a I = RI^2 = UI \cos \varphi,$$

вертикальный — реактивной

$$Q = U_p I = XI^2 = UI \sin \varphi.$$

Гипотенуза  $S = UI$ . Эта величина получила название *полной мощности*. Измеряется она в вольт-амперах (В·А).

Из треугольника мощностей имеем:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad P = S \cos \varphi; \quad Q = S \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = Q/P.$$

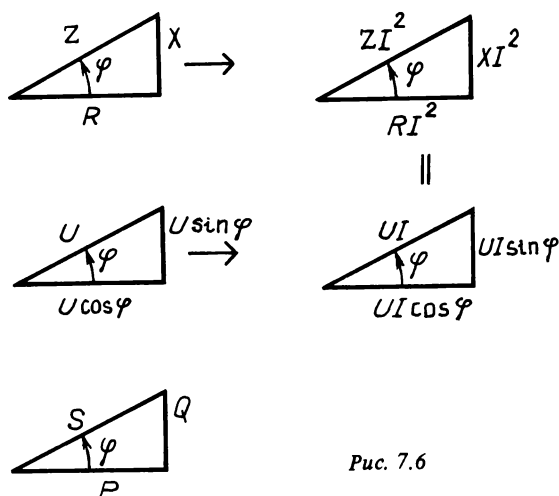


Рис. 7.6

Треугольники сопротивлений, напряжений и мощностей дают наглядное представление о соотношении между этими величинами. Коэффициент мощности можно определить из любого треугольника:

$$\cos \varphi = R/Z = U_a/U = P/S.$$

Он является важнейшим энергетическим фактором. Например, если энергию передавать при  $\cos \varphi = 1$ , то ток в цепи

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{P}{U}.$$

Если же  $\cos \varphi = 0,5$ , то

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{P}{0,5U} = 2 \frac{P}{U},$$

т.е. ток по сравнению с первым случаем увеличивается в два раза; в четыре раза ( $RI^2$ ) возрастают потери в проводах.

Коэффициенты мощности современных потребителей переменного тока (электродвигателей, нагревательных приборов) находятся в пределах  $0,6 < \cos \varphi < 1$ .

Чтобы увеличить  $\cos \varphi$ , параллельно с приемником включают батарею конденсаторов (рис. 7.7).

Ток  $I_1$  отстает от напряжения на угол  $\varphi_1$ , ток  $I_C$  опережает напряжение на  $\pi/2$ . Суммарный ток  $I_2$  в линии равен геометрической сумме векторов  $I_1$  и  $I_C$ , он стал меньше, чем  $I_1$ , а угол  $\varphi_2 < \varphi_1$ ;  $\cos \varphi$  увеличился.

Изменяя емкость  $C$  (ток  $I_C$ ), можно компенсировать реактивную составляющую тока потребителей  $I_p$  частично (недокомпенсация, см. рис. 7.7) или полностью (полная компенсация), до  $\cos \varphi = 1$ , когда ток в линии имеет минимальное значение (рис. 7.8, а). При дальнейшем увеличении емкости ток

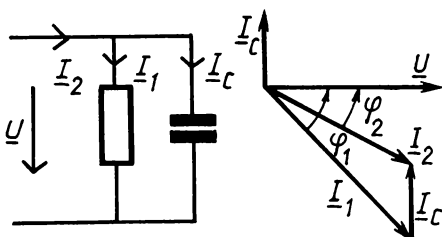


Рис. 7.7

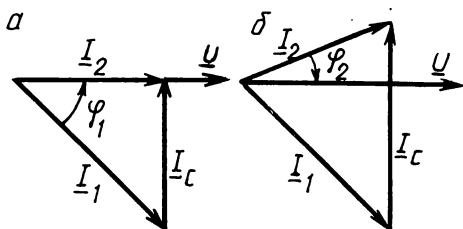


Рис. 7.8

в линии возрастает, режим становится емкостным, а угол  $\varphi_2$  отрицательным;  $\cos\varphi$  опять уменьшается (рис. 7.8, б). Такой режим называется *перекомпенсацией*, а  $\cos\varphi$  — *емкостным коэффициентом мощности*.

Физический смысл повышения  $\cos\varphi$  и уменьшения тока в линии состоит в том, что рядом с потребителем создается искусственный колебательный контур, в котором емкость запасает энергию за ту часть периода, когда уменьшается индуктивный ток. В следующую четверть периода она преобразуется в энергию магнитного поля. Колебания энергии происходят в контуре  $X_L - X_C$ , причем они не зависят от того, как соединены индуктивность и емкость — последовательно или параллельно.

1. Начертите треугольник сопротивлений и треугольник напряжений. Как из них получить треугольник мощностей?

2. Что такое полная мощность? В каких единицах она измеряется?

3. Объясните народнохозяйственное значение коэффициента мощности и способ его увеличения.

4.1. Нагрузка индуктивная,  $Z = 10 \text{ Ом}$ ,  $\varphi = 54^\circ$ , напряжение 220 В. Как изменятся  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ , если подключить параллельно нагрузке конденсатор с емкостным сопротивлением  $X_C = 11 \text{ Ом}$ ? Постройте треугольники мощностей и векторную диаграмму.

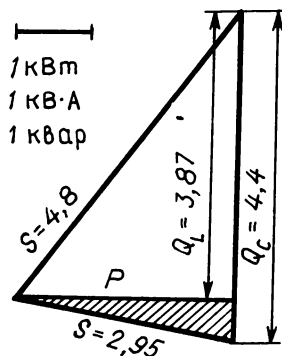


Рис. 7.9

◇ До подключения конденсатора  $I = U/Z = 22 \text{ А}$ ,  
 $S = UI = 4840 \text{ В} \cdot \text{А} = 4,8 \text{ кВ} \cdot \text{А}$ ,  $P = UI \cos\varphi = 2,9 \text{ кВт}$ ,  $Q_L = UI \sin\varphi = 3,87 \text{ квар}$ .

После подключения конденсатора ток  $I_C = U/X_C = 20 \text{ А}$ , емкостная мощность  $Q_C = X_C I^2 = 4400 \text{ вар}$ , реактивная мощность  $Q = Q_L - Q_C = -530 \text{ вар}$ , полная  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 2,95 \text{ кВ} \cdot \text{А}$ ,  $\varphi = \arctg(Q/P) = -10^\circ$ .

На рис. 7.9 треугольник мощностей, образовавшийся после подключения конденсаторов, заштрихован. Активная мощность  $P$  не изменилась, уменьшились лишь  $Q$  и  $S$ . Векторная диаграмма показана на рис. 7.7. □

## 7.5. Комплексная мощность

Комплексной мощностью  $\underline{S}$  называют произведение комплексного напряжения на сопряженный комплексный ток (ток, начальная фаза которого взята с обратным знаком):

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i}.$$

Объединив показатели степени при  $e$ , получим разность фаз тока и напряжения:  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ . Тогда  $\underline{S} = UI e^{j\varphi}$ .

Применив формулу Эйлера (5.2), будем иметь

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi.$$

Каждое из слагаемых выражает мощность:  $UI \cos \varphi = P$  — активную,  $UI \sin \varphi = Q$  — реактивную.

Произведение действующих значений называют *полной мощностью*:

$$UI = S.$$

Таким образом, комплексная мощность

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = S e^{j\varphi} = P + jQ. \quad (7.9)$$

Из формулы (7.9) полная мощность  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

1. Как получается комплексная мощность?

2. Выведите формулы для  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

5.1. Вычислите комплексную мощность, если:

а)  $\underline{U} = 22 \angle 15^\circ$  В,  $\underline{I} = 1 \angle -15^\circ$  А.

♦ Находим  $\underline{S} = 22 e^{j15^\circ} 1 e^{j15^\circ} = 22 e^{j30^\circ} = 19 + j11$ . Здесь  $P = 19$  Вт,  $Q = 11$  вар,  $S = 22$  В·А; □

б)  $\underline{U} = 5 \angle 30^\circ$  В,  $\underline{I} = 2 \angle -15^\circ$  А [ $7,07 + j7,07 = 10 \angle 45^\circ$ ].

## 8. Расчет сложных цепей

### 8.1. Метод контурных токов

В уравнениях (2.4), составленных для цепи постоянного тока, сопротивления, ЭДС и ток заменим соответствующими комплексными величинами:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{1,1} \underline{I}_{1,1} - \underline{Z}_{1,2} \underline{I}_{2,2} - \underline{Z}_{1,3} \underline{I}_{3,3} &= \underline{E}_{1,1}; \\ -\underline{Z}_{1,2} \underline{I}_{1,1} + \underline{Z}_{2,2} \underline{I}_{2,2} - \underline{Z}_{2,3} \underline{I}_{3,3} &= \underline{E}_{2,2}; \\ \underline{Z}_{1,3} \underline{I}_{1,1} - \underline{Z}_{3,2} \underline{I}_{2,2} + \underline{Z}_{3,3} \underline{I}_{3,3} &= \underline{E}_{3,3}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Здесь сопротивления с одинаковыми индексами ( $\underline{Z}_{1,1}$ ,  $\underline{Z}_{2,2}$ ,  $\underline{Z}_{3,3}$ ) — контурные сопротивления в комплексной (алгебраической или показательной) форме, сопротивления с разными индексами ( $\underline{Z}_{1,2}$ ,  $\underline{Z}_{1,3}$ ,  $\underline{Z}_{2,3}$ ) — комплексные общие сопротивления контуров первого и второго, первого и третьего, второго и третьего;  $\underline{E}_{1,1}$ , ...,  $\underline{I}_{1,1}$ , ... — комплексные контурные ЭДС и токи.

Число уравнений равно числу независимых контуров  $k$ , т.е.  $b - (y - 1)$ , где  $v, y$  — число ветвей и узлов.

Запишем уравнения (8.1) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{1,1} & -\underline{Z}_{1,2} & -\underline{Z}_{1,3} \\ -\underline{Z}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} & -\underline{Z}_{2,3} \\ -\underline{Z}_{3,1} & -\underline{Z}_{3,2} & \underline{Z}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{1,1} \\ \underline{I}_{2,2} \\ \underline{I}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{1,1} \\ \underline{E}_{2,2} \\ \underline{E}_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Введем следующие обозначения  $[\underline{Z}]$  — квадратная матрица сопротивлений;  $[\underline{I}]$  — матрица-столбец контурных токов;  $[\underline{E}]$  — матрица-столбец контурных ЭДС. Тогда уравнения (8.1) можно записать еще короче:

$$[\underline{Z}] [\underline{I}] = [\underline{E}].$$

Заметим, что в матрицу  $[\underline{Z}]$  собственные (с одинаковыми индексами) сопротивления контуров входят с положительным знаком, а все общие (с различными индексами) сопротивления записаны с минусом. Такие знаки получаются, если все контурные токи направлены в одну сторону — только в направлении движения часовой стрелки или только в противоположном направлении. Если же контурные токи направлены так, что в общем сопротивлении они совпадают, то это общее сопротивление надо записать с плюсом. Для контуров, не имеющих общего сопротивления, в матрице  $[\underline{Z}]$  надо записать нуль. Так как общие сопротивления контуров  $\underline{Z}_{1,2} = \underline{Z}_{2,1}$ ,  $\underline{Z}_{2,3} = \underline{Z}_{3,2}$ , то  $[\underline{Z}]$  — симметричная матрица. В общем случае, если в схеме  $n$  независимых контуров, все матрицы будут иметь по  $n$  строк.

Решая уравнения, находим контурные токи, а по ним — токи ветвей. Источники тока следует заранее преобразовать в источники ЭДС или рассматривать их как известные контурные токи.

1. Чем отличаются контурные уравнения для цепи с синусоидальными ЭДС от аналогичных уравнений для цепи постоянного тока?

2. Сколько строк и столбцов имеют матрицы сопротивлений, токов, ЭДС? Как определить количество уравнений?

3. С какими знаками входят в матрицу собственные и общие сопротивления контуров?

4. Запишите контурные уравнения для схемы с двумя независимыми контурами.

## 8.2. Метод узловых напряжений

Для схемы с четырьмя узлами пригодны уравнения, приведенные на мнемосхеме 3, если заменить проводимости, токи и напряжения комплексными величинами:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_{1,1}\underline{U}_1 - \underline{Y}_{1,2}\underline{U}_2 - \underline{Y}_{1,3}\underline{U}_3 &= \underline{J}_{1,1}; \\ -\underline{Y}_{2,1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{2,2}\underline{U}_2 - \underline{Y}_{2,3}\underline{U}_3 &= \underline{J}_{2,2}; \\ -\underline{Y}_{3,1}\underline{U}_1 - \underline{Y}_{3,2}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{3,3}\underline{U}_3 &= \underline{J}_{3,3}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Здесь одинаковыми индексами обозначены собственные проводимости узлов — сумма комплексных проводимостей ветвей, присоединенных к узлу.

Разными индексами обозначены общие проводимости узлов первого и второго, второго и третьего, ... — сумма комплексных проводимостей ветвей, соединяющих два узла. Узловой ток равен алгебраической сумме комплексных внутренних токов источников, примыкающих к узлу.

Система уравнений (8.2) в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{1.1} & -\underline{Y}_{1.2} & -\underline{Y}_{1.3} \\ -\underline{Y}_{2.1} & \underline{Y}_{2.2} & -\underline{Y}_{2.3} \\ -\underline{Y}_{3.1} & -\underline{Y}_{3.2} & \underline{Y}_{3.3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{1.1} \\ \underline{J}_{2.2} \\ \underline{J}_{3.3} \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

Матрица проводимостей  $[\underline{Y}]$  квадратичная, симметричная относительно главной диагонали, так как  $\underline{Y}_{1.2} = \underline{Y}_{2.1}$ ,  $\underline{Y}_{3.2} = \underline{Y}_{2.3}$ .

Матрицы узловых напряжений  $[\underline{U}]$  и узловых токов  $[\underline{J}]$  — это матрицы-столбцы. Тогда

$$[\underline{Y}] [\underline{U}] = [\underline{J}].$$

Для схемы, содержащей  $n+1$  узлов, надо записать матрицы  $n$ -го порядка.

Решая уравнение (8.3), находим узловые напряжения  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  и затем по закону Ома токи ветвей.

Решение уравнения (8.3) можно получить с помощью обратной матрицы проводимостей  $[\underline{Y}^{-1}]$ :

$$[\underline{U}] = [\underline{Y}^{-1}] [\underline{J}].$$

Однако при высоком порядке матрицы  $[\underline{Y}]$  сложно выполнить операцию обращения. Поэтому большинство программ для ЭВМ составлено на основе численных методов, не требующих обращения матриц (итерационный метод, метод Гаусса), или на основе методов, предусматривающих преобразование исходных уравнений.

1. Как вычислить собственную и общую проводимости? С какими знаками они входят в уравнения?

2. Запишите узловые уравнения для схемы с тремя узлами: развернутые и в матричной форме.

1.1. Для схемы, приведенной на рис. 8.1,  $\underline{Z}_1 = (20 - j40)$  Ом,  $\underline{Z}_2 = (20 + j40)$  Ом,  $\underline{Z}_3 = 20$  Ом и  $E_1 = (14,1 + j14,1)$  В,  $E_2 = (5,1 + j10)$  В. Вычислите токи методом контурных токов.

♦ В схеме три ветви и два узла. По методу контурных токов надо составить  $3 - 2 + 1 = 2$  уравнения. Направим контурные токи по ходу часовой стрелки. Запишем:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{1.1} & -\underline{Z}_{1.2} \\ -\underline{Z}_{2.1} & \underline{Z}_{2.2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{1.1} \\ \underline{I}_{2.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{1.1} \\ \underline{E}_{2.2} \end{bmatrix}.$$

Вычислим собственные сопротивления контуров:

$$\underline{Z}_{1.1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 20 - j40 + 20 = 56,5 e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2.2} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 20 + j40 + 20 = 56,5 e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

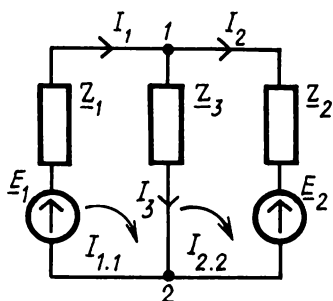


Рис. 8.1

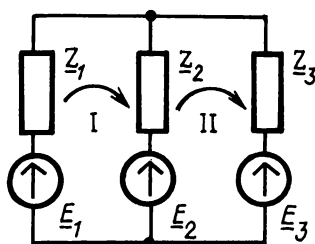


Рис. 8.2

Общее сопротивление первого и второго контуров  $Z_{1,2} = Z_{2,1} = Z_3 = 20 \text{ Ом}$ . Найдём контурные ЭДС:

$$\underline{E}_{1,1} = \underline{E}_1 = 14,1 + j14,1 = 20 e^{j45^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{E}_{2,2} = \underline{E}_2 = -5,1 - j10 = 11,2 e^{-j117^\circ} \text{ В}.$$

Раскроем главный определитель и вычислим его:

$$\Delta = Z_{1,1} Z_{2,2} - Z_{1,2}^2 = 56,5 e^{-j45^\circ} \cdot 56,5 e^{j45^\circ} - 20 \cdot 20 = 2,8 \cdot 10^3 \text{ Ом}^2.$$

В матрице  $[Z]$  первый столбец заменим столбцом правой части:

$$\underline{I}_{1,1} = \frac{\begin{bmatrix} \underline{E}_{1,1} & -Z_{1,2} \\ \underline{E}_{2,2} & Z_{2,2} \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{\underline{E}_{1,1} Z_{2,2} + \underline{E}_{2,2} Z_{1,2}}{\Delta}.$$

Подставим численные значения:

$$\underline{I}_{1,1} = \frac{(20 e^{j45^\circ} \cdot 56,5 e^{j45^\circ} + 11,2 e^{-j117^\circ} \cdot 20)}{2,8 \cdot 10^3} = -37 + j331 = 331 \angle 96^\circ \text{ мА}.$$

В матрице  $[Z]$  заменим второй столбец матрицей  $[\underline{E}]$ :

$$\begin{aligned} \underline{I}_{2,2} &= \frac{\begin{bmatrix} Z_{1,1} & \underline{E}_{1,1} \\ Z_{2,1} & \underline{E}_{2,2} \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{Z_{1,1} \underline{E}_{2,2} + Z_{2,1} \underline{E}_{1,1}}{\Delta} = \\ &= \frac{56,5 e^{-j45^\circ} \cdot 11,2 e^{-j117^\circ} + 20 \cdot 20 e^{j45^\circ}}{2,8 \cdot 10^3} = -115 + j31 = 120 \angle 165,5^\circ \text{ мА}. \end{aligned}$$

Укажем на схеме произвольно направление токов ветвей. Токи крайних ветвей  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  равны контурным токам; ток средней ветви равен разности контурных токов:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{1,1} - \underline{I}_{2,2} = -37 + j331 + 115 - j31 = 78 + j300 = 310 \angle 75,5^\circ \text{ мА}.$$

1.2. Для схемы, приведенной на рис. 8.2,  $Z_1 = Z_2 = (3 + j4) \text{ Ом}$ ,  $Z_3 = (3 - j4) \text{ Ом}$ , ЭДС  $\underline{E}_1 = (10 + j10) \text{ В}$ ,  $\underline{E}_2 = (10 - j10) \text{ В}$ ,  $\underline{E}_3 = -j10 \text{ В}$ . Вычислите контурные ЭДС и сопротивления контуров.

◇ Наметим на схеме контуры  $I$  и  $II$ . Найдем контурные ЭДС:

$$\underline{E}_{1,1} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \dots = j20 \text{ В}; \underline{E}_{2,2} = \dots = 10 \text{ В}.$$

Вычислим собственные и общее сопротивление:

$$\underline{Z}_{1,1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \dots = 10 e^{j53^\circ} \text{ Ом}; \underline{Z}_{2,2} = \dots = 6 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{1,2} = \underline{Z}_2 = 5 e^{j53^\circ} \text{ Ом. } \square$$

1.3. В условиях задачи 1.2 запишите в общем виде уравнения токов.

### 8.3. Метод эквивалентного источника. Метод наложения

Метод эквивалентного источника основан на теореме об активном двухполюснике. Сложную разветвленную цепь можно считать активным двухполюсником по отношению к ветви, в которой надо вычислить ток. Разомкнув ветвь, вычислим комплексное напряжение холостого хода  $\underline{U}_x$ . Исключив источники (участки с ЭДС замыкаем накоротко, а ветви с источниками тока считаем разомкнутыми), вычислим комплексное входное сопротивление пассивного двухполюсника  $\underline{Z}_{вх}$ . Это параметры эквивалентного источника:  $\underline{E}_{эк} = \underline{U}_x$ ,  $\underline{Z}_{i эк} = \underline{Z}_{вх}$ . Подсоединив к нему ранее отключенную ветвь, вычислим ток по закону Ома.

Методику расчета поясним на примере схемы, показанной на рис. 8.1. При заданных  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  и ЭДС  $\underline{E}_1, \underline{E}_2$  (см. задачу 1.1) надо вычислить  $\underline{I}_2$ .

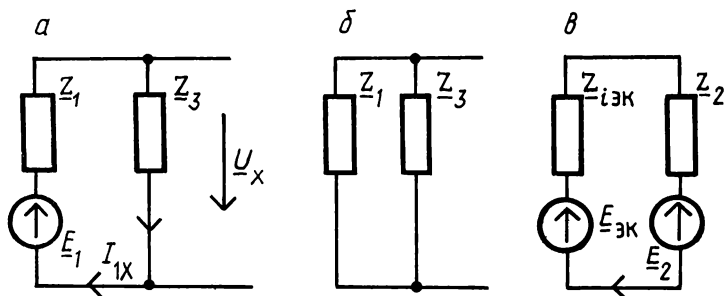


Рис. 8.3

◇ Отключаем ветвь с  $\underline{Z}_2$  (рис. 8.3, а). Напряжение холостого хода  $\underline{U}_x = \underline{I}_{1x} \underline{Z}_3$ , где  $\underline{I}_{1x} = \underline{E}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)$ . Подставив численные значения, получим

$$\underline{U}_x = \frac{20 e^{j45^\circ}}{20 - j40 + 20} \cdot 20 = j7,05 \text{ В}.$$

Для схемы без источников (рис. 8.3, б) входное сопротивление

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{(20 - j40) 20}{20 - j40 + 20} = (15 - j5) \text{ Ом}.$$

Чертим схему. К эквивалентному источнику с известными параметрами ( $E_{\text{эк}} = j7,05 \text{ В}$ ,  $Z_{\text{эк}} = 15 - j5 \text{ Ом}$ ) подключена ветвь (рис. 8.3, в). Произвольно указываем направление тока и записываем уравнение Кирхгофа для контура:

$$(Z_{\text{эк}} + Z_2)I_2 = E_{\text{эк}} - E_2,$$

из которого находим:

$$I_2 = \frac{j7,05 - 5,1 - j10}{15 - j5 + 20 + j40} = (-115 + j31) \text{ мА. } \square$$

Можно использовать и другой метод — метод наложения: вычислить токи ветвей, создаваемые каждым источником в отдельности, и затем суммировать их.

Методика расчета цепей при синусоидальных токах не отличается от методики расчета подобных по конфигурации цепей постоянного тока. Последовательность операций, выбор положительных направлений токов, ЭДС и напряжений остаются прежними. Различие заключается лишь в том, что ЭДС и внутренние токи источников должны быть заданы в комплексной форме (заданы не только модули, но и их начальные фазы), а вместо активного сопротивления используется комплексное.

1. Какие действия надо выполнить в случае применения метода эквивалентного источника?

2. Сформулируйте принцип наложения.

3. Что общего и в чем различие расчетов при постоянном и синусоидальном токах?

2.1. В условиях примера 1.1 вычислите токи ветвей (см. рис. 8.1) методом узловых напряжений.

♦ Нумеруем узлы: 1, 2. Надо составить  $2 - 1 = 1$  уравнение. В системе уравнений (8.2)  $U = 0$ , и остается

$$Y_{1,1}U_1 = I_{1,1}. \quad (8.4)$$

Узловая проводимость

$$Y_{1,1} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \left( \frac{1}{20 - j40} + \frac{1}{20 + j40} + \frac{1}{20} \right) \text{ См.}$$

Умножим числитель и знаменатель первых двух дробей на сопряженные комплексные числа:

$$Y_{1,1} = \frac{20 + j40}{20^2 + 40^2} + \frac{20 - j40}{20^2 + 40^2} + \frac{1}{20} = \frac{140}{2000} = 0,07 \text{ См.}$$

Узловой ток

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} = \frac{20e^{j45^\circ}}{44,6e^{-j63,5^\circ}} + \frac{11,2e^{j63^\circ}}{44,6e^{j63,5^\circ}} = \\ &= 0,45e^{j108,5^\circ} + 0,25e^{-j0,5^\circ} = 0,142 + j0,425 + 0,25 - j0,004 = (0,11 + j0,42) \text{ А.} \end{aligned}$$

Узловое напряжение находим из формулы (8.4):

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{I}_{1,1}}{\underline{Y}_{1,1}} = \frac{0,11 + j0,42}{0,07} = (1,57 + j6) \text{ В.}$$

Укажем на схеме направления токов и запишем для условного контура (рис. 8.4) уравнения Кирхгофа:  $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1 = \underline{E}_1$ , откуда

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{14,1 + j14,1 - 1,57 - j6}{20 - j40} = (-37 + j331) \text{ мА.}$$

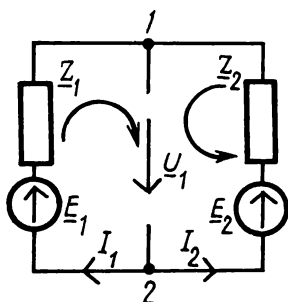


Рис. 8.4

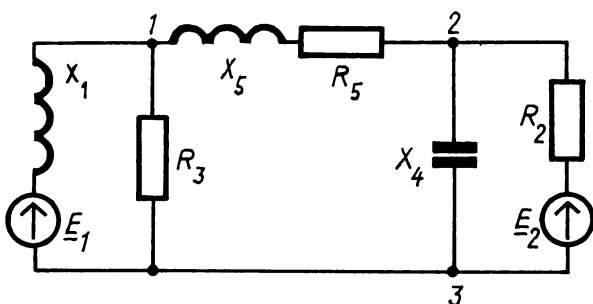


Рис. 8.5

Из уравнения Кирхгофа для правого контура имеем:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{5,1 + j10 - 1,57 - j6}{20 + j40} = (115 - j31) \text{ мА.}$$

По закону Ома

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{1,57 + j6}{20} = (78 + j300) \text{ мА.}$$

(Уравнение Кирхгофа для узла 1 имеет вид  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$ . Подставьте численные значения и убедитесь, что равенство выполняется.) □

2.2. В цепи (рис. 8.5) сопротивления  $X_1 = X_4 = X_5 = 6 \text{ Ом}$  и  $R_2 = R_3 = R_5 = 8 \text{ Ом}$ , ЭДС  $\underline{E}_1 = 12 \text{ В}$ ,  $\underline{E}_2 = j12 \text{ В}$ . Вычислите проводимости узлов и узловые токи.

◇ Сложим проводимости ветвей, сходящихся в первом узле:

$$\underline{Y}_{1,1} = \frac{1}{-jX_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5 + jX_5}.$$

Подставим численные значения:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{1,1} &= \frac{1}{j6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 + j6} = -j0,167 + 0,125 + 0,08 - j0,06 = 0,20 - j0,23 = \\ &= 0,30 e^{-j49^\circ} \text{ См.} \end{aligned}$$

Во втором узле сходятся вторая, четвертая и пятая ветви; сумма их проводимостей

$$\underline{Y}_{2,2} = \dots = 0,20 + j0,11 = 0,23 e^{j61^\circ} \text{ См.}$$

Общей проводимостью первого и второго узлов является проводимость пятой ветви:

$$\underline{Y}_{1.2} = \frac{1}{R_5 + jX_5} = 0,1 e^{-j37^\circ} \text{ См.}$$

Находим узловые токи:

$$\underline{J}_{1.1} = \underline{E}_1 / (jX_1) = -j2 \text{ А; } \underline{J}_{2.2} = \dots = j1,5 \text{ А. } \square$$

2.3. В условиях задачи 2.2 запишите в общем виде выражения для узловых напряжений  $\underline{U}_1, \underline{U}_2$  и токов ветвей. (У к а з а н и е. Узлов 3; надо записать  $3 - 1 = 2$  уравнения. Из матрицы (8.2) возьмем 2 строки и 2 столбца:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{1.1} & -\underline{Y}_{1.2} \\ -\underline{Y}_{2.1} & \underline{Y}_{2.2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{1.1} \\ \underline{J}_{2.2} \end{bmatrix} \quad .)$$

#### 8.4. Методика построения векторных диаграмм. Баланс мощностей

Для сложных схем векторные диаграммы строят по уравнениям Кирхгофа. Предварительно должны быть вычислены токи ветвей.

Построим векторную диаграмму для схемы, показанной на рис. 8.1. Известно:  $\underline{E}_1 = (14,1 + j14,1) \text{ В}$ ,  $\underline{E}_2 = (5,1 + j10) \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = X_2 = 40 \text{ Ом}$ . Токи ветвей (см. задачу 2.1):  $\underline{I}_1 = (-37 + j331) \text{ мА}$ ;  $\underline{I}_2 = (-115 + j331) \text{ мА}$ ;  $\underline{I}_3 = (78 + j300) \text{ мА}$ . Выберем масштаб для токов так, чтобы векторная диаграмма заняла не более страницы. На комплексной плоскости по вещественной оси в сторону отрицательных значений отложим вещественную часть  $\underline{I}_1$ , по мнимой оси — его мнимую часть. Проведем вектор  $\underline{I}_1$  и аналогично векторы  $\underline{I}_2$  и  $\underline{I}_3$  (рис. 8.6, а).

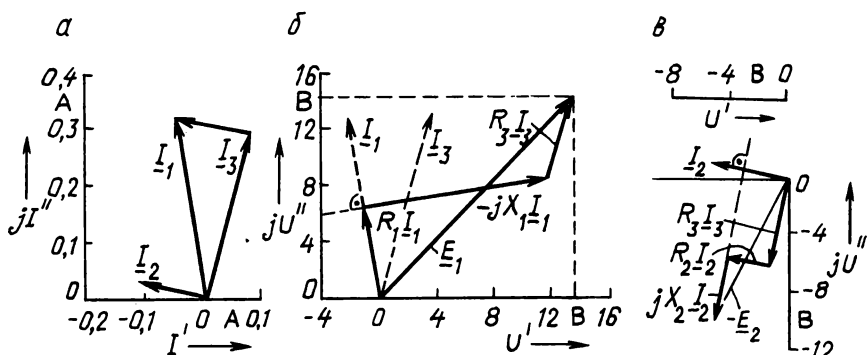


Рис. 8.6

Запишем для узла 1 или 2 (см. рис. 8.1) уравнение Кирхгофа:  $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$  или  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ . К вектору  $\underline{I}_3$  "пристроим" вектор  $\underline{I}_2$  и убедимся, что их сумма равна вектору  $\underline{I}_1$ .

Проверим, выполняется ли второй закон Кирхгофа. Для первого контура

$$R_1 \underline{I}_1 - jX_1 \underline{I}_1 + R_3 \underline{I}_3 = \underline{E}_1. \quad (8.5)$$

Подставив численные значения сопротивлений и модули токов  $I_1 = 0,33$  А и  $I_3 = 0,31$  А, вычислим модули напряжений:  $R_1 I_1 = 6,6$  В,  $X_1 I_1 = 13,2$  В,  $R_3 I_3 = 2,4$  В.

Пусть 1 мм соответствует 0,4 В. Длина вектора  $R_1 I_1$  равна 16 мм. Направим его вдоль вектора  $\underline{I}_1$  (рис. 8.6, б). Второй член в уравнении (8.5) строим на перпендикуляре к вектору  $\underline{I}_1$ . Это напряжение отстает от тока на  $\pi/2$ . Напряжение  $R_3 I_3 = 6,2$  В следует направить параллельно вектору тока  $\underline{I}_3$ . Соединим начало координат с концом вектора  $R_3 I_3$ . Этот вектор равен сумме трех членов уравнения Кирхгофа, т.е.  $\underline{E}_1$ .

Запишем уравнение Кирхгофа для второго контура:

$$-R_3 \underline{I}_3 + R_2 \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 = -\underline{E}_2.$$

Ориентируя векторы напряжений относительно векторов токов, в такой последовательности, как записано в уравнении, нанесем на комплексную плоскость  $R_3 I_3 = 6,2$  В,  $R_2 I_2 = 2,4$  В,  $X_2 I_2 = 4,8$  В (рис. 8.6, в). Убедимся, что сумма трех векторов равна  $(-5,1 - j10)$  В, т.е.  $-\underline{E}_2$ .

Векторные диаграммы придают проверке уравнений наглядность.

Проверить, правильно ли вычислены токи ветвей, можно и другим способом — по балансу мощностей: комплексная мощность источников равна комплексной мощности приемников. Для этого вычисляем комплексные мощности источников  $\underline{S}_1 = \underline{E}_1 \underline{I}_1^*$ ,  $\underline{S}_2 = \underline{E}_2 \underline{I}_2^*$  и их суммарную активную и реактивную мощности. Затем находим суммарные мощности приемников: активную  $\Sigma RI^2$  и реактивную  $\Sigma XI^2$ . Они должны равняться мощностям источников.

1. С какой целью строят векторные диаграммы для сложных цепей? В какой последовательности?

2. Что такое баланс мощностей? Как использовать его для проверки расчета?

3.1. Для схемы, показанной на рис. 8.5,  $E_1 = 12$  В,  $E_2 = j12$  В,  $X_1 = X_4 = X_5 = 6$  Ом,  $R_2 = R_3 = R_5 = 8$  Ом. Вычислите  $\underline{I}_5$  методом эквивалентного источника.

♦ Отключим ветвь (рис. 8.7). Напряжение  $\underline{U}_x$  найдем из уравнения Кирхгофа для условного контура:

$$\underline{U}_x + (-jX_4) \underline{I}_{4x} - R_3 \underline{I}_{3x} = 0.$$

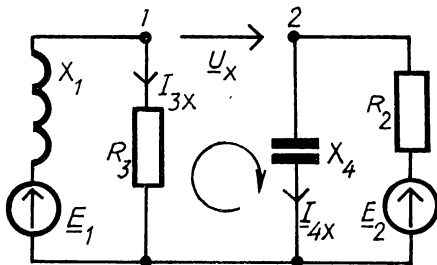


Рис. 8.7

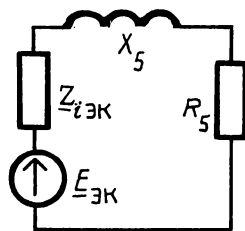


Рис. 8.8

Здесь неизвестны токи. Найдем их:

$$\underline{I}_{3x} = \underline{E}_1 / (R_3 + jX_1) = 12 / (10 e^{j37^\circ}) = 1,2 e^{-j37^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{4x} = \underline{E}_2 / (R_2 - jX_4) = j12 / (10e^{-j37^\circ}) = 1,2e^{j127^\circ} \text{ А.}$$

Напряжение холостого хода

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= R_3 \underline{I}_{3x} + jX_4 \underline{I}_{4x} = 9,6 e^{-j37^\circ} + 7,2 e^{j217^\circ} = \\ &= 7,68 - j5,76 - 5,75 - j4,32 = 1,93 - j10,08 = 10,26 e^{-j79^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Входное сопротивление пассивного (без  $\underline{E}_1$  и  $\underline{E}_2$ ) двухполюсника относительно точек 1, 2

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{jX_1 R_3}{R_3 + jX_1} + \frac{-jX_4 R_2}{R_2 - jX_4} = \frac{j6,8}{10e^{j37^\circ}} + \frac{-j6,8}{10e^{-j37^\circ}} = \\ &= 4,8 e^{j53^\circ} + 4,8 e^{-j53^\circ} = 5,76 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Чертим схему эквивалентного источника (рис. 8.8). Для нее  $\underline{E}_{\text{эк}} = 10,26 e^{-j79^\circ} \text{ В}$ ,  $\underline{Z}_{i \text{ эк}} = 5,76 \text{ Ом}$ . Подключаем пятую ветвь. По закону Ома

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_{\text{эк}}}{\underline{Z}_{i \text{ эк}} + \underline{Z}_5} = \frac{10,26 e^{-j79^\circ}}{5,76 + 8 + j6} = \frac{10,26 e^{-j79^\circ}}{15 e^{j23,5^\circ}} = 0,68 e^{-j102,5^\circ} \text{ А. } \square$$

3.2. В цепи (см. рис. 8.5) сопротивление  $R_5 = 0$  (остальные параметры см. в задаче 3.1). Вычислите ЭДС эквивалентного источника, которая позволит найти  $\underline{I}_2$ .

◇ После размыкания второй ветви сопротивление  $\underline{Z}_{1,2,3} = jX_5 - jX_4 = 0$ , следовательно,  $\underline{I}_{4x} = \underline{E}_1 / (jX_1) = -j2 \text{ А}$ . Напряжение холостого хода  $-jX_4 \underline{I}_{4x} = -12 \text{ В}$ , т.е.  $\underline{E}_{\text{эк}} = -12 \text{ В}$ . □

### 8.5. Эквивалентные преобразования схем

Решение некоторых задач можно упростить, если предварительно преобразовать схему. Мы уже пользовались этим приемом, когда участки из последовательно либо параллельно соединенных сопротивлений заменяли одним эквивалентным сопротивлением.

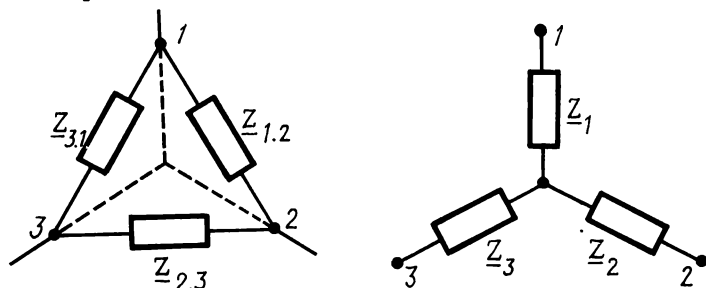


Рис. 8.9

Преобразовывают и более сложные схемы. Так, треугольник, образованный тремя сопротивлениями  $\underline{Z}_{1,2}, \underline{Z}_{2,3}, \underline{Z}_{3,1}$ , можно заменить эквивалентной звездой с сопротивлениями  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  (рис. 8.9). В звезде между точками

1, 2 включена одна ветвь из двух сопротивлений  $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ , а в треугольнике между теми же точками включены параллельно две ветви  $\underline{Z}_{1,2}$  и  $\underline{Z}_{2,3} + \underline{Z}_{3,1}$ . При эквивалентной замене должно выполняться равенство

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{1,2} (\underline{Z}_{2,3} + \underline{Z}_{3,1})}{\underline{Z}_{1,2} + \underline{Z}_{2,3} + \underline{Z}_{3,1}}.$$

Записывают еще два таких же равенства сопротивлений между точками 2, 3 и 3, 1 и, решая их, получают формулы для вычисления сопротивлений эквивалентной звезды:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{1,2} \underline{Z}_{3,1}}{\Sigma \underline{Z}_{\Delta}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{1,2} \underline{Z}_{2,3}}{\Sigma \underline{Z}_{\Delta}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{2,3} \underline{Z}_{3,1}}{\Sigma \underline{Z}_{\Delta}}, \quad (8.6)$$

где  $\Sigma \underline{Z}_{\Delta} = \underline{Z}_{1,2} + \underline{Z}_{2,3} + \underline{Z}_{3,1}$  — сумма сопротивлений всех сторон треугольника.

Чтобы записать формулы (8.6), надо наметить в треугольнике эквивалентную звезду (см. рис. 8.9). Сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на  $\Sigma \underline{Z}_{\Delta}$ .

Для преобразования звезды в эквивалентный треугольник используют формулы:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1,2} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; & \underline{Z}_{2,3} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}; \\ \underline{Z}_{3,1} &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений лучей с теми же индексами плюс их произведение, деленное на сопротивление оставшегося луча.

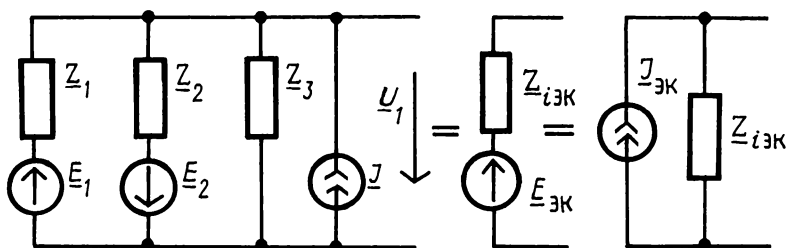


Рис. 8.10

Формулы (8.6), (8.7) просты, однако заучивать их не следует, так как они есть во всех учебниках. Будем помнить лишь, что треугольник можно заменить эквивалентной звездой, и наоборот.

Схему с параллельными ветвями (рис. 8.10), активными и пассивными, можно заменить одной активной ветвью (в соответствии с теоремой об активном двухполюснике). Напряжение холостого хода  $\underline{U}_1$  находим из уравнения, составленного по методу узловых напряжений:

$$\underline{Y}_{1,1} \underline{U}_1 = \underline{J}_{1,1},$$

где узловой ток  $\underline{J}_{1,1} = \underline{E}_1/\underline{Z}_1 - \underline{E}_2/\underline{Z}_2 + \underline{J}$ ; узловую проводимость  $\underline{Y}_{1,1} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3$ .

В эквивалентной ветви  $\underline{E}_{\text{эк}} = \underline{U}_1, \underline{Z}_{\text{эк}} = 1/\underline{Y}_{1,1}$ . Как и при постоянном токе, источник напряжения можно преобразовать в источник тока, и наоборот:  $\underline{J} = \underline{E}/\underline{Z}_i, \underline{E} = \underline{J}\underline{Z}_i$ . Здесь  $\underline{Z}_i$  — внутреннее сопротивление источника (комплексное).

1. В чем заключается эквивалентная замена отдельных участков схемы и что она дает?

2. Из каких равенств выводятся формулы для преобразования звезды в треугольник, и наоборот?

3. Как вычислить  $\underline{E}_{\text{эк}}$  и  $\underline{Z}_{\text{эк}}$  при замене цепи с параллельными ветвями эквивалентным источником?

4.1. По уравнению баланса мощностей проверьте, правильно ли вычислены токи в задаче 2.1 (см. рис. 8.1).

♦ При заданных ЭДС  $\underline{E}_1 = (14,1 + j14,1)$  В и  $\underline{E}_2 = (5,1 + j10)$  В были получены токи  $\underline{I}_1 = (-37 + j331)$  мА,  $\underline{I}_2 = (-115 + j31)$  мА и  $\underline{I}_3 = (78 + j300)$  мА.

Комплексные мощности источников:

$$\underline{E}_1 \underline{I}_1^* = (14,1 + j14,1) (-37 - j331) 10^{-3} = (4,13 - j5,17) \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$\underline{E}_2 \underline{I}_2^* = (5,1 + j10) (-(-115 - j31)) 10^{-3} = (0,28 + j1,31) \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Ток  $\underline{I}_2$  взят с минусом, так как на схеме (см. рис. 8.1) он направлен встречно  $\underline{E}_2$ .

Находим суммарные активную и реактивную мощности источников:

$$P = P_1 + P_2 = 4,41 \text{ Вт}; \quad Q = Q_1 + Q_2 = -3,86 \text{ вар}.$$

Вычисляем суммарные активную и реактивную мощности приемников:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 4,41 \text{ Вт}; \quad Q = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 = -3,8 \text{ вар},$$

где  $I_1 = 0,33$  А,  $I_2 \approx 0,12$  А,  $I_3 = 0,31$  А — модули токов.

Получился баланс: активная мощность источников равна активной мощности приемников (4,41 Вт). С точностью примерно до 1 % совпадают и реактивные мощности:  $Q = -3,8 \approx -3,86$  вар. Минус указывает, что это емкостная мощность  $Q_C$ . □

4.2. Вычислите ток  $\underline{I}_5$  (см. рис. 8.5), заменив параллельные ветви эквивалентными источниками.

♦ Отключив ветвь с  $\underline{Z}_5$ , получим схему, показанную на рис. 8.7. Находим узловые токи:

$$\underline{J}_{1,1} = -\frac{\underline{E}_1}{jX_1} = \frac{12}{j6} = -j2 \text{ А}; \quad \underline{J}_{2,2} = \frac{\underline{E}_2}{R_2} = \frac{j12}{8} = j1,5 \text{ А}.$$

Узловые проводимости:

$$\underline{Y}_{1,1} = \frac{1}{jX_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{j6} + \frac{1}{8} = \frac{8 + j6}{48j} = \frac{10 \angle 37^\circ}{48 \angle 90^\circ} = 0,21 e^{-j53^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{2,2} = \frac{1}{-jX_4} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{-j6} + \frac{1}{8} = 0,21 e^{j53^\circ} \text{ См}.$$

Узловые напряжения находим из формулы (8.4) :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{J}_{1.1}}{\underline{Y}_{1.1}} = \frac{-j2}{0,21 e^{-j53^\circ}} = 9,52 e^{-j37^\circ} = (7,61 - j5,71) \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{J}_{2.2}}{\underline{Y}_{2.2}} = \frac{j1,5}{0,21 \angle 53^\circ} = 7,14 e^{j37^\circ} = (5,71 + j4,28) \text{ В}.$$

Заменяем параллельные ветви (см. рис. 8.7) эквивалентными источниками (рис. 8.11), в которых ЭДС  $\underline{E}_{\text{ЭК}1} = \underline{U}_1$ ,  $\underline{E}_{\text{ЭК}2} = \underline{U}_2$ , а сопротивления

$$\underline{Z}_{i \text{ЭК}1} = 1/\underline{Y}_{1.1} = 4,8 e^{j53^\circ} = (2,88 + j3,84) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{i \text{ЭК}2} = 1/\underline{Y}_{2.2} = 4,8 e^{-j53^\circ} = (2,88 - j3,84) \text{ Ом}.$$

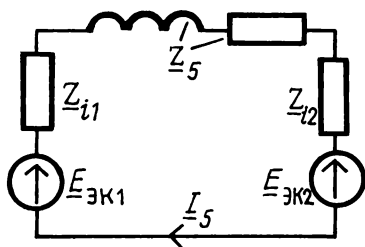


Рис. 8.11

Ток в цепи, схема которой показана на рис. 8.11:

$$\begin{aligned} \underline{I}_S &= \frac{\underline{E}_{\text{ЭК}1} - \underline{E}_{\text{ЭК}2}}{\underline{Z}_{i \text{ЭК}1} + \underline{Z}_{i \text{ЭК}2} + \underline{Z}_5} = \frac{1,9 - j10}{13,76 + j6} = \frac{10,26 e^{-j79^\circ}}{15,0 e^{j23,5^\circ}} = \\ &= 0,68 e^{-j102,5^\circ} \text{ А. } \square \end{aligned}$$

## 9. Трехфазные цепи

### 9.1. Устройство трехфазной цепи

Один из элементов трехфазной цепи — трехфазный синхронный генератор — состоит из двух частей: статора и ротора (рис. 9.1). Неподвижный статор выполнен в виде полого ферромагнитного цилиндра. В продольных пазах на его внутренней поверхности уложены три обмотки (на рис. 9.1 каждая обмотка условно показана в виде одного витка). Начала обмоток обозначаются буквами *A*, *B*, *C*, а концы — *X*, *Y*, *Z*. Обмотки смещены по окружности статора на  $120^\circ$ . Внутри статора расположен ферромагнитный ротор с обмоткой возбуждения; к последней через два скользящих контакта подведено постоянное напряжение. Следовательно, ротор является электромагнитом.

Ротор вращается турбиной с постоянной частотой. В обмотках статора индуцируются синусоидальные ЭДС одинаковой амплитуды и частоты. Но так как обмотки смещены по окружности статора на  $120^\circ$ , то ЭДС сдвинуты во времени на  $1/3$  периода. Их начальные фазы в уравнениях для мгновенных значений будут различаться на  $\pi/3$ . Приняв начало отсчета ( $t = 0$ ) совпадающим с моментом, когда ЭДС в обмотке  $A-X$  проходит через нулевое значение (положение ротора для этого момента времени указано на рисунке), запишем выражения для мгновенных значений ЭДС обмоток:

$$e_A = E_m \sin \omega t; \quad e_B = E_m \sin (\omega t - 2\pi/3); \quad e_C = E_m \sin (\omega t - 4\pi/3).$$

По этим выражениям построим синусоиды (рис. 9.2). Заменяв каждую синусоиду вектором, получим систему трех векторов, смещенных относительно друг друга на  $120^\circ$  (рис. 9.3).

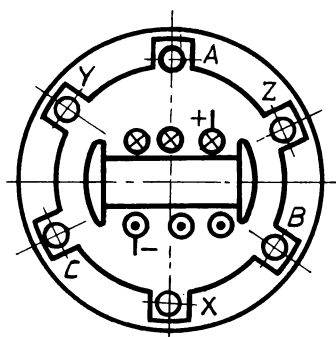


Рис. 9.1

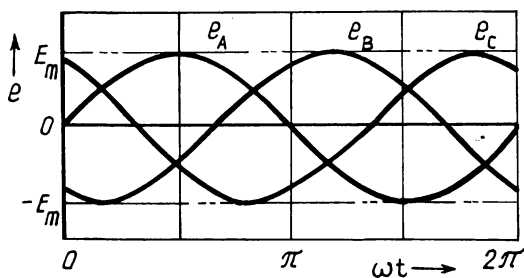


Рис. 9.2

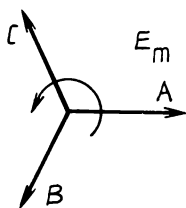


Рис. 9.3

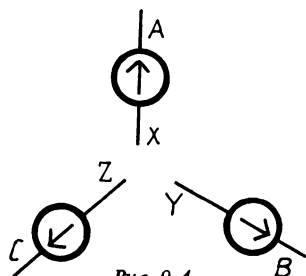
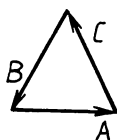


Рис. 9.4

Совокупность трех ЭДС, равных по величине и смещенных по фазе на  $2\pi/3$ , получила название *трехфазной симметричной системы ЭДС*. Особенность симметричной системы состоит в том, что сумма мгновенных значений ЭДС равна нулю. Это легко доказать, сложив три вектора на векторной диаграмме (рис. 9.3). Далее рассматривается только симметричная система ЭДС.

Пренебрегая активным и индуктивным сопротивлениями обмоток, генератор можно представить схемой, показанной на рис. 9.4. За положительное направление ЭДС принимают направление от конца обмотки к началу: от  $X$  к  $A$  и т.д. Соединив обмотку с отдельными приемниками, получим три цепи

(рис. 9.5). Каждую из цепей называют *фазой*, а всю систему – *трехфазной цепью*. Таким образом, трехфазная цепь – это совокупность (группа) трех цепей, ЭДС в которых имеют одинаковую частоту и амплитуду, но сдвинуты во времени на  $1/3$  периода.

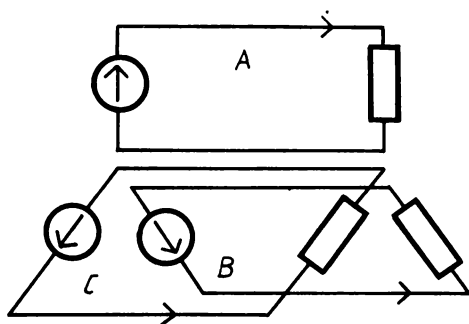


Рис. 9.5

Схема, показанная на рис. 9.5, называется *несвязанной трехфазной цепью*. Недостаток ее состоит в том, что она имеет шесть проводов – три прямых и три обратных. Обратные провода можно заменить одним проводом. Действительно, при одинаковых сопротивлениях токи в фазах равны по величине и отстают от напряжений на одинаковый угол. Они образуют симметричную систему токов; треугольник токов замкнут подобно треугольнику ЭДС (см. рис. 9.3). Следовательно, если объединить три обратных провода в один, то тока в нем не будет. Получится четырехпроводная трехфазная цепь (рис. 9.6). В ней узел  $N$  – нейтраль генератора, а  $N'$  – нейтраль приемника. Провод, соединяющий нейтраль генератора и приемника, называется *нейтральным*, а каждый из трех остальных – *линейным*.

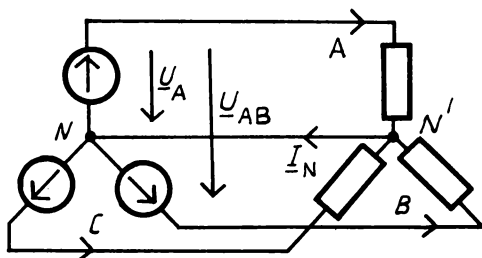


Рис. 9.6

Величины, относящиеся к одной фазе, получили название *фазных*: фазные ЭДС  $E_A, E_B, E_C$ , фазные токи  $I_A, I_B, I_C$ , фазные напряжения  $U_A, U_B, U_C$ .

Напряжения между линейными проводами называются *линейными* и обозначаются буквой с двумя индексами:  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$ . Токи в линейных проводах – *линейные токи*. Токи в фазах генератора и приемника сохранили название *фазных токов*. Из рис. 9.6 видно, что фазный ток равен линейному.

Так как обмотки генератора соединены звездой, то у четырехпроводной трехфазной цепи есть и другое название: *звезда с нейтральным проводом*.

1. Как устроен синхронный генератор? Сколько в нем обмоток? Где и как они расположены? Куда подключены?

2. Почему ЭДС сдвинуты по фазе на  $2\pi/3$ ? Покажите их на волновой и векторной диаграммах.

3. В чем состоит особенность симметричной системы ЭДС токов? Почему три обратных провода можно заменить одним?

4. Начертите четырехпроводную трехфазную цепь. Покажите на ней фазные и линейные величины. Заучите определение трехфазной цепи.

## 9.2. Четырехпроводная трехфазная цепь

Включим между фазами  $A$  и  $B$  приемника вольтметр (рис. 9.7). За условно-положительное направление тока в вольтметре примем направление от  $A$  к  $B$  (указано стрелкой). Обходя образовавшийся контур в направлении движения часовой стрелки, записываем уравнение Кирхгофа:  $\underline{U}_{AB} + \underline{U}_B - \underline{U}_A = 0$ , откуда

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B. \quad (9.1)$$

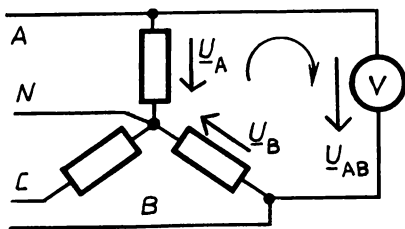


Рис. 9.7

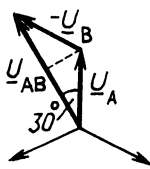


Рис. 9.8

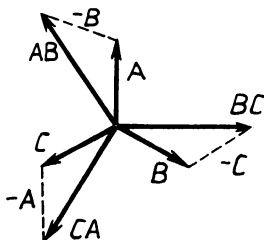


Рис. 9.9

Чтобы построить вектор линейного напряжения  $\underline{U}_{AB}$ , нужно из вектора  $\underline{U}_A$  вычесть вектор  $\underline{U}_B$ , т.е. прибавить к  $\underline{U}_A$  вектор, равный  $\underline{U}_B$ , но противоположный ему по направлению (рис. 9.8). Соотношение между линейным и фазным напряжениями определим из равнобедренного треугольника, острые углы в котором равны  $30^\circ$ . Проведя перпендикуляр из вершины тупого угла на противоположащую сторону, найдем:

$$\frac{U_{\text{л}}}{2} = U_{\text{ф}} \cos 30^\circ = U_{\text{ф}} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или  $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}} \sqrt{3}.$

В трехфазной цепи, выполненной по схеме "звезда", линейные напряжения больше фазных в  $\sqrt{3}$  раз (для схемы "треугольник" это соотношение не выполняется, там  $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$ ).

Из уравнений Кирхгофа для двух других контуров, аналогичных показанному на рис. 9.7, найдем линейные напряжения:

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (9.2)$$

Вектор линейного напряжения равен разности векторов фазных напряжений.

Построив по равенствам (9.1) и (9.2) векторы линейных напряжений, убедимся, что они образуют симметричную звезду (рис. 9.9). Относительно друг друга векторы сдвинуты на  $120^\circ$ . Звезда векторов линейных напряжений опережает звезду фазных напряжений на  $30^\circ$ .

Приемники с одинаковыми сопротивлениями фаз являются симметричной нагрузкой для генератора. Таковы, например, трехфазные двигатели, обмотка которых состоит из трех одинаковых частей — фаз. Фазные токи равны по величине. Они образуют симметричную систему, так что в нейтральном проводе тока нет. Это основной режим.

Примером несимметричной нагрузки являются лампы освещения. Поскольку количество их разное, сопротивления фаз не равны. Несимметричный режим возникает также при коротком замыкании, обрыве одного из проводов, отключении одной из фаз.

Так как начала фаз  $A, B, C$  и нейтраль генератора соединены с началами фаз и нейтралью приемника, то фазные напряжения не зависят от нагрузки и по модулю равны между собой. Они различаются только по фазе. Если расположить вектор  $\underline{U}_A$  по мнимой оси (см. рис. 9.8), то

$$\underline{U}_A = jU_\phi; \quad \underline{U}_B = U_\phi \angle -30^\circ; \quad \underline{U}_C = U_\phi \angle -150^\circ.$$

Зная комплексные сопротивления фаз  $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ , можно вычислить фазные токи:  $\underline{I}_A = \underline{U}_A / \underline{Z}_A, \underline{I}_B = \underline{U}_B / \underline{Z}_B, \underline{I}_C = \underline{U}_C / \underline{Z}_C$ . Затем по первому закону Кирхгофа находим ток в нейтральном проводе:  $\underline{I} = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$ .

Четырехпроводная трехфазная цепь позволяет иметь в одной и той же установке два напряжения, отличающихся друг от друга в  $\sqrt{3}$  раз. Трехфазные приемники включают на линейное напряжение, а однофазные — на линейное или фазное. Нейтральный провод обеспечивает равенство фазных напряжений при любой несимметрии. Если защита отключит одну из фаз, то потребители оставшихся фаз остаются под номинальным напряжением.

1. Начертите звезду фазных напряжений. Постройте один из векторов линейных напряжений. Докажите, что линейное напряжение больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз.

2. Запишите формулы для вычисления тока в нейтральном проводе.

3. Как возникают несимметричные режимы и почему не изменяются при этом фазные напряжения?

1.1. Дано  $u_B(t) = 380\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/6)$  В. Запишите  $u_A(t)$  и  $u_C(t)$ , а также  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  (в комплексной форме).

♦ Вектор напряжения  $\underline{U}_A$  опережает  $\underline{U}_B$  на  $120^\circ$ :

$$u_A(t) = 380\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/6 + 2\pi/3) \text{ В.}$$

Начальная фаза  $u_C$  равна  $-30^\circ - 120^\circ = -150^\circ$ :

$$u_C(t) = 380\sqrt{2} \sin(\omega t - 5\pi/6) \text{ В.}$$

Расположение векторов показано на рис. 9.9. В комплексной форме  $\underline{U}_A = 380 \angle 90^\circ \text{ В}$ ,  $\underline{U}_B = 380 \angle -30^\circ \text{ В}$ ,  $\underline{U}_C = 380 \angle -150^\circ \text{ В}$ . □

2.2. Запишите уравнения для  $u_B(t)$ ,  $u_C(t)$ , если  $u_A = 220 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}$ . Нанесите векторы на комплексную плоскость, запишите их в полярной форме [  $380 \angle -120^\circ$ ,  $380 \angle 120^\circ \text{ В}$  ].

### 9.3. Звезда без нейтрального провода

При симметричной нагрузке фазные токи равны по величине и образуют симметричную систему токов. Ток в нейтральном проводе нет, следовательно, этот провод не нужен. Потребитель будет получать энергию по трем проводам, по трехпроводной трехфазной цепи, показанной на рис. 9.10.

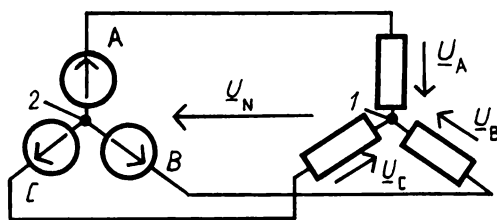


Рис. 9.10

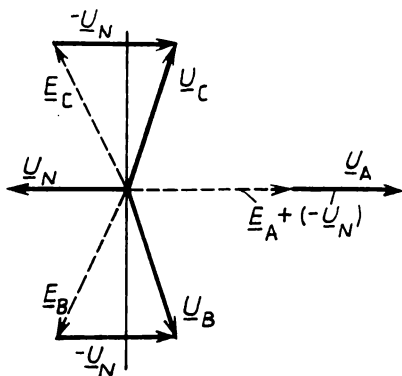


Рис. 9.11

Фазные токи найдем по закону Ома:  $I_\phi = U_\phi / Z_\phi$ . Из треугольника сопротивлений разность фаз тока и напряжения

$$\varphi_\phi = \arctg(X_\phi / R_\phi).$$

В звезду без нейтрального провода можно включить только симметричные трехфазные приемники. Рассмотрим, как изменяются фазные напряжения, если включить по этой схеме три различных однофазных приемника. Для схемы, показанной на рис. 9.10, запишем по методу узловых напряжений уравнение для узла 1, приняв за базу узел 2:

$$\underline{U}_1 \underline{Y}_{1,1} = \underline{J}_{1,1},$$

где узловая проводимость  $\underline{Y}_{1,1} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C$ ; узловой ток  $\underline{J}_{1,1} = \underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C$ .

Узловое напряжение — напряжение нейтрали приемника относительно нейтрали генератора

$$\underline{U}_N = \underline{U}_1 = \underline{J}_{1,1} / \underline{Y}_{1,1}. \quad (9.3)$$

Составив для каждой фазы уравнение по второму закону Кирхгофа, найдем фазные напряжения:

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N. \quad (9.4)$$

Из векторной диаграммы (рис. 9.11) видно, что фазные напряжения не равны между собой, они образуют несимметричную систему векторов. Несимметричность фазных напряжений (перекос напряжений) нарушает нормальную работу приемников. Тем не менее однофазные потребители можно включить в трехпроводную трехфазную цепь, если соединить их по схеме "треугольник".

1. Запишите формулу для вычисления токов в симметричной трехфазной схеме "звезда".

2. Объясните, почему изменяются фазные напряжения при несимметричной нагрузке. Как вычислить смещение нейтрали и фазные напряжения?

2.1. Вычислите  $\underline{U}_\Phi$ , если:

а)  $\underline{U}_\Pi = 35 \text{ кВ}$  [ 20,2 кВ ]; б)  $\underline{U}_\Pi = 220 \text{ В}$  [ 127 В ].

2.2. Вычислите ток в нейтральном проводе (см. рис. 9.7) и постройте векторную диаграмму, если  $\underline{U}_\Pi = 380 \text{ В}$ , а сопротивления фаз:

а)  $\underline{Z}_A = 10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_B = j10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_C = j20 \text{ Ом}$ .

♦ Фазное напряжение  $\underline{U}_\Phi = \underline{U}_\Pi / \sqrt{3} = 220 \text{ В}$ . Расположим вектор  $\underline{U}_A = 220 \text{ В}$  по вещественной оси. Тогда остальные фазные напряжения

$$\underline{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ В}; \quad \underline{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

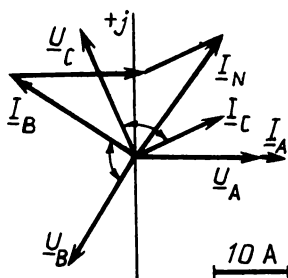


Рис. 9.12

Вычисляем фазные токи:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A / \underline{Z}_A = 22 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = 220 \angle -120^\circ / 10 \angle 90^\circ = 22 \angle -210^\circ = - (19 + j11) \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = 220 \angle 120^\circ / 20 \angle 90^\circ = 11 \angle 30^\circ = (9,5 + j5,5) \text{ А}.$$

Складывая их, находим ток в нейтральном проводе:

$$\underline{I} = 12,5 + j16,5 = 20,6 \angle 54,5^\circ \text{ А}.$$

Строим звезду фазных напряжений (рис. 9.12). Вектор  $\underline{I}_A$  совпадает с вектором  $\underline{U}_A$ . В фазе В ток отстает от напряжения на  $\pi/2$ . Вектор  $\underline{I}_C$  перпендикулярен к вектору  $\underline{U}_C$ . "Пристраивая" к  $\underline{I}_B$  вектор  $\underline{I}_A$  и затем  $\underline{I}_C$  находим вектор  $\underline{I}_N$  — ток в нейтральном проводе; □

б)  $\underline{Z}_A = (8 + j6) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_B = (8 - j6) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_C = 10 \text{ Ом}$  [  $21 \angle -76,5^\circ \text{ А}$  ].

#### 9.4. Соединение по схеме "треугольник"

Если каждую фазу трехфазного приемника (или три однофазных приемника) присоединить к линейным проводам, то образуется схема "треугольник" (рис. 9.13). В ней линейное напряжение равно фазному (в отличие от схемы "звезда", где  $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}} \sqrt{3}$ ), но зато фазные токи  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$  отличаются от линейных  $I_A, I_B, I_C$ . Выясним соотношение между ними.

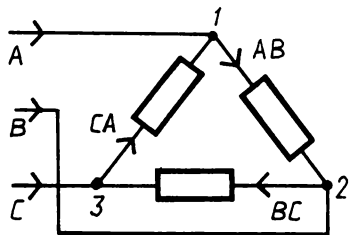


Рис. 9.13

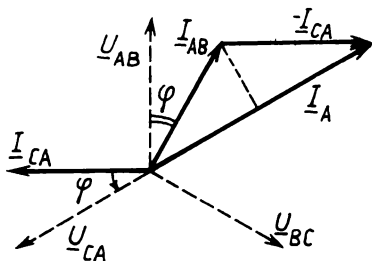


Рис. 9.14

Положительное направление фазных токов  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$  уже задано направлением напряжений  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$ : от А к В, от В к С, от С к А (обходим треугольник в направлении движения часовой стрелки).

Составляем для узла 1 уравнение Кирхгофа:

$$I_A + I_{CA} - I_{AB} = 0.$$

Из него находим линейный ток:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}. \quad (9.5)$$

Покажем векторы линейных напряжений  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  (рис. 9.14). При симметричной индуктивной нагрузке фазный ток  $I_{AB}$  отстает от своего фазного напряжения  $U_{AB}$  на угол  $\varphi$ . Вектор тока  $I_{CA}$  ориентируем относительно напряжения  $U_{CA}$ .

По уравнению (9.5) находим линейный ток  $I_A$ : к вектору фазного тока  $I_{AB}$  пристраиваем вектор  $-I_{CA}$  (вектор, по модулю равный  $I_{CA}$ , но противоположный ему по направлению). Замечаем, что векторы двух фазных (равных по величине) и одного линейного токов образуют равнобедренный треугольник с тупым углом  $120^\circ$ . Из вершины угла проводим перпендикуляр на гипотенузу. Из образовавшихся двух прямоугольных треугольников находим:

$$\frac{1}{2} I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} \cos 30^\circ = I_{\text{ф}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е.  $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} \sqrt{3}$ . Следовательно, при симметричной нагрузке, включенной в схему "треугольник", линейные токи больше фазных в  $\sqrt{3}$  раз. Составив уравнения Кирхгофа для узлов 2, 3 (см. рис. 9.13), найдем линейные токи:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} ; \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} \quad (9.6)$$

Векторы линейных токов  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$  показаны на рис. 9.15.

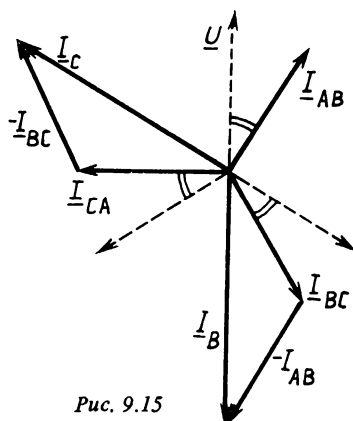


Рис. 9.15

При расчете схемы фазные токи вычисляются по формуле Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} ; \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} ; \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} ,$$

где  $\underline{Z}_{AB}, \underline{Z}_{BC}, \underline{Z}_{CA}$  — комплексные сопротивления фаз.

Линейные токи находят по уравнениям (9.5), (9.6).

В несимметричном режиме, при изменении сопротивления в одной фазе, будут изменяться ток этой фазы и линейные токи; напряжения фаз не изменяются. Поэтому схема "треугольник" используется для включения и однофазной нагрузки. Однако фазные и линейные токи в этом случае не образуют симметричной системы векторов, и соотношение  $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} \sqrt{3}$  нарушается.

1. Выведите соотношение линейного и фазного токов.

2. Как вычислить линейные и фазные токи?

3. Можно ли использовать схему "треугольник" при несимметричной нагрузке? Аргументируйте ответ.

3.1. Для звезды без нейтрального провода (см. рис. 9.10) даны фазное напряжение генератора 220 В и сопротивления фаз:  $\underline{Z}_A = 10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_B = j10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_C = -j10 \text{ Ом}$ . Вычислите фазные напряжения приемника.

♦ Расположив вектор  $\underline{U}_A = 220 \text{ В}$  по действительной оси и записав напряжения  $\underline{U}_B, \underline{U}_C$ , по формуле (9.3) вычислим напряжение нейтрали:

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{220}{10} + \frac{220 \angle -120^\circ}{10 \angle 90^\circ} + \frac{220 \angle 120^\circ}{10 \angle -90^\circ}}{1/10 + 1/(j10) + 1/(-j10)} .$$

Здесь в знаменателе два последних члена сокращаются; числитель умножаем на 10, 220 выносим за скобки. Получаем

$$\underline{U}_N = 220 (1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ})$$

Используя  $e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha$ , находим смещение нейтрали:  $\underline{U}_N = -161$  В. По формулам (9.4) вычисляем фазные напряжения:

$$\underline{U}_A = 220 - (-161) = 381 \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = 220 e^{-j120^\circ} - (-161) = -110 - j190 + 161 = (51 - j190) \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = 220 e^{j120^\circ} + 161 = -110 + j190 + 161 = (51 + j190) \text{ В}.$$

Строим (см. рис. 9.11) симметричную звезду ЭДС: поочередно к векторам фазных ЭДС приставляем вектор  $-\underline{U}_N$ . Соединяя концы векторов с началом координат, находим векторы фазных напряжений. □

### 9.5. Мощность трехфазной цепи

Для мощностей одной фазы, например  $A$ , имеем:

$$P_A = U_A I_A \cos\varphi_A; Q_A = U_A I_A \sin\varphi_A; S_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2}.$$

Мощность трехфазной цепи (активная и реактивная) равна сумме соответствующих мощностей отдельных фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C; Q = Q_A + Q_B + Q_C.$$

Полную мощность найдем из треугольника мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Для симметричной трехфазной цепи

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi_\phi.$$

При расчетах трехфазных цепей предпочитают использовать линейные напряжения и токи. Так как при схеме "звезда"  $U_\phi = U_\pi / \sqrt{3}$  и  $I_\phi = I_\pi$ , а при схеме "треугольник"  $U_\phi = U_\pi$  и  $I_\phi = I_\pi / \sqrt{3}$ , то независимо от вида соединения активная мощность симметричной трехфазной цепи

$$P = \sqrt{3} U_\pi I_\pi \cos\varphi_\phi.$$

Обычно индексы "л" и "ф" не указывают, и формулы активной, реактивной и полной мощностей симметричной трехфазной цепи принимают соответственно вид:

$$P = \sqrt{3} UI \cos\varphi; Q = \sqrt{3} UI \sin\varphi; S = \sqrt{3} UI.$$

Необходимо отметить, что в трехфазных цепях только для фазных тока и напряжения можно применить закон Ома. Разность фаз тока и напряжения зависит от соотношения активного и реактивного сопротивлений каждой фазы (определяется из треугольника сопротивлений).

1. Запишите формулы для вычисления активной, реактивной и полной мощностей в трехфазной цепи при симметричной нагрузке.

2. Почему независимо от схемы формулы имеют одинаковый вид?

4.1. В схеме "треугольник" (см. рис. 9.13) сопротивления  $\underline{Z}_{AB} = (6 + j8) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{BC} = (8 - j6) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{CA} = 10 \text{ Ом}$ . Вычислите фазные и линейные токи, если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ .

◇ Для схемы "треугольник"  $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$ . Чтобы записать линейные напряжения в комплексной форме, надо задаться направлением одного из них. Расположим вектор  $\underline{U}_{AB}$  вдоль мнимой оси (см. рис. 9.16). Тогда:

$$\underline{U}_{AB} = 220 \angle 90^\circ \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 220 \angle -30^\circ \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 220 \angle -150^\circ \text{ В}.$$

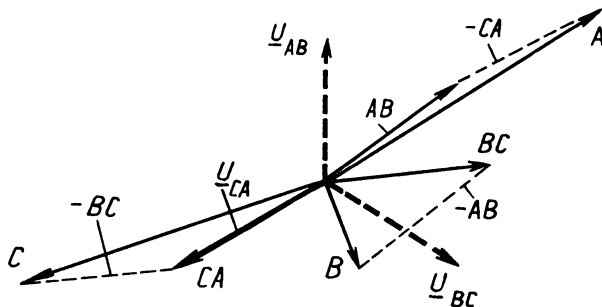


Рис. 9.16

Вычислим фазные токи, предварительно записав фазные сопротивления в комплексной форме:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{220 \angle 90^\circ}{10 \angle 53^\circ} = 22 \angle 37^\circ = (17,6 + j13,2) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{220 \angle -30^\circ}{10 \angle -37^\circ} = 22 \angle 7^\circ = (21,8 + j2,7) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{220 \angle -150^\circ}{10} = 22 \angle -150^\circ = (-19 - j11) \text{ А}.$$

Линейные токи:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = 36,6 + j24,2 = 43,7 \angle 33,5^\circ \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 4,2 - j10,5 = 11,3 \angle 68^\circ \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = -40,8 - j13,7 = 43,1 \angle -161,5^\circ \text{ А}.$$

Осталось нанести векторы токов на диаграмму (рис. 9.16) и убедиться, что закон Кирхгофа для узлов 1, 2, 3 (см. рис. 9.13) выполняется.

\* \*  
\*

Новые величины, обсуждаемые в этом разделе, систематизируем на две группы по типу схем (последовательная или параллельная). В первой группе основные величины — сопротивление и напряжение, во второй — проводимость и ток. Общей величиной для обеих групп является мощность.

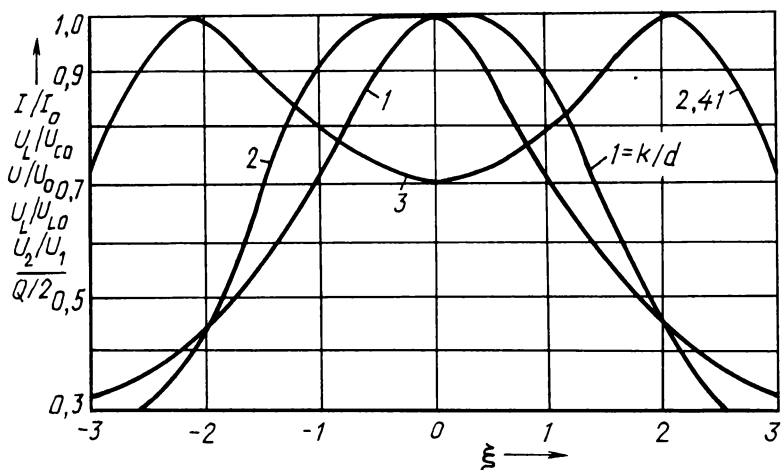
Теперь классифицируем каждую из пяти величин (напряжение и сопротивление, проводимость и ток, мощность) по типу элементов. Получим активную, индуктивную или емкостную величину. Разность индуктивной и емкостной величин — реактивная величина. Активная и реактивная составляющие образуют прямоугольный треугольник, гипотенуза которого — полная величина; она вычисляется по теореме Пифагора. Соотношение между сторонами треугольника можно записать в комплексной форме: появляется комплексная величина ( $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  или  $\underline{S}$ ), у которой модуль равен полной величине, а аргумент — углу  $\varphi$ .

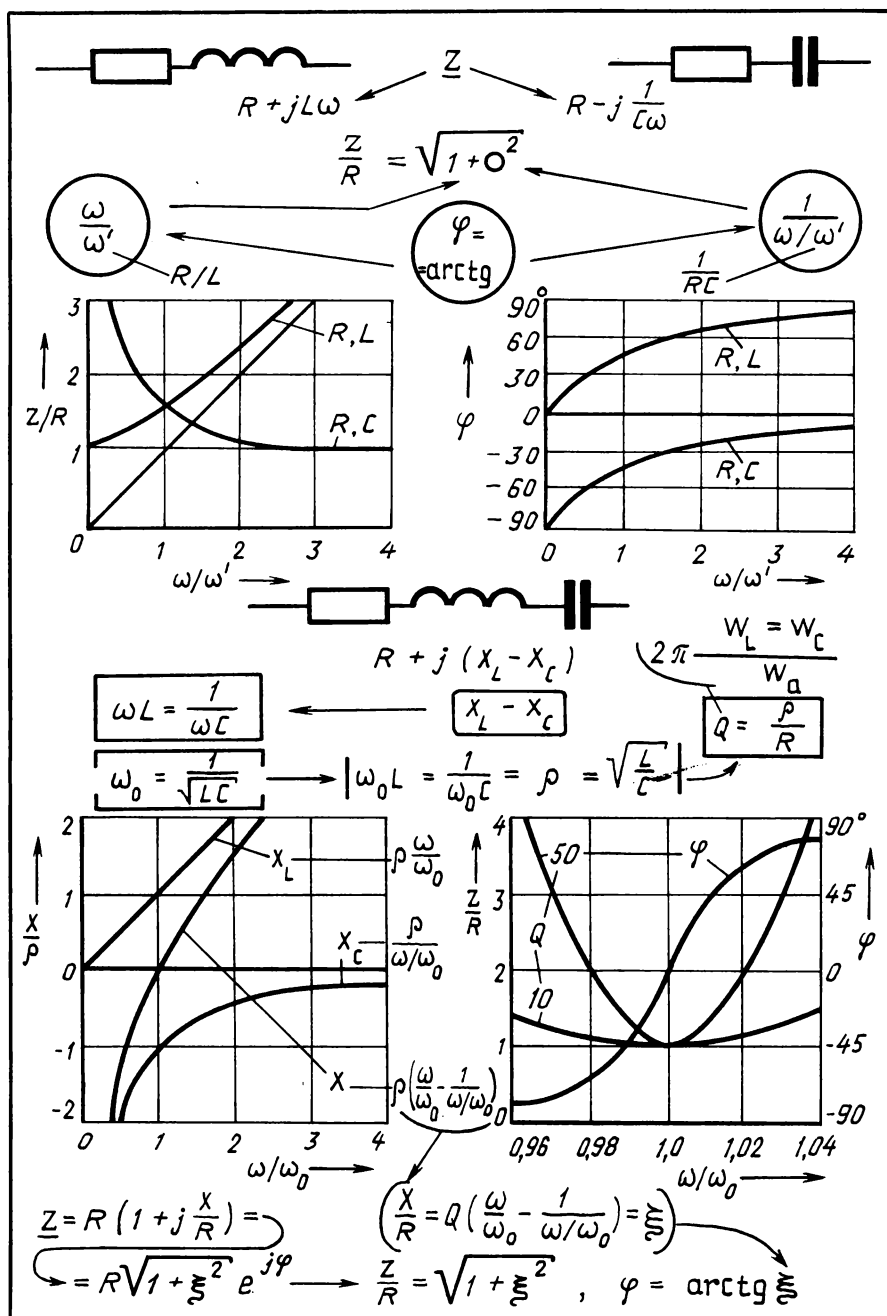
Соотношение активных, реактивных и полных величин иллюстрируют два прямоугольных треугольника (см. с. 36). Напомним, что синусоидальное напряжение (ток) мы заменили вращающимся радиусом-вектором. Длина вектора равна амплитуде (или действующему значению), и вращается он в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, с угловой скоростью  $\omega$ . Положение вектора на плоскости можно указать комплексным числом. Между комплексными напряжениями (токами) и их уравнениями для мгновенных значений есть соответствие: от уравнений для  $u(t)$ ,  $i(t)$  можно перейти к комплексным  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ , и наоборот.

Изученные в I разделе методы применимы и для расчета цепей при синусоидальном напряжении, если заменить входящие в уравнения величины комплексными. Правильность расчета проверяем по балансу активных и реактивных мощностей или же с помощью векторных диаграмм, построенных по уравнениям Кирхгофа.

### III. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВХОДНЫХ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕПЕЙ

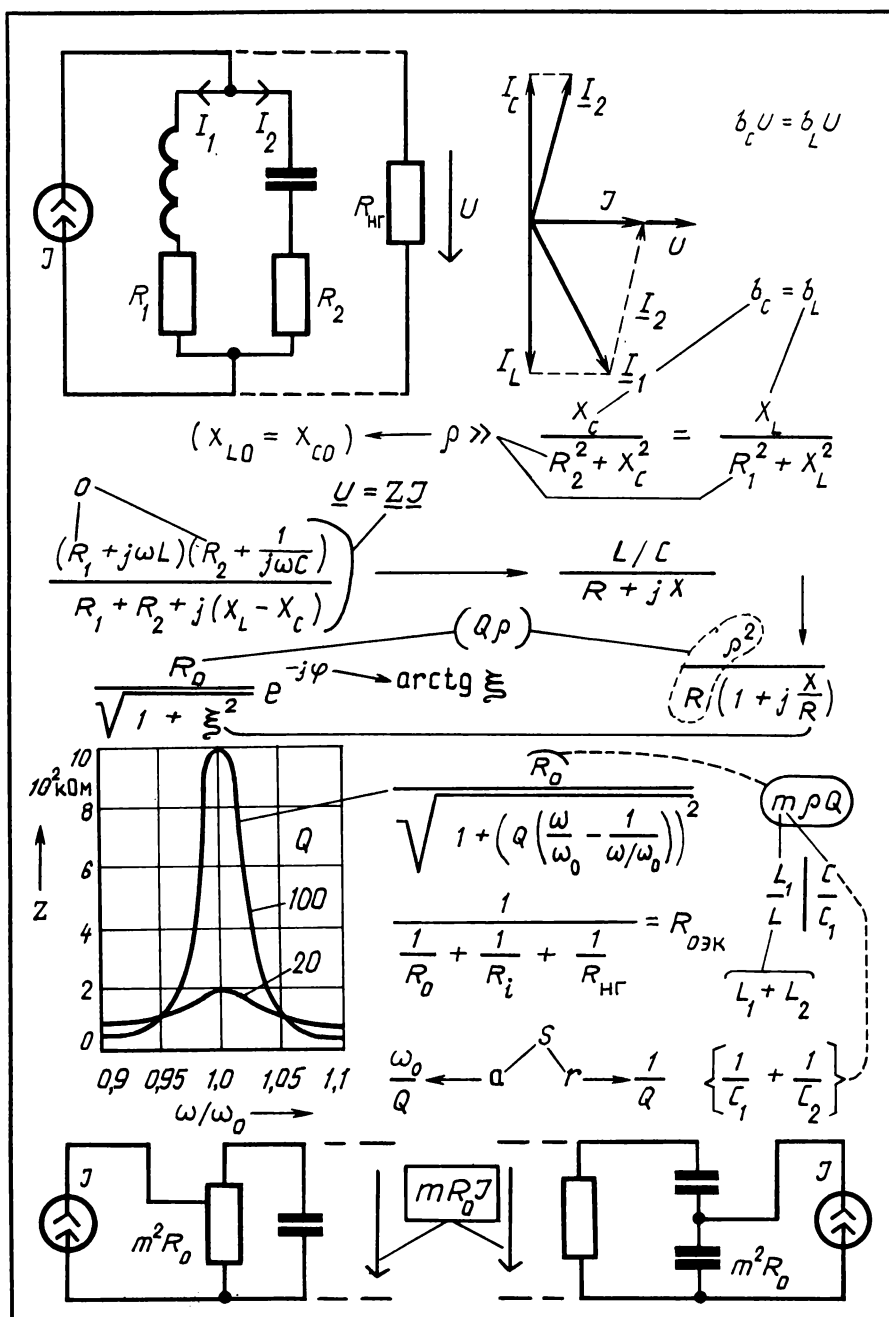
Отношение вынужденной реакции к входному воздействию мы называли функцией цепи. В зависимости от того, где (на входе или на выходе) рассматривается реакция, различают функции входные и передаточные. Последние определяются данными цепи (какие элементы ее образуют, сколько их, как соединены) и не зависят от значений амплитуд и начальных фаз воздействия. Поскольку в формулы сопротивлений  $X_L$  и  $X_C$  входит  $\omega$ , то входные и передаточные функции зависят от частоты. При полном их исследовании надо рассматривать изменение частоты от нуля до бесконечности; для практических задач можно ограничиться узким диапазоном частот или даже одним значением. Примером таких задач являются резонансные цепи, или колебательные контуры. Они обладают частотной избирательностью — способностью выделять колебания определенной частоты из совокупности синусоидальных колебаний одинаковых амплитуд, но различных частот. Для увеличения частотной избирательности применяют усилители. В схемах замещения цепей с усилителями (активных цепей) появляются управляемые источники. Улучшить форму частотной характеристики, приблизить ее к идеальной позволяют связанные колебательные контуры. Ниже приведены обобщенные амплитудно-частотные характеристики передаточной функции одиночного (кривая 1) и связанных (кривые 2,3) контуров.



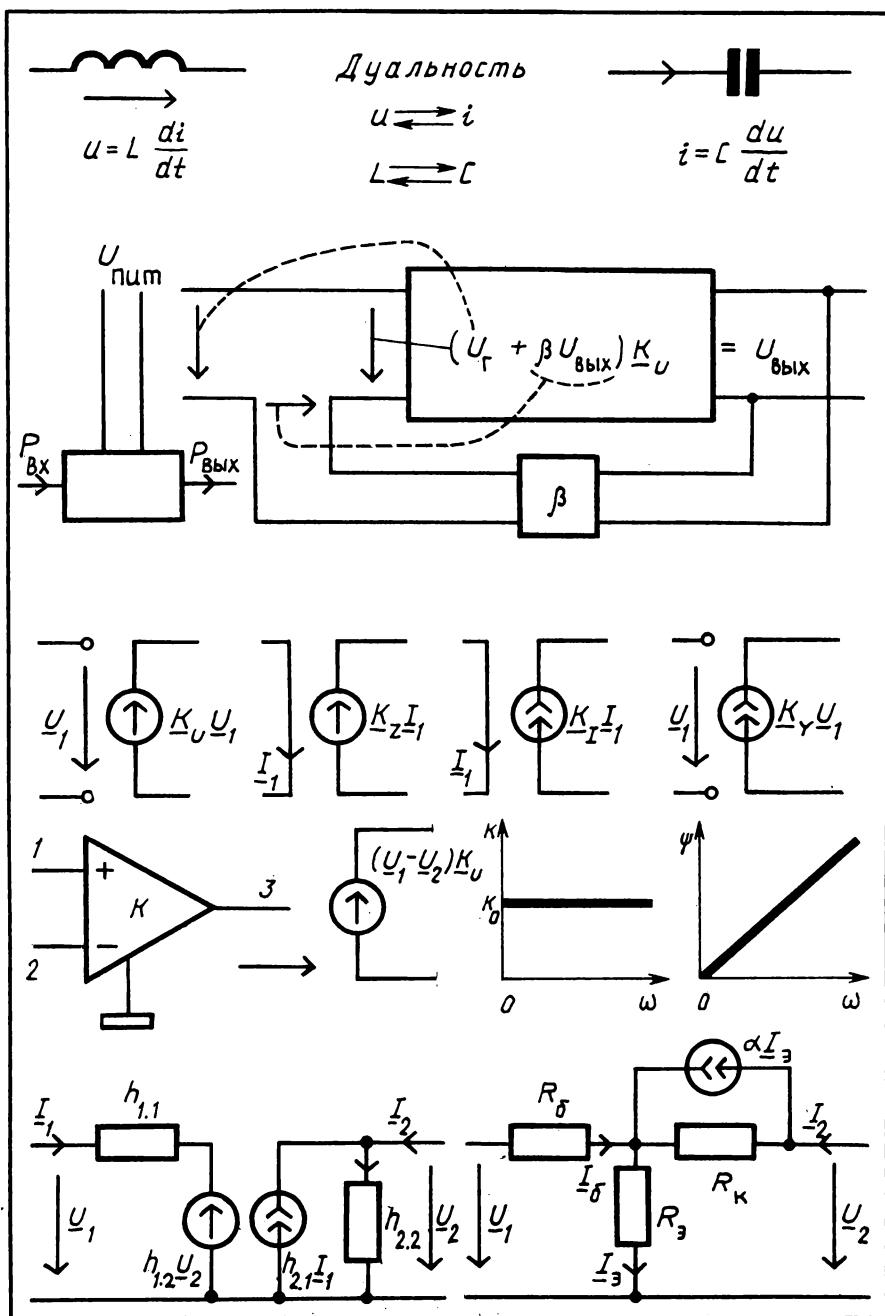


Мнемосхема 10

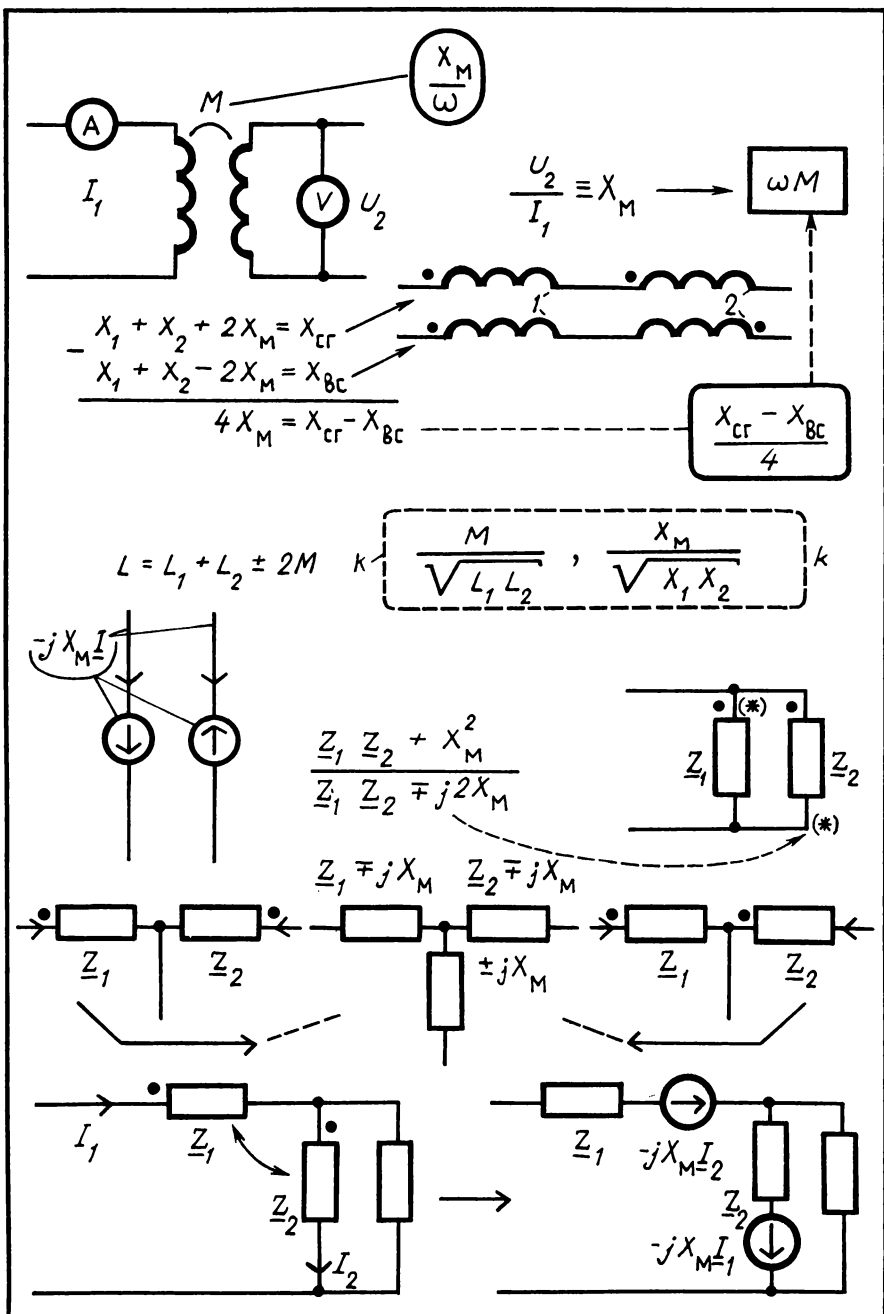




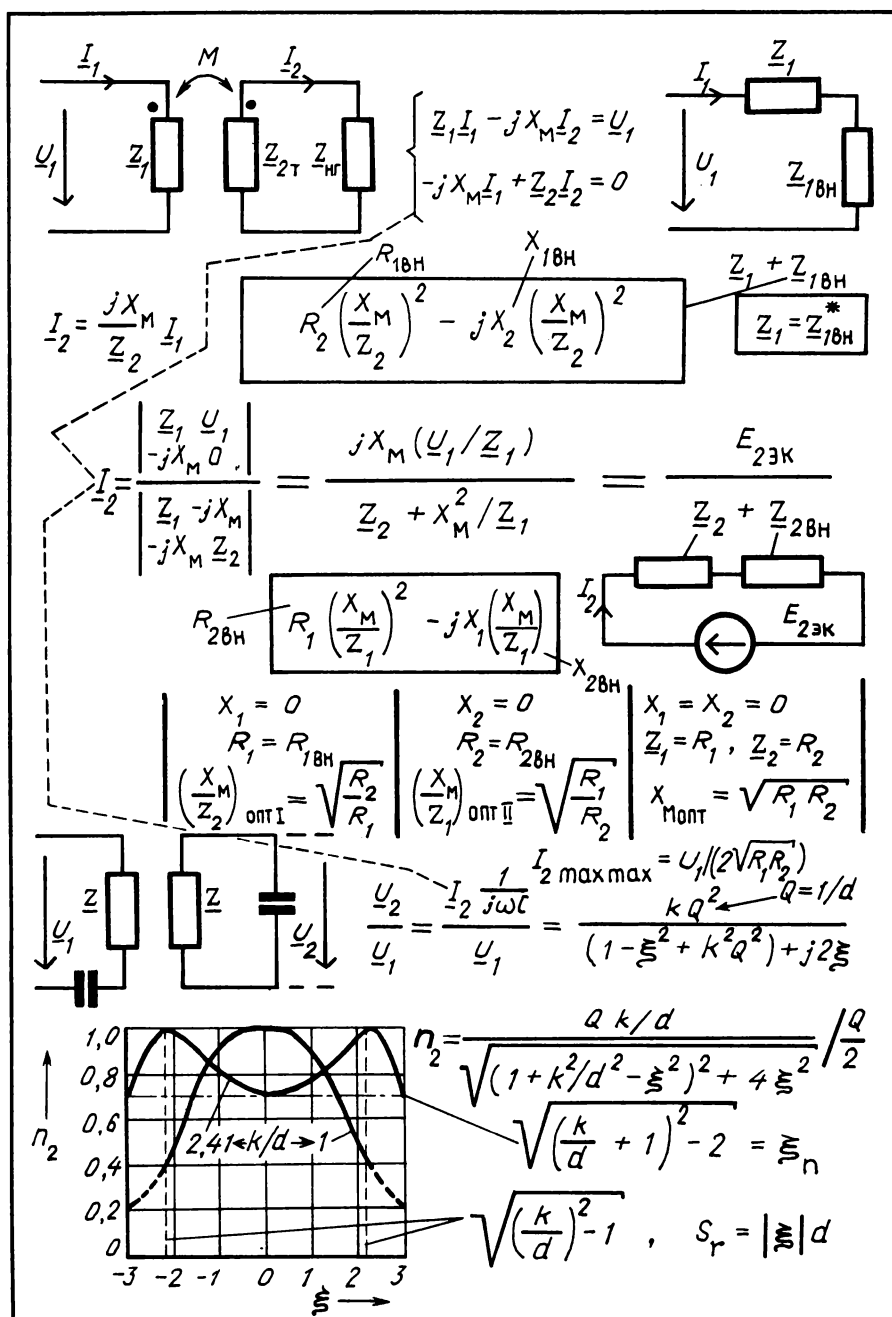
Мнемосхема 12



Мнемосхема 13



Мнемосхема 14



Мнемосхема 15

## 10. Частотные характеристики входного сопротивления

### 10.1. Частотные характеристики входного сопротивления последовательной $RL$ -цепи

Входное комплексное сопротивление цепи, схема которой показана на рис. 10.1, а,

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

является функцией угловой частоты  $\omega$ . Эту функцию — зависимость  $\underline{Z}(\omega)$  — называют *комплексной частотной характеристикой* входного сопротивления. Чтобы построить ее график, приходится отдельно показывать вещественную и мнимую части (рис. 10.1, б).

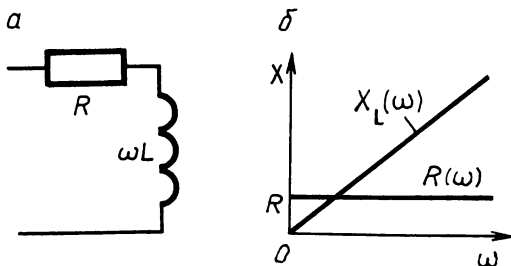


Рис. 10.1

С увеличением частоты  $f$  или пропорционально ей угловой частоты  $\omega = 2\pi f = 6,28f$  активное сопротивление практически не изменяется. Индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L$  увеличивается по линейной зависимости, начиная с нуля при  $\omega = 0$ , т.е. при постоянном токе.

Зависимость  $R(\omega)$  называют *вещественной*, а  $X_L(\omega)$  — *мнимой частью частотной характеристики* входного сопротивления.

Если записать входное комплексное сопротивление в показательной форме:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi},$$

то можно построить графики зависимостей от  $\omega$  модуля (полного сопротивления) и угла:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega L / R).$$

При постоянном токе  $\omega = 0$  и полное сопротивление  $Z = R$ . С увеличением  $\omega$  полное сопротивление приближается к индуктивному  $\omega L$  (рис. 10.2, а). Разность фаз между током и напряжением (угол  $\varphi$ ) при постоянном токе равна нулю; с ростом частоты она увеличивается, приближаясь при  $\omega \rightarrow \infty$  к  $\pi/2$  (рис. 10.2, б).

Зависимость модуля  $Z(\omega)$  называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а зависимость фазы  $\varphi(\omega)$  — *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ).

Графики АЧХ и ФЧХ одной катушки (см. рис. 10.2) можно перестроить так, чтобы они были пригодны для всех катушек, т.е. обобщить их. В формуле для  $Z(\omega)$  вынесем  $R$  из-под знака радикала:

$$Z = R \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{R/L} \right)^2}.$$

Величина  $R/L$  выражается в тех же единицах, что и  $\omega$ . Назовем ее *собственной частотой цепи* и обозначим  $\omega'$ .

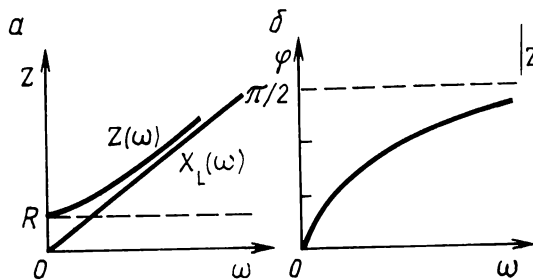


Рис. 10.2

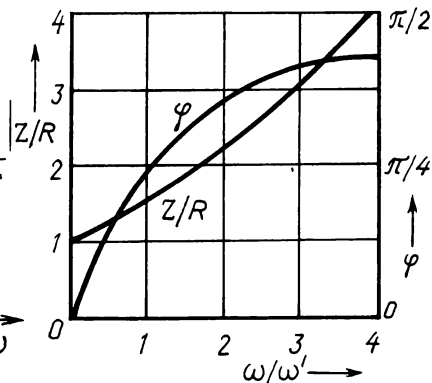


Рис. 10.3

Отношение полного сопротивления к активному

$$Z/R = \sqrt{1 + (\omega/\omega')^2}.$$

В этой формуле под знаком радикала  $\omega/\omega'$  — безразмерная величина (относительная частота).

Аналогично представим фазу как функцию относительной частоты:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega}{R/L} \right) = \arctg \frac{\omega}{\omega'}.$$

Задавшись значениями частоты, кратными  $\omega'$ , рассчитаем АЧХ и ФЧХ последовательной  $RL$ -цепи в относительных единицах (см. табл. 10.1) и покажем их на графике (рис. 10.3).

Т а б л и ц а 10.1

$\omega/\omega'$	0	1	2	4
$Z/R$	1	1,41	2,24	4,12
$\varphi$ , град	0	45	63,5	76

Расчет АЧХ и ФЧХ в относительных единицах проще, чем в именованных. Но важнее то, что одну и ту же характеристику можно использовать для всех

катушек. Операцию перехода к относительным величинам называют *нормировкой частоты и уровня сопротивлений*. При нормировке некоторые значения (в рассмотренном примере  $R$  и  $\omega'$ ) принимают за базисные; относительно их определяют нормированные частоту и сопротивление.

Чтобы показать на графике в декартовой системе координат комплексную частотную характеристику, надо построить одну из двух пар частотных характеристик: вещественную и мнимую или же амплитудную и фазовую.

1. Дайте определение комплексной частотной характеристики. Как показать ее на графике?

2. В чем преимущества графиков, построенных в относительных единицах? Как от именованных единиц перейти к относительным?

3. Постройте графики АЧХ и ФЧХ последовательной  $RL$ -цепи в относительных единицах.

## 10.2. Частотные характеристики входного сопротивления последовательной $RC$ -цепи

Комплексное входное сопротивление цепи, схема которой показана на рис. 10.4, а,

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C}.$$

Вещественную частотную характеристику  $R(\omega)$  представим горизонтальной прямой. Мнимая часть,  $1/(\omega C)$ , при  $\omega = 0$  бесконечно велика. С увеличением  $\omega$  она уменьшается по гиперболическому закону (рис. 10.4, б).

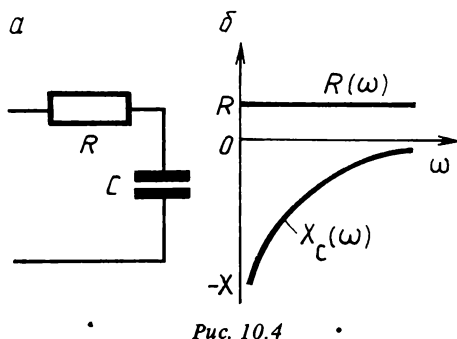


Рис. 10.4

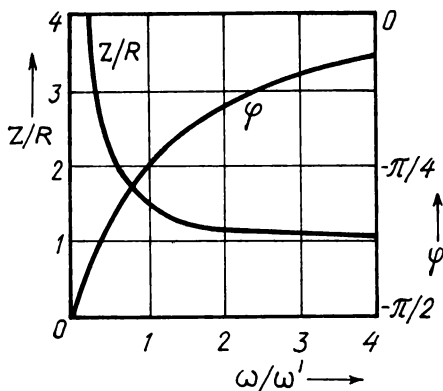


Рис. 10.5

Другую пару частотных характеристик — АЧХ и ФЧХ — построим для безразмерных величин. Примем  $R$  в качестве базисной величины и вынесем ее за скобки. Полное сопротивление

$$Z = R \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\omega RC} \right)^2}.$$

Величина  $RC$  выражается в секундах ( $\text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{Кл} / \text{В} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с} / \text{В} = \text{Ом} \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{с} = \text{с}$ ). Обратную ей величину  $1/(RC)$  обозначим  $\omega'$  и назовем *собственной частотой цепи*.

Отношение сопротивлений

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\omega/\omega'} \right)^2},$$

где  $\omega/\omega'$  — относительная частота, т.е. кратность частоты питающего напряжения по отношению к базисной частоте  $\omega'$ .

Аргумент комплексного сопротивления

$$\varphi = \arctg \left( - \frac{1}{\omega RC} \right) = - \arctg \frac{1}{\omega/\omega'}.$$

Рассчитаем (табл. 10.2) и построим АЧХ и ФЧХ последовательной  $RC$ -цепи (рис. 10.5).

Т а б л и ц а 10.2

$\omega/\omega'$	0	0,25	0,5	1	2	4
$Z/R$	$\infty$	4,12	2,24	1,41	1,12	1,03
$-\varphi$ , град	90	76	63,5	45	27	14

При частоте  $4\omega'$  полное сопротивление отличается от активного всего на 3 %, а разность фаз между током и напряжением  $\varphi = 14^\circ$ , или  $\cos \varphi = 0,97$ .

При частоте  $0,02\omega'$  угол  $\varphi = -89^\circ$ , т.е. практически напряжение опережает ток на  $90^\circ$ .

1. Докажите, что произведение  $RC$  выражается в единицах времени.

2. Выведите формулы для АЧХ и ФЧХ последовательной  $RC$ -цепи. Постройте их графики.

1.1. Вычислите собственную частоту катушки с параметрами:

а)  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 2 \text{ мГн}$ .

♦ Находим:  $\omega' = R/L = 20 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  или  $f' = \omega'/(2\pi) = 3,2 \text{ кГц}$ ; □

б)  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,2 \text{ Гн}$  [ 32 кГц].

1.2. По АЧХ и ФЧХ последовательной  $RL$ -цепи (см. рис. 10.3) вычислите  $Z$  и  $X$  в условиях задачи 1.1, а, если:

а)  $\omega = \omega'$ .

♦ Относительной частоте  $\omega/\omega' = 1$  соответствуют  $Z/R = 1,41$  и угол  $\varphi = 45^\circ$ . Полное сопротивление  $Z = 1,41R = 56,4 \text{ Ом}$ , индуктивное  $X_L = Z \sin \varphi = 56,4 \sin 45^\circ = 40 \text{ Ом}$ ; □

б)  $\omega/\omega' = 2$ .

♦ Из рис. 10.3 находим:  $Z/R = 2,24$ ,  $\varphi = 63,5^\circ$ . Тогда  $Z = 2,24 \cdot 40 = 89,6 \text{ Ом}$ ,  $X = Z \sin 63,5^\circ = 80,2 \text{ Ом}$ . Комплексное сопротивление  $Z = 89,6 e^{j63,5^\circ} = (40 + j 80,2) \text{ Ом}$ . □

### 10.3. Резонанс напряжений

Катушка индуктивности и конденсатор, включенные последовательно, образуют колебательную цепь, или последовательный колебательный контур. Схема замещения контура состоит из активного сопротивления, индуктивности и емкости (рис. 10.6). Активным сопротивлением учитываем потери мощности в катушке и конденсаторе.

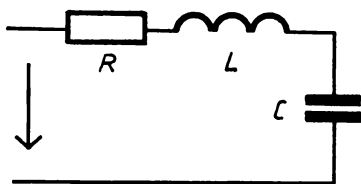


Рис. 10.6

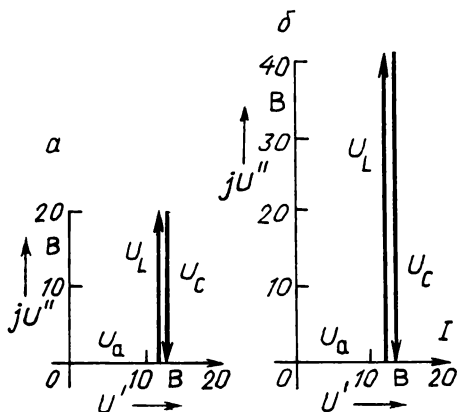


Рис. 10.7

Ранее отмечалась способность индуктивного и емкостного сопротивлений компенсировать друг друга. Если же они равны, то реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C = 0$ , комплексное входное сопротивление  $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R$ .

Разность фаз между током и напряжением  $\varphi = \arctg(X/R) = 0$ .

Явление, при котором в последовательной  $RLC$ -цепи напряжение и ток совпадают по фазе, называют *резонансом напряжений*.

Условие резонанса напряжений – равенство сопротивлений:

$$X_L = X_C. \quad (10.1)$$

Признаки резонанса напряжений:

- 1) угол  $\varphi = 0$ ;
- 2) ток имеет наибольшее значение:  $I_0 = U/R$ . Так как  $X = 0$ , полное сопротивление минимально и равно  $R$ .
- 3) индуктивное и емкостное напряжения равны по абсолютной величине и противоположны по фазе (рис. 10.7):

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I}; \quad \underline{U}_C = -jX_C \underline{I}.$$

Относительно  $\underline{I}$  векторы  $\underline{U}_C$  и  $\underline{U}_L$  повернуты на  $90^\circ$ : первый в направлении движения часовой стрелки, второй – в противоположном направлении.

По модулю индуктивное и емкостное напряжения (каждое в отдельности) могут значительно превышать входное напряжение. Например,  $X_L = X_C$  заменим сопротивлениями, в  $n$  раз большими. Ток  $I_0 = U/R$  сохранит прежнее значение, а напряжения увеличатся в  $n$  раз:

$$U_L = nX_L I_0; \quad U_C = nX_C I_0.$$

Это свойство последовательного колебательного контура используют для усиления напряжения.

Из условия резонанса  $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$  (см. формулу (10.1)) находим угловую резонансную частоту:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Индуктивное сопротивление на резонансной частоте

$$X_{L0} = \omega_0 L = L/\sqrt{LC} = \sqrt{L/C}$$

или равное ему емкостное сопротивление

$$X_{C0} = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{LC}/C = \sqrt{L/C}$$

называют *характеристическим*:

$$X_{L0} = X_{C0} = \sqrt{L/C} = \rho. \quad (10.2)$$

1. Что такое резонанс напряжений? При каком условии он возможен?

2. Перечислите признаки резонанса.

3. Выведите формулы для  $\omega_0$ ,  $\rho$  и заучите их.

2.1. Вычислите собственную частоту последовательной  $RC$ -цепи, если:

а)  $R = 2 \text{ кОм}$ ,  $C = 2 \text{ мкФ}$ .

♦  $\omega = 1/(RC) = 250 \text{ с}^{-1}$ ,  $f = \omega/(2\pi) = 40 \text{ Гц}$ ; □

б)  $R = 0,5 \text{ МОм}$ ,  $C = 40 \text{ пФ}$  [  $7,96 \text{ кГц}$  ].

#### 10.4. Добротность

*Добротность*  $Q$  — это отношение характеристического сопротивления к активному:

$$Q = \rho/R.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на  $I$ . В числителе будет емкостное резонансное напряжение  $U_{C0}$ , так как  $\rho = X_{C0}$  (см. формулу (10.2)), а в знаменателе — входное напряжение  $U$ , т.е.

$$Q = \rho/R = U_{C0}/U.$$

Добротность контура показывает, во сколько раз резонансные индуктивное и емкостное напряжения ( $U_{L0} = U_{C0}$ ) больше входного напряжения.

Обратимся теперь к энергетическим соотношениям. В известные из курса физики выражения для вычисления энергии магнитного и электрического полей  $Li^2/2$ ,  $Cu_c^2/2$  подставим уравнения тока и напряжения (последнее отстает от тока на  $\pi/2$ , как показано на рис. 10.8)  $i = I\sqrt{2} \sin \omega_0 t$ ,  $u = -U_c\sqrt{2} \cos \omega_0 t$ . Получим:  $LI^2 \sin^2 \omega_0 t$ ,  $CU_c^2 \cos^2 \omega_0 t$ .

Докажем, что максимальные значения энергий равны между собой. Заменим  $U_c$  и  $\rho$  на  $\rho I$  и  $\sqrt{L/C}$ :

$$CU_c^2 = C(\rho I)^2 = CI^2 \frac{L}{C} = LI^2.$$

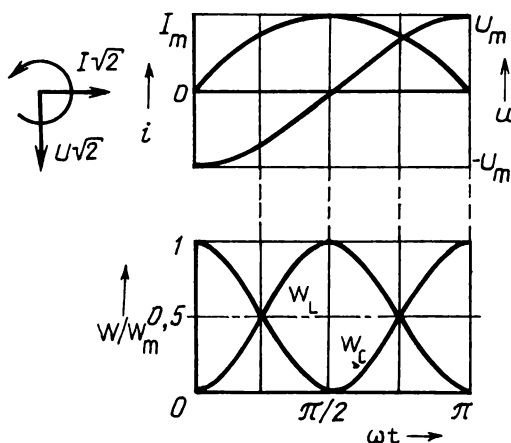


Рис. 10.8

Сумма энергий  $LI^2 \sin^2 \omega_0 t + CU_c^2 \cos^2 \omega_0 t = LI^2 = CU_c^2$ ,

так как  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Сумма энергий электрического и магнитного полей в любой момент времени равна максимальной энергии одного из них. Во времени она не изменяется, только перераспределяется между индуктивностью и емкостью. Примем  $LI^2 = CU_c^2 = 1$  и построим кривые  $\sin^2 \omega_0 t$  и  $\cos^2 \omega_0 t$  за полпериода (см. рис. 10.8). Сумма их ординат в любой момент времени равна единице, т.е. сумма графиков — горизонтальная прямая.

Источник в режиме резонанса не обменивается энергией с индуктивностью и емкостью. Он питает только активное сопротивление, расходуя за период  $T_0$  энергию  $RI^2 T_0$ .

Отнесем максимальную энергию  $W_L$  к активной энергии  $W_a$  за период:  $LI^2 / (RI^2 T_0)$ . Заменяя  $T_0$  на  $2\pi / \omega_0$  (из очевидного соотношения  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ ), будем иметь  $\frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0 L}{R}$ . Здесь  $\omega_0 L = \rho$  — характеристическое сопротивление, а  $\rho / R = Q$  — добротность. Получим  $W_L / W_a = Q / (2\pi)$ , откуда

$$Q = 2\pi \frac{W_L}{W_a}. \quad (10.3)$$

Добротность в 6,28 раза больше отношения энергии  $W_L$  (или равной ей  $W_C$ ) к активной энергии за период. Выражение (10.3) справедливо для колебательных контуров всех видов — последовательного, параллельного и сложного.

В технике связи используют контуры среднего ( $Q = 50 \dots 100$ ), хорошего ( $Q = 100 \dots 200$ ) и отличного ( $Q = 200 \dots 500$ ) качества. Такая добротность (на ферритовых сердечниках — до 500) получается на частотах от 50 кГц до 5 МГц. При  $f > 5$  МГц добротность снижается из-за потерь в конденсаторе и катушке, а при  $f < 50$  кГц невозможно выполнить катушку с большим индуктивным сопротивлением при малом активном.

1. Запишите  $Q$  как отношение сопротивлений, напряжений, энергий.

2. Докажите, что суммарная колебательная энергия не изменяется во времени.

3. Выведите формулу добротности из отношения колебательной и активной энергий за период.

3.1. Для цепи, схема которой показана на рис. 10.6,  $R = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $U = 12 \text{ В}$ . Постройте векторную диаграмму.

◇ Входное сопротивление контура  $Z = R + j(X_L - X_C) = 6 \text{ Ом}$ . Ток  $I = U/R = 2 \text{ А}$ . Напряжения на элементах:  $U_a = RI = 12 \text{ В}$ ,  $U_L = jX_L I = j20 \text{ В}$ ,  $U_C = -jX_C I = -j20 \text{ В}$ . Выбрав масштаб для тока и напряжения, отложим векторы  $I$ ,  $U_a$  на действительной оси (см. рис. 10.7, а). Из конца вектора  $U_a$  построим параллельно мнимой оси вектор  $U_L = j20 \text{ В}$ , к нему "пристроим" вектор  $U_C = -j20 \text{ В}$ . □

3.2. Как изменятся напряжения  $U_L$  и  $U_C$ , вычисленные при решении задачи 3.1, если увеличить реактивные сопротивления  $X_L = X_C$  в два раза?

◇ Ток не изменится:  $I = U/R = 2 \text{ А}$ . Напряжения, как и сопротивления, увеличатся в два раза:  $U_L = U_C = 40 \text{ В}$  (см. рис. 10.7, б). □

3.3. В последовательном колебательном контуре  $L = 100 \text{ мкГн}$  и  $C = 400 \text{ пФ}$ . Определите  $\omega_0$  и  $\rho$ .

◇ Угловая резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  или  $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 0,8 \text{ МГц}$ .

Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 500 \text{ Ом}$  или  $\rho = \omega_0 L = 500 \text{ Ом}$ . □

3.4. Вычислите  $f_0$  и  $\rho$ , если  $L = 20 \text{ мГн}$ ,  $C = 12,5 \text{ мкФ}$  [318 Гц, 40 Ом].

## 10.5. Частотные характеристики входного сопротивления последовательного контура

Комплексное входное сопротивление последовательного колебательного контура (см. рис. 10.6)  $Z = R + jX$ .

График вещественной части частотной характеристики  $R(\omega)$  — прямая линия. Чтобы построить мнимую часть  $X(\omega)$ , примем за базисную величину резонансную частоту  $\omega_0$ . Индуктивное и емкостное сопротивления выразим через характеристическое сопротивление  $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$  и относительную частоту  $\omega/\omega_0$ :

$$X_L = \omega L \frac{\omega_0}{\omega_0} = \rho \frac{\omega}{\omega_0}; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\rho}{\omega/\omega_0}. \quad (10.4)$$

Реактивное сопротивление — разность этих выражений:

$$X = \rho \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega/\omega_0} \right). \quad (10.5)$$

Задав произвольными значениями относительной частоты  $\omega/\omega_0$  (табл. 10.3), рассчитаем относительное сопротивление:

$$\frac{X}{\rho} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega/\omega_0},$$

и построим график мнимой части частотной характеристики комплексного входного сопротивления (рис. 10.9).

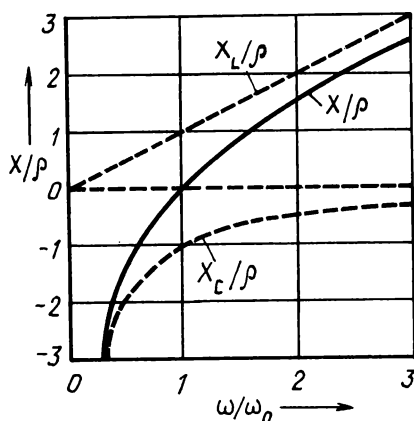


Рис. 10.9

Таблица 10.3

$\omega / \omega_0$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
$X/\rho$	$-\infty$	-2,1	-0,45	0,36	0,97	1,5

В режиме резонанса, когда  $\omega = \omega_0$  (или относительная частота  $\omega/\omega_0 = 1$ ), сопротивление  $X = 0$ . При частоте  $\omega < \omega_0$  реактивное сопротивление имеет емкостный характер, при  $\omega > \omega_0$  — индуктивный. Как с уменьшением частоты ( $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$ ), так и с ее увеличением ( $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ ) реактивное сопротивление стремится к бесконечности.

Выведем уравнения для другой пары частотных характеристик — амплитудной и фазовой. В выражении для комплексного сопротивления  $\underline{Z} = R + jX$  вынесением  $R$  за скобки:

$$\underline{Z} = R \left( 1 + j \frac{X}{R} \right).$$

Отношение  $X/R = \operatorname{tg} \varphi = \xi$  (см. треугольник сопротивлений) называют *обобщенной расстройкой контура*. Тогда уравнения для АЧХ и ФЧХ имеют соответственно вид:

$$Z/R = \sqrt{1 + \xi^2}; \quad (10.6)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \xi. \quad (10.7)$$

Формулу, связывающую обобщенную расстройку с относительной частотой, получим, разделив выражение (10.5) на  $R$  и заменив  $\rho/R$  добротностью:

$$\xi = Q \left( \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \right). \quad (10.8)$$

Чтобы упростить ее, приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega}.$$

Примем  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$ . После сокращения на  $\omega$  получаем

$$2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right),$$

где  $\omega - \omega_0$ ,  $\omega/\omega_0 - 1$  — соответственно абсолютная и относительная расстройки контура.

Окончательно имеем

$$\xi = 2Q(\omega/\omega_0 - 1). \quad (10.9)$$

Значения  $\xi$ , подсчитанные по формулам (10.8) и (10.9), в интервале частот  $\omega = (0,9 \dots 1,1)\omega_0$  практически совпадают. На границах этого диапазона точная формула дает  $-0,21$  и  $0,19$ , приближенная  $\mp 0,20$ . Ошибка не превышает 5 %.

1. Постройте график частотной характеристики мнимой части  $Z$ , запишите ее аналитическое выражение.

2. Что такое абсолютная, относительная и обобщенная расстройки контура? Выведите упрощенную формулу для  $\xi$ .

3. Запишите уравнения для АЧХ и ФЧХ комплексного сопротивления.

4.1. Вычислите добротность контура и емкостное напряжение, если на входе  $U = 10$  мВ, а сопротивления:

а)  $\rho = 800$  Ом,  $R = 16$  Ом.

♦ Находим:  $Q = \rho/R = 50$ ,  $U_C = QU = 0,5$  В; □

б)  $\rho = 1,5$  кОм,  $R = 15$  Ом [ $Q = 100$ ,  $U_{C0} = 1$  В].

4.2. Вычислите добротность из соотношения энергий  $W_L$  и  $W_a$ , если  $L = 0,3$  мГн,  $R = 30$  Ом,  $I = 0,5$  А,  $T_0 = 1$  мкс.

♦ Находим:  $LI^2 = 7,5 \cdot 10^{-6}$  Дж,  $RI^2 T_0 = 7,5 \cdot 10^{-6}$  Дж. Отношение  $W_L/W_a = 10$ ,  $Q = 62,8$  (см. формулу (10.3)).

Сравним: характеристическое сопротивление  $\rho = \omega_0 L = 2\pi \frac{1}{T_0} L = 1,88$  кОм, добротность  $Q = \rho/R = 62,8$ . □

4.3. Сравните отношение энергий колебательной и активной, поглощаемой за период, для контура с добротностью, равной 10 и 314.

♦ Из формулы (10.3) находим:

$$(W_L = W_C)/W_a = Q/(2\pi).$$

Для заданных значений  $Q$  получаем 1,6 и 50. Таким образом, чем выше добротность контура, тем меньшую часть колебательной энергии составляет энергия, поглощаемая в активном сопротивлении. □

4.4. Вычислите абсолютную, относительную и обобщенную расстройки контура с добротностью 50 для частоты:

а)  $\omega = 0,98 \omega_0$ .

♦ Абсолютная, относительная и обобщенная расстройки равны соответственно:

$$0,98 \omega_0 - \omega_0 = -0,02 \omega_0; \quad \omega/\omega_0 - 1 = -0,02; \quad \xi = 2Q(\omega/\omega_0 - 1) = -2; \quad \square$$

б)  $\omega = 1,04 \omega_0$  [ $0,04 \omega_0$ ;  $0,04$ ;  $4$ ].

5.1. Постройте графики АЧХ и ФЧХ входного сопротивления контуров с добротностью 50 и 10.

◇ Задавшись значениями  $\omega/\omega_0$ , по формулам (10.9) и (10.6) вычислим  $\xi$  и  $Z/R$  (см. табл. 10.4). По формуле (10.7) найдем  $\varphi$ .

Т а б л и ц а 10.4

$\omega/\omega_0$	1	0,98; 1,02	0,96; 1,04
$Z/R$	0	2,12	4,1
$\varphi$ , град	0	$\mp 63,5$	$\mp 76$

Таблицу, аналогичную табл. 10.4, заполним для  $Q = 10$ . Графики АЧХ и ФЧХ приведены на мнемосхеме 10. □

## 11. Последовательный колебательный контур

### 11.1. Амплитудно- и фазочастотная характеристики тока

Предположим, что на входе контура напряжение поддерживается неизменным, а частота его может изменяться от 0 до  $\infty$ . Из формулы (10.6) полное сопротивление как функция обобщенной расстройки

$$Z(\xi) = R \sqrt{1 + \xi^2},$$

а ток

$$I = U / (R \sqrt{1 + \xi^2}).$$

Здесь  $U/R = I_0$  — ток при обобщенной расстройке  $\xi = 0$ , т.е. на резонансной частоте  $\omega_0$ .

Отношение  $I(\omega)$  к резонансному току

$$I/I_0 = 1/\sqrt{1 + \xi^2}. \quad (11.1)$$

Это уравнение АЧХ тока в относительных единицах. ФЧХ строим по уравнению (10.7).

Рассчитаем АЧХ и ФЧХ тока при изменении частоты от  $0,8\omega_0$  до  $1,2\omega_0$  для контура с добротностью 10 и 100.

◇ Диапазон заданной частоты разобьем на интервалы так, чтобы вблизи  $\omega_0$  они были поменьше (см. первую строку табл. 11.1). Вычислим обобщенную расстройку  $\xi = Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ , а по формуле (11.1) — отношение  $I/I_0$ . На микрокалькуляторе или по таблицам тангенсов находим углы  $\varphi$ . Так, при  $\omega/\omega_0 = 0,8$   $\xi = -4,5$ ,  $I/I_0 = 0,22$ ,  $\varphi = -77,5^\circ$ .

Откладываем по горизонтали относительную частоту, а по вертикали — отношение токов  $I/I_0$  (рис. 11.1, а) или значения углов (рис. 11.1, б). Ветви кривых на рис. 11.1, а несимметричны относительно вертикали, проведенной из точки  $\omega/\omega_0 = 1$ , правые ветви идут немного выше.

Таблица 11.1

$\omega/\omega_0$	0,8	0,9	0,95	0,98	1	1,02	1,05	1,1	1,2
$\xi$	-4,5	-2,1	-1	-0,4	0	0,4	0,9	1,9	3,7
$I/I_0$	0,22	0,43	0,7	0,93	1	0,94	0,74	0,46	0,26
$\varphi$ , град	-77,5	-64,5	-45	-22	0	21	43,5	62	75

Аналогично рассчитаем и построим АЧХ и ФЧХ при  $Q = 100$  в диапазоне частот  $(0,9 \dots 1,1) \omega_0$ . □

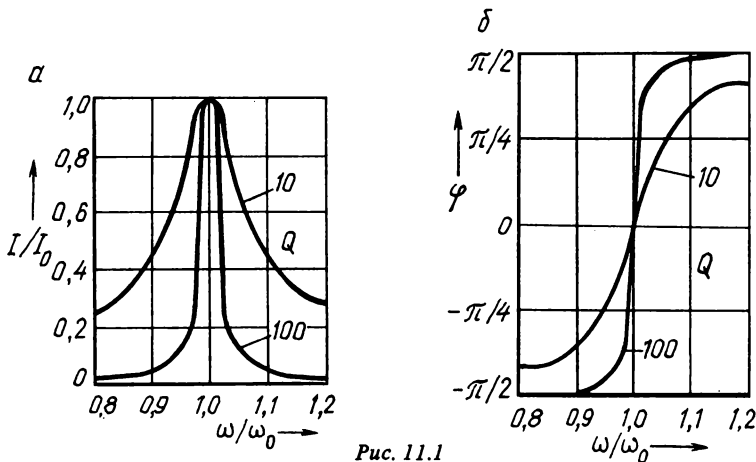


Рис. 11.1

Сравним амплитудные характеристики. Ток имеет наибольшее значение при резонансе. С увеличением расстройки (абсолютной  $\omega - \omega_0$ , относительной  $\omega/\omega_0 - 1$  или обобщенной  $\xi$ ) он затухает, составляя 5 % от  $I_0$  на частоте, отличающейся от  $\omega_0$  всего на 10 %. Контур с большей добротностью характеризуется кривой более узкой формы, а ее ветви становятся практически симметричными относительно вертикали. Форма графика фазовой характеристики с увеличением добротности приближается к прямоугольной (см. рис. 11.1, б).

1. По каким уравнениям рассчитывают АЧХ и ФЧХ тока? Начертите их графики для контуров с добротностью 10 и 100. Сравните их.
2. Как будут выглядеть АЧХ и ФЧХ, если  $Q = 2$ ; 500? Рассчитайте для одной ветви 1–2 точки и покажите их на графике.
3. Зависит ли резонансный ток  $I_0$  от добротности? .

## 11.2. Передаточная функция

В последовательном колебательном контуре емкостное напряжение используют как выходное. Отношение  $U_C$  к входному напряжению  $U$  называют коэффициентом передачи по напряжению.

Зависимость коэффициента передачи по напряжению от частоты — это *передаточная частотная характеристика*, или *передаточная функция*.

Используя формулы (10.4) и (11.1), емкостное напряжение  $X_C I$  запишем так:

$$U_C = \frac{\rho}{\omega/\omega_0} \frac{I_0}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Стоящее в числителе этой формулы резонансное напряжение  $\rho I_0 = U_{C0} = QU$ . Коэффициент передачи по напряжению

$$U_C/U = Q / \left( \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1+\xi^2} \right). \quad (11.2)$$

Подставим сюда  $\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega}$  и внесем отношение  $\omega/\omega_0$  под знак радикала:

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^2 + Q^2 ((\omega/\omega_0)^2 - 1)^2}}.$$

Это уравнение передаточной функции. Подставив в него  $\omega = 0$ , получим  $U_C/U = 1$ , т.е. выходное напряжение равно входному. Если  $\omega = \infty$ , то  $U_C/U = 0$ , т.е. на выходе напряжения нет.

Исследуем передаточную функцию на максимум. Возьмем производную от подкоренного выражения по  $\omega/\omega_0$  и приравняем ее нулю:

$$2 \frac{\omega}{\omega_0} + 2Q^2 \left( \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right) 2 \frac{\omega}{\omega_0} = 0.$$

Разделим полученное уравнение почленно на  $2Q^2 \cdot 2 \frac{\omega}{\omega_0}$ :

$$\frac{1}{2Q^2} + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 = 0,$$

откуда

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)_C = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (11.3)$$

Корень вещественный, т.е. напряжение имеет максимум, если  $1/(2Q^2) < 1$ , т.е.  $Q > 1/\sqrt{2} = 0,707$ .

Располагая координатами трех точек (начало, конец и максимум), можно судить о графике функции (рис. 11.2, а).

Аналогично для индуктивного напряжения

$$X_L I = \rho \frac{\omega}{\omega_0} \frac{I_0}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

откуда коэффициент передачи по напряжению

$$\frac{U_L}{U} = \frac{Q\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (11.4)$$

Он имеет максимальное значение при относительной частоте

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_L = \frac{1}{\sqrt{1 - 1(2Q^2)}} \quad (11.5)$$

Начало графика передаточной функции  $U_L/U$  находится в точке 0, функция достигает максимума на частоте  $\omega_L$  и при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к единице (рис. 11.2, б).

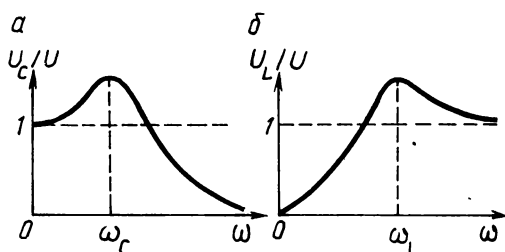


Рис. 11.2

Выражения (11.2) и (11.4) на резонансной частоте ( $\omega/\omega_0 = 1$ ,  $\xi = 0$ ) дают одинаковое значение, равное  $Q$ .

Более подробно вид графиков передаточных функций и точек их пересечения рассмотрим на примере. Рассчитаем  $U_C/U$  и  $U_L/U$  в диапазоне частот  $0 \dots 2\omega_0$  при добротности 1,18.

♦ Относительные частоты (11.3), (11.5), при которых напряжения  $U_L$  и  $U_C$  имеют максимум, равны соответственно:  $(\omega/\omega_0)_C = 0,8$ ,  $(\omega/\omega_0)_L = 1,25$ . Разобьем заданный диапазон частот на интервалы, включив и частоты  $\omega/\omega_0 = 0,8$ ; 1,25 (табл. 11.2). Вычислим  $\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega/\omega_0} \right)$ , а по формулам (11.2), (11.4) – коэффициенты  $U_C/U$ ,  $U_L/U$ .

Т а б л и ц а 11.2

$\omega/\omega_0$	0	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2
$\xi$	–	1,77	0,53	0	0,43	0,98	1,77
$U_C/U$	1	1,16	1,3	1,18	0,87	0,56	0,29
$U_L/U$	0	0,29	0,83	1,18	1,37	1,26	1,16

Строим график (рис. 11.3). Кривые  $U_L/U$  и  $U_C/U$  пересекаются при резонансной частоте ( $\omega/\omega_0 = 1$ ); максимумы их не равны между собой и превышают значение  $U_{C0}/U = 1,18$ .  $\square$

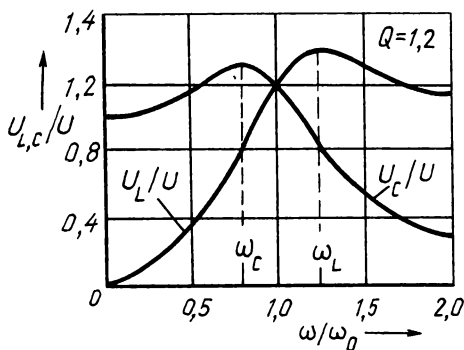


Рис. 11.3

1. Дайте определение передаточной функции.

2. Выведите уравнение для передаточных функций  $\frac{U_C}{U} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ ,  $\frac{U_L}{U} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ .

3. Постройте графики зависимостей  $U_C/U$  и  $U_L/U$  от частоты для контура малой ( $Q = 1...2$ ) добротности.

4. Выведите формулы для относительной частоты, при которой кривые  $U_L(\omega)$  и  $U_C(\omega)$  имеют максимум.

1.1. Вычислите ток в контуре при резонансе, если  $R = 5$  Ом, а на входе  $U = 0,5$  В.

◊ Находим:  $I_0 = U/R = 0,1$  А.  $\square$

1.2. Как будут выглядеть графики АЧХ и ФЧХ тока при добротности 5 и 400 (см. рис. 11.1)? Вычислите координаты одной точки и покажите характер графиков на одном рисунке.

### 11.3. Частотные характеристики высокодобротного контура, Резонансные кривые

В технике связи используются контуры высокой добротности ( $Q > 50$ ). Как видно из рис. 11.1, а, при такой добротности ток в контуре начинает резко увеличиваться при частоте, отличающейся от  $\omega_0$  всего на несколько процентов. В формулах (11.2), (11.4) можно принять  $\omega/\omega_0 = 1$ . Произведение  $UQ = U_{C0} = U_{L0}$ . Тогда отношение реактивных напряжений к резонансному выражается той же формулой (11.1), что и отношение токов:

$$U_L/U_{L0} = U_C/U_{C0} = 1/\sqrt{1 + \xi^2}. \quad (11.6)$$

Подставив значения  $\xi$ , рассчитаем эту зависимость (табл. 11.3) и затем покажем ее на графике (рис. 11.4). Она пригодна для всех контуров.

Для конкретного контура шкалу обобщенной расстройки  $\xi$  можно заме-

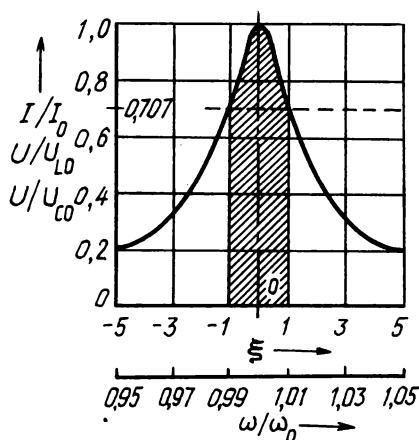


Рис. 11.4

нить шкалой относительной частоты  $\omega/\omega_0$ . Из равенства (10.9) получаем формулу для ее вычисления:

$$\omega/\omega_0 = 1 + \xi/(2Q). \quad (11.7)$$

Таблица 11.3

$\mp \xi$	0	1	2	3	4	5
$I/I_0$	1	0,71	0,45	0,32	0,24	0,20
$\mp \varphi$ , град	0	45	63,5	71,5	76	79

Так, если  $Q = 50$ , то при  $\xi = 1$  по формуле (11.7) получаем  $\omega/\omega_0 = 1,01$  или  $\omega = 1,01 \omega_0$ , т.е. частота отличается от резонансной на 1 %. При  $\xi = -1$  имеем  $\omega/\omega_0 = 0,99$ .

На рис. 11.4 под шкалой  $\xi$  приведена шкала в единицах относительной частоты.

Выпишем углы  $\varphi = \arctg \xi$  (см. табл. 11.3) и построим ФЧХ (рис. 11.5).

Разность фаз между входным и выходным напряжениями найдем из векторной диаграммы (рис. 11.6). Если частота отличается от  $\omega_0$ , то  $U_L \neq U_C$ . Пусть  $U_L > U_C$ . Складывая векторы  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$ , находим вектор входного напряжения  $\underline{U}$  и видим, что между  $\underline{U}_C$  и  $\underline{U}$  угол

$$\psi_C = \pi/2 + \varphi. \quad (11.8)$$

При частоте  $\omega = 0$  напряжение  $U_L = \omega L I \rightarrow 0$ , и вектор  $\underline{U}$  при малом  $U_a$  близок к  $\underline{U}_C$ , угол  $\psi_C \rightarrow 0$ . С увеличением частоты вектор входного напряжения приближается к вектору  $\underline{U}_L$ , а  $\angle \psi_C \rightarrow \pi$ . На рис. 11.5 изображена также ось  $\psi_C$ .

Если изменить ординаты графика (см. рис. 11.4) в  $U_{C0}$  раз, то он будет

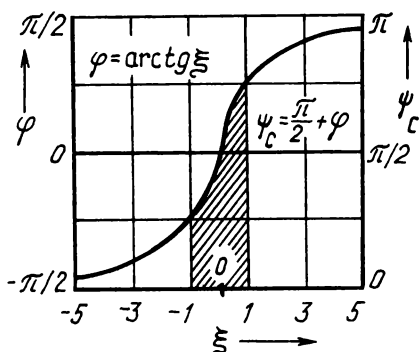


Рис. 11.5

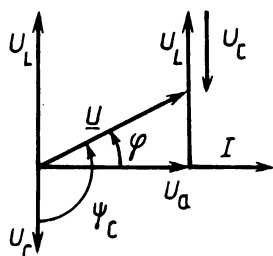


Рис. 11.6

представлять зависимость  $U_C(\xi)$  или  $U_C(\omega/\omega_0)$ . Можно от относительной частоты перейти к  $\omega$ . Получим резонансные кривые  $U_L(\omega)$ ,  $I(\omega)$  — зависимости напряжения и тока от угловой частоты.

1. Почему для контуров высокой добротности в уравнениях передаточной функции (11.2), (11.4) можно принять  $\omega/\omega_0 = 1$ ?

2. Запишите уравнения для АЧХ и ФЧХ и постройте их графики (см. рис. 11.4, 11.5).

3. Объясните, как от  $\xi$  перейти к  $\omega/\omega_0$  или  $\omega$ .

2.1. Постройте амплитудные передаточные характеристики контура с добротностью 2 при изменении частоты от 0 до  $2\omega_0$ .

♦ Частоты (11.3), (11.5), при которых  $U_L$  и  $U_C$  имеют максимумы, равны соответственно:  $(\omega/\omega_0)_C = 0,935$ ,  $(\omega/\omega_0)_L = 1,07$ . По формулам (11.2), (11.4) вычислим  $U_C/U$ ,  $U_L/U$  и сведем в таблицу, аналогичную табл. 11.2. Учтем, что  $\omega = 0$  соответствует  $U_C/U = 1$ , а  $U_L/U = 0$  (рис. 11.7). □

2.2. Сравните рис. 11.3 и 11.7. Как изменяется форма амплитудной передаточной характеристики с увеличением добротности? Что происходит с частотами  $\omega_C$  и  $\omega_L$ ?

2.3. Постройте амплитудные передаточные характеристики контура с  $Q = 10$  при частоте  $(0,6 \dots 1,4) \omega_0$ .

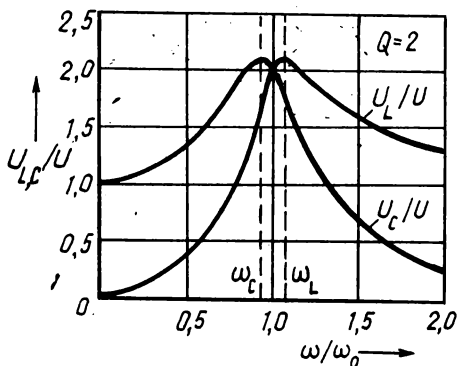


Рис. 11.7

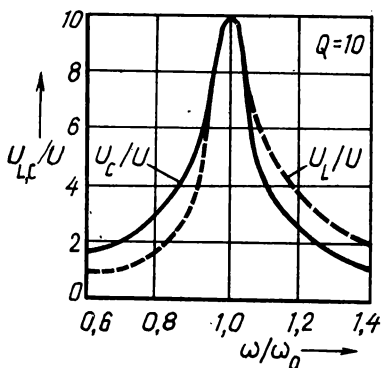


Рис. 11.8

◇ По формулам (11.3), (11.5) находим:  $(\omega/\omega_0)_C = 0,9975$ ,  $(\omega/\omega_0)_L = 1,0025$ , т.е.  $\omega_C$  и  $\omega_L$  отличаются от резонансной частоты  $\omega_0$  на 0,25 %; они близки к единице. По формулам (11.2), (11.4) вычисляем  $U_C/U$ ,  $U_L/U$  и строим кривые (рис. 11.8). Их вершины налагаются друг на друга. Это при  $Q = 10$ . Если же контур имеет еще большую добротность, то обе кривые заостряются, вытягиваются вверх и при частотах, близких к  $\omega_0$ , сливаются. Частоты  $\omega_L$  и  $\omega_C$  приближаются к  $\omega_0$ . Чем уже характеристика, тем выше частотная избирательность контура, т.е. его способность выделять напряжение одной частоты из суммы напряжений различных частот. Однако характер пересечения кривых при  $\omega_0$  остается прежним (см. рис. 11.3), он обеспечивает устойчивое состояние резонансного режима. □

2.4. Вычислите  $\omega_C$  и  $\omega_L$  для контура с  $Q = 25$ . Насколько они отличаются от  $\omega_0$ ? Сравните с задачей 2.3 [ $0,9996\omega_0$ ,  $1,0004\omega_0$ , отличие от  $\omega_0 = 0,04\%$ ].

#### 11.4. Полоса пропускания. Влияние нагрузки на полосу пропускания

*Полосой пропускания* называют диапазон частот, в котором активная мощность контура равна или больше половины его активной мощности на резонансной частоте:

$$RI^2/(RI_0^2) \geq 1/2. \quad (11.9)$$

Отсюда следует, что на границах полосы пропускания отношение токов  $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$ . Приравняв выражение (11.1) этому значению  $I/I_0 = 1/\sqrt{1+\xi^2} = 1/\sqrt{2}$  и решив два правых равенства относительно  $\xi$ , найдем обобщенную расстройку на границах полосы пропускания:  $\xi_{\Pi} = \mp 1$ . По формуле (11.7) относительные граничные частоты

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{1,2} = 1 \mp \frac{1}{2Q}.$$

Относительная полоса пропускания как разность относительных граничных частот

$$S_r = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1 = 1 + \frac{1}{2Q} - \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) = \frac{1}{Q}, \quad (11.10)$$

а абсолютная полоса пропускания

$$S_a = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q. \quad (11.11)$$

Ширину полосы пропускания можно показать на графиках АЧХ и ФЧХ. На графике АЧХ достаточно провести прямую на высоте  $I/I_0 = 1/\sqrt{2} = 0,707$  (см. рис. 11.4). Проведя перпендикуляры из точек пересечения этой прямой с характеристикой на ось абсцисс, найдем граничные относительные частоты  $(\omega/\omega_0)_1$  и  $(\omega/\omega_0)_2$  и полосу пропускания. На графике ФЧХ (см. рис. 11.5) полоса пропускания ограничена вертикальными прямыми, проходящими через точки, соответствующие разности фаз  $\varphi = \arctg(\xi = \mp 1) = \mp \pi/4$ . На рис. 11.4 и 11.5 полоса пропускания заштрихована.

При использовании последовательных контуров к емкости подключают

усилитель. Входное сопротивление усилителя является нагрузочным для контура; обозначим его  $R_H$  (рис. 11.9, а). Эквивалентное сопротивление параллельного участка а-б равно

$$\frac{-jX_C R_H}{R_H - jX_C}.$$

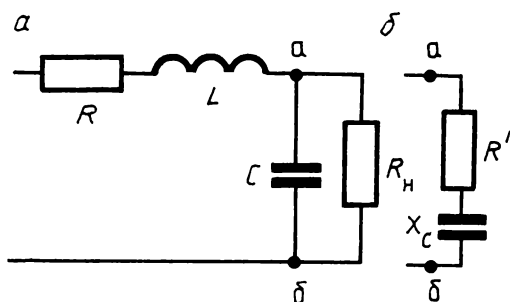


Рис. 11.9

Умножив числитель и знаменатель дроби на сопряженное комплексное число, получим

$$\frac{-jX_C R_H (R_H + jX_C)}{R_H^2 + X_C^2}.$$

Так как  $R_H \gg X_C$ , то значением  $X_C^2$  в знаменателе можно пренебречь. Раскрыв скобки и заменив  $j^2$  на  $-1$ , будем иметь  $-jX_C + X_C^2/R_H$ . В эквивалентной схеме (рис. 11.9, б) емкостное сопротивление не изменилось, но появилось активное. Если заменить в последней формуле  $X_C \approx X_{C0} = \rho$ , то

$$R' = \rho^2/R_H.$$

Активное сопротивление  $R'$  называют *вносимым сопротивлением*.

Добротность нагруженного контура — *эквивалентная добротность*

$$Q_{\text{эк}} = \rho / (R + R').$$

Нагрузка уменьшает эквивалентную добротность. Ухудшается частотная избирательность контура, увеличивается полоса пропускания (см. формулы (11.10), (11.11)). Резонансная частота и характеристическое сопротивление не изменяются.

1. Дайте определение полосы пропускания. Какими значениями она ограничена?
2. Выведите формулы для относительной и абсолютной полос пропускания.
3. Какие параметры контура изменяются и какие не изменяются при подключении нагрузки? Выведите формулу для вносимого сопротивления. Как вычислить эквивалентную добротность?

3.1. Постройте графики передаточных АЧХ и ФЧХ контура с добротностью 122 для частот в пределах полосы пропускания, если  $f_0 = 800$  кГц.

◇ Границам полосы пропускания соответствует обобщенная расстройка  $\xi = \pm 1$ . Для этих значений  $\xi$  формула (11.6) дает  $U_C/U_{C0} = 0,707$ . При  $\xi = 0$  имеем  $U_C/U_{C0} = 1$ . Дополнительно для  $\xi = 0,5$  вычислим  $U_C/U_{C0} = 0,89$ . Умножив полученный результат на  $Q = 122$ , получим  $U_C/U = 110$ .

Строим график (рис. 11.10), который является частью графика, приведенного на рис. 11.4.

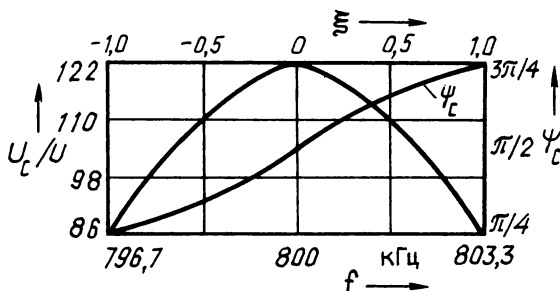


Рис. 11.10

Перейдем к шкале частот. По формуле (11.11) найдем абсолютную полосу пропускания:  $S_a = 2,07 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Разделив граничные частоты  $\omega_0 \pm S_a/2$  на  $2\pi$ , получим 796,7 и 803,3 кГц.

Фазовую характеристику рассчитаем по формуле (11.8) (см. табл. 11.4).

Т а б л и ц а 11.4

$\xi$	0	$\pm 0,5$	$\pm 1$
$\varphi$ , град	0	$\pm 26,5$	$\pm 45$
$\psi_C$ , град	90	63,5; 116,5	45; 135

Построим график зависимости  $\psi_C(\xi)$ . В пределах полосы пропускания он повторяет график, приведенный на рис. 11.5. □

### 11.5. Применение колебательных контуров

Частотная избирательность (т.е. способность цепи выделять колебания определенной частоты из совокупности синусоидальных колебаний одинаковых амплитуд, но разных частот) — основное свойство колебательных контуров. Например, при настройке радиоприемника (РП) на частоту передающей станции наиболее усиленными по напряжению будут те колебания, частота которых совпадает с резонансной частотой приемного контура (рис. 11.11).

При разделении сигналов по частоте последовательный контур можно подключить параллельно нагрузке (рис. 11.12). Для тока с частотой  $\omega_0$  его сопротивление мало, и в нагрузочном сопротивлении синусоиды тока с этой

частотой не будет. Если же выходное напряжение  $U_2$ , то наибольшее напряжение будет иметь гармоника с резонансной частотой  $\omega_0$ , для которой входное сопротивление последовательного контура минимальное, равное  $R$ . Применяются и параллельные колебательные контуры.

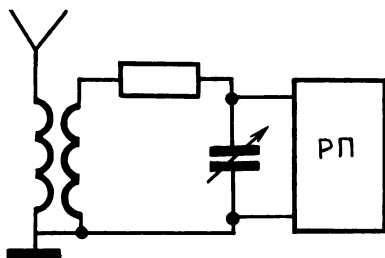


Рис. 11.11

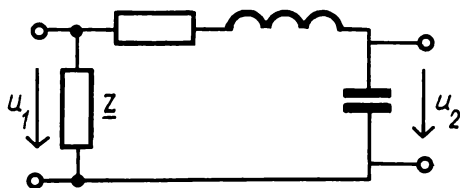


Рис. 11.12

1. Приведите примеры использования одиночных колебательных контуров.

2. На каком свойстве колебательных контуров основано их применение?

4.1. Определите полосу пропускания и граничные частоты контура, если угловая частота  $\omega_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ , а добротность:

а)  $Q = 100$ .

◇ Резонансная частота  $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 800 \text{ кГц}$ . Относительная полоса пропускания  $S_r = 1/Q = 0,01$ , абсолютная  $S_a = f_0 S_r = 8 \text{ кГц}$ . Половина полосы пропускания равна  $4 \text{ кГц}$ ; тогда граничные частоты  $f_1 = f_0 - S_a / 2 = 796 \text{ кГц}$ ,  $f_2 = 804 \text{ кГц}$ ; □

б)  $Q = 200$  [4; 798; 802 кГц].

4.2. Определите добротность контура с параметрами  $R = 5 \text{ Ом}$ ,  $\rho = 500 \text{ Ом}$ , если к нему подключена нагрузка:

а)  $50 \text{ кОм}$ .

◇ Вносимое сопротивление  $R' = \rho^2 / R_n = 5 \text{ Ом}$ . Добротность  $Q_{\text{эк}} = \rho / (R + R') = 50$ , при подключении нагрузки она уменьшается в два раза (была  $\rho/R = 100$ ); □

б)  $25 \text{ кОм}$  [ $R' = 10 \text{ Ом}$ ,  $Q_{\text{эк}} = 33$ ].

## 12. Параллельный колебательный контур

### 12.1. Резонанс токов. Резонансная частота

Катушка индуктивности и конденсатор, соединенные параллельно, образуют *простой параллельный контур*. Каждый из элементов контура можно представить в виде последовательной схемы замещения активного сопротивления  $R_1$  и индуктивности  $L$ , активного сопротивления  $R_2$  и емкости  $C$  (рис. 12.1).

Для параллельной схемы входной ток

$$\underline{I} = \underline{YU} = (g - jb)\underline{U},$$

где  $g, b$  — соответственно активная и реактивная проводимости.

Разность фаз между входными током и напряжением

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}.$$

Если индуктивная  $b_L$  и емкостная  $b_C$  проводимости равны, то  $\varphi = 0$ . Явление, при котором ток на входе параллельного колебательного контура совпадает по фазе с напряжением, называется *резонансом токов*. Условие резонанса токов:

$$b_L = b_C \quad (12.1)$$

Дополнительные (кроме  $\varphi = 0$ ) признаки резонанса токов:

- 1) полная проводимость  $Y = \sqrt{g^2 + b^2} = g$ , следовательно, ток  $I = gU$  имеет минимальное значение;
- 2) индуктивный  $I_{1p} = -jb_L U$  и емкостный  $I_{2p} = jb_C U$  токи ветвей

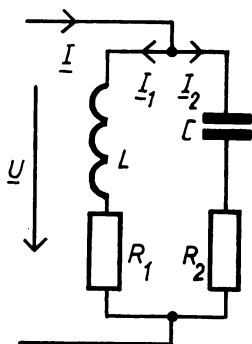


Рис. 12.1

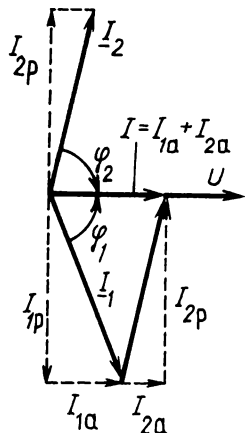


Рис. 12.2

равны по модулю и противоположны по фазе.

Строим векторную диаграмму (рис. 12.2). По действительной оси направляем вектор  $\underline{U}$ . Ток  $\underline{I}_1$  индуктивный, он отстает от напряжения на угол  $\varphi_1$ . Ток  $\underline{I}_2$  емкостный, он опережает  $\underline{U}$  на угол  $\varphi_2$ . Складываем токи ветвей. Входной ток равен сумме активных составляющих  $I_{1a} + I_{2a}$ , так как реактивные составляющие  $I_{1p}$  и  $I_{2p}$  взаимно вычисляются. Замечаем, что токи ветвей больше входного тока.

Определим угловую частоту, при которой выполняется условие резонанса (12.1). Выразим проводимости через сопротивления:

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} \quad (12.2)$$

Раскрыв  $X_L, X_C$ , получим

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + (1/(\omega C))^2}.$$

Избавимся от дроби:

$$R_1^2 + (\omega L)^2 = \omega^2 LC (R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2).$$

Раскрыв скобки, сгруппируем слагаемые с  $\omega$ :

$$\omega^2 (L^2 - R_2^2 LC) = L/C - R_1^2.$$

В левой части равенства можно  $LC$  вынести за скобки и перенести в правую часть:

$$\omega^2 (\frac{L}{C} - R_2^2) = \frac{1}{LC} (\frac{L}{C} - R_1^2).$$

Воспользуемся понятиями, которые мы ввели для последовательного контура: характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C}$ , резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Тогда окончательная формула для резонансной частоты параллельного контура примет вид

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{(\rho^2 - R_1^2)/(\rho^2 - R_2^2)}. \quad (12.3)$$

Так как угловая частота выражается действительным числом, то резонанс токов возможен в том случае, когда под знаком радикала положительное число. Если  $R_1 > \rho$ , а  $R_2 < \rho$  или  $R_1 < \rho$ , а  $R_2 > \rho$ , то  $\omega_{\text{рез}}$  выражается мнимым числом, резонанс не существует. Заметим, что если  $R_1 = R_2$ , то резонансная частота не зависит от активного сопротивления:  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ . Если же  $R_1 = R_2 = \rho$ , то под знаком радикала неопределенность вида  $0/0$ . Это случай так называемого *безразличного резонанса*.

1. Назовите условие резонанса токов и его основные признаки.

2. Объясните с помощью векторной диаграммы, почему токи ветвей могут многократно превышать входной ток.

3. Выведите формулу резонансной частоты и проанализируйте ее. В каких случаях резонанса не может быть?

## 12.2. Параметры параллельного контура с малыми потерями

В технике связи используются контуры хорошего и среднего качества, у которых  $R_1$  и  $R_2$  значительно меньше  $\rho$ . Для таких высокодобротных контуров (или контуров с малыми потерями) формулы (12.1) и (12.3) упрощаются.

Пренебрегая  $R_1^2$ ,  $R_2^2$  в знаменателе формулы (12.2) из-за их малости по сравнению с  $X_L^2$  и  $X_C^2$ , получаем условие резонанса токов:

$$X_L = X_C \text{ или } \omega L = 1/(\omega C), \quad (12.4)$$

т.е. индуктивное сопротивление одной ветви равно емкостному сопротивлению другой.

Из условия (12.4) находим резонансную частоту:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Она равна резонансной частоте последовательного контура.

Добротность определим из отношения энергий (10.3):

$$Q = 2\pi \frac{W_L}{W_a}.$$

Если  $X_L = X_C$ , то равны между собой и токи ветвей:  $I_1 = I_2$ . Энергия  $W_L = LI_1^2$ , активная энергия за период  $W_a = (R_1 + R_2) I_1^2 T_0$ . Подставив эти выражения в формулу добротности (10.3), получим

$$Q = \frac{2\pi}{T_0} \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Здесь  $2\pi/T_0 = 2\pi f_0 = \omega_0$ . Так как  $\omega_0 L = \rho$ , то добротность

$$Q = \rho/R, \quad (12.5)$$

где  $R = R_1 + R_2$  — сумма активных сопротивлений ветвей.

Формула (12.5) приближенная, она получена в предположении, что равны токи ветвей  $I_1$  и  $I_2$ . Более сложный точный вывод дает

$$Q = \frac{\rho(\omega_{\text{рез}}/\omega_0)}{R_1 + R_2(\omega_{\text{рез}}/\omega_0)^2}, \quad (12.6)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  — значение резонансной частоты, вычисленное по формуле (12.3).

Для контуров с добротностью, большей 10, формулы (12.5) и (12.6) дают практически одинаковый результат, поскольку  $\omega_{\text{рез}}/\omega_0 = 1$ . Например, при  $\rho = 200$  Ом и  $R_1 + R_2 = 20$  Ом по формуле (12.3) получим  $\omega_{\text{рез}} = 0,997\omega_0$ . Точное значение  $Q = 9,98$  отличается от приближенного  $Q = \rho/R = 10$  на 0,2 %, поэтому в расчетах используют формулу (12.5).

1. Объясните условия резонанса для контуров с малыми потерями.

2. Выведите формулу добротности.

1.1. Для схемы, приведенной на рис. 12.1,  $L = 4$  мГн,  $C = 10$  мкФ. Постройте графики зависимостей  $b_L(\omega)$  и  $b_C(\omega)$ , если  $R_1$  и  $R_2$  принимают значения 6; 10 и 20 Ом.

♦ Индуктивную проводимость

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \left( \frac{R_1^2}{\omega L} + \omega L \right)^{-1}$$

исследуем на максимум. Производная по  $\omega$  от знаменателя

$$-R_1^2/(\omega^2 L) + L = 0,$$

откуда частота, при которой  $b_L$  максимальна,  $\omega_L = R_1/L$ . На этой частоте индуктивное и активное сопротивления равны:  $R_1 = \omega_L L$ .

Емкостная проводимость

$$\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = \left( R_2^2 \omega C + \frac{1}{\omega C} \right)^{-1}$$

имеет максимум на частоте  $\omega_C = 1/(R_2 C)$  (см. производную по  $\omega$ :  $R_2^2 C - 1/(\omega^2 C) = 0$ )

Для заданных значений  $R, L, C$  вычислим  $\omega_L$  и  $\omega_C$  и сведем в табл. 12.1.

Таблица 12.1

$R_1 = R_2, \text{ Ом}$	$\omega_L \cdot 10^{-3}, \text{ с}^{-1}$	$\omega_C \cdot 10^{-3}, \text{ с}^{-1}$
6	1,5	16,6
10	2,5	10
20	5	5

Диапазон частот от нуля до наибольшего значения из табл. 12.1 разобьем на 4–5 интервалов и вычислим на их границах сопротивления  $X_L$ , а затем и проводимость  $b_L$  при одном из значений  $R_1$ . Например, при  $\omega = 1,5 \cdot 10^3$  и  $R_1 = 6 \text{ Ом}$  получим:

$$X_L = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ Ом}; \quad b_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

В табл. 12.2 приведены остальные вычисленные значения  $b_L$ . Строим по ним кривые  $b_L(\omega)$  (рис. 12.3).

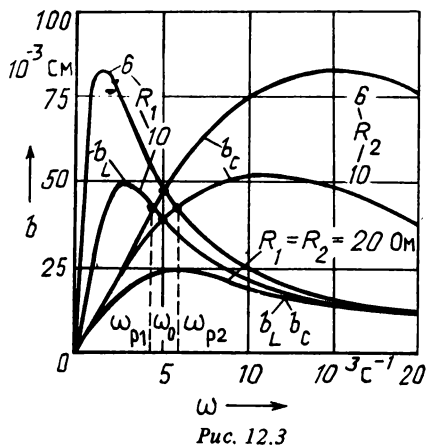


Рис. 12.3

Таблица 12.2

$\omega \cdot 10^{-3}, \text{ с}^{-1}$	$X_L, \text{ Ом}$	$b_L \cdot 10^3 \text{ (См) при } R_1, \text{ Ом}$		
		6	10	20
1	4	77	35	1
2,5	10	73	50	20
5	20	46	40	25
10	40	24	24	20
20	80	12	12	11

Для тех же значений  $\omega$  (см. табл. 12.2) и в такой же последовательности вычисляем  $X_C = 1/(\omega C)$ ,  $b_C = X_C/(R_2^2 + X_C^2)$  и строим кривые  $b_C(\omega)$  (см. рис. 12.3). Заметим, что при  $R_1 = R_2 = 20 \text{ Ом}$  обе кривые  $b_L(\omega)$  и  $b_C(\omega)$  совпадают. □

1.2. Проанализируйте рис. 12.3 и формулу (12.3). Выясните, при каких значениях  $R_1$  и  $R_2$  возможен резонанс токов.

♦ Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 20$  Ом, резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Рассмотрим сочетания  $R_1$  и  $R_2$ .

1.  $(R_1 = R_2) < \rho$ . При  $R_1 = R_2 = 6$  Ом или  $R_1 = R_2 = 10$  Ом кривые  $b_L(\omega)$ ,  $b_C(\omega)$  пересекаются на частоте  $\omega_0$ .

2.  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом. Согласно формуле (12.3), резонансная частота

$$\omega_{\text{рез1}} = \omega_0 \sqrt{\frac{20^2 - 10^2}{20^2 - 6^2}} = 0,925 \omega_0,$$

она меньше  $\omega_0$ .

Если же  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом, то

$$\omega_{\text{рез2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{20^2 - 6^2}{20^2 - 10^2}} = 1,1 \omega_0.$$

Точка пересечения кривых  $b_L(\omega)$  и  $b_C(\omega)$  смещается вправо.

3.  $R_1 = R_2 = 20$  Ом и  $\rho = 20$  Ом. Кривые  $b_L(\omega)$  и  $b_C(\omega)$  совпадают. Резонансная частота является неопределенной, так как при любом значении  $\omega$  индуктивная проводимость равна емкостной:  $b_L = b_C$ . Это сочетание параметров в технике связи не используется.

4.  $R_2 > \rho$ . Кривая  $b_C(\omega)$  при  $R_2 = \rho = 20$  Ом не пересекается ни с одной из кривых  $b_L(\omega)$ . Следовательно, равенство  $b_L = b_C$  не выполняется.

На практике используется второе сочетание, но при условии, что  $R_1 \ll \rho, R_2 \ll \rho$ . Резонансная частота (12.3) та же, что и при резонансе напряжений:  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . □

### 12.3. Амплитудно- и фазочастотные характеристики входного сопротивления параллельного контура

Входное комплексное сопротивление цепи, схема которой приведена на рис. 12.1, как эквивалентное сопротивление параллельного соединения

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Запишем комплексные сопротивления ветвей  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  в алгебраической форме:

$$\underline{Z} = \frac{(R_1 + j\omega L)(R_2 + 1/(j\omega C))}{R_1 + R_2 + j(X_1 - X_2)}.$$

Сопротивлениями  $R_1 \ll \rho, R_2 \ll \rho$  в числителе можно пренебречь. В знаменателе  $R_1 + R_2 = R$  сохраним, так как реактивное сопротивление  $X_1 - X_2 = X$  тоже мало. Получим

$$\underline{Z} = \frac{L/C}{R + jX}.$$

Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C}$ , следовательно, в числителе  $\rho^2$ . В знаменателе  $R$  вынесем за скобки:

$$\underline{Z} = \frac{\rho^2}{R(1 + jX/R)}. \quad (12.7)$$

При резонансе  $X = 0$ , комплексное сопротивление  $\underline{Z}$  выражено действительным числом. Это активное сопротивление

$$R_0 = \rho^2/R = \rho Q. \quad (12.8)$$

Резонансное сопротивление  $R_0$  в  $Q$  раз больше характеристического. Так, если  $\rho = 2$  кОм,  $Q = 200$ , то  $R_0 = 400$  кОм.

Используя  $R_0$  и заменив  $X/R$  обобщенной расстройкой  $\xi$ , комплексное сопротивление (12.7) запишем в виде

$$\underline{Z} = R_0/(1 + j\xi); \quad (12.9)$$

его модуль — полное сопротивление

$$Z = R_0/\sqrt{1 + \xi^2}. \quad (12.10)$$

Это и есть уравнение АЧХ входного сопротивления.

Записав комплексное сопротивление (12.9) в показательной форме  $Ze^{j\varphi}$ , видим, что

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \xi. \quad (12.11)$$

Это уравнение ФЧХ. От аналогичного уравнения последовательного контура оно отличается только знаком.

1. Выведите формулу резонансного сопротивления  $R_0$ .

2. Как выразить комплексное входное сопротивление через  $R_0$  и обобщенную расстройку?

3. Запишите уравнения для АЧХ и ФЧХ входного сопротивления.

2.1. Для цепи (рис. 12.1)  $L = 4$  мГн,  $C = 0,1$  мкФ. Вычислите  $Q$  и  $\omega_{\text{рез}}$ , если:

а)  $R_1 = 15$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом.

♦ Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 200$  Ом, добротность  $Q = \rho/R = 10$ , резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 50 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. По формуле (12.3) находим

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{\frac{200^2 - 15^2}{200^2 - 5^2}} = 0,997 \omega_0,$$

т.е.  $\omega_{\text{рез}}$  отличается от  $\omega_0$  на 0,3 %. Для контуров более высокого качества практически  $\omega_p = \omega_0$ ; □

б)  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом [ $Q = 20$ ,  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ ].

2.2. Вычислите  $Q$  и  $R_0$ , если  $\rho = 800$  Ом,  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом [ $80$ ;  $64$  кОм].

## 12.4. Выходное напряжение. Токи ветвей.

### Полоса пропускания

Параллельный контур подключают к источнику с большим внутренним сопротивлением — к источнику тока (рис. 12.4). Напряжение контура  $U = ZI$  с учетом формулы (12.10)

$$U = R_0 I / \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Введем обозначение:  $R_0 I = U_0$  — резонансное напряжение контура. Тогда отношение напряжения при частоте, отличающейся от  $\omega_0$ , к резонансному напряжению

$$U/U_0 = 1/\sqrt{1 + \xi^2} \quad (12.12)$$

выражается такой же зависимостью, как и отношение токов  $I/I_0$  для последовательного контура (см. рис. 11.4 и формулу (11.9)).

Зная напряжение  $U_0$  и пренебрегая активными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , найдем токи ветвей:

$$I_{10} \approx I_{20} = R_0 I / \rho = QI. \quad (12.13)$$

Они в  $Q$  раз больше входного тока  $I$ . Фазы токов  $\varphi_{10} = \arctg \frac{R_1}{\rho}$ ,  $\varphi_{20} = \arctg \frac{R_2}{\rho}$  приближаются к  $\pi/2$ .

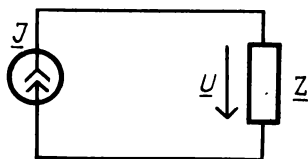


Рис. 12.4

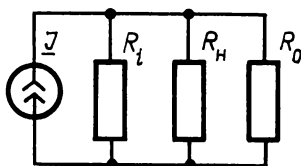


Рис. 12.5

Полоса пропускания — это диапазон частот, в пределах которого  $U/U_0 \geq 1/\sqrt{2}$ . Частотам на границах полосы пропускания — граничным частотам — так же, как и для последовательного контура, соответствует обобщенная расстройка  $\xi_{\pi} = \mp 1$ . Относительная и абсолютная полосы пропускания;

$$S_r = 1/Q; S_a = \omega_0/Q.$$

Внутреннее сопротивление источников и сопротивление нагрузки подключены параллельно резонансному сопротивлению  $R_0$  (рис. 12.5). Складываем проводимости (на микрокалькуляторе эта операция выполняется наиболее просто) и берем обратную величину

$$\frac{1}{1/R_0 + 1/R_i + 1/R_n} = R_{\text{оэк}},$$

т.е. находим эквивалентное сопротивление параллельных ветвей. Эквивалентная добротность  $Q_{\text{эк}} = R_{0\text{эк}}/\rho$ , с учетом  $R_i$  и  $R_n$  (или одного из них) она снижается. Полоса пропускания увеличивается.

1. Выведите уравнение для выходного напряжения  $U(\xi)$ .

2. Постройте график зависимости  $\frac{U}{U_0}(\xi)$ , покажите на нем полосу пропускания.

Запишите формулы для  $S_r$  и  $S_a$ .

3. Как учитываются сопротивления нагрузки и источника? Выведите формулу для эквивалентной добротности.

4. Как вычислить токи ветвей?

3.1. В параллельном контуре  $\rho = 1,2$  кОм,  $Q = 50$ . Вычислите резонансное сопротивление. Как изменится входное сопротивление, если контур расстроен на 1,73 %?

♦ Находим  $R_0 = Q\rho = 60$  кОм. При частоте  $\omega = 1,0173\omega_0$  обобщенная расстройка  $\xi = 2Q(\omega/\omega_0 - 1) = 1,73$ . По формуле (12.10) вычисляем полное сопротивление:  $Z = 30$  кОм. Угол  $\varphi = -\arctg 1,73 = -60^\circ$ . В комплексной форме  $Z = 30 \angle -60^\circ = (15 - j26)$  кОм, где  $R = 30 \cos 60^\circ = 15$  кОм,  $X = 30 \sin 60^\circ = 26$  кОм. □

3.2. В условиях задачи 3.1 вычислите  $Z$ , если  $\omega = 1,01\omega_0$  [  $42 \angle -45^\circ$  кОм ].

3.3. Вычислите абсолютную полосу пропускания, если  $Q = 100$ ,  $f_0 = 800$  кГц.

♦ Находим  $S_a = \omega_0/Q$ . Если сократить левую и правую части равенства на 6,28, то полоса пропускания будет выражена в герцах:  $800/100 = 8$  кГц. □

3.4. В условиях задачи 3.3 запишите граничные частоты.

♦ Граничные частоты отличаются от резонансной частоты на 1/2 полосы пропускания:  $f_1 = 796$  кГц,  $f_2 = 804$  кГц. □

3.5. Контур с параметрами  $R_1 = 18$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  пФ подключен к источнику тока,  $I_0 = 2$  мА. Определите токи ветвей и напряжение при резонансе.

♦ Вычислим характеристическое сопротивление и добротность:  $\rho = \sqrt{L/C} = 1$  кОм,  $Q = \rho/R = 50$ . Токи ветвей  $I_{10} \approx I_{20} = QI_0 = 100$  мА; фазы  $\varphi_1 = \arctg(\rho/R_1) = 89^\circ$ ,  $\varphi_2 = \arctg(\rho/R_2) = 89,9^\circ$ . Резонансное сопротивление  $R_0 = Q\rho = 50$  кОм, напряжение  $U_0 = R_0 I_0 = 100$  В. □

## 12.5. Сложный контур

Сложный контур получают из простого, расщепляя один из реактивных элементов (индуктивность или емкость) на две части.

Для высокодобротного контура (рис. 12.6, а) запишем условие резонанса токов (12.4) – равенство индуктивного и емкостного сопротивлений ветвей:

$$\omega L_1 = 1(\omega C) - \omega L_2.$$

Сгруппировав слагаемые с  $L$ , получим

$$\omega(L_1 + L_2) = 1(\omega C).$$

Обозначим суммарную индуктивность контура  $L_1 + L_2 = L$ , тогда резонанс

сная частота выражается знакомой формулой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Для схемы, приведенной на рис. 12.6, б, раскрыв равенство  $X_1 = X_2$ , будем иметь

$$1/(\omega C_1) = \omega L - 1/(\omega C_2).$$

Сгруппировав члены с емкостью

$$\frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \omega L$$

и обозначив выражение в скобках  $1/C$ , получим тот же результат:

$$1/(\omega/C) = \omega L; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Эквивалентные  $L$  и  $C$  определяем при обходе контура по формулам последовательного соединения этих элементов.

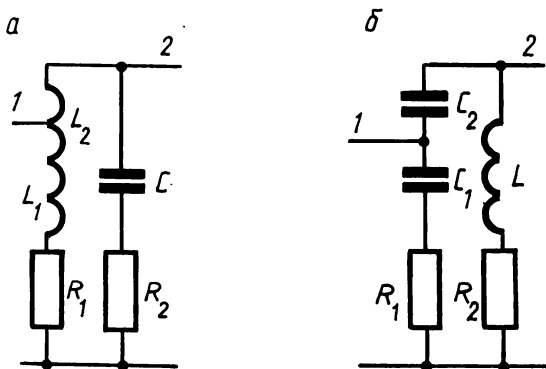


Рис. 12.6

Вход — узел 1 — находится в точке разделения реактивного элемента. Выходное напряжение снимается с нерасщепленного реактивного элемента (емкости или индуктивности) — вывода 2. Характеристическое сопротивление подсчитывается относительно этого узла:

$$\rho = 1/(\omega_0 C) = \omega_0 L = \sqrt{L/C}.$$

Из отношения энергий получается формула для добротности:  $Q = \rho/R$ .

Как видим, перераспределение индуктивностей и емкостей между ветвями контура не изменяет его параметры  $\omega_0, \rho, Q$ .

Реактивное сопротивление ветви относительно входа  $\omega_0 L_1$  или  $1/(\omega_0 C_1)$  не равно характеристическому  $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$ . Их отношение называют коэффициентом включения. Для схем, приведенных на рис. 12.6, а и б, имеем соответственно:

$$m = \frac{\omega_0 L_1}{\omega_0 L} = \frac{L_1}{L}; \quad m = \frac{(\omega_0 C_1)^{-1}}{(\omega_0 C)^{-1}} = \frac{C}{C_1}. \quad (12.14)$$

Перераспределяя  $L$  и  $C$  между ветвями, можно изменять коэффициент включения от 0 до 1. Верхний предел относится к простому контуру.

Согласно формулам (12.14), реактивные сопротивления ветвей

$$X_{10} = X_{20} = m\rho. \quad (12.15)$$

Эквивалентное входное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 - jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 - X_2)}.$$

Пренебрегаем  $R_1, R_2$  в числителе и объединяем их в знаменателе:

$$\underline{Z} = \frac{X_1 X_2}{R(1 + jX/R)}. \quad (12.16)$$

Подставим сюда  $X = 0$ . Учтем, что сопротивления  $X_1 = X_{10}, X_2 = X_{20}$  и каждое равно  $m\rho$  (см. формулу (12.15)):

$$\underline{Z} = \frac{X_{10} X_{20}}{R} = \frac{m^2 \rho^2}{R} = m^2 \rho Q = R_0. \quad (12.17)$$

Так как  $X/R = \xi$  — обобщенная расстройка, то из уравнения (12.16) находим полное сопротивление:

$$Z = R_0 \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Здесь  $R_0$  — резонансное сопротивление (12.17), а вся формула повторяет (12.10).

Сравняя выражения (12.8) и (12.17), видим, что входное сопротивление сложного контура уменьшилось в  $m^2$  раз. Так, при  $m = 0,7$  входное сопротивление составляет примерно  $0,5R_0$  простого контура. Можно подобрать такой коэффициент включения, при котором резонансное сопротивление будет равно внутреннему сопротивлению источника  $R_i$ , т.е. согласовать нагрузку с источником. Это основное преимущество сложного контура.

Умножая входное сопротивление (12.17) на ток источника, получаем входное резонансное напряжение

$$U_{10} = m^2 \rho Q I. \quad (12.18)$$

Разделив его на сопротивление ветвей (12.15), найдем токи:

$$I_{10} \approx I_{20} = \frac{U_{10}}{m\rho} = mQI.$$

Они превышают входной ток в  $mQ$  раз (у простого контура в  $Q$  раз).

Выходное напряжение как произведение сопротивления ветви на ток ветви

$$U_{20} = \rho I_{20} = m\rho Q I. \quad (12.19)$$

Сравним выражения (12.18) и (12.19): выходное напряжение  $U_{20} = U_{10}/m$ , оно больше входного, так как  $m \leq 1$ . С учетом этого соотношения, умножая выражение (12.19) на ток источника, получаем для входного и выходного напряжений уравнения АЧХ, такие же, как и для простого контура:

$$U_1/U_{10} = U_2/U_{20} = 1/\sqrt{1 + \xi^2}.$$

1. Начертите две схемы сложного контура. Где у него вход и выход? Как подсчитать эквивалентные  $L$  и  $C$ ?

2. Что такое коэффициент включения? Как его вычислить? Запишите сопротивление ветвей и резонансное сопротивление через  $m$  и  $\rho$ .

3. Выведите уравнения АЧХ входного сопротивления.

4. Какое соотношение между входным током и токами ветвей, между входным и выходным напряжениями?

4.1. К источнику с параметрами  $R_i = 50$  кОм и  $I = 2$  мА подключен контур, у которого  $Q = 50$ ,  $\rho = 1$  кОм,  $\omega_0 = 10 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Постройте графики АЧХ и ФЧХ. Определите полосу пропускания и граничные частоты.

◇ Обобщенные характеристики рассчитываем по уравнениям (12.11), (12.12), задавая значениями  $\xi$ . Результаты расчета представлены на графике (рис. 12.7).

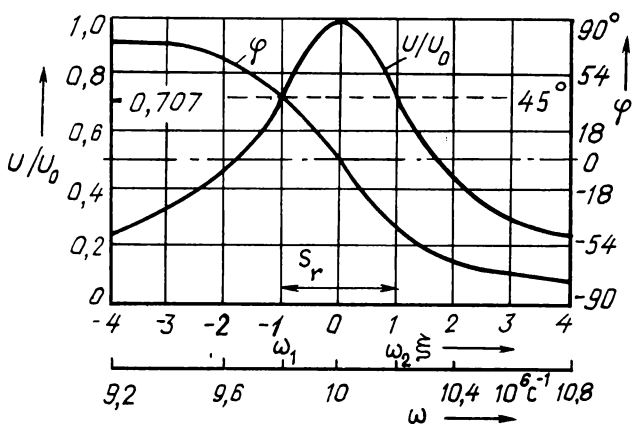


Рис. 12.7

Чтобы перевести обобщенные характеристики в частотные, надо заменить шкалу  $\xi$  шкалой  $\omega$ . По параметрам контура и источника находим резонансные сопротивления:

$$R_0 = \rho Q = 50 \text{ кОм}; R_{0\text{эк}} = 1/(1/R_0 + 1/R_i) = 25 \text{ кОм}.$$

$$\text{Эквивалентная добротность } Q_{\text{эк}} = R_0/\rho = 25.$$

От обобщенной расстройки перейдем к относительной частоте по формуле  $\omega/\omega_0 = 1 + \xi/(2Q)$ . Подставим  $\xi = \mp 1$ :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \mp \frac{1}{2 \cdot 25} = 1 \mp 0,02 = 0,98; 1,02.$$

Точке  $\xi = -1$  соответствует угловая частота  $0,98\omega_0 = 9,8 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup> и т.д. Резонансное напряжение  $U_0 = R_{0\text{эк}}I = 50$  В. По графику, приведенному на рис. 12.7, можно найти  $U/U_0$  для заданной частоты и вычислить  $U$ .

Абсолютная полоса пропускания  $S_a = \omega_0/Q_{\text{эк}} = 0,4 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Граничные частоты:  $\omega_1 = \omega_0 - S_a/2 = 9,8 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = \omega_0 + S_a/2 = 10,2 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. □

4.2. Отметьте полосу пропускания на графиках частотных характеристик (см. рис. 12.7).

4.3. Вычислите эквивалентную добротность, если  $Q = 200$ ,  $R_0 = 240$  кОм,  $R_i = R_H = 480$  кОм [100].

5.1. В сложном контуре (см. рис. 12.6, а)  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 650 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 250 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = 166 \text{ пФ}$ .

Вычислите резонансное сопротивление. Как распределить индуктивность между ветвями контура, чтобы  $R_0 = 200 \text{ кОм}$ ?

◇ Вычислим эквивалентные сопротивления и индуктивности:  $R = R_1 + R_2 = 19 \text{ Ом}$ ,  $L = L_1 + L_2 = 900 \text{ мкГн}$ . Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 2,32 \text{ кОм}$ , добротность  $Q = \rho/R = 122$ , коэффициент включения  $m = L_1/L = 0,72$ , резонансное сопротивление  $R_0 = m^2 \rho Q = 147,6 \text{ кОм}$ .

Из формулы  $R_0 = m^2 \rho Q$  найдем коэффициент включения, соответствующий заданному входному сопротивлению:  $m = \sqrt{R_0/\rho Q} = 0,84$ , т.е.  $L_1/L = 0,84$  и  $L_1 = mL = 760 \text{ мкГн}$ . Во второй ветви  $L_2 = L - L_1 = 140 \text{ мкГн}$ . □

5.2. В условиях задачи 5.1 вычислите  $R_0$ , если обе индуктивности включены в первую ветвь [283 кОм].

### 13. Активные цепи и цепи с обратной связью

#### 13.1. Эквивалентные схемы. Дуальность

Схема, которая описывается теми же уравнениями, что и реальная цепь, называется *эквивалентной* (или *схемой замещения*). Эквивалентные схемы удобны для исследования. Для них проще составить уравнения, найти токи и напряжения.

Для пассивных цепей эквивалентные схемы строят из трех идеализированных элементов: активного сопротивления, индуктивности, емкости. Каждый из них отражает определенное физическое явление. Активное сопротивление схемы замещения должно поглощать столько энергии, сколько расходует источник на питание реальной цепи. Оно вводится в схему замещения как параметр, характеризующий превращение электрической энергии в другие виды энергии (в тепловую, механическую, химическую, энергию магнитного поля при излучении передающей антенны и т.д.). Индуктивность характеризует изменяющееся магнитное поле, созданное током, а емкость — электрическое поле.

Схема замещения зависит от частоты. Например, при частоте 50 Гц резистор можно представить активным сопротивлением, катушку индуктивности — последовательным соединением индуктивности и активного сопротивления, конденсатор — емкостью. На более высоких частотах реальные резисторы, катушки, конденсаторы заменяют более сложными схемами, составленными из идеализированных элементов. Идеализация состоит в том, что каждому элементу приписывается только одно характеризующее его свойство: идеальному резистору — активное сопротивление, идеальной катушке — индуктивность, идеальному конденсатору — емкость. Двух других параметров у них нет.

Отметим еще одну особенность схем замещения. В реальных устройствах, в том числе и самых простых, тепловые потери, электрические и магнитные поля рассредоточены по всей длине устройства. Например, каждый виток реостата имеет активное сопротивление, индуктивность и емкость между витками. Провода линии электропередачи имеют активное сопротивление, индуктивность (два провода — прямой и обратный — образуют виток) и емкость (между проводами и между проводом и землей), рассредоточенные по всей

длине линии. Однако на схемах замещения их показывают в виде сосредоточенных параметров  $R, L, C$ . Такое упрощение можно допустить при анализе большого числа электрических цепей. Исключение составляют случаи, когда геометрическая длина устройства соизмерима с длиной волны (они изучаются в разделе "Цепи с распределенными параметрами").

Схемами из идеальных источников и пассивных элементов удастся передать с любой степенью точности поведение реальных устройств по отношению к их внешним выводам. Но прежде чем составлять схему замещения для какого-то электрического устройства, надо изучить процессы и режимы его работы, сформулировать цель, определить требуемую точность расчета. Это задача других наук. В курсе ТЛЭЦ занимаются анализом или синтезом готовых схем и лишь на простейших примерах рассматривают методику составления схем замещения.

Для напряжения на индуктивности и тока в емкости неоднократно использовались формулы:

$$u = L \frac{di}{dt} ; \quad i = C \frac{du}{dt} .$$

Теперь обратим внимание на их структуру. Обе они состоят из двух множителей. Если в первой формуле заменить  $u$  на  $i$ ,  $L$  на  $C$ ,  $i$  на  $u$ , то получится вторая формула. Можно по такому же правилу заменить величины второй формулы и прийти к первой.

Два соотношения, обладающих свойством взаимного перехода, называются *дуальными*, а взаимозаменяемые величины — *дуальными величинами*. Дуальными являются ток и напряжение, индуктивность и емкость. Можно привести и другие пары дуальных формул:  $u = Ri$  и  $i = gu$ ,  $\Psi = Li$  и  $q = Cu$ . Здесь дуальными величинами являются сопротивление  $R$  и проводимость  $g$ , потокосцепление  $\Psi$  и заряд  $q$ .

Для идеального источника напряжения вольт-амперная характеристика изображается прямой (рис. 13.1, а). Если ЭДС  $E$  заменить внутренним током  $J$ , ток  $I$  — напряжением  $U$ , то этот же график станет вольт-амперной характеристикой источника тока (рис. 13.1, б). Источник напряжения и источник тока — дуальные элементы.

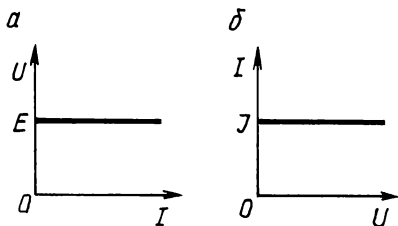


Рис. 13.1

Дуальными могут быть цепи и уравнения. Для последовательной  $RLC$ -цепи (рис. 13.2, а) уравнение Кирхгофа имеет вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = u .$$

Заменим входящие сюда величины дуальными:

$$gu + C \frac{du}{dt} + i_L = i.$$

Это уравнение справедливо для параллельной цепи из тех же элементов (рис. 13.2, б).

Дуальность как свойство линейных электрических цепей сокращает количество задач. Так, можно построить векторную диаграмму и частотные характеристики для схемы, приведенной на рис. 13.2, а. После замены дуальных величин они будут пригодны для дуальной цепи (рис. 13.2, б).

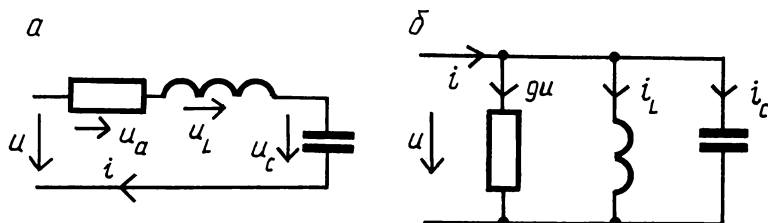


Рис. 13.2

1. Объясните понятие "эквивалентная схема" (или "схема замещения"). Как на нее влияет частота?

2. Из каких элементов составляют эквивалентную схему? Какое явление характеризует каждый из них? В чем заключается идеализация элементов?

3. Запишите две дуальные формулы. Объясните, в чем состоит свойство дуальности. Приведите примеры дуальных величин, элементов, схем, уравнений.

### 13.2. Понятие об усилении. Обратная связь

Усилителем называют устройство, которое увеличивает энергию входного сигнала за счет энергии источника. Принцип действия усилителя иллюстрирует рис. 13.3. На входе сигнал имеет определенную электрическую мощность  $P_{вх}$ . Выходная мощность  $P_{вых}$  поступает в нагрузку (громкоговоритель, исполнительный двигатель и т. д.).

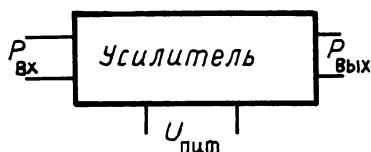


Рис. 13.3

Начертим эквивалентную схему усилителя (рис. 13.4). К входу подключен генератор сигналов. Покажем его на схеме как источник напряжения, имеющий ЭДС  $E_r$  и внутреннее сопротивление  $R_{i,r}$ . Для входных тока и напряжения вход усилителя представляет собой некоторое входное сопротивление  $R_{вх}$ . Со стороны выхода усилитель можно представить источником напряжения, ЭДС которого пропорциональна входному напряжению  $K_U U_{вх}$ , а внут-

ренное сопротивление равно  $R_i$ . В результате усиления амплитуда и фаза выходной величины отличаются от тех же величин на входе. Основным параметром для усилителя напряжения будет коэффициент передачи по напряжению

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_{\text{ВЫХ}}}{\underline{U}_{\text{ВХ}}} = K_U \angle \psi_U,$$

для усилителя тока — коэффициент передачи по току

$$\underline{K}_I = \frac{\underline{I}_{\text{ВЫХ}}}{\underline{I}_{\text{ВХ}}} = K_I \angle \psi_I.$$

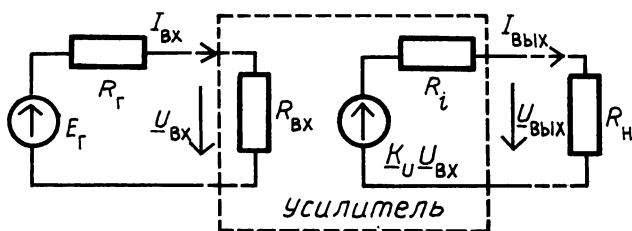


Рис. 13.4

Оба коэффициента — комплексные числа, состоящие из модулей  $K_U, K_I$  и фаз  $\psi_U, \psi_I$ . Чтобы показать, как они зависят от угловой частоты, строят две частотные характеристики — амплитудную  $K(\omega)$  и фазовую  $\psi(\omega)$ . Идеальным является усилитель, у которого на всей оси частот от нуля до бесконечности  $K(\omega) = K_0 = \text{const}$ , т.е. амплитудная характеристика выражена горизонтальной прямой (рис. 13.5, а). Фазовая характеристика должна быть представлена наклонной прямой (рис. 13.5, б):  $\psi(\omega) = b\omega$ , где  $b$  — число, постоянный коэффициент. Такой усилитель не вносил бы искажений, выходное напряжение повторяло бы форму входного. На практике можно лишь с той или иной степенью точности приблизиться к идеальным характеристикам в ограниченной полосе пропускания, чему способствует обратная связь.

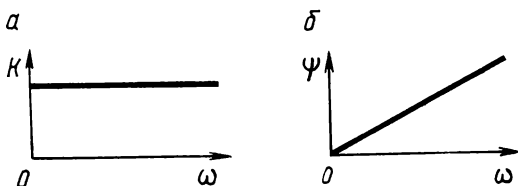


Рис. 13.5

**Обратной связью** называют воздействие выходной величины усилителя на его вход. На рис. 13.6 показана структурная схема усилителя с последовательной обратной связью по напряжению. Пассивная электрическая цепь, через которую входное напряжение подается на вход, называется *цепью обратной связи*. Ее основным параметр  $\beta$  — коэффициент обратной связи по напряжению —

показывает, какая часть выходного напряжения  $\beta U_{\text{вых}}$  подается на вход усилителя. Можно включить напряжение обратной связи так, чтобы полярность его была противоположной полярности напряжения входного сигнала. Это будет *отрицательная обратная связь*.

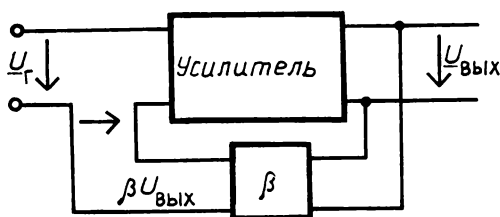


Рис. 13.6

При *положительной обратной связи* оба напряжения — генератора сигналов  $U_{\text{Г}}$  и обратной связи  $\beta U_{\text{вых}}$  — имеют одинаковую полярность, они складываются. Напряжения на входе и выходе усилителя увеличиваются:

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{Г}} + \beta U_{\text{вых}}; U_{\text{вых}} = K U_{\text{вх}}.$$

В усилителях чаще используется *отрицательная обратная связь*. Она уменьшает коэффициент передачи, но зато приближает характеристики усилителя к идеальным (см. рис. 13.5).

Цепь обратной связи подключают к входу усилителя как последовательно, так и параллельно. В первом случае получается обратная связь по напряжению, во втором — обратная связь по току.

1. Объясните принцип действия усилителя. Начертите его эквивалентную схему.
2. Запишите основной параметр усилителей напряжения и тока. Начертите их идеальные частотные характеристики.
3. Что такое обратная связь? В чем различие обратных связей: положительной и отрицательной; последовательной и параллельной; по току и по напряжению?

1.1. Катушку включили под напряжение 6 В с частотой 50 Гц. Показания амперметра 0,6 А, ваттметра 2,16 Вт. Определите параметры катушки, составьте эквивалентную схему.

♦ Из формулы  $P = RI^2$  находим активное сопротивление:  $R = P/I^2 = 6 \text{ Ом}$ . Полное сопротивление  $Z = U/I = 10 \text{ Ом}$ , реактивное  $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = 8 \text{ Ом}$ . Индуктивность  $L = X/\omega = 25,5 \text{ мГн}$ . Эквивалентная схема катушки показана на рис. 13.7, а. □

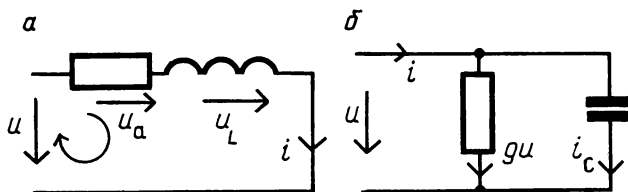


Рис. 13.7

1.2. Определите параметры катушки в условиях задачи 1.1, если мощность  $P = 2,88 \text{ Вт}$  [ 8 Ом, 19 мГн ] .

1.3. Составьте эквивалентную схему для конденсатора если частота 50 Гц, напряжение 220 В, а ток и мощность равны:

а)  $I = 0,5 \text{ А}$ ,  $P = 0,1 \text{ Вт}$ .

♦ Активное сопротивление  $R = P/I^2 = 0,4 \text{ Ом}$ , полное  $Z = U/I = 440 \text{ Ом}$ , емкостное

$X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 440 \text{ Ом}$ . Из формулы  $X_C = 1/(\omega C)$  находим  $C = 1/(\omega X_C) = 7,24 \text{ мкФ}$ .

Эквивалентную схему можно показать как последовательно соединенные активное сопротивление и емкость. Сравнивая  $R = 0,4 \text{ Ом}$  и  $X_C = 440 \text{ Ом}$ , замечаем, что при частоте 50 Гц в расчетах активным сопротивлением можно пренебречь. Но пусть  $f = 50 \text{ кГц}$ , тогда емкостное сопротивление  $X_C = 1/(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 7,24 \cdot 10^{-6}) = 0,44 \text{ Ом}$ , оно сравнимо с  $R = 0,4 \text{ Ом}$ , и последнее должно учитываться; □

б)  $I = 0,1 \text{ А}$ ,  $P = 10 \text{ мВт}$  [  $1 \text{ Ом}$ ,  $1,45 \text{ мкФ}$  ].

1.4. Для схемы, показанной на рис. 13.7, а, запишите уравнение Кирхгофа. Составьте дуальные уравнения и схему.

♦ Обходим контур в направлении движения часовой стрелки:  $U = Ri + L \frac{di}{dt}$ . Заменим величины дуальными:  $i = gU + C \frac{du}{dt}$ . На схеме элементы, дуальные  $R$  и  $L$ , соединяем параллельно (рис. 13.7, б). Составляя уравнение Кирхгофа для узла, убеждаемся, что получается последнее уравнение. Следовательно, схемы дуальные. □

### 13.3. Управляемые источники. Операционный усилитель

В схеме замещения усилителя (см. рис. 13.4) в выходной цепи был показан источник напряжения. ЭДС источника  $K_U U_{\text{вх}}$  не является постоянной величиной, она пропорциональна входному напряжению. Источник управляется входным напряжением. Такой управляемый (или зависимый) источник отличается от независимых источников, у которых ЭДС является параметром, не зависящим от времени.

Управляемые источники вводят в схемы замещения транзисторов, работающих в линейном режиме. Так же, как и независимые источники, они могут быть двух типов: источник напряжения или источник тока. В свою очередь каждый из них может управляться как напряжением, так и током.

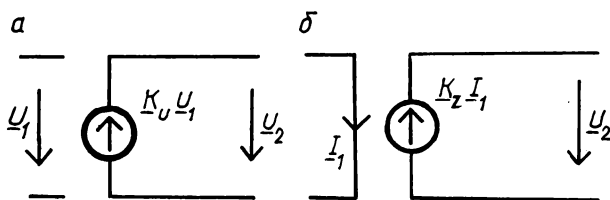


Рис. 13.8

На рис. 13.8, а показан источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), или идеальный усилитель напряжения. Вход для управляющего напряжения  $U_1$  представляет собой бесконечно большое сопротивление, разрыв цепи, поэтому входной ток равен нулю. Выходное напряжение пропорционально входному:

$$U_2 = K_U U_1,$$

где  $K_U$  — коэффициент передачи по напряжению; это комплексное число, определяемое из отношения напряжений  $U_2/U_1$  в одном из режимов.

У источника напряжения, управляемого током (ИНУТ), входное сопротивление равно нулю (рис. 13.8, б). Во входной короткозамкнутой ветви ток  $\underline{I}_1$ , напряжение  $\underline{U}_1 = 0$ . Напряжение на выходе

$$\underline{U}_2 = \underline{K}_Z \underline{I}_1,$$

где  $\underline{K}_Z$  — комплексный коэффициент передачи, выражаемый в омах; он определяется как отношение выходного напряжения к входному току.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ), показан на рис. 13.9, а. Входные сопротивление и напряжение равны нулю. В выходной ветви находится источник тока, ток его пропорционален входному току  $\underline{I}_1$ :

$$\underline{I}_2 = \underline{K}_I \underline{I}_1,$$

где  $\underline{K}_I = \underline{I}_2 / \underline{I}_1$  — коэффициент передачи по току, представляющий собой комплексное число.

ИТУТ называют идеальным усилителем тока.

В источнике тока, управляемом напряжением (ИТУН), входная ветвь разомкнута,  $\underline{I}_1 = 0$  (рис. 13.9, б). Ток источника пропорционален входному напряжению:

$$\underline{I}_2 = \underline{K}_Y \underline{U}_1,$$

где  $\underline{K}_Y = \underline{I}_2 / \underline{U}_1$  — коэффициент передачи, равный отношению выходного тока к входному напряжению и выражаемый в сименсах.

Управляемый источник представляет собой идеализированный усилитель. Входная ветвь его либо разомкнута, либо замкнута накоротко. В первом случае задается входное напряжение  $\underline{U}_1$ , во втором — входной ток  $\underline{I}_1$ . Выходная ветвь представляет собой идеальный источник напряжения (ранее мы условились называть источник идеальным, если его внутреннее сопротивление  $R_i = 0$ ) или идеальный источник тока ( $R_i = \infty$ ). ЭДС или ток источников

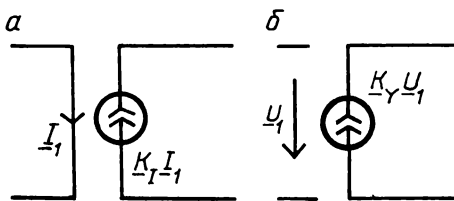


Рис. 13.9

(т.е. выходные  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ ) пропорциональны управляющим величинам. Они записываются на схеме рядом с обозначением источника как произведение двух величин (см. рис. 13.8 и 13.9).

Управляемый источник вводят в схему замещения, чтобы показать способность цепи линейно усиливать входной сигнал. Энергию источник получает по цепи питания; последнюю на схеме не показывают.

Практической реализацией идеального усилителя напряжения является операционный усилитель. Это самостоятельный элемент, подобный транзистору и выполненный по интегральной технологии в одном кристалле. На схеме

операционный усилитель показывают равнобедренным треугольником с четырьмя выводами (рис. 13.10): входные 1, 2, выходной 3, один общий, заземленный. Напряжения  $U_{вх}$ ,  $U_{вых}$  измеряют относительно общего уровня (земли), чтобы избежать таких явлений, как фон, наводка и т.д.

Операционный усилитель построен по балансной схеме (рис. 13.11). Предположим, что резисторы и транзисторы в левом и правом плечах строго одинаковы. Тогда без входных напряжений  $U_1$  и  $U_2$  токи в плечах равны и  $U_{вых} = 0$ . Выходное напряжение останется равным нулю, если на входах появятся напряжения одинаковой полярности (сифазный сигнал). Если же на вход 1 подать напряжение одной полярности, а на вход 2 — противоположной, то в одном плече ток увеличится, а в другом — уменьшится. Появится выходное напряжение, пропорциональное разности входных напряжений. Балансная схема усиливает дифференциальные сигналы и ослабляет сифазные помехи. Поэтому у операционного усилителя (см. рис. 13.10) два входа. Вход 1 — неинвертирующий, т.е. при подаче напряжения на этот вход на выходе получим напряжение такой же полярности. Если же напряжение включено на вход 2, то выходное напряжение будет противоположным по знаку (вход 2 — инвертирующий). В общем случае, когда есть  $U_1$  и  $U_2$ , выходное напряжение представляет собой усиленное в  $K$  раз  $U_{вх}$ :

$$U_{вых} = K (U_1 - U_2).$$

Неинвертирующий и инвертирующий входы обозначают знаками "+", "-" в треугольнике и там же записывают коэффициент усиления  $K \geq 10^4 \dots 10^5$ . Входное сопротивление  $R_{вх} \geq 100 \text{ кОм}$ ,  $R_{вых} \rightarrow 0$ , полоса пропускания — от 0 до 10 МГц.

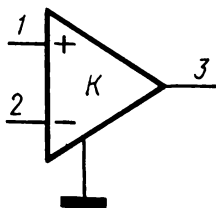


Рис. 13.10

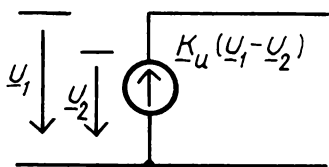


Рис. 13.12

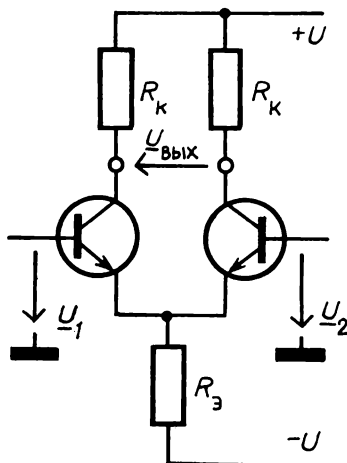


Рис. 13.11

Чтобы упростить анализ схем с операционными усилителями, последние идеализируют. Идеальному операционному усилителю приписывают такие параметры:  $K \rightarrow \infty$ ,  $R_{вх} \rightarrow \infty$ ,  $R_{вых} \rightarrow 0$ , полоса пропускания — от нуля до бесконечности.

Идеальный операционный усилитель на схеме можно показать как управляемый источник напряжения (рис. 13.12) с ЭДС, равной  $K_U(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)$ .

1. Чем отличаются управляемые источники от независимых? Перечислите их типы, начертите схемы, запишите выходную величину. Заучите сокращенные названия: ИНУН, ИНУТ, ИТУТ, ИТУН.

2. Как выполнен операционный усилитель? Для чего он предназначен? В чем заключается его идеализация?

3. Начертите условное обозначение операционного усилителя.

2.1. Вычислите коэффициент передачи по напряжению, если:  $\underline{U}_{\text{вх}} = 2 \cdot 10^{-3} \angle 30^\circ \text{ В}$ ,  $\underline{U}_{\text{вых}} = 2 \angle 28^\circ \text{ В}$ .

◇ Вычисляем:

$$K_U = \underline{U}_{\text{вых}} / \underline{U}_{\text{вх}} = 2 \angle 28^\circ / (2 \cdot 10^{-3} \angle 30^\circ) = 10^3 \angle -2^\circ.$$

Модуль  $K = 10^3$ , фаза  $\psi_U = -2^\circ$ . □

### 13.4. Схемы замещения транзистора и каскада резонансного усилителя

Режим работы транзисторов на переменном токе характеризуют четыре величины: входные  $\underline{U}_1, \underline{I}_1$  и выходные  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$  — действующие комплексные напряжения и токи. Две из них, как правило, заданы. Как вычислить неизвестные величины?

Пусть заданы входной ток  $\underline{I}_1$  и выходное напряжение  $\underline{U}_2$  (рис. 13.13, а). Используя метод наложения, представим эту схему в виде двух схем: в первой (рис. 13.13, б) есть только ток  $\underline{I}_1$ , выходная ветвь замкнута накоротко и напряжение  $\underline{U}_2 = 0$ ; во второй схеме есть только напряжение  $\underline{U}_2$ , ток  $\underline{I}_1 = 0$ .

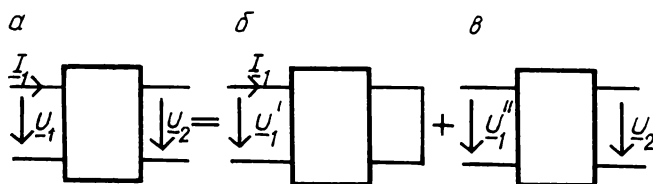


Рис. 13.13

Определим неизвестное напряжение  $\underline{U}_1$  как сумму частных напряжений  $\underline{U}_1'$  и  $\underline{U}_1''$  отдельных схем. Для первой схемы можно записать  $\underline{U}_1'$  как произведение тока  $\underline{I}_1$  и входного сопротивления  $h_{11}$ :

$$\underline{U}_1' = h_{11} \underline{I}_1.$$

Здесь сопротивление обозначено не привычным  $R$  или  $Z$ , а новой буквой  $h$ . Такое обозначение принято в электронике; далее нам встретятся еще три коэффициента  $h$ , только с другими индексами. Это  $h$ -параметры транзистора (от лат. *hybrid* — смешанный). Индексы при  $h$  взяты от левой и правой величин в формуле.

Напряжением  $\underline{U}_2$  (рис. 13.13, в) создается частичное напряжение  $\underline{U}_1'' =$

$= h_{12} \underline{U}_2$ , где  $h_{12}$  — коэффициент обратной связи по напряжению; он показывает, какая доля выходного напряжения передается на вход устройства по цепи внутренней обратной связи, существующей в самом транзисторе.

Возвращаясь к исходной схеме, записываем входное напряжение:

$$\underline{U}_1 = h_{11} \underline{I}_1 + h_{12} \underline{U}_2. \quad (13.1)$$

Уравнение аналогичной структуры составляем для выходного тока:

$$\underline{I}_2 = h_{21} \underline{I}_1 + h_{22} \underline{U}_2, \quad (13.2)$$

где  $h_{21}$  — коэффициент усиления по току;  $h_{22}$  — выходная проводимость.

Теперь понятно, почему  $h$ -параметры называют *гибридными, смешанными*: один из них — сопротивление, один — проводимость, два — безразмерных.

Начертим электрические схемы, соответствующие полученным уравнениям. Так как  $h_{11}$  — сопротивление, то покажем его на схеме резистором (рис. 13.14). Слагаемое  $h_{12} \underline{U}_2$  — это ЭДС управляемого источника, пропорциональная  $\underline{U}_2$ . Чтобы последняя вошла в уравнение с положительным знаком, надо направить ее встречно току. Обходим контур (рис. 13.14, а) в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки:

$$\underline{U}_1 - h_{11} \underline{I}_1 = h_{12} \underline{U}_2,$$

т.е. сумма напряжений равна сумме ЭДС. Получилось исходное уравнение (13.1).

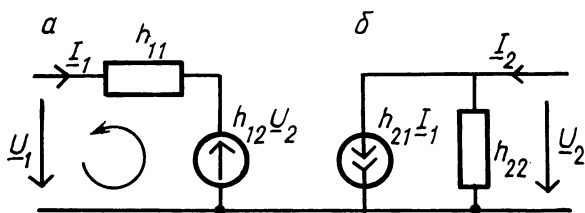


Рис. 13.14

Первое слагаемое  $h_{21} \underline{I}_1$  из уравнения (13.2) покажем на схеме источником тока (рис. 13.14, б). Во втором слагаемом  $h_{22}$  — проводимость, покажем ее на схеме резистором. Стрелку тока  $\underline{I}_2$  надо направить так, чтобы получилось исходное уравнение (13.2). Обе схемы вместе (рис. 13.14, а, б) представляют схему замещения транзистора в  $h$ -параметрах. Покажем на примере резонансного усилителя, как ее можно использовать в расчетах.

Каскад простейшего резонансного усилителя на биполярном транзисторе приведен на рис. 13.15. В коллекторную цепь транзистора включен параллельный колебательный контур. Прежде чем чертить схему замещения, откроем справочник по транзисторам. Для транзисторов небольшой мощности коэффициент обратной связи по напряжению  $h_{12} = 10^{-4} \dots 10^{-3}$ , выходная проводимость  $h_{22} = 10^{-6} \dots 10^{-7}$  См (т.е. сопротивление, подключенное параллельно управляемому источнику тока в схеме, приведенной на рис. 13.14, б,  $1/h_{22} = 1 \dots 10$  МОм). Если пренебречь этими коэффициентами, то схема замещения

транзистора упрощается (рис. 13.16): на выход управляемого источника включено комплексное сопротивление параллельного резонансного контура.

Так как эквивалентные схемы транзисторов составлены для переменного тока, то при переходе от принципиальной схемы (рис. 13.15) к эквивалентной (рис. 13.16) зажимы источника питания соединяем накоротко. Из уравнения Кирхгофа для контура, изображенного на рис. 13.16, находим выходное напряжение:

$$\underline{U}_2 = -h_{21} \underline{I}_1 \underline{Z}.$$

Комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = - \frac{h_{21} \underline{I}_1 \underline{Z}}{h_{11} \underline{I}_1} = - \frac{h_{21}}{h_{11}} \underline{Z}.$$

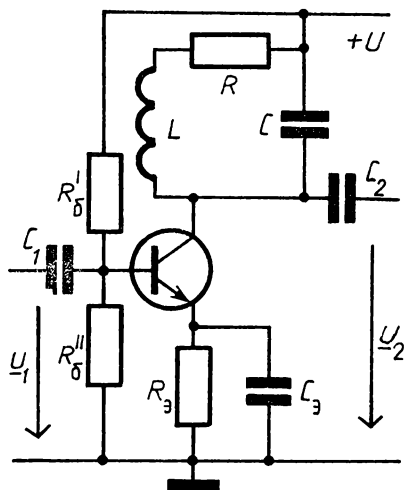


Рис. 13.15

Транзисторы выбирают так, чтобы их параметры  $h_{11}$  и  $h_{12}$  не зависели от частоты как минимум в зоне  $(0,5 \dots 5) \omega_0$ . При этом условии частотная зависимость коэффициента передачи резонансного усилителя совпадает с частотной зависимостью сопротивления резонансного контура  $Z(\omega)$  (см. гл. 12).

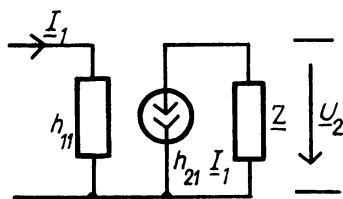


Рис. 13.16

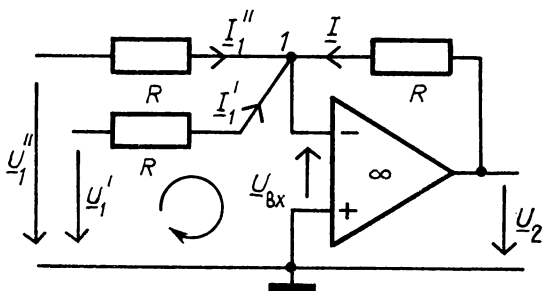


Рис. 13.17

1. Запишите  $h$ -параметры, укажите их названия и единицы, в которых они выражаются. Почему эти параметры так называются?

2. Начертите схему замещения транзистора в  $h$ -параметрах и составьте для них два уравнения Кирхгофа.

3. По схеме замещения каскада резонансного усилителя выведите формулу коэффициента передачи по напряжению.

3.1. На входе идеального усилителя напряжения (см. рис. 13.8, а)  $U_1 = 2$  мВ, на выходе  $U_2 = 4$  В. Вычислите модуль коэффициента передачи по напряжению. Запишите  $U_2$  как функцию  $U$ .

$$\diamond K_U = U_2 / U_1 = 2 \cdot 10^3; U_2 = 2 \cdot 10^3 U_1. \square$$

3.2. На рис. 13.17 приведена схема с идеальным операционным усилителем – суммирующий усилитель. Докажите, что выходное напряжение равно сумме входных напряжений.

◇ Покажем на схеме стрелками условно положительные направления напряжений и токов. Обойдем входной контур по ходу часовой стрелки. Уравнение Кирхгофа имеет вид,  $R I_1' - \underline{U}_{вх} - \underline{U}_1' = 0$ . Так как у идеального операционного усилителя  $\underline{U}_{вх} = 0$ , то входной ток из этого уравнения  $\underline{I}_1' = \underline{U}_1' / R$ .

Аналогично обходим выходной контур по цепи обратной связи:  $\underline{U}_{вх} - R \underline{I}_{о.с} + \underline{U}_2 = 0$ , откуда  $\underline{I}_{о.с} = \underline{U}_2 / R$ .

Входное сопротивление идеального операционного усилителя бесконечно велико, следовательно, входного тока нет. Сумма остальных трех токов в узле 1 должна быть равна нулю:  $\underline{U}_1' / R + \underline{U}_1'' / R + \underline{U}_2 / R = 0$ . Отсюда  $\underline{U}_2 = -(\underline{U}_1' + \underline{U}_1'')$ , т.е. выходное напряжение равно сумме входных напряжений с обратным знаком. □

### 13.5. Расчет схем с зависимыми источниками

Кроме схемы с  $h$ -параметрами (см. рис. 13.14), известны и другие схемы замещения транзисторов. На рис. 13.18 приведена низкочастотная Т-образная схема замещения. Параметры транзистора – сопротивления базы  $R_б$ , эмиттера  $R_э$ , коллектора  $R_к$  соединены в общем узле. Параллельно сопротивлению коллектора включен источник тока, управляемый током эмиттера  $I_э$ . Внутренний ток источника равен  $\alpha I_э$ , где  $\alpha = 0,95 \dots 0,98$  – коэффициент передачи тока. Ориентировочно  $R_б = 500$  Ом,  $R_э = 25$  Ом,  $R_к = 2 \cdot 10^6$  Ом. Конкретные значения параметров схемы замещения для транзистора заданного типа следует брать из справочной литературы.

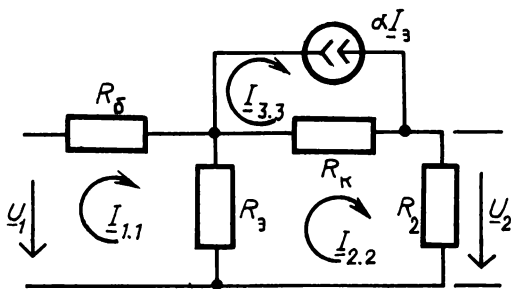


Рис. 13.18

Обязательным элементом всех схем замещения транзисторов является управляемый источник – источник тока либо напряжения. По ранее изученным правилам преобразования независимых источников можно переходить от источника одного типа к источнику другого типа. Так, источник тока (рис. 13.18) можно заменить источником напряжения, ЭДС которого равна произведению внутреннего сопротивления и тока ( $R_к \alpha I_э$ ) и включена последовательно с сопротивлением коллектора (рис. 13.19).

Схемы с управляемыми источниками линейные, и их можно рассчитывать методом контурных токов, узловых напряжений, эквивалентного источника. Рассмотрим на конкретных примерах особенности каждого из них.

Пусть для схемы, приведенной на рис. 13.18, задано напряжение  $\underline{U}_1$ ; требуется найти  $\underline{U}_2$ .

1. М е т о д к о н т у р н ы х т о к о в. Схема состоит из трех независимых контуров. Выберем произвольно и укажем на схеме направление контурных токов, например по ходу часовой стрелки. Обойдя первый контур, составим уравнение Кирхгофа:

$$(R_6 + R_3)\underline{I}_{1.1} - R_3\underline{I}_{2.2} = \underline{U}_1. \quad (13.3)$$

Для второго контура

$$-R_3\underline{I}_{1.1} + (R_3 + R_K + R_2)\underline{I}_{2.2} - R_K\underline{I}_{3.3} = 0. \quad (13.4)$$

Контурный ток  $\underline{I}_{3.3} = -a\underline{I}_3$ . Так как ветвь с  $R_3$  является общей для первого и второго контуров, то  $\underline{I}_3 = \underline{I}_{1.1} - \underline{I}_{2.2}$ . Подставим  $\underline{I}_{3.3} = -a(\underline{I}_{1.1} - \underline{I}_{2.2})$  в уравнение (13.4) и сгруппируем слагаемые:

$$-(R_3 - aR_K)\underline{I}_{1.1} + (R_3 + R_2 + R_K(1 - a))\underline{I}_{2.2} = 0.$$

В итоге, обозначив контурные и общее сопротивления контуров, приведем уравнения (13.3) и (13.4) к виду

$$R_{1.1}\underline{I}_{1.1} - R_{3.2}\underline{I}_{2.2} = \underline{U}_1; \quad -R_{2.1}\underline{I}_{1.1} + R_{2.2}\underline{I}_{2.2} = 0.$$

Из них найдем контурный ток  $\underline{I}_{2.2}$  и затем напряжение  $\underline{U}_2 = R_2\underline{I}_{2.2}$ .

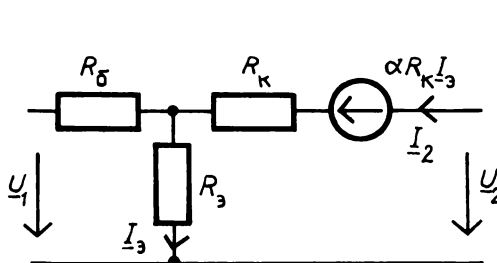


Рис. 13.19

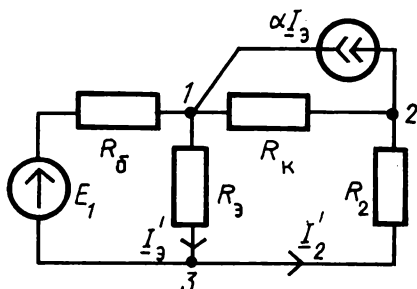


Рис. 13.20

Особенность метода в том, что управляющий ток выражается через контурные токи.

2. М е т о д у з л о в ы х н а п р я ж е н и й. Пронумеруем узлы схемы (рис. 13.20). Узел 3 примем за опорный. Запишем узловые уравнения в общем виде:

$$g_{1.1}\underline{U}_1 - g_{1.2}\underline{U}_2 = \underline{J}_{1.1}; \quad -g_{2.1}\underline{U}_1 + g_{2.2}\underline{U}_2 = \underline{J}_2. \quad (13.5)$$

Найдем собственные и общие проводимости узлов:

$$g_{1.1} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_K}; \quad g_{2.2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_K}; \quad g_{1.2} = g_{2.1} = \frac{1}{R_K}.$$

Узловые токи:

$$\underline{J}_{1.1} = \underline{E}_1/R_6 + a\underline{I}_3; \quad \underline{J}_2 = -a\underline{I}_3.$$

Выразив через узловое напряжение управляющий ток  $\underline{I}_3 = \underline{U}_1 / R_3$ , сведем уравнения (13.5) к уравнениям с двумя неизвестными  $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ :

$$(g_{1,1} - a/R_3) \underline{U}_1 - g_{1,2} \underline{U}_2 = \underline{E}_1 / R_6;$$

$$(-g_{2,1} + a/R_3) \underline{U}_1 + g_{2,2} \underline{U}_2 = 0.$$

Особенность метода в том, что управляющие величины должны быть выражены через напряжения узлов.

3. Метод эквивалентного источника. В цепи (см. рис.13.18) ток

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{2x} / (R_{вх} + R_2). \quad (13.6)$$

Здесь неизвестны напряжение холостого хода  $\underline{U}_{2x}$  (при отключенном сопротивлении  $R_2$ ) и входное сопротивление пассивной схемы  $R_{вх}$ .

Выражение тока эмиттера в режиме холостого хода  $\underline{I}_{3,x} = \underline{U}_1 / (R_6 + R_3)$  подставим в уравнение Кирхгофа для выходного контура ( $\underline{I}_2 = 0, R_k$  не учитываем):

$$R_3 \underline{I}_{3,x} - \underline{U}_{2x} = \underline{E} = a R_k \underline{I}_{3,x}.$$

Из него напряжение холостого хода

$$\underline{U}_{2x} = (R_3 - a R_k) \underline{I}_{3,x} = \frac{R_3 - a R_k}{R_6 + R_3} \underline{U}_1. \quad (13.7)$$

Входное сопротивление  $R_{вх}$  пассивной схемы найдем так. В исходной схеме (см. рис. 13.18) вход замкнем накоротко; сопротивления  $R_6$  и  $R_3$ ,

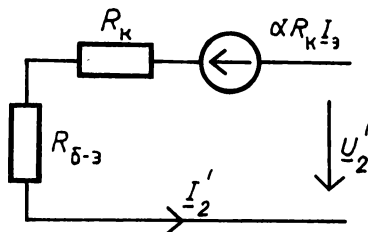


Рис. 13.21

соединенные параллельно, заменим одним, эквивалентным  $R_{6,3}$ ; управляемый источник сохраним. Для полученной таким образом схемы (рис. 13.21) уравнение Кирхгофа

$$(R_k + R_{6,3}) \underline{I}'_2 - \underline{U}'_2 = a R_k \underline{I}'_3.$$

Подставляя сюда

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_2 R_6 / (R_6 + R_3)$$

и группируя члены, получаем

$$(R_k + R_{6,3} - a R_k \frac{R_6}{R_6 + R_3}) \underline{I}'_2 = \underline{U}'_2.$$

Выражение в скобках и есть входное сопротивление:

$$R_{\text{вх}} = R_{\kappa} + \frac{R_6(R_3 - aR_{\kappa})}{R_6 + R_3}. \quad (13.8)$$

Вычислив по соотношениям (13.7) и (13.8) параметры эквивалентного источника, по формуле (13.6) найдем ток  $I_2$ .

Главная особенность метода состоит в определении входного сопротивления: управляемый источник из пассивной схемы не исключается.

1. Из каких элементов строят схемы замещения транзисторов?
2. Через какие величины выражают ток или напряжение при использовании методов контурных токов и узловых напряжений?
3. Объясните, как найти внутреннее сопротивление эквивалентного источника.

## 14. Две индуктивно связанные катушки

### 14.1. Взаимная индуктивность. Сопротивление и ЭДС взаимной индукции.

Коэффициент связи

Предположим, что катушка индуктивности состоит из одного витка (рис. 14.1, а). Ее поперечный разрез по оси А—А показан на рис. 14.1, б. Точкой обозначен ток, направленный "к нам", перпендикулярно к плоскости листа, знаком  $\times$  — "от нас". Направление магнитных силовых линий определяем по правилу буравчика.

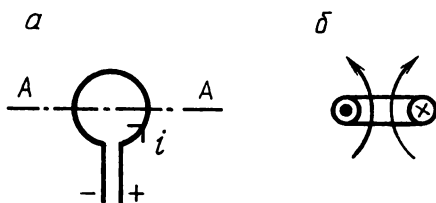


Рис. 14.1

Рассмотрим случай, когда рядом расположены две катушки, но включена одна из них, например первая (рис. 14.2, а). Часть магнитного потока, созданного током первой катушки, пронизывает плоскость второй катушки, т.е.

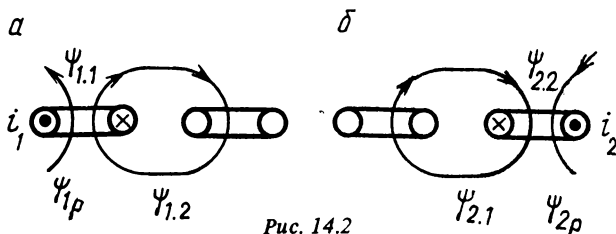


Рис. 14.2

сцеплена с ней. Потокосцепление первой катушки со второй  $\Psi_{1.2}$  в случае неферромагнитной среды пропорционально току первой катушки:

$$\Psi_{1.2} = Mi_1.$$

где  $M$  — взаимная индуктивность, равная отношению потокосцепления  $\Psi_{1,2}$  к току первой катушки:

$$M = \Psi_{1,2} / i_1 .$$

Если включена вторая катушка (рис. 14.2, б), то взаимная индуктивность  $M$  равна отношению потокосцепления второй катушки с первой  $\Psi_{2,1}$  к току второй катушки  $i_2$ :

$$M = \Psi_{2,1} / i_2 .$$

Взаимная индуктивность, определяемая двумя последними отношениями, — одна и та же величина. Это положение было доказано в курсе физики.

Единица взаимной индуктивности — генри (Гн).

Напомним и явление взаимной индукции: при изменении тока в первой катушке во второй возникает ЭДС

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt} .$$

Пусть ток синусоидальный,  $I_{1m} \sin \omega t$ . Производная  $(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t = \omega \sin(\omega t + \pi/2)$ , ЭДС взаимной индукции

$$e_{2M} = \omega M I_{1m} \sin(\omega t - \pi/2) . \quad (14.1)$$

Произведение  $\omega M$  называют *сопротивлением взаимной индукции* и аналогично индуктивному сопротивлению обозначают  $X_M = \omega M$ .

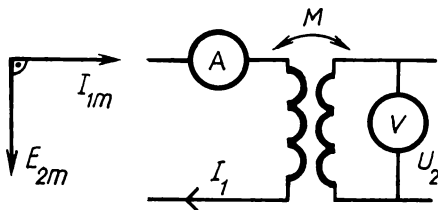


Рис. 14.3

Рис. 14.4

Из уравнения (14.1) видно, что ЭДС отстает от тока на  $\pi/2$  (рис. 14.3). Разделив амплитуды тока и ЭДС на  $\sqrt{2}$ , запишем действующее значение ЭДС в комплексной форме:

$$\underline{E}_{2M} = -jX_M \underline{I}_1 .$$

По абсолютной величине

$$E_{2M} = X_M I_1 . \quad (14.2)$$

Равенство (14.2) позволяет определить сопротивление и взаимную индуктивность из опыта. Для этого надо включить одну из катушек (рис. 14.4) и измерить ток  $I_1$  в одной катушке и напряжение  $U_2$  в другой. Частное  $U_2 / I_1 = X_M$ ,  $X_M / \omega = M$ .

Вернемся к рис. 14.2, а. Потокосцепление первой катушки состоит из двух потокосцеплений:

$$\Psi_{1.1} = \Psi_{1.2} + \Psi_{1p},$$

где  $\Psi_{1p}$  — потокосцепление рассеяния — часть потокосцепления, которая сцеплена только с одной катушкой.

Аналогично, если включена вторая катушка, ее потокосцепление (см. рис. 14.2, б)  $\Psi_{2.2} = \Psi_{2.1} + \Psi_{2p}$ .

Без потоков рассеяния получаются неравенства  $\Psi_{1.1} > \Psi_{1.2}$ ,  $\Psi_{2.2} > \Psi_{2.1}$ . Разделим их почленно: первое на  $i_1$ , второе на  $i_2$ :

$$\Psi_{1.1}/i_1 > \Psi_{1.2}/i_1; \quad \Psi_{2.2}/i_2 > \Psi_{2.1}/i_2.$$

В левой части неравенств стоят индуктивности катушек  $L_1$  и  $L_2$ , в правой — взаимная индуктивность  $M$ . Следовательно,  $L_1 > M$ ,  $L_2 > M$ . Перемножим левые и правые части:  $L_1 L_2 > M^2$ . Последнее неравенство можно записать в виде тождества, если ввести коэффициент  $k < 1$  — коэффициент связи:

$$k^2 L_1 L_2 = M^2.$$

Отсюда коэффициент связи равен отношению взаимной индуктивности к среднему геометрическому индуктивностей двух катушек:

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2}. \quad (14.3)$$

Он всегда меньше единицы. В идеальном случае, для двух соосных катушек, расположенных на ферромагнитном сердечнике, коэффициент связи приближается к единице, т.е. к 100%.

Коэффициент связи можно выразить и через сопротивления. Для этого умножим числитель и знаменатель формулы (14.3) на угловую частоту  $\omega$ :

$$k = \omega M / \sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = X_M / \sqrt{X_1 X_2}. \quad (14.4)$$

1. Что такое взаимная индуктивность?

2. Запишите сопротивление и ЭДС взаимной индукции. Из какого опыта можно определить их значения и вычислить  $M$ ?

3. Выведите формулы для коэффициента связи. Изменяется ли коэффициент связи при изменении частоты?

#### 14.2. Согласная и встречная связь катушек. Одно- и многоконтурные зажимы

Предположим, что включены обе катушки (рис. 14.5). При направлении тока  $i_2$ , отмеченном на рисунке, потокосцепление взаимной индукции второй катушки  $\Psi_{2.1}$  совпадает по направлению с потокосцеплением  $\Psi_{1.1}$  первой катушки. Такая связь называется *согласной*. При согласной связи суммарное потокосцепление первой катушки увеличивается; дополнительно в ней индуцируется ЭДС взаимной индукции, равная  $-jX_M I_2$ . Покажем ее на схеме замещения (рис. 14.6) как управляемый источник напряжения, т.е. источник напряжения, управляемый током  $I_2$ . ЭДС направим так же, как и  $I_1$ .

Во второй катушке индуцируется ЭДС от тока первой катушки, равная  $-jX_M I_1$ . Обходим контуры в направлении движения часовой стрелки:

$$\underline{Z}_1 I_1 - \underline{U}_1 = -jX_M I_2; \quad -\underline{Z}_2 I_2 + \underline{U}_2 = -(-jX_M I_1).$$

Выразим из них напряжения:

$$\underline{Z}_1 I_1 + jX_M I_2 = \underline{U}_1; \quad jX_M I_1 + \underline{Z}_2 I_2 = \underline{U}_2.$$

При согласной связи напряжения  $jX_M I_1$ ,  $jX_M I_2$  входят в уравнения с положительным знаком.

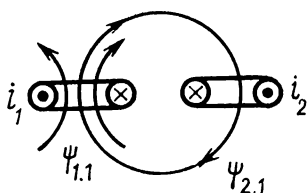


Рис. 14.5

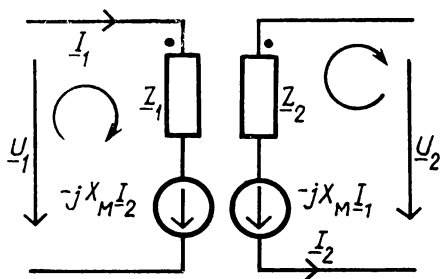


Рис. 14.6

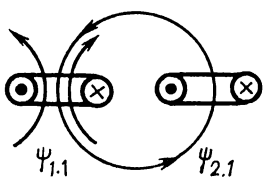


Рис. 14.7

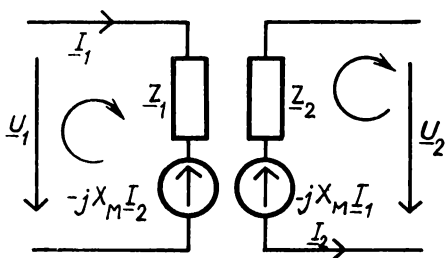


Рис. 14.8

Изменим полярность тока во второй катушке (рис. 14.7). Теперь потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{2,1}$ , созданное второй катушкой, направлено встречно потокосцеплению  $\Psi_{1,1}$ . Суммарное потокосцепление первой катушки уменьшилось. Такая связь называется *встречной*. ЭДС взаимной индукции на схеме направлена встречно току  $I_1$  (рис. 14.8). Аналогично во втором контуре индуцируется ЭДС  $-jX_M I_1$ . Составив уравнения Кирхгофа для контуров, найдем из них напряжения:

$$\underline{Z}_1 I_1 - jX_M I_2 = \underline{U}_1; \quad -jX_M I_1 + \underline{Z}_2 I_2 = \underline{U}_2.$$

Индуктированные напряжения  $jX_M I_1$ ,  $jX_M I_2$  вычитаются, они входят в уравнения с отрицательным знаком.

Чтобы определить характер связи, на принципиальных электрических схемах указывают одноименные зажимы (их обозначают точками либо звездочками). Если токи направлены одинаково относительно одноименных зажимов, то связь согласная; если в противоположные стороны, то встречная.

мов, то потокосцепления самоиндукции  $\Psi_{1.1}$  и взаимной индукции  $\Psi_{2.1}$  суммируются, катушки связаны согласно (рис. 14.9, а). Если же токи входят в разноименные зажимы, то связь встречная (рис. 14.9, б).

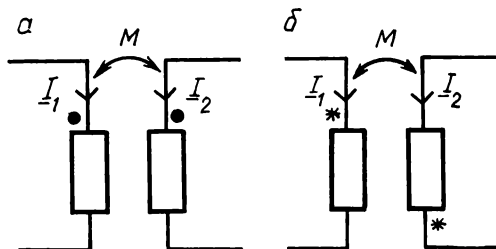


Рис. 14.9

На схеме с индуктивно связанными катушками должны быть указаны одноименные зажимы, иначе вычислить токи невозможно. Направление токов выбираем произвольно.

1. В чем различие согласной и встречной связей? Как оно проявляется в уравнениях?
2. Что должно быть указано на схеме, чтобы по ней можно было определить связь катушек?

1.1 Пусть  $M = 10$  мГн. Определите сопротивление взаимной индукции, если:

а)  $f = 5$  кГц.

◇  $X_M = \omega M = 314$  Ом; □

б)  $f = 50$  Гц [ 3,14 Ом ].

1.2. Пусть включена одна из катушек (см. рис. 14.4). Дано:  $U_2 = 6,28$  В,  $f = 50$  Гц. Чему равна  $M$ , если:

а)  $I_1 = 0,5$  А.

◇  $X_M = U_2 / I_1 = 12,56$  Ом,  $M = X_M / \omega = 0,04$  Гн; □

б)  $I_1 = 1$  А [ 20 мГн ].

1.3. На частоте 500 Гц индуктивные сопротивления катушек равны 4 и 25 Ом. Коэффициент связи  $k = 6,3$  %. Вычислите  $M$ .

◇ Из формулы (14.4) сопротивление взаимной индукции  $X_M = k \sqrt{X_1 X_2} = 0,63$  Ом.

Взаимная индуктивность  $M = X_M / \omega = 0,2$  мГн. □

1.4. Вычислите коэффициент связи двух одинаковых катушек, если  $L_1 = L_2 = 0,1$  Гн, а  $M = 0,02$  Гн [ 0,2, или 20 % ].

#### 14.3. Последовательное соединение двух катушек

Две катушки с сопротивлениями  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$  и  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$  включены последовательно (рис. 14.10). Указаны одноименные зажимы, известны сопротивление взаимной индукции и входное напряжение. Требуется вычислить ток.

Проставим на схеме стрелки напряжений и тока. Ток входит в одноименные зажимы катушек, следовательно, связь согласная. Находим напряжения:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} + jX_M \underline{I}; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} + jX_M \underline{I}. \quad (14.5)$$

Складываем левые и правые части уравнений. Входное напряжение

$$\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + j2X_M)\underline{I}.$$

Выражение в скобках представляет собой входное комплексное сопротивление

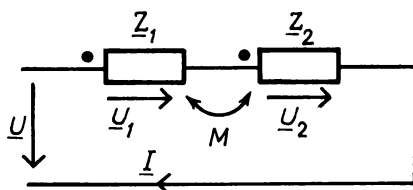


Рис. 14.10

для двух последовательно включенных катушек при согласной связи:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + j2X_M = \underline{Z}_{\text{сг}}.$$

Если переключить зажимы одной из катушек, то связь будет встречная и напряжение  $jX_M I$  войдет в уравнения (14.5) с минусом. Входное сопротивление при встречной связи

$$\underline{Z}_{\text{вс}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - j2X_M.$$

Входные сопротивления  $\underline{Z}_{\text{сг}}$ ,  $\underline{Z}_{\text{вс}}$  состоят из активного и реактивного сопротивлений. Сгруппируем их:

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M).$$

На рис. 14.11 показаны треугольники сопротивлений при согласной и встречной связях катушек. Полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  при согласной связи больше, чем при встречной. Следовательно, если сравнить токи при согласной и встречной связях катушек, можно определить одноименные зажимы.

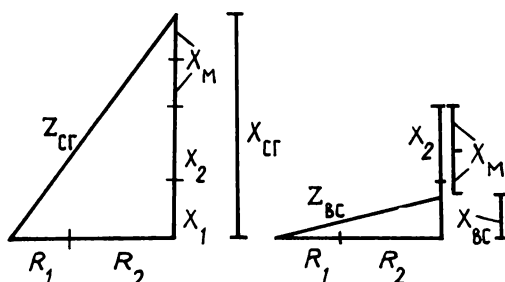


Рис. 14.11

В выражении для эквивалентного индуктивного сопротивления  $X = X_1 + X_2 \pm 2X_M$  вынесем за скобки угловую частоту  $\omega$ :

$$X = \omega(L_1 + L_2 \pm 2M).$$

Здесь  $L = L_1 + L_2 \pm 2M$  — эквивалентная индуктивность. При согласной связи  $2M$  надо прибавить, а при встречной вычесть.

По разности между индуктивными сопротивлениями при согласной и встречной связях можно вычислить взаимную индуктивность. Из  $X_{\text{сг}} = X_1 + X_2 + 2X_M$  вычтем  $X_{\text{вс}} = X_1 + X_2 - 2X_M$ , т.е.  $X_{\text{сг}} - X_{\text{вс}} = 4X_M$ . Отсюда найдем  $X_M$  и затем  $M = X_M / \omega$ .

1. Две катушки соединены последовательно. Запишите входное сопротивление и эквивалентную индуктивность при согласной и встречной связях.

2. Как вычислить  $X_M$  по эквивалентным  $X_{\text{сг}}$  и  $X_{\text{вс}}$ ?

2.1. На схеме, показанной на рис. 14.12, одноименные зажимы отмечены точками. Определите характер связи катушек.

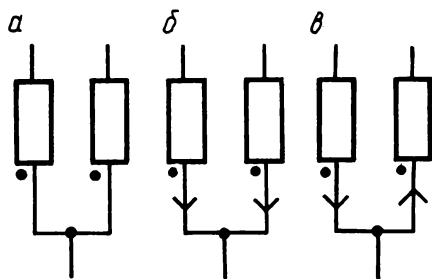


Рис. 14.12

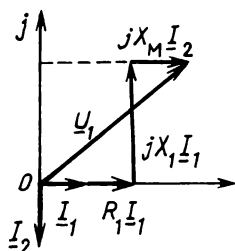


Рис. 14.13

♦ На схеме "а" невозможно определить связь, так как не указаны направления токов. На схеме "б" токи выходят из одноименных зажимов, связь согласная. На схеме "в" токи входят в разноименные зажимы, связь встречная. □

2.2. Для схемы, приведенной на рис. 14.9, а,  $I_1 = 1$  А,  $I_2 = -j2$  А,  $Z_1 = (6 + j8)$  Ом,  $X_M = 2$  Ом. Постройте векторную диаграмму для первой катушки.

♦ Откладываем векторы  $I_1$  и  $I_2$ . Составляем уравнение Кирхгофа:

$$R_1 I_1 + jX_{L1} I_1 + jX_M I_2 = U_1.$$

Выбираем масштаб для напряжений и вычисляем длину векторов  $R_1 I_1$ ,  $X_1 I_1$ ,  $X_M I_2$ . Чертим их в той последовательности, в какой они записаны в уравнении, причем первые два вектора ориентируем относительно  $I_1$ , последний — относительно  $I_2$ . Соединяя конец последнего вектора с началом координат, находим вектор  $U_1$  (рис. 14.13). □

2.3. В условиях задачи 2.2 начертите векторную диаграмму, если связь встречная. Покажите на векторных диаграммах, каким будет  $U_1$ , если  $I_2 = 0$ , а ток первой катушки сохраняет прежнее значение.

#### 14.4. Параллельное соединение двух катушек

Две катушки с сопротивлениями  $Z_1 = R_1 + jX_1$  и  $Z_2 = R_2 + jX_2$  соединены параллельно (рис. 14.14). Одноименные зажимы отмечены точками, напряжение и сопротивление взаимной индукции известны. Требуется определить входной ток.

Проставим на схеме стрелки, указывающие направления токов. Они входят в одноименные зажимы, связь согласная. Уравнения Кирхгофа для контуров:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 = \underline{U}; \quad jX_M \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{U}.$$

Индуктированные напряжения записаны с положительным знаком. Раскрываем главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & jX_M \\ jX_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_M^2. \quad (14.6)$$

Находим токи ветвей:

$$\underline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{U} & jX_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ jX_M & \underline{U} \end{vmatrix}}{\Delta}. \quad (14.7)$$

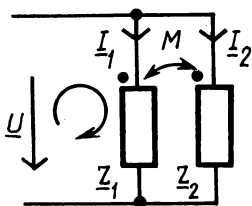


Рис. 14.14

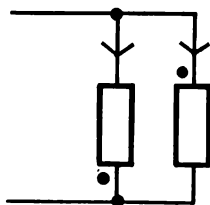


Рис. 14.15

Входной ток равен их сумме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2jX_M}{\Delta} \underline{U}.$$

Запишем последнее равенство в форме закона Ома,  $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}$ . Тогда с учетом формулы (14.6) комплексное входное сопротивление при согласной связи

$$\underline{Z}_{\text{сг}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2jX_M}. \quad (14.8)$$

Если  $Z_M = 0$  (нет индуктивной связи), формула (14.8) дает эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей.

Поменяем местами зажимы одной из катушек (рис. 14.15). Токи будут входить в разноименные зажимы, связь станет встречной. Индуцированные напряжения  $jX_M \underline{I}_1$ ,  $jX_M \underline{I}_2$  в уравнения Кирхгофа войдут с отрицательным знаком, в результате чего  $jX_M$  в формуле (14.7) изменит знак. При встречной связи входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вс}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2jX_M}. \quad (14.9)$$

Здесь в знаменателе  $2jX_M$  прибавляется, а не вычитается (сравните с формулой (14.8)).

Если включены параллельно две одинаковые катушки ( $Z_1 = Z_2$ ), то при согласной связи входное сопротивление

$$Z_{\text{сг}} = \frac{Z_1^2 - (jX_M)^2}{2(Z_1 - jX_M)} = \frac{Z_1 + jX_M}{2}, \quad (14.10)$$

а при встречной

$$Z_{\text{вс}} = \frac{Z_1 - jX_M}{2}. \quad (14.11)$$

Формулам (14.10), (14.11) соответствуют эквивалентные индуктивности:

$$L_{\text{сг}} = \frac{L_1 + M}{2}; \quad L_{\text{вс}} = \frac{L_1 - M}{2}.$$

Если можно пренебречь активными сопротивлениями катушек, то из формул (14.8), (14.9) получается эквивалентная индуктивность:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \quad (14.12)$$

(в знаменателе минус при согласной связи, плюс при встречной).

1. Выведите формулы для входного сопротивления и эквивалентной индуктивности двух параллельно включенных катушек с индуктивной связью.

2. Выполните задание 1, если катушки: а) одинаковые; б) идеальные.

3.1. Чтобы определить одноименные зажимы двух катушек, их включили последовательно (см. рис. 14.10). Измерили ток. Он равен 0,3 А. Когда зажимы одной из катушек поменяли местами, ток стал равен 0,2 А. В каком случае катушки были связаны согласнo?

◇ Входное полное сопротивление при согласной связи больше, чем при встречной (см. рис. 14.11), а ток  $I = U/Z$  меньше. Во втором опыте связь согласная. □

3.2. Две катушки с суммарным активным сопротивлением  $R = R_1 + R_2 = 3 \text{ Ом}$  включены последовательно. Показания амперметра на частоте 50 Гц и напряжении 6 В при согласной связи 0,7 А, при встречной 1, 2 А. Вычислите взаимную индуктивность.

◇ При согласной и встречной связях полные сопротивления ( $U/I$ ):

$$Z_{\text{сг}} = 6/0,7 = 8,55 \text{ Ом}; \quad Z_{\text{вс}} = 6/1,2 = 5 \text{ Ом};$$

реактивные ( $\sqrt{Z^2 - R^2}$ ):

$$X_{\text{сг}} = \sqrt{8,55^2 - 3^2} = 8 \text{ Ом}; \quad X_{\text{вс}} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом}.$$

Сопротивление взаимной индукции  $X_M = (X_{\text{сг}} - X_{\text{вс}})/4 = 1 \text{ Ом}$ . Взаимная индуктивность  $M = X_M/\omega = 1/(2\pi \cdot 50) = 3,2 \text{ мГн}$ . □

3.3. Для схемы, приведенной на рис. 14.10,  $R_1 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 2 \text{ Ом}$ ,  $U = 5 \text{ В}$ . Вычислите ток; постройте векторную диаграмму.

◇ Находим входные комплексное и полное сопротивления:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 + 2X_M) = (20 + j15) \text{ Ом};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 25 \text{ Ом.}$$

Ток  $I = U/Z = 0,2 \text{ А}$ . Вычислим напряжения:  $R_1 I = 2,8 \text{ В}$ ,  $X_1 I = 0,8 \text{ В}$ ,  $X_M I = 0,4 \text{ В}$ ,  $R_2 I = 1,2 \text{ В}$ ,  $X_2 I = 1,4 \text{ В}$ .

Выберем масштаб для напряжений. Вектор тока расположим по горизонтальной оси. Падение напряжения  $jX_M I$ , как и  $jX_1 I$ , опережает ток на  $\pi/2$  (рис. 14.16). □

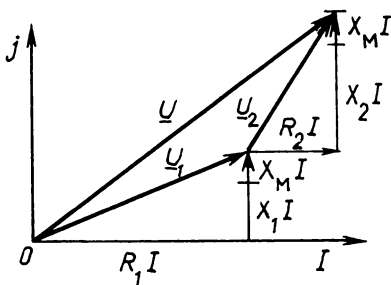


Рис. 14.16

3.4. В условиях задачи 3.3 вычислите входное сопротивление катушек, если связь встречная. Постройте векторную диаграмму при  $I = 0,2 \text{ А}$ . (У к а з а н и е. Вектор  $-jX_M I$  вычитайте из векторов  $jX_1 I$ ,  $jX_2 I$ .) [ $Z = (20 + j7) \text{ Ом}$ .]

#### 14.5. Расчет разветвленных цепей с взаимной индуктивностью

Встречаются схемы, у которых две индуктивно связанные ветви подключены к одному узлу (рис. 14.17). Такую схему можно заменить эквивалентной Т-образной схемой замещения без магнитной связи (рис. 14.18). Докажем, что обе схемы эквивалентны. По второму закону Кирхгофа для первой и второй схем имеем соответственно:

$$\underline{U}_{1,3} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2; \quad \underline{U}_{1,3} = (\underline{Z}_1 - jX_M) \underline{I}_1 + jX_M (\underline{I}_1 + \underline{I}_2).$$

Раскрыв скобки, убедимся, что оба уравнения одинаковы. Аналогичные пары уравнений можно записать для напряжений  $\underline{U}_{2,3}$ ,  $\underline{U}_{1,2}$ . Так как уравнения

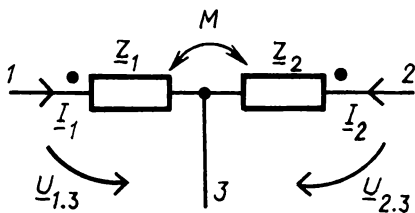


Рис. 14.17

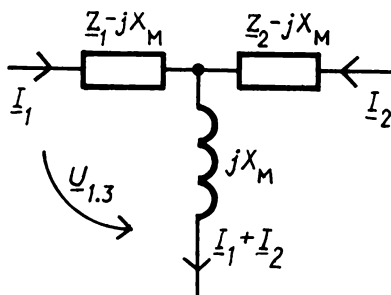


Рис. 14.18

Кирхгофа для обеих схем одинаковы, то схемы эквивалентны. Раскроем  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  в выражениях для сопротивлений ветвей эквивалентной схемы :

$$\underline{Z}_1 - jX_M = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M = R + j\omega (L_1 - M);$$

$$\underline{Z}_2 - jX_M = R_2 + j\omega (L_2 - M)$$

(в скобках стоят эквивалентные индуктивности).

Чтобы устранить согласную связь двух катушек, подключенных к общему узлу, надо уменьшить их индуктивности на  $M$ , а в третью ветвь, отходящую от узла, включить индуктивность, равную  $M$  (рис. 14.19). При встречной связи индуктивности  $L_1, L_2$  увеличивают на  $M$ , а в третью ветвь подключают  $-M$ . Замену схемы с магнитной связью эквивалентной электрической схемой называют *развязкой*.

Кроме развязки, можно использовать методы уравнений Кирхгофа и контурных токов. Применим их для схемы, приведенной на рис. 14.20. Катушки с сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_3$  имеют индуктивную связь. Покажем стрелками направления токов. Токи  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_3$  входят в одноименные зажимы, связь со-

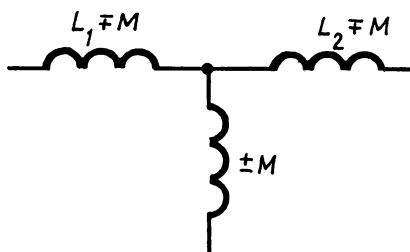


Рис. 14.19

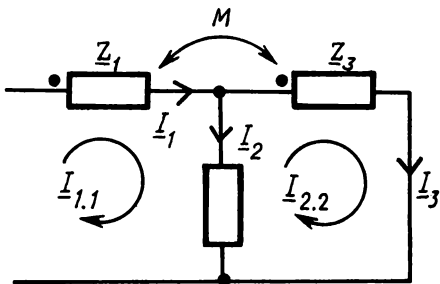


Рис. 14.20

ласная. Следовательно, на эквивалентной схеме (рис. 14.21) ЭДС управляемых источников  $-jX_M \underline{I}_3$ ,  $-jX_M \underline{I}_1$  должны совпадать с направлением токов ветвей. Составляя уравнения Кирхгофа для контуров, ЭДС относим в правую часть:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{U} = -jX_M \underline{I}_3; \quad -\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = -jX_M \underline{I}_1;$$

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0.$$

Метод контурных токов позволяет обойтись меньшим числом уравнений.

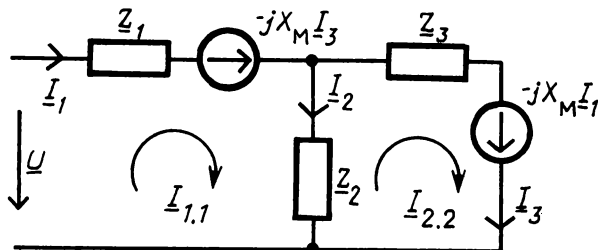


Рис. 14.21

Наносим на схему (см. рис. 14.20) стрелки, указывающие направления контурных токов  $\underline{I}_{1,1}$  и  $\underline{I}_{2,2}$ . Токи входят в одноименные зажимы, связь согласная. Эквивалентная схема аналогична схеме, приведенной на рис. 14.21, только ЭДС управляемых источников будут выражены через контурные токи:  $-jX_M \underline{I}_{2,2}$ ,  $-jX_M \underline{I}_{1,1}$ . Обходим контуры (см. рис. 14.21) в направлении контурных токов:

$$\begin{aligned}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_{1,1} - \underline{Z}_2 \underline{I}_{2,2} - \underline{U} &= -jX_M \underline{I}_{2,2}; \\ -\underline{Z}_2 \underline{I}_{1,1} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_{2,2} &= -jX_M \underline{I}_{1,1}.\end{aligned}$$

1. Две катушки подключены к одному узлу. Применив развязку, начертите эквивалентную электрическую схему, запишите ее параметры при согласной и встречной связях.

2. Как направлены ЭДС управляемых источников  $-jX_M \underline{I}$  в эквивалентной схеме при согласной и встречной связях?

3. Сравните методы уравнений Кирхгофа и контурных токов. Как определяется связь катушек, какие токи входят в ЭДС управляемых источников?

4.1. Две идеальные катушки ( $R = 0$ ) включены параллельно. Дано:  $L_1 = 0,2$  мГн,  $L_2 = 0,45$  мГн, коэффициент связи 10 %. Вычислите эквивалентную индуктивность при согласной и встречной связях.

◊ Взаимная индуктивность  $M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,03$  мГн. По формуле (14.12) находим эквивалентные индуктивности:

$$L_{\text{сг}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = 0,15 \text{ мГн};$$

$$L_{\text{вс}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} = 0,125 \text{ мГн. } \square$$

4.2. Вычислите эквивалентную индуктивность двух одинаковых параллельно включенных катушек, если  $L = 4$  мГн,  $M = 2$  мГн [ 3 мГн, 1 мГн ].

4.3. Две катушки включены параллельно. Дано:  $\underline{Z}_1 = (6 + j8)$  Ом,  $\underline{Z}_2 = (8 + j6)$  Ом,  $U = 36$  В,  $X_M = 4$  Ом. Вычислите токи, постройте векторную диаграмму.

◊ Выбираем направление токов (см. рис. 14.15). Токи входят в разноименные зажимы, связь встречная. Уравнения Кирхгофа:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 = \underline{U}; \quad -jX_M \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{U}.$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & -jX_M \\ -jX_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_M^2$$

или  $\Delta = 10 \angle 53^\circ \cdot 10 \angle 37^\circ + 4^2 = 16 + j100 = 102 \angle 81^\circ$ .

Находим токи:

$$\underline{I}_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \underline{U} & -jX_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\underline{Z}_2 + jX_M}{\Delta} \underline{U}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ -jX_M & \underline{U} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\underline{Z}_1 + jX_M}{\Delta} \underline{U}.$$

Подставив численные значения, получим:

$$\underline{I}_1 = \frac{8 + j6 + j4}{\Delta} \cdot 36 = \frac{12,8 \angle 51^\circ}{102 \angle 81^\circ} \cdot 36 = 4,4 \angle -30^\circ = (3,8 - j2,2) \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = 4,7 \angle -17,5^\circ = (4,2 - j1,4) \text{ A}.$$

Входной ток как сумма  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$

$$\underline{I} = 3,8 - j2,2 + 4,2 - j1,4 = 8 - j3,6 = 8,8 \angle -25,5^\circ \text{ A}.$$

Откладываем векторы токов на комплексной плоскости (рис. 14.22). Относительно их ориентируем векторы напряжений в той же последовательности, в какой они записаны в уравнении:

$$R_1 I_1 + jX_1 I_1 - jX_M I_2 = \underline{U}.$$

Вычислим абсолютную величину векторов:  $R_1 I_1 = 26,4 \text{ В}$ ,  $X_1 I_1 = 35,2 \text{ В}$ ,  $X_M I_2 = 18,8 \text{ В}$ . Вектор  $R_1 I_1$  совпадает по фазе с током,  $jX_1 I_1$  опережает ток на  $90^\circ$ , вектор  $-jX_M I_2$  перпендикулярен к  $\underline{I}_2$ , он отстает. Сумма трех векторов дает входное напряжение  $\underline{U} = 36 \text{ В}$ . Во втором контуре

$$R_2 I_2 + jX_2 I_2 - jX_M I_1 = \underline{U}.$$

Напряжения  $R_2 I_2 = 37,6 \text{ В}$ ,  $X_2 I_2 = 28,8 \text{ В}$  ориентируем относительно  $\underline{I}_2$ , а вектор  $-jX_M I_1 = -j17,6 \text{ В}$  — относительно  $\underline{I}_1$ . (Векторную диаграмму для второго контура постройте самостоятельно.) □

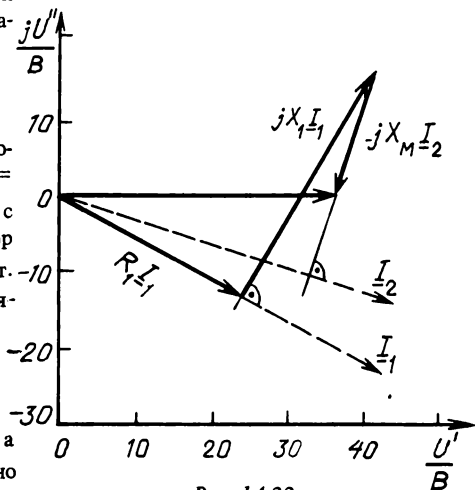


Рис. 14.22

5.1. В схеме, приведенной на рис. 14.23,  $\underline{Z}_1 = (6 + j6) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_2 = (8 + j4) \text{ Ом}$ ,  $X_M = 2 \text{ Ом}$ . Примените развязку, вычислите параметры эквивалентной схемы.

♦ Нанесем на схему стрелки, указывающие направления токов. Они входят в разноименные зажимы. Связь встречная. К сопротивлениям  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  надо прибавить  $jX_M$ :  $\underline{Z}'_1 = 6 + j6 + j2 = (6 + j8) \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}'_2 = (8 + j6) \text{ Ом}$ .

В третью ветвь подключим сопротивление  $-jX_M = -j2 \text{ Ом}$ . Отрицательное реактивное сопротивление покажем на схеме (рис. 14.24) как емкостное.

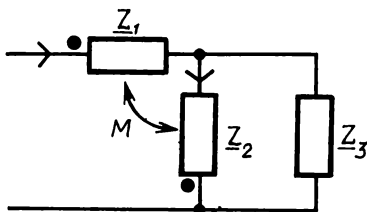


Рис. 14.23

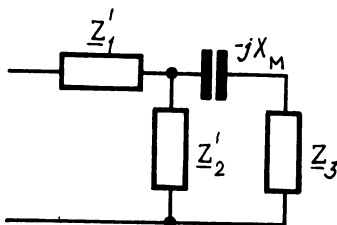


Рис. 14.24

Схемы, приведенные на рис. 14.23 и 14.24, эквивалентны, но вторая схема не имеет индуктивной связи; это смешанное соединение. □

5.2. Начертите эквивалентную схему для расчета цепи, показанной на рис. 14.24, методом уравнений Кирхгофа.

◇ При выбранном направлении токов связь встречная. На эквивалентной схеме индуцированные ЭДС  $-jX_{M1}I_1$ ,  $-jX_{M2}I_2$  надо направить встречно току (рис. 14.25). В отличие от эквивалентной схемы с развязкой (рис. 14.24) здесь сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  остаются неизменными, но дополнительно в ветви вводятся зависимые источники. Последняя схема является более общей, она может быть составлена для цепи, в которой катушки подключены к разным узлам или вообще не имеют электрической связи (см. рис. 14.6, 14.8). □

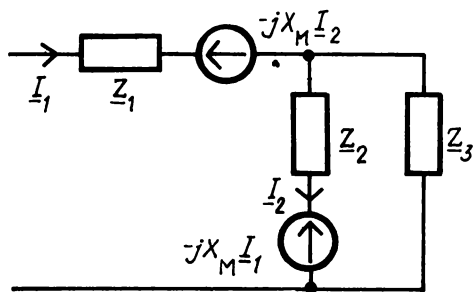


Рис. 14.25

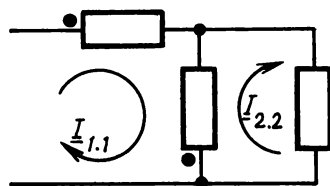


Рис. 14.26

5.3. Для схемы, показанной на рис. 14.23, начертить эквивалентную схему для расчета методом контурных токов.

◇ Укажем на схеме направление контурных токов (рис. 14.26). Ток  $I_{1.1}$  входит в разноименные зажимы катушек, связь встречная. ЭДС управляемых источников  $-jX_{M1}I_{1.1}$  введем в обе ветви встречно току; для тока  $I_{1.1}$  обе катушки включены последовательно и встречно (рис. 14.27).

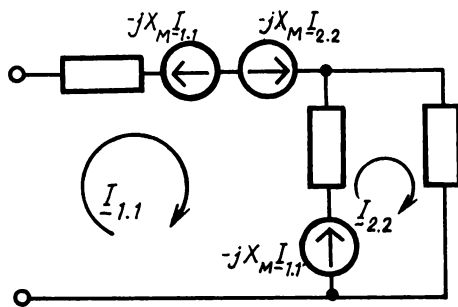


Рис. 14.27

Сравним направления токов  $I_{1.1}$  и  $I_{2.2}$  относительно одноименных зажимов. Оба они входят в одноименные зажимы, связь согласная. ЭДС  $-jX_{M2}I_{2.2}$  в первой ветви должна быть направлена по току  $I_{1.1}$ . □

## 15. Связанные колебательные контуры

### 15.1. Воздушный трансформатор

Есть трансформаторы (силовые, измерительные, специальные), у которых катушки расположены на ферромагнитном сердечнике. Их изучают в курсе "Электропитание устройств связи".

Воздушный трансформатор не имеет ферромагнитного сердечника. Он представляет собой две индуктивно связанные катушки (обмотки трансформатора). Одна из них (*первичная*) подключена к источнику, к другой (*вторичной*) подсоединена нагрузка (рис. 15.1).

Первичная обмотка имеет активное  $R_1$ , индуктивное  $X_1$  и комплексное  $Z_1 = R_1 + jX_1$  сопротивление. К вторичной обмотке с сопротивлением  $R_{2T} + jX_{2T}$  подсоединена нагрузка  $R_{2H} + jX_{2H}$ , так что комплексное сопротивление вторичного контура

$$Z_2 = R_{2T} + R_{2H} + j(X_{2T} + X_{2H}) = R_2 + jX_2.$$

Известна взаимная индуктивность  $M$  либо сопротивление взаимной индукции  $X_M = \omega M$ .

Наиболее распространенная задача — вычисление токов  $I_1$  и  $I_2$  контуров при заданных перечисленных сопротивлениях и входном напряжении  $U_1$ .

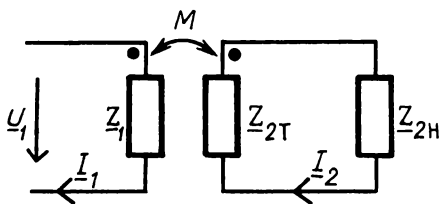


Рис. 15.1

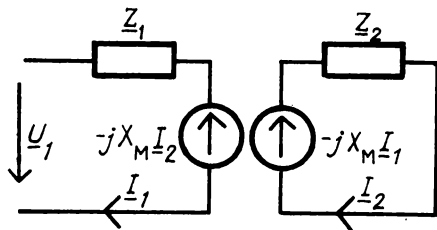


Рис. 15.2

На рис. 15.1 положительное направление тока  $I_1$  определено напряжением  $U_1$ , направление тока  $I_2$  выбрано произвольно. Одноименные зажимы катушек обозначены точками. При таком направлении токов связь встречная — стрелки входят в разноименные зажимы. На эквивалентной схеме (рис. 15.2) стрелки ЭДС зависимых источников —  $jX_M I_1$  во втором контуре и —  $jX_M I_2$  в первом направим встречно току.

Составим уравнения Кирхгофа для контуров:

$$Z_1 I_1 - U_1 = -(-jX_M I_2); \quad Z_2 I_2 = -(-jX_M I_1).$$

Запишем их так:

$$Z_1 I_1 - jX_M I_2 = U_1; \quad (15.1)$$

$$-jX_M I_1 + Z_2 I_2 = 0. \quad (15.2)$$

Из формулы (15.2) находим

$$\underline{I}_2 = \frac{jX_M}{\underline{Z}_2} \underline{I}_1.$$

Подставим полученное выражение в формулу (15.1):

$$(\underline{Z}_1 + X_M^2/\underline{Z}_2) \underline{I}_1 = \underline{U}_1.$$

Отсюда входное сопротивление трансформатора

$$\underline{Z} = \underline{U}_1/\underline{I}_1 = \underline{Z}_1 + X_M^2/\underline{Z}_2. \quad (15.3)$$

Приведем формулу (15.3) к виду, удобному для расчетов. Числитель и знаменатель дроби умножим на сопряженное комплексное число:

$$\underline{Z} = \frac{X_M^2 (R_2 - jX_2)}{(R_2 + jX_2)(R_2 - jX_2)}.$$

В знаменателе  $R_2^2 + X_2^2 = Z_2^2$  — квадрат полного сопротивления. Раскроем скобки:

$$R_2 (X_M/Z_2)^2 - jX_2 (X_M/Z_2)^2.$$

Введем обозначения:

$$R_2 (X_M/Z_2)^2 = R_{1\text{вн}}; \quad X_2 (X_M/Z_2)^2 = X_{1\text{вн}}. \quad (15.4)$$

(Назовем  $R_{1\text{вн}}$  и  $X_{1\text{вн}}$  *вносимыми сопротивлениями*.) Тогда выражение (15.3) примет вид

$$\underline{Z} = R_1 + R_{1\text{вн}} + j(X_1 - X_{1\text{вн}}). \quad (15.5)$$

Активное  $R_{1\text{вн}}$  и реактивное  $X_{1\text{вн}}$  сопротивления вносятся из второго контура в первый. Если вторичный контур разомкнут ( $Z_2 \rightarrow \infty$ ), то, согласно формуле (15.4), вносимые сопротивления равны нулю. При включенной нагрузке входное активное сопротивление увеличивается, а входное реактивное либо уменьшается (при индуктивном сопротивлении  $X_2$ ), либо увеличивается (при емкостном сопротивлении  $X_2$ ). Значение вносимых сопротивлений зависит от  $X_M$ .

Входному сопротивлению (15.5) соответствует двухполюсник с последовательно включенными активным  $R_1 + R_{1\text{вн}}$  и реактивным  $X_1 - X_{1\text{вн}}$  сопротивлениями (рис. 15.3).

Таким образом, при решении задачи вычисляем вносимые (15.4) и входное (15.5) сопротивления и токи

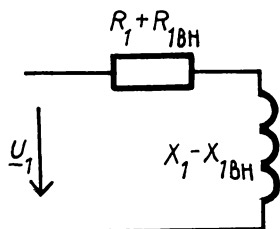


Рис. 15.3

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1/\underline{Z}, \quad \underline{I}_2 = jX_M \underline{I}_1/\underline{Z}_2.$$

Вторая задача — вычисление сопротивлений контуров, при которых передается максимальная мощность.

Ранее было показано, что в нагрузке выделяется максимальная мощность, если сопротивление ее комплексно сопряжено с внутренним сопротивлением источника:  $Z_H^* = Z_i$ .

Для эквивалентной одноконтурной схемы (см. рис. 15.3) сопротивление первичной цепи можно считать внутренним сопротивлением источника, а вносимые сопротивления — нагрузкой. Если трансформатор подключен к источнику с внутренним сопротивлением, то последнее надо учесть в сопротивлениях  $R_1$  и  $X_1$ .

Условия согласованного режима:

$$R_{1\text{вн}} = R_1; X_{1\text{вн}} = X_1. \quad (15.6)$$

В согласованном режиме выражение (15.5) принимает вид  $Z = 2R_1$ .

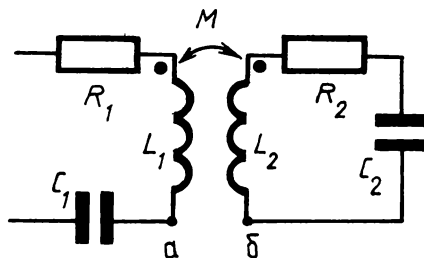


Рис. 15.4

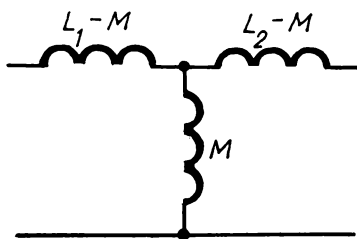


Рис. 15.5

Для выполнения условий (15.6) в первичный и вторичный контуры включают конденсаторы переменной емкости (рис. 15.4). Регулируя  $C_1$  и  $C_2$ , изменяют реактивные сопротивления:

$$X_1 = \omega L_1 - 1/(\omega C_1); X_2 = \omega L_2 - 1/(\omega C_2),$$

которые входят в равенства (15.4), (15.6).

Используя трансформатор с подвижными обмотками, изменяют взаимную индуктивность  $M$ , т.е. сопротивление  $X_M$ .

Воздушный трансформатор можно представить не только одноконтурной, но и двухконтурной схемой замещения (рис. 15.5). В цепи, схема которой показана на рис. 15.4, соединим точки  $a$  и  $b$ . Режим не изменится, однако теперь две индуктивно связанные ветви, присоединенные к общему узлу, можно заменить эквивалентной схемой, не содержащей индуктивной связи, т.е. применить развязку. Поперечная ветвь с индуктивностью  $M$  называется *ветвью намагничивания*.

1. Запишите уравнения Кирхгофа для первичного и вторичного контуров трансформатора и выведите формулы вносимых сопротивлений.
2. Начертите одноконтурную схему замещения. Какими должны быть вносимые сопротивления, чтобы мощность вторичного контура была максимальной?
3. Как можно изменять сопротивления контуров?
4. Начертите двухконтурную схему замещения.

## 15.2. Виды связи контуров. Резонансные явления

В передатчиках, приемниках, измерительных приборах используют два (реже — три) контура, соединенных реактивным элементом. Это *связанные колебательные контуры*. По сравнению с одиночными колебательными контурами (последовательным, параллельным) связанные контуры имеют большую полосу пропускания и лучшую избирательность.

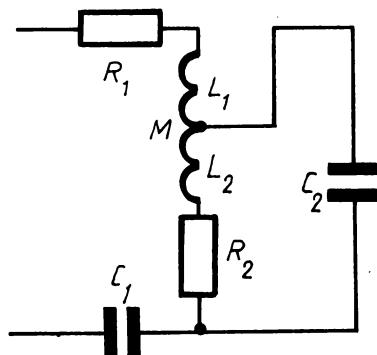


Рис. 15.6.

В зависимости от того, какой реактивный элемент соединяет контуры, различают следующие виды связи: трансформаторную (см. рис. 15.4), автотрансформаторную (рис. 15.6) и емкостную (рис. 15.7).

Независимо от вида связи цепь имеет два контура; ее можно рассчитать методом контурных токов. Комплексные контурные сопротивления при определенных условиях становятся активными. Наступает резонанс — ток и напряжение совпадают по фазе. Резонанс может быть: 1) только

в первом контуре — *первый частный резонанс*; 2) только во втором контуре — *второй частный резонанс*; 3) в обоих контурах одновременно — *полный резонанс*.

Рассмотрим контуры с трансформаторной связью. Эквивалентное входное сопротивление (15.5) становится активным, если  $X_1 = X_{1\text{вн}}$ . Это условие первого частного резонанса.

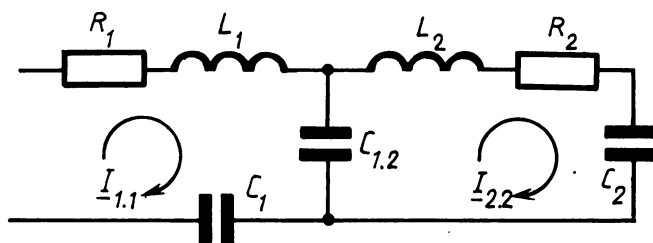


Рис. 15.7

Чтобы вывести условия второго частного резонанса, решим уравнения (15.1) и (15.2) относительно  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{j X_M U_1}{Z_1 Z_2 - (j X_M)^2}.$$

Преобразуем эту формулу, разделив числитель и знаменатель на  $Z_1$ :

$$I_2 = \frac{j X_M (U_1 / Z_1)}{Z_2 + X_M^2 / Z_1}, \quad (15.7)$$

В числителе  $\underline{U}_1/\underline{Z}_1$  — это ток первого контура при разомкнутом втором. Все произведение  $jX_M \underline{U}_1/\underline{Z}_1 = \underline{U}_{2\text{эк}}$  выражает напряжение, индуцируемое во втором контуре в режиме холостого хода. Назовем его *эквивалентным напряжением*.

В знаменателе формулы (15.7) эквивалентное сопротивление  $\underline{Z}_{2\text{эк}}$ . Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное комплексное число:

$$\underline{Z}_2 + \frac{X_M^2 (R_1 - jX_1)}{(R_1 + jX_1)(R_1 - jX_1)}.$$

Раскроем скобки и разделим почленно:

$$\underline{Z}_2 = R_1 (X_M/Z_1)^2 - jX_1 (X_M/Z_1)^2.$$

Здесь  $Z_1$  — полное сопротивление. Введем обозначения:

$$R_1 (X_M/Z_1)^2 = R_{2\text{вн}}; \quad X_1 (X_M/Z_1)^2 = X_{2\text{вн}}.$$

Это сопротивления, вносимые из первого контура во второй. Тогда формула (15.7) примет вид

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2\text{эк}}}{R_2 + R_{2\text{вн}} + j(X_2 - X_{2\text{вн}})}. \quad (15.8)$$

Резонанс во вторичном контуре наступит при условии  $X_2 = X_{2\text{вн}}$ .

Выражению (15.8) соответствует одноконтурная эквивалентная схема (рис. 15.8).

Ни при первом, ни при втором частных резонансах вторичный ток не достигает максимально возможного значения, так как не выполняются полностью условия согласованного режима (15.6).

1. Какие преимущества имеют связанные колебательные контуры перед одиночными? Назовите виды связи.

2. Перечислите возможные случаи резонанса. Запишите условие первого частного резонанса.

3. Из уравнений Кирхгофа для контуров с трансформаторной связью выведите формулы сопротивлений, вносимых во второй контур из первого.

4. Чему равно эквивалентное напряжение вторичного контура? Начертите одноконтурную схему замещения и запишите ее параметры.

1.1. В схеме (рис. 15.4)  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 1 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 1,4 \text{ мГн}$ ,  $C_2 = 1000 \text{ пФ}$ . На частоте  $130 \text{ кГц}$  сопротивление связи  $X_M = 216 \text{ Ом}$ ,  $U_1 = 340 \text{ В}$ . Вычислите оптимальную емкость  $C_{1\text{опт}}$  при которой в первом контуре будет резонанс, и токи в этом режиме.

◇ Условие первого частного резонанса  $X_1 = X_{1\text{вн}}$ , где  $X_1 = X_{L1} - X_{C1}$ . Если вычислить  $X_{1\text{вн}}$  и  $X_{L1}$ , то можно найти  $X_{C1}$ .

Угловая частота  $\omega = 2\pi f = 0,88 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Находим сопротивления: индуктивные

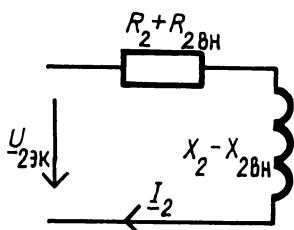


Рис. 15.8

$\omega L_1 = 880 \text{ Ом}$ ,  $\omega L_2 = 1230 \text{ Ом}$ , емкостное  $1/(\omega C_2) = 1130 \text{ Ом}$ , реактивное  $X_2 = \omega L_2 - 1/(\omega C_2) = 100 \text{ Ом}$ , полное  $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 108 \text{ Ом}$ , вносимое  $X_{1\text{вн}} = X_2 (X_M/Z_2)^2 = 400 \text{ Ом}$ . Имеем  $X_{C_1} = X_{L_1} - X_1 = 480 \text{ Ом}$ , откуда  $C_1 = 1/(\omega X_{C_1}) = 2400 \text{ пФ}$ .

Вносимое сопротивление  $R_{1\text{вн}} = R_2 (X_M/Z_2)^2 = 160 \text{ Ом}$ . Из формул (15.5) и (15.2) находим:

$$I_1 = U / (R_1 + R_{1\text{вн}}) = 2 \text{ мА};$$

$$I_2 = j X_{M1} I_1 / Z_2 = j 216 \cdot 2 / (40 + j 100) = 4 e^{j 68^\circ} \text{ мА. } \square$$

1.2. В условиях задачи 1.1. рассчитайте и постройте настроечную кривую – график зависимости  $I_2(C_1)$ .

♦ По абсолютной величине  $I_2 = X_M I_1 / Z_2$ ; учитывая формулу (15.5), имеем

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_{1\text{вн}})^2 + ((X_{L1} - 1/(\omega C_1)) - X_{1\text{вн}})^2}} \cdot \frac{X_M}{Z_2}.$$

Здесь все величины, кроме  $C_1$ , известны.

Составляем программу для микрокалькулятора. Шаг вычислений примем кратным  $C_{1\text{опт}} = 2400 \text{ пФ}$  (см. задачу 1.1). Рассчитываем зависимость  $I_2(C_1)$  (табл. 15.1).

Т а б л и ц а 15.1

$C_1$ , пФ	0	1200	2400	3600	4800
$I_2$ , мА	0	1,35	4	3	2,3

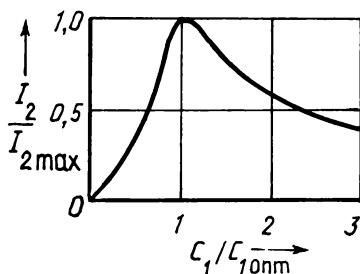


Рис. 15.9

Форма настроечной кривой в относительных единицах показана на рис. 15.9. За базисные величины приняты ток в режиме первого частного резонанса  $I_{2\text{max}}$  и  $C_{1\text{опт}}$ . □

### 15.3. Полный резонанс

Если можно изменять взаимное расположение катушек, то, кроме равенства сопротивлений  $X_1 = X_{1\text{вн}}$  или  $X_2 = X_{2\text{вн}}$ , можно подобрать такое  $X_M$ , чтобы были равны и активные сопротивления:

$$R_1 = R_{1\text{вн}} \text{ или } R_2 = R_{2\text{вн}}. \quad (15.9)$$

Такой режим называют *полным резонансом*. Вторичный ток достигает наибольшего значения (максимума максимума)  $I_{2\max \max}$ .

Сопротивление связи, при котором выполняется одно из равенств (15.9), например  $R_1 = R_2 (X_M/Z_2)^2$ , назовем *оптимальным*. Отношение

$$(X_M/Z_2)_{\text{опт I}} = \sqrt{R_1/R_2} \quad (15.10)$$

подставим в формулу  $I_2 = I_1 \frac{X_M}{Z_2}$ . Заменяя  $I_1 = U/(2R_1)$ , получим

$$I_{2\max \max} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (15.11)$$

Пусть выполняется условие второго частного резонанса  $X_2 = X_{2\text{вн}}$ , а оптимальное сопротивление связи  $X_M$  обеспечивает справедливость равенства  $R_2 = R_{2\text{вн}}$ , т.е.

$$R_2 = R_1 (X_M/Z_1)^2.$$

Отсюда найдем

$$(X_M/Z_1)_{\text{опт II}} = \sqrt{R_2/R_1} \quad (15.12)$$

и подставим в формулу

$$U_{2\text{эк}} = U X_M / Z_1.$$

Далее из равенства  $I_2 = U_{2\text{эк}}/Z_2$ , где  $Z_2 = R_2$ , получим формулу (15.11).

На практике полный резонанс получают методом последовательных приближений. Сначала емкостью  $C_1$  либо  $C_2$  настраивают контуры в один из частных резонансов (рис. 15.10). Затем изменяют  $M$  так, чтобы вторичный ток  $I_2$  увеличивался. Но при новом значении  $M$  резонанс исчезнет. Следует вновь изменить  $C$  и подкорректировать  $M$ , чтобы ток  $I_2$  увеличился еще более. Так поступают два-три раза, добиваясь максимального отклонения стрелки амперметра или вольтметра.

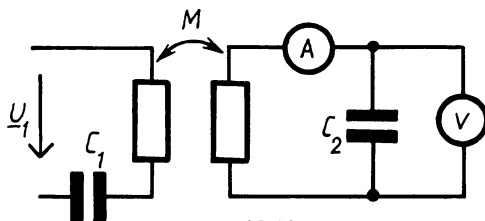


Рис. 15.10

Но есть третий, более простой способ. Каждый из контуров в отдельности (при разомкнутом втором) настраивают в резонанс на частоте питания, так что  $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ . Полные сопротивления контуров становятся активными:  $Z_1 = R_1$ ,  $Z_2 = R_2$ . Затем устанавливают оптимальное сопротивление связи. По формулам (15.10), (15.12) имеем

$$X_{M\text{опт}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставив это выражение в формулу  $I_2 = I_1 X_M / R_1$  или  $I_2 = U_{2\text{эк}} / (2R_2)$ , придем к формуле (15.11). Оптимальное сопротивление связи в последнем случае имеет наименьшее значение.

1. Дайте определение полного резонанса.

2. Выведите формулы для  $I_{2\text{max}}$  при настройке в полный резонанс контуров: а) первого, б) второго, в) обоих.

2.1. В схеме (см. рис. 15.4)  $Z_1 = (150 + j200)$  Ом,  $R_2 = 150$  Ом,  $X_{L2} = 920$  Ом,  $X_M = 50$  Ом. Вычислите  $X_{C2}$ , при котором во вторичном контуре будет резонанс. Найдите ток  $I_2$ , если  $U_1 = 78$  мВ.

◇ Условие второго частного резонанса  $X_2 = X_{2\text{вн}}$ . Вычислим сопротивление, вносимое из первого во второй контур:

$$X_{2\text{вн}} = X_1 (X_M / Z_2)^2 = 8 \text{ Ом}.$$

Следовательно,  $X_2 = X_{L2} - X_{C2} = 8$  Ом, а  $X_{C2} = 912$  Ом.

Вносимое во вторичный контур активное сопротивление

$$R_{2\text{вн}} = R_1 (X_M / Z_1)^2 = 6 \text{ Ом},$$

а эквивалентное напряжение

$$U_{2\text{эк}} = U_1 (X_M / Z_1) = 15,6 \text{ мВ}.$$

В режиме второго частного резонанса

$$I_{2\text{max II}} = U_{2\text{эк}} / (R_2 + R_{2\text{вн}}) = 0,1 \text{ мА}.$$

#### 15.4. Передаточные амплитудно- и фазочастотная характеристики

Считая входной величиной  $\underline{U}_1$ , а выходной — напряжение  $\underline{U}_2$  на емкости вторичного контура, запишем комплексный коэффициент передачи по напряжению:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \underline{I}_2 \frac{1}{j\omega C} / \underline{U}_1.$$

Чтобы упростить вывод, возьмем контуры с одинаковыми сопротивлениями  $\underline{Z}$ . Тогда уравнения (15.1), (15.2) принимают вид:

$$\underline{Z}\underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 = \underline{U}_1; \quad -jX_M \underline{I}_1 + \underline{Z}\underline{I}_2 = 0.$$

Из них находим ток:

$$\underline{I}_2 = \frac{jX_M}{\underline{Z}^2 + X_M^2} \underline{U}_1.$$

Выразим комплексное сопротивление через обобщенную расстройку:

$\underline{Z} = R + jX = R(1 + j \frac{X}{R}) = R(1 + j\xi)$ . Тогда

$$\underline{I}_2 = \frac{j\omega M}{R^2(1 + j\xi)^2 + (\omega M)^2} \underline{U}_1,$$

а коэффициент передачи по напряжению

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M/C}{R^2((1+j\xi)^2 + (\omega M/R)^2)} \quad (15.13)$$

Коэффициент связи  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ . Для одинаковых катушек  $k = M/L$ , или  $M = kL$ . Тогда  $M/C = kL/C = k\rho^2$ , где  $\rho = \sqrt{L/C}$  — характеристическое сопротивление. Получим

$$\frac{M/C}{R^2} = \frac{k\rho^2}{R^2}.$$

Здесь  $\rho/R = Q$  — добротность. Следовательно, в формуле (15.13)

$$\frac{M/C}{R^2} = kQ^2.$$

В знаменателе формулы (15.13)  $\omega M = k\omega L = k\rho$ , а  $\omega M/R = k\rho/R = kQ$ . Раскрыв скобки и сгруппировав вещественную и мнимую части, приведем выражение (15.13) к виду

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{kQ^2}{(1 - \xi^2 + k^2Q^2) + j2\xi} \quad (15.14)$$

Заменяем добротность  $Q$  затуханием  $1/d$ . Передаточную ФЧХ — зависимость разности фаз входного и выходного напряжений от обобщенной расстройки — найдем из соотношения мнимой и вещественной частей:

$$\psi(\xi) = -\arctg \frac{2\xi}{1 + (k/d)^2 - \xi^2} \quad (15.15)$$

(минус, так как в знаменателе комплексное число).

АЧХ представляет собой модуль комплексного выражения (15.14):

$$\frac{U_2}{U_1} = Q \cdot \frac{k/d}{\sqrt{(1 + (k/d)^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (15.16)$$

Подставив сюда  $\xi = 0$  и  $k/d = 1$ , найдем максимальное значение передаточной АЧХ:

$$(U_2/U_1)_{\max} = Q/2. \quad (15.17)$$

У последовательного колебательного контура выходное напряжение  $U_C$  в режиме резонанса превышает входное в  $Q$  раз; здесь же передаточный коэффициент меньше в 2 раза.

Возьмем отношение коэффициента передачи  $U_2/U_1$  к его максимальному значению, т.е. разделим выражение (15.16) на (15.17):

$$n_2 = \frac{2k/d}{\sqrt{(1 + (k/d)^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (15.18)$$

Здесь  $k/d$  — параметр контуров, он задан. Обобщенная расстройка — переменная величина. Определим значения  $\xi$ , при которых функция  $n_2(\xi)$  имеет экстремумы. Производную по  $\xi$  от подкоренного выражения приравняем нулю:

$$2(1 + (k/d)^2 - \xi^2)(-2\xi) + 4 \cdot 2\xi = 0.$$

Сократим обе части полученного уравнения на 4 и вынесем  $\xi$  за скобки:

$$\xi(\xi^2 + 1 - (k/d)^2) = 0.$$

Уравнение имеет три решения:

$$\xi_1 = 0; \xi_{2,3} = \mp \sqrt{(k/d)^2 - 1}. \quad (15.19)$$

Значения  $\xi_{2,3}$  существуют, т.е. выражены действительными числами, если  $k/d > 1$ .

В зависимости от соотношения  $k$  и  $d$  различают *слабую* ( $k < d$ ), *критическую* ( $k = d$ ) и *сильную* ( $k > d$ ) связи. При слабой и критической связях функция  $n_2(\xi)$  имеет один экстремум, при сильной — три.

1. Выведите формулу для комплексного коэффициента передачи по напряжению. Запишите уравнения его АЧХ и ФЧХ.

2. Чему равно максимальное значение коэффициента передачи по напряжению?

3. Выведите формулы для  $\xi$ , в которых функция  $n_2(\xi)$  имеет экстремумы. Сколько экстремумов имеет функция  $n_2(\xi)$  при различных соотношениях  $k$  и  $d$ ?

3.1. В схеме (см. рис. 15.4)  $U_1 = 340$  мВ,  $\omega L_1 = 880$  Ом,  $Z_2 = (40 + j100)$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом. Вычислите  $X_M$  и  $X_{C1}$ , обеспечивающие режим полного резонанса, а также токи.

◊ Из формулы (15.10) находим оптимальное сопротивление взаимной индукции:

$$X_{M\text{оптI}} = Z_2 \sqrt{R_1/R_2} = 54 \text{ Ом},$$

где  $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 108$  Ом.

Вносимое сопротивление  $X_{1\text{вн}} = X_2 (X_M/Z_2)^2 = 25$  Ом. В режиме полного резонанса  $X_1 = X_{L1} - X_{C1} = X_{1\text{вн}}$ . Отсюда  $X_{C1} = X_{L1} - X_1 = 855$  Ом.

Вычисляем токи:

$$I_1 = U_1/(2R_1) = 17 \text{ мА}; I_{2\text{max max}} = U_1/(2\sqrt{R_1 R_2}) = 8,5 \text{ мА}. \square$$

3.2. Решите задачу 3.1, если  $R_1 = 40$  Ом,  $U_1 = 320$  мВ [108 Ом, 780 Ом, 4 мА, 4 мА].

3.3. На частоте  $\omega = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  сопротивления двух одинаковых контуров  $R = 20$  Ом,  $X_L = 2$  кОм,  $X_C = 1$  кОм. Определите значения  $X_C$  и  $M$ , при которых наступит полный резонанс.

◊ Есть три способа настройки контуров в полный резонанс. Так как контуры одинаковые, то первые два способа совпадают.

Изменяем параметры одного из контуров, например первого. Чтобы  $X_1 = 0$ , надо взять  $X_{C1} = 2$  кОм. Принимая  $Z_2 = \sqrt{0,02^2 + 1} \approx 1$  кОм, находим  $X_{M\text{оптI}} = Z_2 \sqrt{R_1/R_2} = 1$  кОм. Взаимная индуктивность  $M_{\text{оптI}} = X/\omega = 500$  мкГн.

При настройке контуров третьим способом надо включить в оба контура такую емкость, чтобы  $X_1 = X_2 = 0$ , т.е.  $X_C = 2$  кОм. Оптимальное сопротивление связи

$$X_{M \text{ опт}} = \sqrt{R_1 R_2} = 20 \text{ Ом}, \text{ а взаимная индуктивность } M_{\text{опт}} = X_M / \omega = 10 \text{ мкГн}.$$

Сравним полученные результаты:  $M_{\text{опт}} \ll M_{\text{опт I}}$ . □

3.4. На вход двух одинаковых индуктивно связанных контуров с активным сопротивлением  $R_1 = R_2 = 20$  Ом подано напряжение  $U_1 = 2$  В с угловой частотой  $\omega = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Постройте графики токов  $I_1, I_2$  при изменении взаимной индуктивности в процессе настройки обоих контуров в полный резонанс.

♦ Так как  $Z_2 = R_2$ , то вносимое в первый контур сопротивление

$$R_{1\text{вн}} = R_2 (X_M / Z_2)^2 = X_M^2 / R_2,$$

а токи по абсолютной величине

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_{1\text{вн}}} = \frac{U_1}{R_1 + X_M^2 / R_2}; \quad I_2 = I_1 X_M / R_2.$$

Задавая значениями  $M$ , кратными  $M_{\text{опт}} = 10$  мкГн, вычисляем токи (табл. 15.2) и строим график (рис. 15.11).

Таблица 15.2

$M$ , мкГн	0	5	10	20	40	80
$X_M$ , Ом	0	10	20	40	80	160
$I_1$ , мА	100	80	50	20	6	1,5
$I_2$ , мА	0	40	50	40	24	12

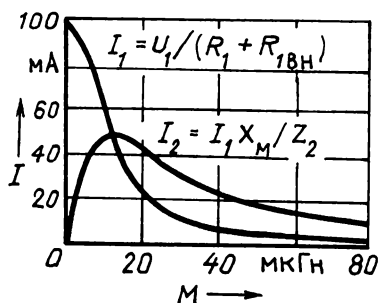


Рис. 15.11

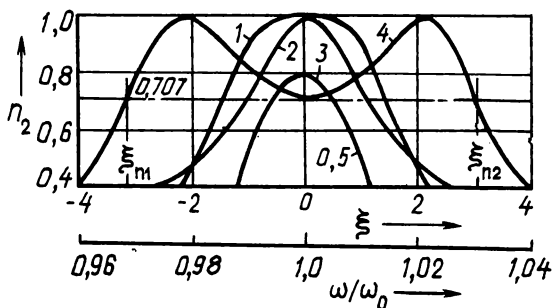


Рис. 15.12

С увеличением взаимной индуктивности в первом контуре ток уменьшается, а во втором имеет максимум при  $M_{\text{опт}}$ . □

## 15.5. Передаточные характеристики при различных связях.

### Полоса пропускания

По уравнению (15.18) рассчитаем амплитудную характеристику при критической связи ( $k = d$ ), задаваясь различными значениями  $\xi$  (табл. 15.3).

Таблица 15.3

$\pm \xi$	0	0,5	1	2	3
$n_2$	1	0,995	0,90	0,45	0,22

Строим график зависимости  $n_2(\xi)$  (кривая 1 на рис. 15.12). На этом же рисунке покажем график АЧХ одиночного контура (кривая 2). Кривая 1 имеет более плоскую вершину, бо́льшую полосу пропускания, более крутые склоны. Максимум функция имеет при  $\xi = 0$ . Подставим это значение в уравнение (15.18):

$$n_2(0) = \frac{2 k/d}{1 + (k/d)^2} . \quad (15.20)$$

Вычислим  $n_2$  для ряда значений  $k/d$  (табл. 15.4).

Таблица 15.4

$k/d$	0	0,3	0,5	1	2	3
$n_2(0)$	0	0,55	0,8	1	0,8	0,6

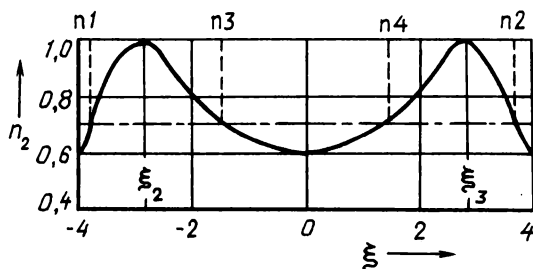


Рис. 15.13

Наибольшего значения  $n_2$  достигает при критической связи. В этом случае  $n_2 = 1$ . Чем слабее связь, тем меньше  $n_2$ . Однако и с усилением связи  $n_2$  также уменьшается. Чтобы выяснить, как это происходит, построим полностью передаточную характеристику для одного из значений, например  $k/d = 3$  (рис. 15.13). Кривая в точках  $\xi_{2,3}$  имеет два максимума. Вычислим их, подставив выражение (15.19) в (15.18):

$$n_2(\xi_{2,3}) = \frac{2k/d}{\sqrt{(1 + (k/d)^2 - (k/d)^2 + 1)^2 + 4((k/d)^2 - 1)}} = 1.$$

При сильной связи в точках  $\xi_{2,3}$  независимо от значения  $k/d$  передаточный коэффициент  $n_2 = 1$ , т.е.  $U_2/U_1 = Q/2$ . В точке  $\xi = 0$  функция  $n_2(\xi)$  имеет минимум; с увеличением  $k/d$  он становится все меньше: 1; 0,8; 0,6 (см. табл. 15.4).

На границах полосы пропускания  $n_2 = 1/\sqrt{2}$ ; приравняем этому числу выражение (15.18):

$$\frac{2k/d}{\sqrt{(1 + (k/d)^2 - \xi_{\Pi}^2)^2 + 4\xi_{\Pi}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

где  $\xi_{\Pi}$  соответствует граничным частотам.

Обозначим  $k/d = A$ . Разделим обе части равенства на  $2A$  и возведем в квадрат:

$$((1 + A^2) - \xi_{\Pi}^2)^2 + 4\xi_{\Pi}^2 = 8A^2.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\xi_{\Pi}^4 + 2(1 - A^2)\xi_{\Pi}^2 + (1 + A^2)^2 - 8A^2 = 0.$$

Получили биквадратное уравнение, корни которого

$$\xi_{\Pi} = \pm \sqrt{A^2 - 1 \pm \sqrt{(A^2 - 1)^2 - (A^2 + 1)^2 + 8A^2}}.$$

Так как внутренний корень равен  $2A$ , то

$$\xi_{\Pi} = \pm \sqrt{A^2 - 1 \pm 2A}.$$

Прибавим и вычтем 1:

$$\xi_{\Pi} = \pm \sqrt{(A \pm 1)^2 - 2}.$$

Осталось  $A$  заменить на  $k/d$

$$\xi_{\Pi} = \mp \sqrt{(k/d \pm 1)^2 - 2}. \quad (15.21)$$

Если  $(k/d - 1)^2 > 2$ , то получим четыре значения  $\xi_{\Pi}$ . Они соответствуют границам двух полос пропускания:  $\xi_{\Pi 1} - \xi_{\Pi 3}$ ,  $\xi_{\Pi 4} - \xi_{\Pi 2}$  (см. рис. 15.13). Два значения  $\xi_{\Pi}$  будем иметь в случае, когда  $(k/d - 1)^2 \leq 2$ . Отсюда находим  $k/d = \sqrt{2} + 1 = 2,41$ . Коэффициент связи  $k = 2,41d$  обеспечивает максимальную полосу пропускания. При дальнейшем увеличении  $k$  полоса пропускания распадается на две части.

Подставим  $k/d = 2,41$  в формулу (15.21). Обобщенная расстройка на границах полосы пропускания

$$\xi_{\Pi} = \sqrt{(2,41 + 2)^2 - 2} = \mp 3,1. \quad (15.22)$$

Напомним, что от обобщенной расстройки  $\xi$  можно перейти к относительной частоте:  $\omega/\omega_0 = 1 + \xi/(2Q)$ .

Относительная полоса пропускания как разность верхней и нижней относительных частот

$$S_r = |\xi_{\Pi}|/Q = |\xi_{\Pi}|d,$$

где  $|\xi_{\Pi}|$  — абсолютная величина обобщенной расстройки, соответствующей границам полосы пропускания.

Согласно формуле (15.22), наибольшую полосу пропускания обеспечивает коэффициент связи  $k = 2,41d$ . В этом случае  $S_r = 3,1d$  (сравните с одиночным колебательным контуром, в котором  $\xi_{\Pi} = \mp 1, S_r = d$ ).

Частоты, при которых передаточная функция имеет максимум, называют частотами связи. Им соответствуют обобщенные расстройки  $\xi_{2,3}$ , вычисляемые по формуле (15.19).

1. Постройте график передаточной характеристики при критической связи. Как изменяется его форма, если связь: слабая; сильная?

2. Выведите формулу для обобщенной расстройки на границах полосы пропускания.

3. Запишите формулу для относительной полосы пропускания. При каком коэффициенте связи полоса пропускания наибольшая? Какие частоты называют частотами связи?

4.1. Для двух одинаковых контуров с добротностью 100 постройте график передаточной ФЧХ, если  $k = 1\%$ .

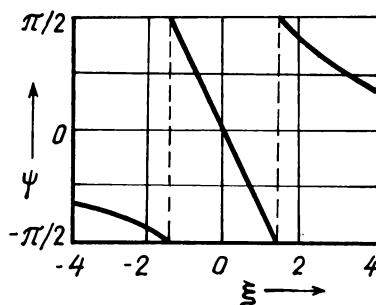


Рис. 15.14

◇ Отношение  $k/d = 1$ . По формуле (15.15) вычисляем разность фаз  $\psi$  между входным и выходным напряжениями для значений  $\xi$ , приведенных в табл. 15.5.

Таблица 15.5

$\pm \xi$	0	0,5	1	1,3	1,41	1,5	2	3	4
$\psi$ , град	0	$\mp 30$	$\mp 63,5$	$\mp 83,5$	$\mp 90$	$\pm 86$	$\pm 63$	$\pm 41$	$\pm 30$

Приравняв в формуле (15.15) знаменатель нулю:

$$1 + (k/d)^2 - \xi^2 = 0,$$

найдем значения обобщенной расстройки, при которых угол  $\psi = \mp 90^\circ$ :

$$\xi = \sqrt{1 + (k/d)^2} = \mp 1,41.$$

В этих точках функция  $\psi(\xi)$  терпит разрыв (рис.15.14), а угол  $\psi$  изменяет знак.  $\square$

4.2. Используя графики, приведенные на рис. 15.12, скажите, чему равен передаточный коэффициент  $U_2/U_1$  в режиме резонанса ( $\xi = 0$ ), если  $Q = 100$ .

♦ Максимальный коэффициент передачи  $U_2/U_1 = Q/2 = 50$ . Следовательно, при  $k/d = 1$  отношение  $U_2/U_1 = 50$ ; при  $k/d = 0,5$  коэффициент передачи по напряжению  $U_2/U_1 = 0,8 \cdot 50 = 40$ , где  $n_2 = 0,8$  при  $\xi = 0$  (см. табл. 15.4 и кривую 3 на рис. 15.12).  $\square$

5.1. Постройте передаточную АЧХ при  $k/d = 2,41$ . Нанесите шкалу частот, если  $\omega_0 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $Q = 50$ .

♦ Частотам связи, при которых  $n_2 = 1$ , соответствуют обобщенные расстройки

$$\xi_{2,3} = \sqrt{(k/d)^2 - 1} = \mp 2,2,$$

на границах полосы пропускания

$$\xi_{\Pi} = \sqrt{(k/d + 1)^2 - 2} = \mp 3,1.$$

При  $\xi = 0$  по формуле (15.20) находим

$$n_2 = \frac{2 \cdot 2,41}{1 + (2,41)^2} = 0,707.$$

При  $\xi = 4$  по формуле (15.18) имеем  $n_2 = 0,4$ . Этих точек достаточно, чтобы построить график (кривая 4 на рис. 15.12). Относительная частота, соответствующая  $\xi = 1$ ,

$$\omega/\omega_0 = 1 + \xi/(2Q) = 1,01.$$

Внизу нанесена шкала в единицах относительной частоты.  $\square$

5.2. Рассчитайте и постройте передаточную АЧХ, если  $k/d = 3$  (см. задачу 5.1 и рис. 15.13).

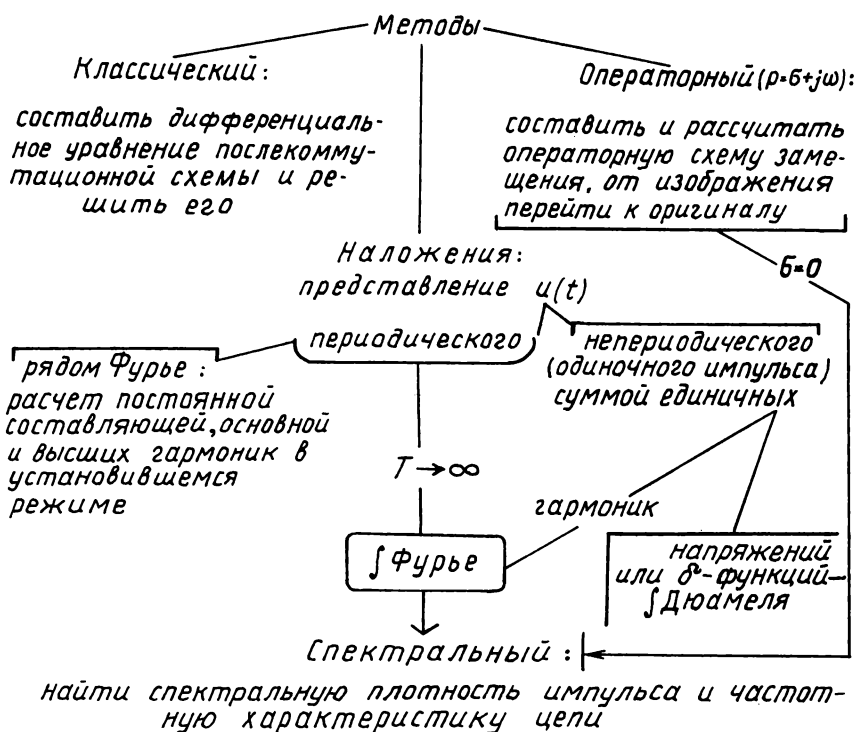
\*                      \*

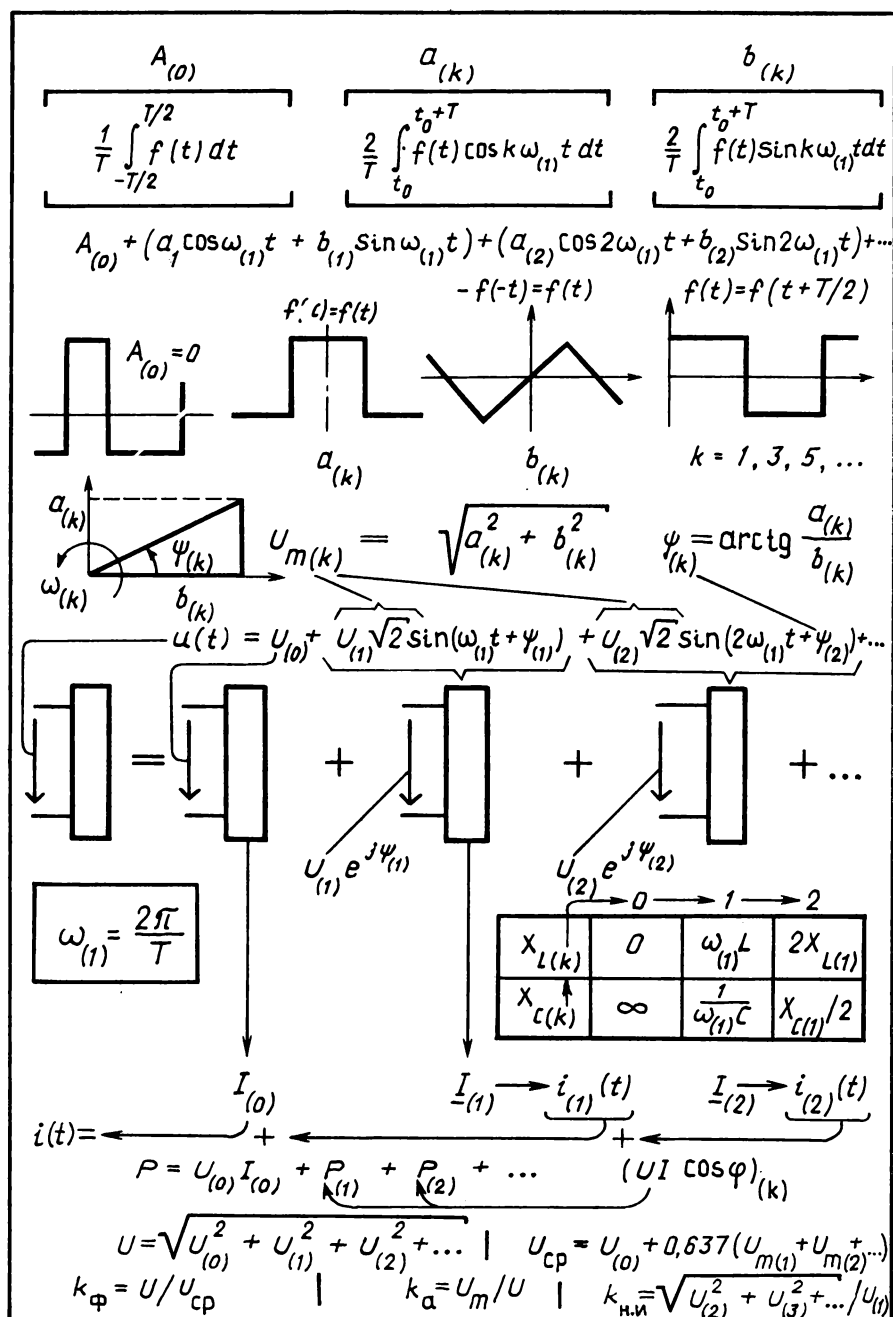
\*

При определенных условиях электрические цепи обладают частотной избирательностью. Для анализа этого явления, кроме сопротивления  $\underline{Z}$  и проводимости  $\underline{Y}$ , которыми мы оперировали в разделе II, нам пришлось ввести новые величины – параметры контуров: резонансную частоту  $\omega_0$ , добротность  $Q$ , характеристическое  $\rho$  и резонансное  $R_0$  сопротивление, коэффициент связи  $k$ , оптимальное сопротивление связи  $X_{\text{Мопт}}$ . Чтобы сделать частотные характеристики общими для всех контуров, мы приняли за базисную величину обобщенную расстройку  $\xi$  – относительную расстройку, умноженную на  $2Q$ . Из графиков АЧХ видно, что связанные контуры обеспечивают большую полосу пропускания по сравнению с одиночными ( $S_r = 1,41$  при  $k = d$  и  $S_r = 3,1$  при  $k = 2,41d$ ). Графики имеют пологую вершину и более крутые склоны, их форма близка к идеальной прямоугольной. График АЧХ резонансных контуров с использованием усилителей сохраняет свою форму.

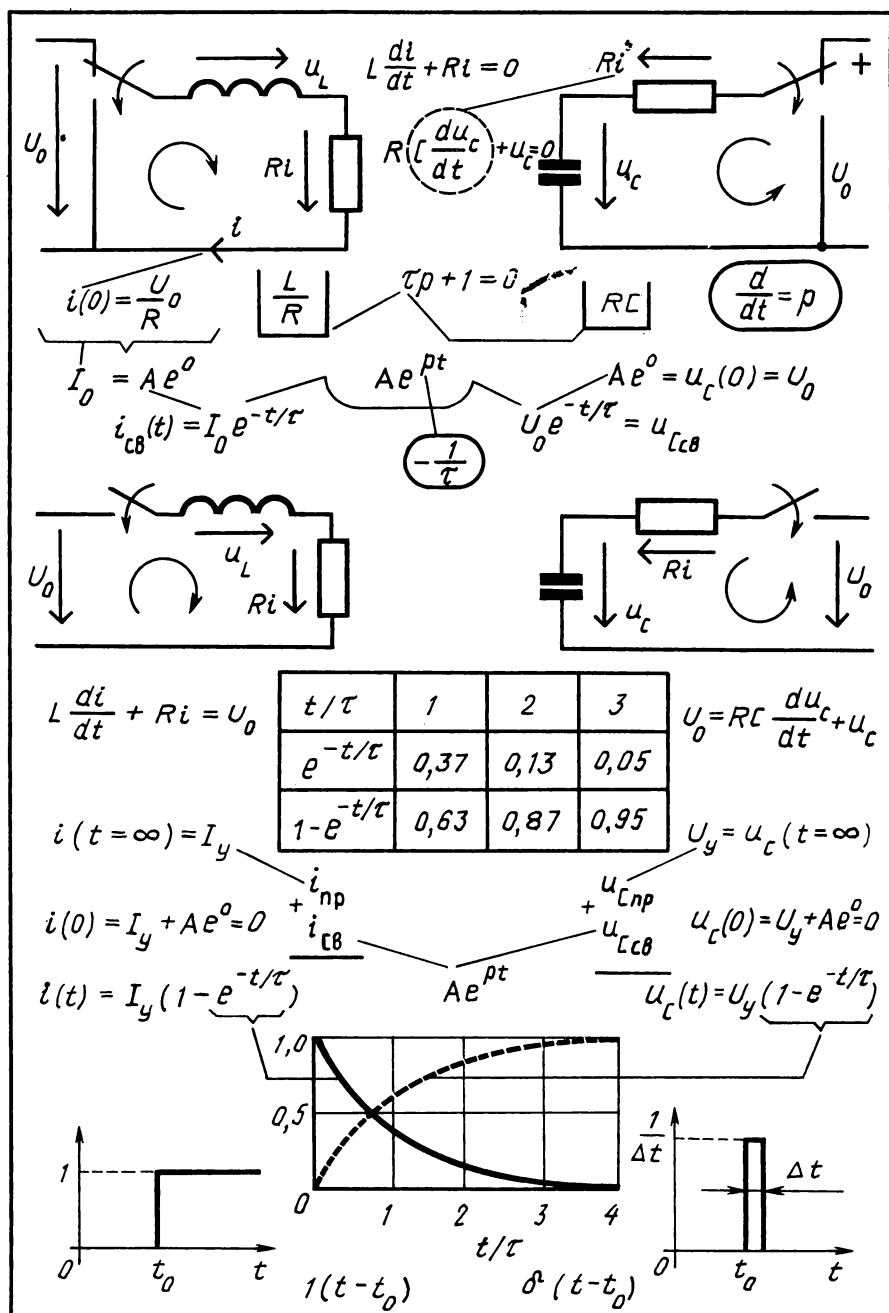
#### IV. ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Метод наложения позволяет записать периодические функции  $u(t)$ ,  $i(t)$  в виде ряда Фурье и рассчитать каждый из членов в отдельности. Если же воздействие непериодическое, то его можно представить периодической функцией с периодом  $T \rightarrow \infty$  либо суммой единичных гармоник. В обоих случаях приходим к интегралу Фурье, лежащему в основе спектрального метода. Последний можно рассматривать как частный случай операторного метода при  $\sigma = 0$  в выражении оператора  $p = \sigma + j\omega$ . Представив непериодическое воздействие суммой единичных напряжений или  $\delta$ -функций, получим интеграл Дюамеля. Особое место занимает классический метод. Взаимосвязь методов и их краткое содержание показаны на схеме.

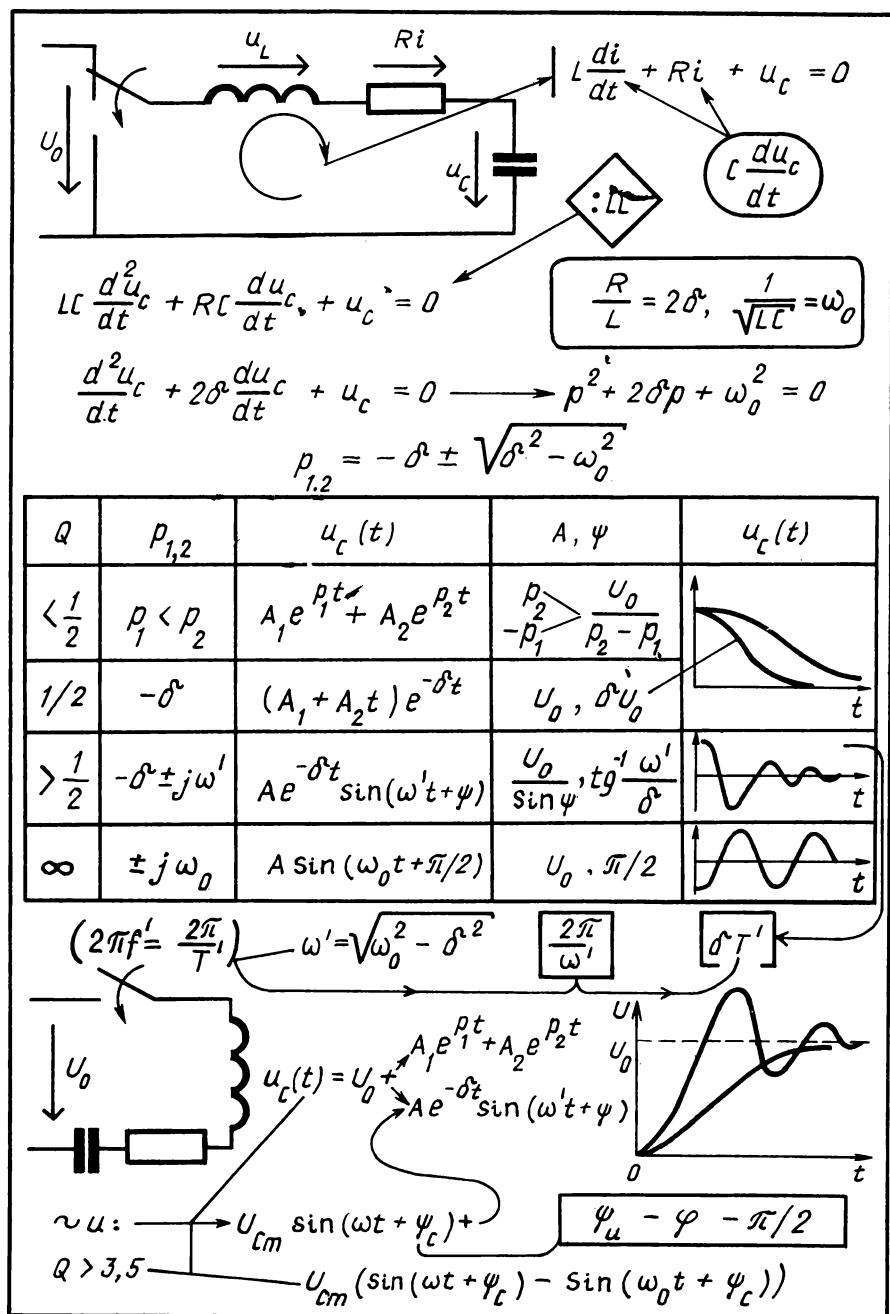




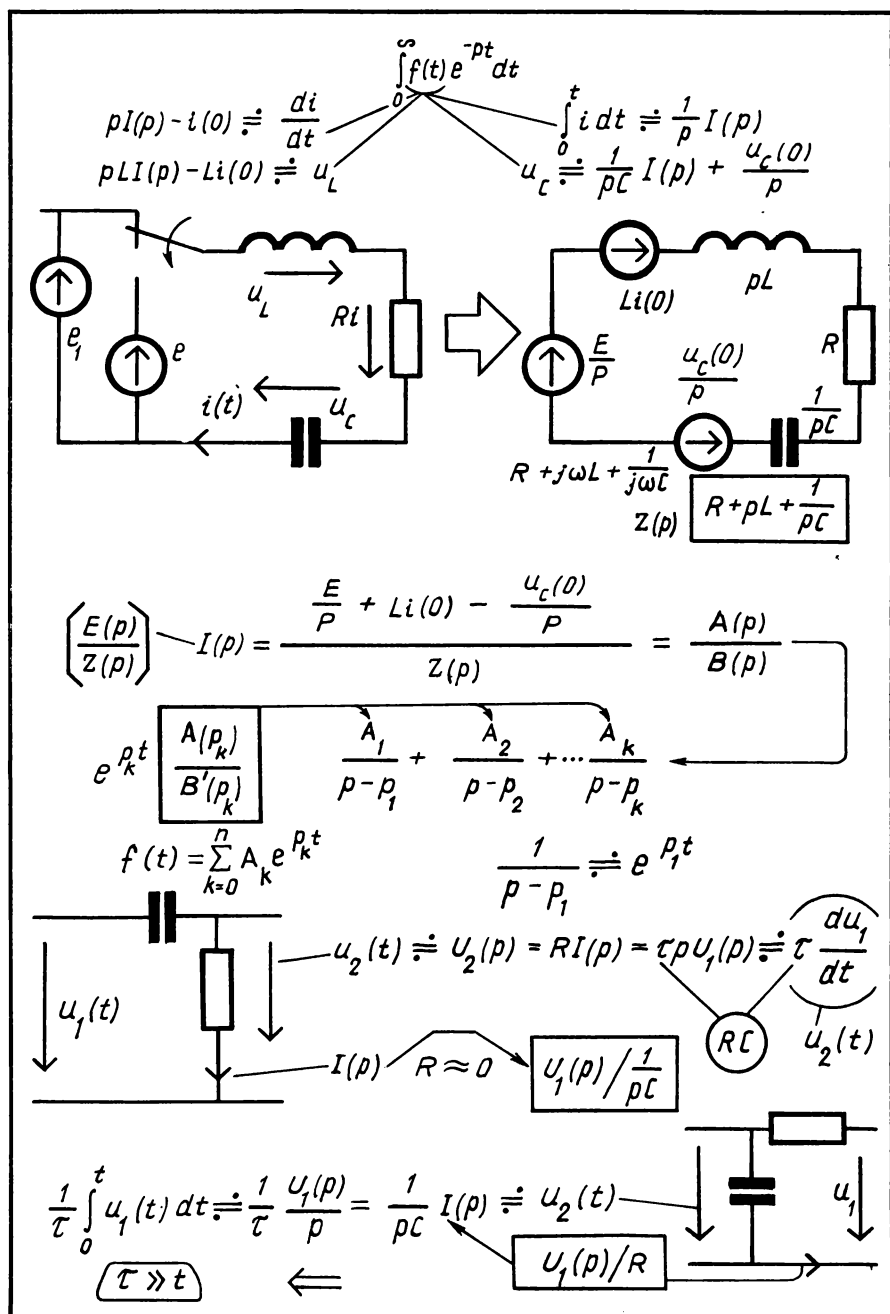
Мнемосхема 16

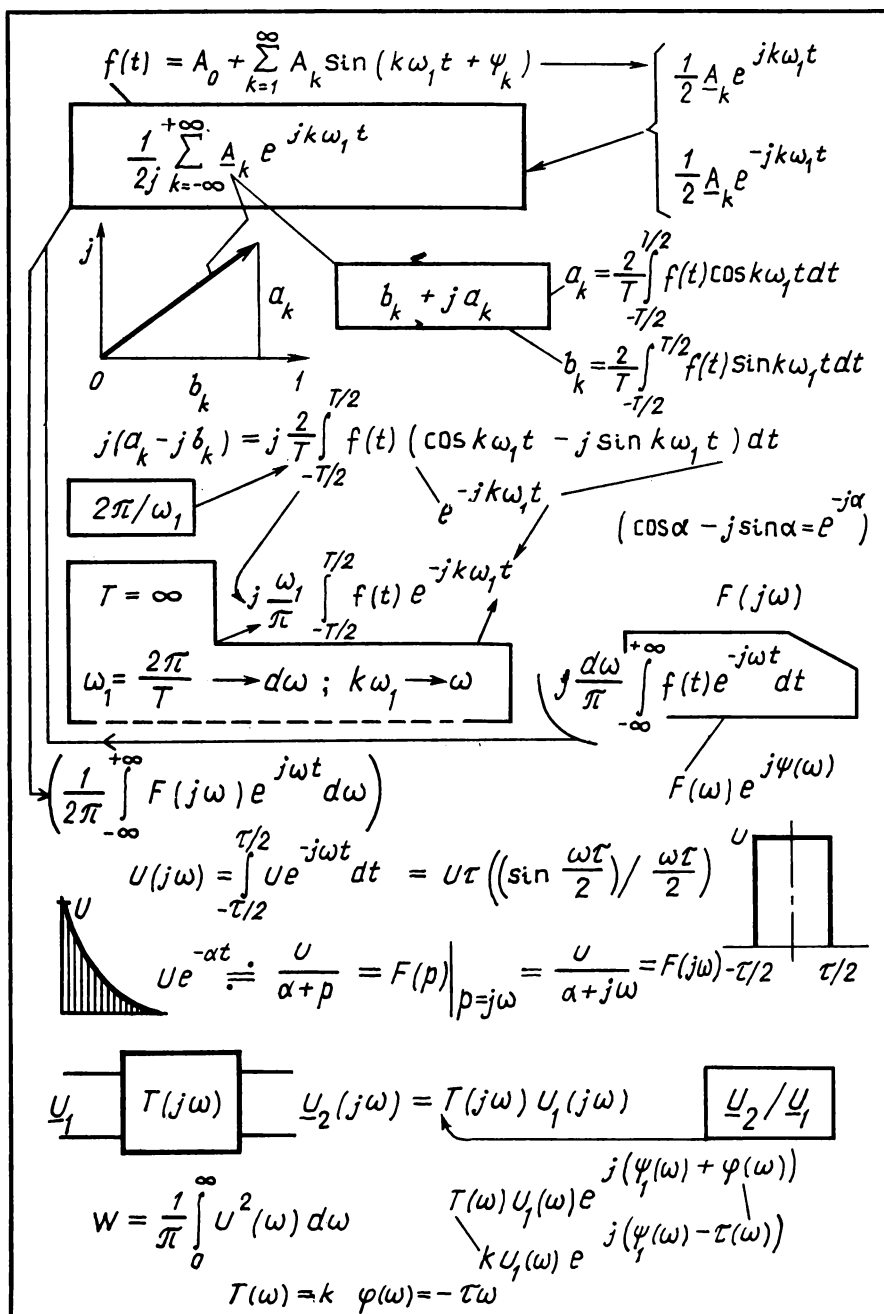


Мнемосхема 17



Мнемосхема 18





Мнемосхема 20

## 16. Цепи при периодических несинусоидальных воздействиях

### 16.1. Ряд Фурье. Дискретные спектры

В технике связи часто используются генераторы, форма напряжений которых отличается от синусоидальной (например, генераторы пилообразного напряжения, генераторы прямоугольных импульсов и др.).

Чтобы вычислить токи в цепи с несинусоидальным напряжением, надо разложить напряжение в ряд Фурье, а затем воспользоваться методами расчета цепей при постоянных и синусоидальных напряжениях.

Из курса математики известно, что периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на протяжении периода конечное число разрывов первого рода (функция имеет конечные, но несовпадающие пределы справа и слева) и конечное число максимумов и минимумов, состоит из постоянной составляющей  $A_0$  и синусоид различных частот:

$$f(\omega t) \approx A_{(0)} + A_{(1)} \sin(\omega_{(1)} t + \psi_{(1)}) + A_{(2)} \sin(2\omega_{(1)} t + \psi_{(2)}) + \dots \quad (16.1)$$

Первая синусоида, или основная гармоника,

$$A_{(1)} \sin(\omega_{(1)} t + \psi_{(1)}) \quad (16.2)$$

задана основной частотой  $\omega_{(1)}$ , амплитудой  $A_{(1)}$  и начальной фазой  $\psi_{(1)}$ . Остальные члены ряда — высшие гармонические составляющие, высшие гармоники. Частоты высших гармоник  $k\omega_{(1)}$  в целое число раз больше частоты первой гармоники. Порядковый номер гармоники  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$  в обозначении амплитуды  $A_{(k)}$  и начальной фазы  $\psi_{(k)}$  указывается в скобках.

Применив для основной гармоники (16.2) формулу синуса двух углов, получим

$$A_{(1)} (\sin \psi_{(1)} \cos \omega_{(1)} t + \cos \psi_{(1)} \sin \omega_{(1)} t).$$

Введем обозначения:

$$A_{(1)} \sin \psi_{(1)} = a_{(1)}; A_{(1)} \cos \psi_{(1)} = b_{(1)} \quad (16.3)$$

и запишем полученное выражение в виде

$$a_{(1)} \cos \omega_{(1)} t + b_{(1)} \sin \omega_{(1)} t.$$

Начальные фазы косинусоиды и синусоиды равны нулю. В момент начала отсчета  $t = 0$  первая функция имеет максимум  $a_{(1)}$ , вторая равна нулю.

Операцию по замене синусоиды с начальной фазой  $\psi_{(1)}$  суммой двух функций с нулевыми начальными фазами можно пояснить графически (рис. 16.1). Проекция  $a_{(1)}$  и  $b_{(1)}$  вектора  $A_{(1)}$  на вертикальную и горизонтальную оси являются амплитудами косинусоиды и синусоиды (см. формулы 16.3).

Аналогично представим и высшие гармоники, вычислив для каждой из них амплитуды  $a_{(k)}$ ,  $b_{(k)}$ . Тогда ряд Фурье можно записать в такой форме:

$$f(\omega t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^n a_{(k)} \cos k\omega_{(1)} t + \sum_{k=1}^n b_{(k)} \sin k\omega_{(1)} t. \quad (16.4)$$

При  $n \rightarrow \infty$  приближительное равенство превращается в тождество. Для практических расчетов оказывается достаточным взять два-три члена ряда.

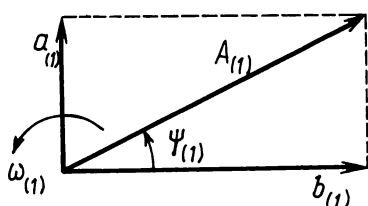


Рис. 16.1

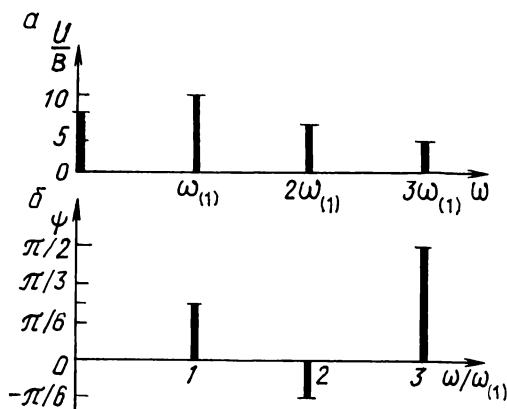


Рис. 16.2

Если известны  $a_{(k)}$  и  $b_{(k)}$ , то от разложения (16.4) можно перейти к выражению (16.1), вычислив амплитуды гармоник и их начальные фазы по формулам:

$$A_{(k)} = \sqrt{a_{(k)}^2 + b_{(k)}^2}; \quad \psi_{(k)} = \arctg \frac{a_{(k)}}{b_{(k)}}. \quad (16.5)$$

Периодическую несинусоидальную функцию, заданную в виде ряда Фурье, можно представить графически (рис. 16.2, а). На оси абсцисс откладываем значения частот, кратных основной частоте ( $\omega_{(1)}$ ,  $2\omega_{(1)}$ , ...), или порядковые номера гармоник; из этих точек проводим перпендикуляры, длины которых равны амплитудам гармоник. Это *амплитудно-частотный спектр (спектр амплитуд)*. На другом графике (рис. 16.2, б) проводим перпендикуляры, равные начальным фазам гармоник. Получаем *фазочастотный спектр (спектр фаз)*. На рис. 16.2 построены амплитудно- и фазочастотные спектры для напряжения

$$u(t) = (8 + 10 \sin(314t + \pi/4) + 6 \sin(2 \cdot 314t - \pi/6) + 4 \sin(3 \cdot 314t + \pi/2)) \text{ В.}$$

Оба графика состоят из ряда линий, соответствующих частотам, кратным  $\omega_{(1)}$ . Такой спектр называют *дискретным* (т.е. прерывным). Расстояние по оси частот между соседними линиями равно частоте основной гармоники  $\omega_{(1)} = 2\pi/T$ . Чем больше период  $T$ , тем плотнее расположены спектральные линии. По графику амплитудно-частотного спектра можно видеть соотношение амплитуд гармоник и полосу частот, где расположены гармоники с наибольшими амплитудами.

Фазочастотный дискретный спектр (т.е. значения начальных фаз гармоник) зависит от того, где выбрано начало координат.

1. Запишите ряд Фурье в форме (16.1) и назовите члены ряда. Чему равны частоты гармоник?

2. Объясните, как от формулы (16.1) перейти к сумме гармоник с нулевыми начальными фазами. Запишите формулы перехода от (16.1) к (16.4), и наоборот.

3. Почему спектр называется дискретным? Объясните, как строить спектры амплитуд и фаз. Какую информацию из них можно извлечь?

## 16.2. Виды и условия симметрии периодических несинусоидальных кривых

Вычисление амплитуд гармоник, входящих в ряд Фурье, упрощается, если функция симметричная. Рассмотрим виды симметрии.

1. Функция, не содержащая постоянной составляющей. Постоянная составляющая

$$A_{(0)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (16.6)$$

Геометрически этот интеграл равен площади фигуры, ограниченной кривой  $f(t)$  и осью абсцисс. Если площадь за положительный полупериод равна площади за отрицательный полупериод (рис. 16.3, а), то постоянная составляющая  $A_{(0)}$  равна нулю.

2. Функция с симметрией III рода. Значения ординат кривой (рис. 16.3, б) повторяются через половину периода с обратным знаком:  $u(t) = -u(t + T/2)$ . Это так называемая зеркальная кривая. Отрицательная полуволна является зеркальным отображением положительной полуволны, смещенной на полпериода. Разложение зеркальных кривых не имеет постоянной составляющей и четных гармоник.

3. Функция четная (симметрия I рода, рис. 16.3, в). Она не изменяет своего значения при изменении знака переменной:  $f(t) = f(-t)$ . Ряд содержит только косинусоиды:

$$f(t) = a_{(1)} \cos \omega_{(1)} t + a_{(2)} \cos 2\omega_{(1)} t + \dots$$

4. Функция нечетная (симметрия II рода). При изменении знака переменной изменяется знак функции, абсолютное значение остается прежним (рис. 16.3, г, если принять за начало координат точку  $t_0$ ):  $f(t) = -f(-t)$ . В разложении участвуют только синусоиды с нулевыми начальными фазами:

$$f(t) = b_{(1)} \sin \omega_{(1)} t + b_{(2)} \sin 2\omega_{(1)} t + \dots$$

5. Функции, имеющие два вида симметрии. Если кривая зеркальная и с симметрией I рода (т.е. имеет два вида симметрии), то в разложении содержатся только нечетные косинусы. Разложение зеркальной кривой с симметрией II рода содержит только нечетные синусоиды.

Определив вид симметрии по форме кривой, можно сразу сказать, какие гармоники содержат ряд. В тех же случаях, когда начало отсчета можно

выбрать произвольно, следует это сделать так, чтобы получить наибольшую симметрию.

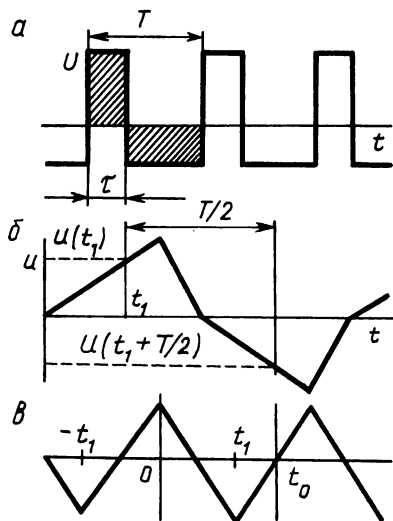


Рис. 16.3

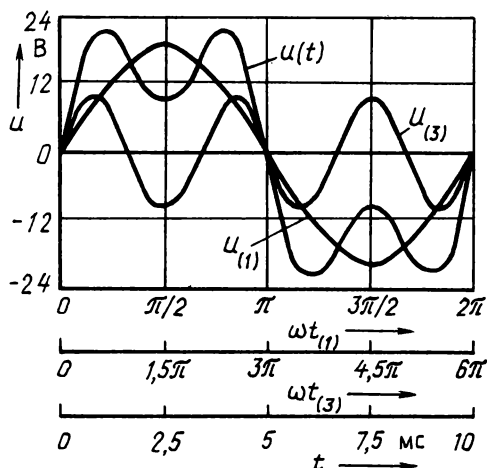


Рис. 16.4

1. В каких случаях постоянная составляющая ряда Фурье равна нулю и почему?
2. Перечислите особенности ряда Фурье для каждого из видов симметрии.

### 1.1. Запишите напряжение

$$u(t) = (8 + 10 \sin(314t + \pi/4) + 6 \sin(2 \cdot 314t - \pi/6)) \text{ В}$$

в виде ряда Фурье из синусоид и косинусоид с нулевыми начальными фазами.

◇ Вычислим по формуле (16.3) амплитуды косинусоид и синусоид:

$$a_{(1)} = 10 \sin(\pi/4) = 7,07 \text{ В}; \quad a_{(2)} = 6 \sin(-\pi/6) = -3 \text{ В};$$

$$b_{(1)} = 10 \cos(\pi/4) = 7,07 \text{ В}; \quad b_{(2)} = 6 \cos(-\pi/6) = 3 \text{ В}.$$

Постоянная составляющая не изменяется:

$$u(t) = (8 + 7,07 \cos 314t - 3 \cos(3 \cdot 314t) + 7,07 \sin 314t + 3 \sin(3 \cdot 314t)) \text{ В. } \square$$

### 1.2. Запишите напряжение

$$u(t) = (6 \cos 314t + 4 \cos 628t + 8 \sin 314t - 3 \sin 628t) \text{ В}$$

в виде суммы двух синусоид.

◇ По формулам (16.5) находим амплитуды синусоид и начальные фазы:

$$A_{(1)} = \sqrt{a_{(1)}^2 + b_{(1)}^2} = 10; \quad A_{(2)} = \sqrt{a_{(2)}^2 + b_{(2)}^2} = 5;$$

$$\psi_{(1)} = \arctg \frac{a_{(1)}}{b_{(1)}} = 37^\circ; \quad \psi_{(2)} = \arctg \frac{a_{(2)}}{b_{(2)}} = -53^\circ.$$

Коэффициент при синусоиде второй гармоники  $b_{(2)} = -3$  отрицательный; угол ле-

жит в четвертом квадранте,  $\psi_{(2)} = -53^\circ$ . Значения амплитуд и фаз подставляем в формулу (16.1):

$$u(t) = 10 \sin(314t + 37\pi/180) + 5 \sin(628t - 53\pi/180) \text{ В. } \square$$

### 1.3. Постройте график напряжения

$$u(t) = 20 \sin 628t + 10 \sin(3 \cdot 628t) \text{ В.}$$

◇ Задаваясь значениями углов  $\omega t_{(1)} = 0 \dots 2\pi$ , строим основную гармонику  $u_{(1)}$  и затем по значениям  $\omega t_{(3)} = 0 \dots 6\pi$  — третью,  $u_{(3)}$  (рис. 16.4). Период функции  $T = 2\pi/\omega = 0,01$  с. Наносим шкалу времени и, складывая ординаты гармоник при одном и том же  $t$ , вычисляем значения функции  $u(t)$ .  $\square$

## 16.3. Разложение несинусоидальной функции в ряд Фурье

Разложение несинусоидальной функции в ряд Фурье состоит в вычислении постоянной составляющей  $A_{(0)}$  и амплитуд  $a_{(k)}$  и  $b_{(k)}$  для основной и двух-трех высших гармоник. Перечисленные неизвестные находят: 1) аналитически, если функция задана уравнением; 2) графоаналитически, если функция задана графиком; 3) экспериментально на специальном приборе — анализаторе гармоник.

В первом случае вычисляют постоянную составляющую (16.6) и коэффициенты  $a_{(k)}$  и  $b_{(k)}$ :

$$a_{(k)} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k \omega_{(1)} t dt; \quad (16.7)$$

$$b_{(k)} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k \omega_{(1)} t dt; \quad (16.8)$$

где  $t_0$  — начало отсчета;  $T$  — период функции.

При графоаналитическом расчете используют приближенный метод численного интегрирования. В формулах (16.7), (16.8) заменим переменную  $t$  фазовым углом  $\alpha = \omega_{(1)} t$ :

$$a_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k \alpha d\alpha;$$

$$b_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k \alpha d\alpha.$$

Период функции от 0 до  $2\pi$  можно разбить на  $m$  (например, 12 или 24) равных интервалов и заменить последние интегралы суммой  $m$  слагаемых:

$$a_{(k)} = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(\alpha_n) \cos k\alpha_n; \quad (16.9)$$

$$b_{(k)} = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(\alpha_n) \sin k\alpha_n, \quad (16.10)$$

где  $f(\alpha_n)$  — значение функции на середине  $n$ -го интервала;  $\alpha_n$  — угол от начала координат до середины  $n$ -го интервала;  $n$  — порядковый номер интервала:  $n = \overline{1, m}$ .

Если включить несинусоидальное напряжение на вход анализатора гармоник, то по шкале прибора можно отсчитать частоту основной гармоники, измерить ее амплитуду и начальную фазу. Устанавливая частоты, кратные  $f_{(1)}$ , считываем амплитуды и начальные фазы высших гармоник.

Разложением функций занимается математика (см. ряды Фурье или гармонический анализ). Ряды наиболее распространенных форм сигналов приведены в справочниках.

1. Какие величины находят при аналитическом и графоаналитическом методах разложения и какие — при экспериментальном?

2. Запишите интегралы для вычисления амплитуд  $a_{(k)}$  и  $b_{(k)}$ .

3. Какой операцией заменяется интегрирование при графоаналитическом методе? Запишите формулы. Чему равны  $n, \alpha_n, f(\alpha_n)$ ?

2.1. На рис. 16.4 показано напряжение  $u(t) = (20 \sin 628t + 10 \sin(3 \cdot 628t))$  В.

Объясните, какие гармоники отсутствуют и почему.

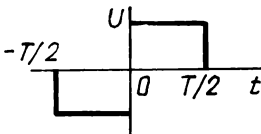
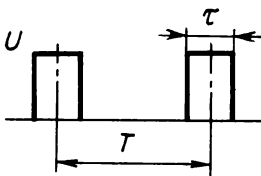
♦ Нет косинусоид ( $a_{(k)} = 0$ ), так как кривая симметрична относительно начала координат. Нет постоянной составляющей и четных гармоник, поскольку кривая симметрична относительно оси абсцисс (зеркальная кривая). □

2.2. В табл. 16.1 приведены графики прямоугольных импульсов и их разложение в ряд Фурье. Объясните, каких гармоник нет и почему в разложении импульсов:

а) двухтактных (см. первую строку табл. 16.1) [симметрия относительно оси абсцисс и начала координат];

б) одинаковой полярности (см. вторую строку табл. 16.1) [симметрия относительно оси ординат].

Т а б л и ц а 16.1.

График	Ряд Фурье	$k$	$\omega_1$
	$f(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega_{(1)}t$	1, 3, 5, ...	$\frac{2\pi}{T}$
	$f(t) = U \frac{\tau}{T} + \frac{2U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \times$ $t \times \sin \frac{k\omega_1\tau}{2} \cos k\omega_1t$	1, 2, 3, ...	$\frac{2\pi}{T}$

#### 16.4. Активная мощность. Действующее и среднее значения.

Коэффициенты, характеризующие форму кривой

Активная мощность равна средней мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt,$$

Подставив вместо  $u(t)$ ,  $i(t)$  соответствующие им ряды Фурье и вычислив интеграл, получим

$$P = U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + \dots + U_{(k)} I_{(k)} \cos \varphi_{(k)}, \quad (16.11)$$

т.е. активная мощность равна сумме активных мощностей постоянной составляющей, основной и высших гармоник. В формулу мощности  $k$ -й гармоники

$$P_{(k)} = U_{(k)} I_{(k)} \cos \varphi_{(k)}$$

входят действующие значения напряжения и тока, а угол  $\varphi_{(k)}$  — разность фаз между напряжением и током  $k$ -й гармоники.

Активную мощность как сумму активных мощностей постоянной составляющей и гармоник можно записать и так:

$$P = RI_{(0)}^2 + RI_{(1)}^2 + RI_{(2)}^2 + \dots \quad (16.12)$$

Представим такую же мощность при некотором синусоидальном токе  $I$ :

$$P = RI^2. \quad (16.13)$$

Сопоставив формулы (16.12) и (16.13), найдем

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots}$$

Таким образом, действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений гармоник.

Аналогично действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2 + \dots}$$

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем показывают действующие значения.

Среднее значение функции, у которой положительный и отрицательный полупериоды одинаковы, вычисляют за половину периода, выбрав за начало отсчета время, при котором  $u(t) = 0$ :

$$U_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} u(t) dt.$$

По этой формуле для синусоидального напряжения было получено  $U_{\text{ср}} = 0,637 U_m$ .

Среднее значение несинусоидального напряжения равно сумме постоянной составляющей и средних значений гармоник:

$$U_{\text{ср}} = U_{(0)} + 0,637 (U_{m(1)} + \dots + U_{m(k)} + \dots),$$

где  $U_{m(k)}$  — амплитуда  $k$ -й гармоники.

Магнитоэлектрический прибор с выпрямителем измеряет среднее значение, без выпрямителя — только постоянную составляющую.

Отношение действующего и среднего значений функции называют *коэффициентом формы*:

$$k_{\text{ф}} = I/I_{\text{ср}}; \quad k_{\text{ф}} = U/U_{\text{ср}}.$$

Минимальный коэффициент формы ( $k_{\text{ф}} = 1$ ) имеют прямоугольные импульсы равной длительности и противоположной полярности. Максимальное значение  $k_{\text{ф}}$  не ограничено.

Отношение амплитудного и действующего значений называют *коэффициентом амплитуды*:

$$k_{\text{а}} = U_m/U; \quad k_{\text{а}} = I_m/I.$$

Так, например, для синусоидального напряжения

$$k_{\text{ф}} = \frac{0,707 U_m}{0,637 U_m} = 1,11, \quad k_{\text{а}} = \frac{U_m}{0,707 U_m} = 1,41.$$

И, наконец, отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники — это *коэффициент нелинейных искажений*:

$$k_{\text{н.и}} = \sqrt{I_{(2)}^2 + I_{(3)}^2 + \dots} / I_{(1)}.$$

1. Запишите формулы для вычисления активной мощности и значений: а) действующего; б) среднего.

2. Чему равны коэффициенты формы, амплитуды, нелинейных искажений?

3.1. Прямоугольные импульсы напряжения длительностью  $\tau$  следуют один за другим с периодом  $T$  (см. табл. 16.1). Разложите напряжение в ряд Фурье. Постройте спектр амплитуд, приняв  $U = 100$  В.

◇ Выберем начало координат в середине импульса. Согласно формуле (16.6), постоянная составляющая

$$U_{(0)} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U dt = U \frac{\tau}{T}.$$

Определяем вид симметрии. Функция симметрична относительно оси ординат,  $b_{(k)} = 0$ . По формуле (16.7) амплитуды косинусов

$$U_m(k) = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} U \cos k \omega_{(1)} t dt.$$

Пределы интегрирования  $-T/2, T/2$  заменяем  $-\tau/2, \tau/2$ , в которых функция не равна нулю; можно взять  $\int_0^{\tau/2}$  и результат удвоить.

Вычисляем интеграл:

$$\frac{4}{T} U \frac{1}{k \omega_{(1)}} \sin k \omega_{(1)} t \Big|_0^{\tau/2} = \frac{4}{T} U \frac{1}{k \omega_{(1)}} \sin \frac{k \omega_{(1)} \tau}{2}.$$

Так как частота основной гармоники  $\omega_{(1)} = 2\pi/T$ , то

$$U_m(k) = \frac{2}{\pi} U \frac{1}{k} \sin k \pi \frac{\tau}{T}. \quad (16.14)$$

Это общее выражение. Подставив порядковый номер гармоники  $k = \overline{1,3}$ , вычислим амплитуды косинусоид для заданного отношения  $\tau/T$ . Например:

а)  $\tau/T = 1/2$ . Тогда  $\sin(k\pi/2)$  для четных  $k$  равен нулю, для нечетных поочередно принимает значения  $\pm 1$ . Коэффициент  $2U/\pi \approx 0,64 U$ , одинаковый для всех гармоник, вынесем за скобки:

$$u(t) = U/2 + 0,64 U (\cos \omega_{(1)} t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega_{(1)} t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega_{(1)} t - \dots); \quad (16.15)$$

б)  $\tau/T = 1/3$ . Постоянная составляющая  $U_0 = U/3$ , амплитуды гармоник, согласно формуле (16.14),

$$U_m(k) = 0,64 U \frac{1}{k} \sin(k\pi/3).$$

Результаты дальнейшего расчета сведем в табл. 16.2.

Т а б л и ц а 16.2

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{\sin(k\pi/3)}{k}$	0,87	0,43	0	-0,22	-0,17	0	0,12	0,11	0

Запишем ряд:

$$u(t) = \frac{U}{3} + 0,64 U (0,87 \cos \omega_{(1)} t + 0,43 \cos 2 \omega_{(1)} t - 0,22 \cos 4 \omega_{(1)} t - 0,17 \cos 5 \omega_{(1)} t + \dots). \quad (16.16)$$

В нем нет высших гармоник, кратных трем.

При  $U = 100$  В выражения (16.15) и (16.16) принимают вид

$$u(t) = (50 + 64 \cos \omega_{(1)} t - 21 \cos 3 \omega_{(1)} t + 13 \cos 5 \omega_{(1)} t - \dots) \text{ В};$$

$$u(t) = (33 + 55,5 \cos \omega_{(1)} t + 28 \cos 2 \omega_{(1)} t - 14 \cos 4 \omega_{(1)} t - \dots) \text{ В.}$$

Строим графики: из точек на оси частот, соответствующих номерам гармоник, проводим перпендикуляры, пропорциональные амплитудам гармоник (рис. 16.5, а, б).

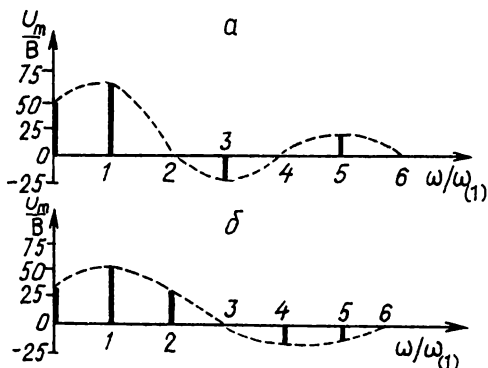


Рис. 16.5

Соединим концы одиночных спектральных линий. Получится огибающим определенной формы, которая может быть описана математическим выражением. Вместо дискретного спектра появляется сплошной спектр, или спектральная плотность. □

3.2. Разложить в ряд Фурье напряжение, заданное графиком (см. рис. 16.4).

◇ Кривая имеет два вида симметрии, а ряд — только нечетные синусоиды. Амплитуда  $a(k) = 0$  (см. формулу (16.9)), а  $b(k)$  вычислим по формуле (16.10) для полупериода и результат удвоим (табл. 16.3).

Разобьем полупериод на 6 интервалов длиной  $\pi/6$ . Середина первого интервала  $\alpha_1 = \pi/12$ , второго  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/6 = \pi/4$  и т.д. (значения  $\alpha_n$  находятся во втором столбце табл. 16.3). Измерим ординаты функции на середине каждого интервала и запишем полученные числа в третий столбец таблицы. Синус угла умножим на напряжение, например:

$$u(\alpha_1) \sin(\pi/12) = 12 \cdot 0,26 = 3,1 \text{ В}; \quad u(\alpha_1) \sin(3 \cdot \pi/12) = 12 \cdot 0,71 = 8,5 \text{ В.}$$

Таблица 16.3

Номер интервала	$\alpha_n$ , град	$u(\alpha_n)$ , В	$u(\alpha_n) \sin \alpha_n$ , В	$u(\alpha_n) \sin 3\alpha_n$ , В
1	15	12	3,1	8,5
2	45	21	14,9	14,9
3	75	11	10,6	-7,8
4	105	11	10,6	-7,8
5	135	21	14,9	14,9
6	165	12	3,1	8,5
Итого...			57,2	31,2

Суммируем результаты двух последних столбцов. По формуле (16.10) находим:

$$b_{(1)} = \frac{2}{m} \cdot 2 \sum_{k=1}^{m/2} u(\alpha_n) \sin k \alpha_n = \frac{2}{12} \cdot 2 \cdot 57,2 = 19,1 \text{ В};$$

$$b_{(3)} = \frac{2}{12} \cdot 2 \cdot 31,2 = 10,4 \text{ В}.$$

Запишем ряд:

$$u(t) = (19,1 \sin \omega_{(1)} t + 10,4 \sin 3 \omega_{(1)} t) \text{ В}.$$

Для получения более точного результата следует взять большее число интервалов и воспользоваться микрокалькулятором. □

### 16.5. Расчет цепей при несинусоидальном напряжении.

Влияние индуктивности и емкости на кривую тока

Пусть заданы схема цепи и параметры ее элементов. Напряжение на входе несинусоидальное. Оно записано в виде суммы постоянной и синусоидальных составляющих. Требуется вычислить токи ветвей или напряжения на участках схемы.

Метод наложения позволяет заменить заданную схему суммой эквивалентных схем, число которых равно числу членов ряда Фурье. На входе первой эквивалентной схемы напряжение постоянное, на входе остальных схем — синусоидальное. Известны его амплитуда (или действующее значение), угловая частота и начальная фаза. Рассчитываем в комплексной форме одну схему, вторую и т.д. Затем суммируем мгновенные значения токов отдельных гармоник. Аналогично находим напряжения.

Для постоянной составляющей, частота которой  $\omega = 0$ , сопротивление  $X_C = 1/(\omega C)$  бесконечно велико, а  $X_L = \omega L$  равно нулю. Для тока первой гармоники имеем:

$$X_{C(1)} = 1/(\omega_{(1)} C); X_{L(1)} = \omega_{(1)} L.$$

С увеличением номера гармоники емкостное сопротивление уменьшается, а индуктивное увеличивается в  $k$  раз:

$$X_{C(k)} = X_{C(1)} / k; X_{L(k)} = k X_{L(1)}.$$

Комплексное сопротивление последовательно соединенных элементов  $R, L, C$  для  $k$ -й гармоники

$$\underline{Z}_{(k)} = R + jkX_{L(1)} - jX_{C(1)}/k.$$

В ветви, содержащей только  $R$ , кривая тока повторяет форму кривой напряжения.

Чем выше номер гармоники, тем больше индуктивное сопротивление. Отношение действующих значений (или амплитуд) тока  $k$ -й гармоники к току основной гармоники

$$\frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} = \frac{U_{(k)}/(kX_{L(1)})}{U_{(1)}/X_{L(1)}} = \frac{U_{(k)}/U_{(1)}}{k}$$

в  $k$  раз меньше отношения действующих значений (амплитуд) гармоник напряжения. Индуктивность снижает высшие гармоники в кривой тока, приближая ее к синусоиде.

Отношение действующих значений гармоник тока в емкости

$$\frac{I(k)}{I(1)} = \frac{kU(k) / X_{C(1)}}{U(1) / X_{C(1)}} = k \frac{U(k)}{U(1)}$$

в  $k$  раз больше отношения действующих значений напряжения. В кривой тока высшие гармоники выражены резче, чем в кривой напряжения. Емкость искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

Свойство индуктивности и емкости изменять форму кривой тока используют в электрических фильтрах. Если же эти элементы включены последовательно, то на частоте какой-либо  $k$ -й гармоники индуктивное сопротивление может оказаться равным емкостному:  $kX_{L(1)} = X_{C(1)}/k$ , т.е. будет выполнено условие резонанса напряжений. Амплитуда тока этой гармоники может стать больше амплитуды тока любой другой гармоники.

При параллельном соединении индуктивности и емкости будет выполнено условие резонанса токов, если равны реактивные проводимости ветвей на частоте  $k$ -й гармоники:

$$\frac{kX_{L(1)}}{R^2 + (kX_{L(1)})^2} = \frac{1}{X_{C(1)}/k}$$

Такой контур, включенный последовательно с приемником, ослабляет токи  $k$ -й гармоники, т.е. является заграждающим фильтром. На самом контуре напряжение  $k$ -й гармоники будет иметь максимальное значение.

1. Чему равны индуктивное и емкостное сопротивления: а) при  $\omega = 0$ ; б) для основной гармоники; в) для высших гармоник?

2. Как рассчитать схему при несинусоидальном напряжении?

3. Докажите, что индуктивность сглаживает кривую тока, а емкость искажает.

4. Запишите условия резонанса тока и напряжения для  $k$ -й гармоники.

4.1 Вычислите активную мощность, действующие и средние значения, коэффициенты формы и нелинейных искажений, если:

$$u(t) = (10 + 50 \sin(\omega_{(1)}t + \pi/6) + 14,1 \sin(3\omega_{(1)}t - \pi/3)) \text{ В;}$$

$$i(t) = (1 + 4 \sin(\omega_{(1)}t - \pi/12) + 0,7 \sin(3\omega_{(1)}t + \pi/6)) \text{ А.}$$

♦ Разности фаз гармоник:  $\varphi_{(1)} = \pi/6 - (-\pi/12) = \pi/4$ ,  $\varphi_{(3)} = -\pi/3 - \pi/6 = -\pi/2$ .

Активную мощность находим по формуле (16.11):

$$P = 10 \cdot 1 + (50/\sqrt{2}) \cdot (4/\sqrt{2}) \cos(\pi/4) = 80,5 \text{ Вт.}$$

Активная мощность третьей гармоники равна нулю, так как  $\cos(-\pi/2) = 0$ . Вычисляем действующие и средние значения:

$$U = \sqrt{10^2 + (50/\sqrt{2})^2 + (14,1/\sqrt{2})^2} = 38 \text{ В;}$$

$$I = \sqrt{1 + (4/\sqrt{2})^2 + (0,7/\sqrt{2})^2} = 3,04 \text{ А;}$$

$$U_{\text{ср}} = 10 + 0,637 (50 + 14,1) = 51 \text{ В};$$

$$I_{\text{ср}} = 1 + 0,637 (4 + 3) = 5,56 \text{ А}.$$

Коэффициенты формы:

$$k_{\Phi I} = 3,2/5,5 \approx 0,58; \quad k_{\Phi U} = 38/51 \approx 0,75.$$

Коэффициенты нелинейных искажений:

$$k_{\text{н.и} I} = \frac{0,7\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 0,175; \quad k_{\text{н.и} U} = \frac{14,1/\sqrt{2}}{50/\sqrt{2}} = 0,28. \square$$

4.2. Определите коэффициент формы прямоугольных импульсов напряжения  $U_0$  (см. табл. 16.1) продолжительностью  $\tau$  с периодом  $T$ .

◇ Для действующего значения ранее была получена формула

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}.$$

Подставим  $U_0$  вместо  $u$  и заменим предел интегрирования  $T$  на  $\tau$ :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} U_0^2 \int_0^\tau d\tau} = U_0 \sqrt{\frac{\tau}{T}}.$$

Среднее значение

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^\tau U_0 dt = \frac{U_0}{T} \int_0^\tau d\tau = U_0 \frac{\tau}{T}.$$

$$\text{Коэффициент формы } k_{\Phi} = U/U_{\text{ср}} = \sqrt{T/\tau}.$$

Заметим, что число, равное отношению периода  $T$  к продолжительности  $\tau$ , называют *скважностью импульсов*. (В технике связи скважность импульсов достигает сотен и тысяч единиц, а коэффициент формы — десятков единиц, т.е. действующие значения токов или напряжений могут многократно превышать их средние значения.) □

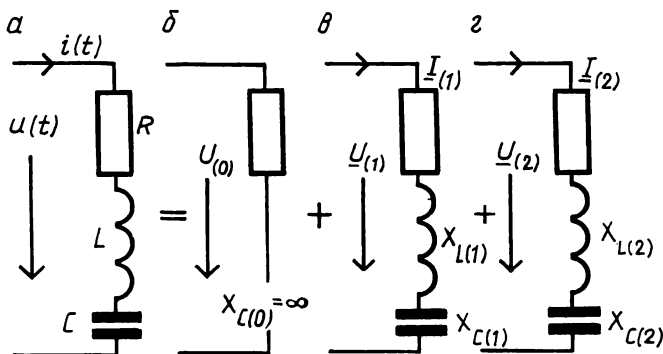


Рис. 16.6

5.1. На входе цепи (рис. 16.6, а) напряжение

$$u(t) = (100 + 200\sqrt{2} \sin(3140t - 37\pi/180) + 100\sqrt{2} \sin(6280t + \pi/3)) \text{ В}. \quad (16.17)$$

Заданы  $R = 25 \text{ Ом}$ ,  $L = 6,4 \text{ мГн}$ ,  $C = 4 \text{ мкФ}$ . Запишите уравнения тока и напряжения на емкости. Постройте график функции  $u_C(t)$ .

◇ Вычислим индуктивное и емкостное сопротивления на частоте основной гармоники:  $X_{L(1)} = \omega_{(1)} L = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{C(1)} = 1/(\omega_{(1)} C) = 80 \text{ Ом}$ .

Постоянной составляющей напряжения соответствует эквивалентная схема (рис. 16.6, б). В ней ток  $I_{(0)} = 0$ ,  $U_{C(0)} = 100 \text{ В}$ .

Из уравнения (16.17) комплексное действующее напряжение первой гармоники  $\underline{U}_{(1)} = 200 \angle -37^\circ \text{ В}$ . Комплексное сопротивление последовательной схемы (рис. 16.6, в)

$$\underline{Z}_{(1)} = 25 + j(20 - 80) = 65 \angle -67^\circ \text{ Ом}.$$

Ток первой гармоники

$$I_{(1)} = \frac{200 \angle -37^\circ}{65 \angle -67^\circ} = 3,08 \angle 30^\circ \text{ А}.$$

Напряжение

$$\underline{U}_{C(1)} = -jX_{C(1)} I_{(1)} = 80 \angle -90^\circ \cdot 3,08 \angle 30^\circ = 246 \angle -60^\circ \text{ В}.$$

Из уравнения (16.17) напряжение второй гармоники  $\underline{U}_{(2)} = 100 \angle 60^\circ \text{ В}$ . Сопротивление и ток (рис. 16.6, г):

$$\underline{Z}_{(2)} = 25 + j(40 - j40) = 25 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{(2)} = U_{(2)} / Z_{(2)} = 4 \angle 60^\circ \text{ А}.$$

Напряжение

$$\underline{U}_{C(2)} = I_2 (-jX_{C(1)}/2) = 4 \angle 60^\circ \cdot 40 \angle -90^\circ = 160 \angle -30^\circ \text{ В}.$$

Записываем уравнения, суммируя постоянную, первую и вторую составляющие:

$$i(t) = 3,08 \sqrt{2} \sin(\omega_{(1)} t + \pi/6) + 4 \sqrt{2} \sin(2\omega_{(1)} t + \pi/3) \text{ А};$$

$$u_C(t) = 100 + 246 \sqrt{2} \sin(\omega_{(1)} t - \pi/3) + 160 \sqrt{2} \sin(2\omega_{(1)} t - \pi/6) \text{ В},$$

где  $\omega_{(1)} = 3140 \text{ с}^{-1}$  (умножением на  $\sqrt{2}$  перешли от действующих к амплитудным значениям).

Построим график зависимости  $u_C(t)$ . Основная синусоида  $u_{C(1)} = 246 \sqrt{2} \sin(\omega_{(1)} t - \pi/3) \text{ В}$ . Начальное значение при  $t = 0$   $348 \sin(-\pi/3) = -310 \text{ В}$ ; при углах  $\omega_{(1)} t$ , равных  $\pi/3, \pi/3 + \pi$ , напряжение равно нулю; при  $\omega_{(1)} t$ , равном  $\pi/3 + \pi/2, \pi/3 + \pi/2 + \pi$ , откладываем амплитудные значения  $\pm 348 \text{ В}$  (кривая 1 на рис. 16.7). Наносим шкалу фазового угла  $2\omega_{(1)} t$  и строим аналогично синусоиду второй гармоники  $226 \sin(\omega_{(1)} t - \pi/6)$  (кривая 2). Проводим горизонтальную прямую с ординатой, равной постоянной составляющей  $U_{C(0)} = 100 \text{ В}$ . Чтобы перейти от шкалы фазовых углов к шкале времени, принимаем  $\omega_{(1)} t = 2\pi$ . Отсюда находим период  $T = 2\pi/\omega_{(1)} = 2 \text{ мс}$ . Наносим шкалу времени. Вычисляем ординаты кривой  $u_C(t)$ , прибавляя к постоянной составляющей ординаты обеих синусоид для одних и тех же моментов времени. Например, для  $t = 1 \text{ мс}$   $u_C(1) = 100 + 310 - 110 = 300 \text{ В}$ . Наносим ординаты остальных точек на график и проводим кривую  $u_C(t)$  (кривая 3 на рис. 16.7). □

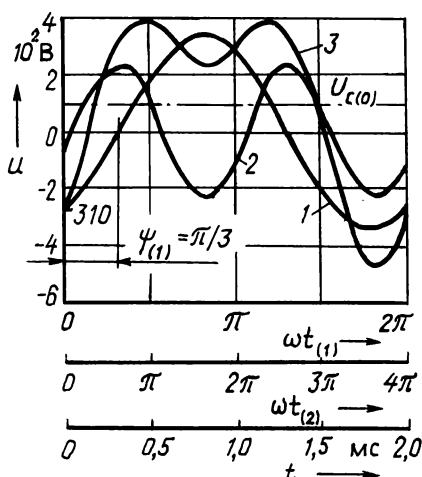


Рис. 16.7

Сопротивление первой ветви

$$R + jX_{L(1)} = 84 + j100 = 130e^{j50^\circ} \text{ Ом.}$$

Входное напряжение

$$\underline{U}_{(1)} = \underline{Z}_{1(1)} I_{1(1)} = 130 \angle 50^\circ \cdot 3 \angle 30^\circ = 390e^{j80^\circ} \text{ В.}$$

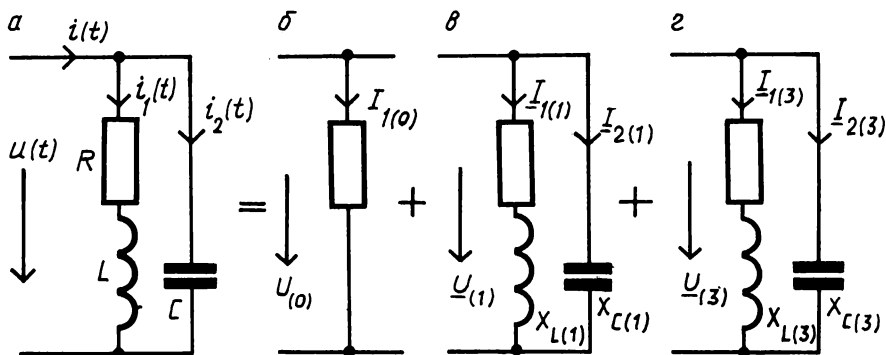


Рис. 16.8

Ток второй ветви

$$\underline{I}_{2(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{-jX_{C(1)}} = \frac{390 \angle 80^\circ}{300 \angle -90^\circ} = 1,3 \angle 170^\circ \text{ А.}$$

В неразветвленной части цепи ток как сумма токов ветвей  $\underline{I}_{1(1)}$  и  $\underline{I}_{2(1)}$

$$\underline{I}_{(1)} = 3 \angle 30^\circ + 1,3 \angle 170^\circ \text{ А.}$$

В алгебраической форме

5.2. В цепи (рис. 16.8, а) с параметрами  $R = 84 \text{ Ом}$ ,  $L = 20 \text{ мГн}$ ,  $C = 0,67 \text{ мкФ}$  известен ток  $i_1(t) = (1 + 3\sqrt{2} \sin(5000t + \pi/6) + 0,5\sqrt{2} \sin(15000t - \pi/6)) \text{ А}$ . Запишите уравнения для мгновенных значений входного напряжения и тока.

◇ Вычислим индуктивное и емкостное сопротивления на частоте основной гармоники:  $X_{L(1)} = \omega_{(1)} L = 100 \text{ Ом}$ ,  $X_{C(1)} = 1/(\omega_{(1)} C) = 300 \text{ Ом}$ .

Схема для постоянной составляющей показана на рис. 16.8, б. Входное напряжение  $U_0 = RI_0 = 84 \text{ В}$ . Так как  $X_{C(0)} \rightarrow \infty$ , то  $I_{2(0)} = 0$ ,  $I_{1(0)} = 1 \text{ А}$ .

Схема для первой гармоники приведена на рис. 16.8, в. Ток первой ветви в комплексной форме  $\underline{I}_{1(1)} = 3e^{j30^\circ} \text{ А}$ . Расчет будем вести через действующие значения.

$$\underline{I}_{(1)} = 2,6 + j1,5 - 1,28 + j0,22 = 1,32 + j1,72 = 2,16 \angle 52,8^\circ \text{ А.}$$

Схема для третьей гармоники дана на рис. 16.8, з. Комплексный ток первой ветви

$$\underline{I}_{1(3)} = 0,5 \angle -30^\circ \text{ А.}$$

Сопротивление

$$\underline{Z}_{1(3)} = R + j3X_{L(1)} = 84 + j300 = 312 \angle 74,3^\circ \text{ Ом,}$$

а входное напряжение

$$\underline{U}_{(3)} = \underline{Z}_{1(3)} \underline{I}_{(3)} = 312 \angle 74,3^\circ \cdot 0,5 \angle -30^\circ = 156 \angle 44,3^\circ \text{ В.}$$

Ток второй ветви

$$\underline{I}_{2(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{-jX_{C(3)}} = \frac{156 \angle 44,3^\circ}{100 \angle -90^\circ} = 1,56 \angle 134,3^\circ \text{ А.}$$

Складывая токи ветвей, находим входной ток:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{(3)} &= 0,5 \angle -30^\circ + 1,56 \angle 134,3^\circ = 0,43 - j0,25 - 1,09 + j1,12 = \\ &= -0,66 + j0,87 = 1,1 \angle 127^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

От уравнений в комплексной форме переходим к уравнениям для мгновенных значений, записывая сумму входных напряжений и токов всех трех схем, приведенных на рис. 16.8, б-з:

$$\begin{aligned} u(t) &= (84 + 390\sqrt{2} \sin(5 \cdot 10^3 t + 80^\circ) + 156\sqrt{2} \sin(15 \cdot 10^3 t + 44,3^\circ)) \text{ В;} \\ i(t) &= (1 + 2,16\sqrt{2} \sin(5 \cdot 10^3 t + 52,8^\circ) + 1,1\sqrt{2} \sin(15 \cdot 10^3 t + 127^\circ)) \text{ А.} \end{aligned}$$

Из формулы  $\omega = 2\pi/T$  находим период основной гармоники:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{(1)}} = \frac{6,28}{5 \cdot 10^3} = 1,25 \text{ мс или } T/2 \approx 0,63 \text{ мс.}$$

Рассчитываем функции  $u(t)$ ,  $i(t)$  и строим их графики.  $\square$

## 17. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом

### 17.1. Переходный процесс. Законы коммутации. Свободный переходный процесс

Включение или отключение элементов цепи называют *коммутацией* (от лат. commutatio — переключая). При коммутации в цепи возникает *переходный процесс*: токи и напряжения от одних установившихся значений переходят к другим. Продолжается он определенное время — от долей микросекунды до десятков секунд.

Чтобы выяснить, как изменяются токи и напряжения за время переходного процесса, надо составить и затем решить дифференциальное уравнение. В зависимости от порядка уравнения различают цепи первого, второго и более высоких порядков. Уравнения решают классическим либо операторным методом. При решении применяют законы коммутации. Не могут измениться скачком: 1) ток в индуктивности; 2) напряжение на емкости.

При скачке тока в индуктивности (напряжения на емкости) энергия магнитного (электрического) поля изменилась бы тоже скачкообразно, т.е. за бесконечно малое время. Это было бы возможно лишь при бесконечно большом значении мощности источника, а таких источников в природе не существует. Поэтому во всех случаях принимаем, что ток в индуктивности и напряжение на емкости сохраняют в первый момент переходного процесса то значение, которое они имели до коммутации.

Дифференциальное уравнение составляют так: для схемы, образовавшейся после коммутации, записывают уравнения Кирхгофа, затем выражают мгновенные значения через ток  $i_L$  или напряжение  $u_C$ , используя формулы:

$$u_L = L \frac{di}{dt}; i = C \frac{du_C}{dt}; u_a = Ri. \quad (17.1)$$

Если дифференциальное уравнение получилось однородным, то переходный процесс называют *свободным*.

Рассмотрим переходный процесс, возникающий при коротком замыкании ветви с элементами  $R$  и  $L$  (рис. 17.1, а). Ветвь включена на постоянное напряжение  $U_0$ , ток в ней  $I_0 = U_0/R$ . В момент  $t = 0$  ключ размыкает цепь питания и соединяет накоротко зажимы ветви,

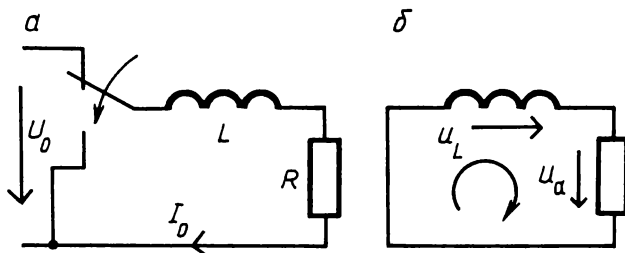


Рис. 17.1

В контуре, образовавшемся после коммутации (рис. 17.1, б), проставим стрелки напряжений и запишем уравнение Кирхгофа:

$$u_L + u_a = 0.$$

Используя формулы (17.1), выразим напряжения через ток:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (17.2)$$

Получилось однородное (без правой части) дифференциальное уравнение первого порядка. Следовательно, переходный процесс является свободным. Решение уравнения следует искать в виде показательной функции

$$i(t) = Ae^{pt}, \quad (17.3)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования;  $e = 2,718$  — основание натурального логарифма;  $p$  — корень характеристического уравнения. Неизвестные  $p$  и  $A$  найдем следующим образом. Запишем характеристическое уравнение. Для этого разделим формально выражение (17.2) на  $i$ , а  $d/dt$  обозначим через  $p$ :

$$Lp + R = 0.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -R/L \quad (17.4)$$

или  $p = -\frac{1}{L/R}$ . Отношение  $L/R$  выражается в секундах. Назовем его *постоянной времени* и обозначим  $\tau$ :  $L/R = \tau$ . Тогда корень уравнения (17.4)  $p = -1/\tau$ .

Постоянную интегрирования  $A$  найдем из начальных условий, применив первый закон коммутации (ток в индуктивности не может измениться скачком). До коммутации ток был равен  $I_0$ . Следовательно, в первый момент после коммутации, при  $t = 0$ , он сохраняет прежнее значение. Подставим  $t = 0$  в формулу (17.3) и приравняем полученное выражение  $I_0$ :

$$i(0) = Ae^{p \cdot 0} = I_0.$$

Так как  $e^0 = 1$ , то  $A = I_0$ . Тогда формула (17.3) примет окончательный вид:

$$i_{св}(t) = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (17.5)$$

Это решение дифференциального уравнения (17.2). Оно отвечает на вопрос, как изменяется ток за время переходного процесса.

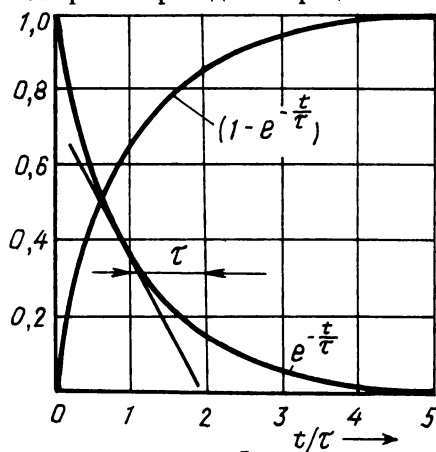


Рис. 17.2

Пусть  $I_0 = 1$  А. Подставим в формулу (17.5) значение  $t$ , кратное постоянной времени:  $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$ . Степень при  $e$  — целое число, например  $e^{-2\tau/\tau} = e^{-2} = 1/e^2 = 0,135$ . Значения функции  $e^{-t/\tau}$  приведены в табл. 17.1, а ее график — на рис. 17.2.

Таблица 17.1

$t/\tau$	0	1	2	3	4	5
$e^{-t/\tau}$	1	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007

В момент коммутации, при  $t = 0$ , ток равен  $I_0$ ; затем он уменьшается. Так, при  $t = \tau$  получаем  $i(\tau) = I_0 e^{-1} = I_0/2,718$ . За время  $\tau$  ток уменьшается в  $e$  раз.

Постоянная времени имеет и геометрический смысл: она равна подкаса-тельной в любой точке функции (т.е. отсекает на оси абсцисс отрезок, равный  $\tau$ ).

По истечении времени  $5\tau$  ток составляет менее 1 % начального значения  $I_0$ . Можно считать переходный процесс закончившимся через  $3\tau$ .

1. Сформулируйте первый и второй законы коммутации.
2. Для схемы, приведенной на рис. 17.1, а, составьте дифференциальное уравнение и решите его. Постройте график функции  $i(t)$ .
3. Объясните, как определяются постоянные  $A$  и  $\tau$ . Какой смысл имеет  $\tau$ ?

## 17.2. Включение $RL$ -цепи на постоянное напряжение

Для контура, образовавшегося после замыкания ключа (рис. 17.3), уравнение Кирхгофа имеет вид

$$u_L + Ri = E$$

или с учетом формул (17.1)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E. \quad (17.6)$$

Это неоднородное (с правой частью) дифференциальное уравнение. Решение его надо искать в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (17.7)$$

где  $i_{\text{пр}}$  — принужденная составляющая тока, полученная как частное решение неоднородного уравнения;  $i_{\text{св}}$  — свободная составляющая тока, полученная как общее решение однородного уравнения (без правой части).

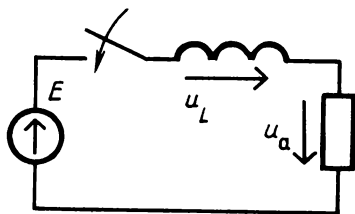


Рис. 17.3

Частное решение — это решение для одного, вполне определенного момента времени. Наиболее просто получить его для  $t \rightarrow \infty$ . За это время переходный процесс закончится, производная  $di/dt$  в формуле (17.6) станет равной нулю, а ток примет установившееся значение  $I_y = E/R$ . Это частное решение, принужденная составляющая  $i_{\text{пр}}$  в формуле (17.7).

Заменив правую часть уравнения (17.6) нулем, получим однородное дифференциальное уравнение (17.2). Его решение было получено ранее.

Переходный ток как сумма принужденной и свободной составляющих

$$i(t) = I_y + Ae^{-t/\tau}. \quad (17.8)$$

Постоянную  $A$  определим по первому закону коммутации. До коммутации ток в индуктивности был равен нулю, следовательно, в момент времени  $t = 0$  после коммутации он также будет равен нулю:  $i(0) = I_y + A = 0$ , откуда  $A = -I_y$ . Подставим  $-I_y$  в формулу (17.8):

$$i(t) = I_y(1 - e^{-t/\tau}). \quad (17.9)$$

Используя данные табл. 17.1, строим график функции  $i(t)$  при  $I_y = 1$  А (см. рис. 17.2). Ток за время переходного процесса плавно возрастает от 0 до  $I_y$ . За время  $\tau$  он достигает значения  $0,63 I_y$ .

1. Из каких частей состоит решение неоднородного дифференциального уравнения? Как найти его частное и общее решения?

2. Составьте дифференциальное уравнение для схемы, показанной на рис. 17.3, и решите его. Начертите график функции  $i(t)$ . Вычислите ток для  $t = 2\tau, 3\tau$ .

1.1. Найдите функцию тока при коротком замыкании ветви (см. рис. 17.1), если:

а)  $E_0 = 12$  В,  $R = 2$  кОм,  $L = 4$  мГн.

♦ Начальное значение  $I_0 = U_0/R = 6$  мА, постоянная времени  $\tau = L/R = 4 \cdot 10^{-3} / (2 \times 10^3) = 2 \cdot 10^{-6}$  с. Подставим полученные значения  $I_0$  и  $\tau$  в формулу (17.5):

$$i_{\text{св}}(t) = 6 \exp\left(-\frac{t}{2 \cdot 10^{-6}}\right) \text{ мА}.$$

Вычислим функцию при  $t = 0; 2; 4$  мкс (для времени, кратного  $\tau$ ) и построим график (рис. 17.4). □

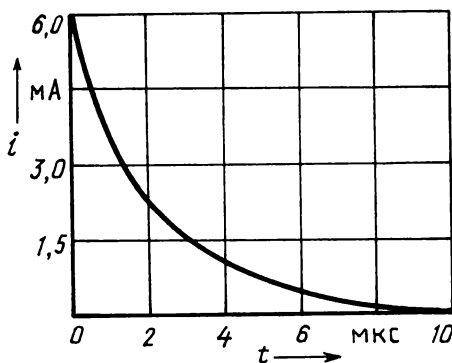


Рис. 17.4

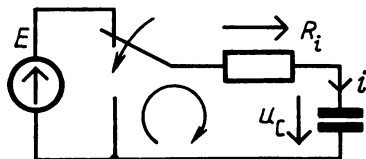


Рис. 17.5

б)  $I_0 = 6$  мА,  $R = 20$  Ом,  $L = 0,4$  Гн  $\left[ 6 \exp\left(-\frac{t}{20 \cdot 10^{-3}}\right) \right]$  мА.

1.2. Как изменяется  $u_C(t)$  при коротком замыкании RC-цепи (рис. 17.5)?

♦ Методика решения подобных задач известна (см. § 17.1). Для контура, образовавшегося после коммутации, уравнение Кирхгофа имеет вид

$$Ri + u_C = 0. \quad (17.10)$$

Выразим ток через  $u_C$  (см. формулу (17.1)):

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$RCp + 1 = 0; p = -1/(RC) = -1/\tau,$$

где постоянная времени  $\tau = RC$ .

Постоянную  $A$  найдем по второму закону коммутации. В момент замыкания ключа  $u_C(0) = E_0$ . Подставим  $t = 0$  в общее решение (17.3):

$$u_C(0) = Ae^0 = E_0.$$

Окончательно имеем:

$$u_{C\text{св.}}(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (17.11)$$

График этой функции при  $E = 1$  В соответствует графику, приведенному на рис. 17.2.

Заметим, что в схемах, показанных на рис. 17.1 и 17.5, после коммутации нет источников. Отсюда следует еще одно определение свободного переходного процесса: если в контуре, образовавшемся после коммутации, нет источников, то переходный процесс будет свободным. □

1.3. Найдите функцию  $u_C(t)$  при коротком замыкании ветви (рис. 17.5), если:

а)  $R = 500$  Ом,  $C = 4$  мкФ,  $E = 6$  В.

◇ Вычислим постоянную времени:  $\tau = RC = 2 \cdot 10^{-3}$  с. Используем решение (17.11):

$$u_{C\text{св.}}(t) = 6e^{-t/(2 \cdot 10^{-3})} \text{ В.}$$

Форма графика показана на рис. 17.4; □

б)  $R = 1$  кОм,  $C = 0,2$  мкФ,  $E = 6$  В [  $6e^{-t/(0,2 \cdot 10^{-3})}$  ].

1.4. Найдите функцию  $i_C(t)$  для схемы, приведенной на рис. 17.5.

◇ Из уравнения Кирхгофа (17.10) имеем  $i = -u_C/R$ . Подставим сюда вместо  $u_C$  его выражение (17.11):

$$i_C(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Ток отрицательный, так как конденсатор разряжается; направление тока противоположно указанному на схеме (рис. 17.5). График функции  $i_C(t)$  показан на рис. 17.6.

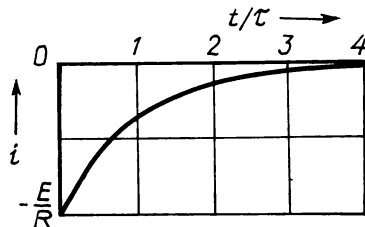


Рис. 17.6

В отличие от  $u_C$  ток изменяется скачком, величина скачка ограничена сопротивлением  $R$ . Постоянная времени не изменяется. □

1.5. В условиях задачи 1.3 запишите функцию  $i_C(t) \uparrow 12 \exp(-\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}}) \text{ мА},$   
 $6 \exp(-\frac{t}{0,2 \cdot 10^{-3}}) \text{ мА} ]$ .

### 17.3. Включение RC-цепи на постоянное напряжение

В цепи (рис. 17.7) конденсатор разряжен,  $u_C = 0$ . В момент  $t = 0$  ветвь подключается к источнику. Образуется контур, для которого уравнение Кирхгофа имеет вид

$$Ri + u_C = E. \quad (17.12)$$

Выразим ток через  $u_C$ :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (17.13)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (17.6). Частное решение ищем для  $t \rightarrow \infty$ . Тогда в уравнении (17.13)  $du_C/dt = 0$ , принужденная составляющая напряжения  $u_{C \text{ пр}} = E$ . Решение однородного уравнения (без правой части) было получено ранее (см. формулу (17.11)).

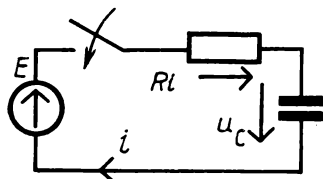


Рис. 17.7

Сумма принужденной и свободной составляющих

$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau}. \quad (17.14)$$

Определим постоянную интегрирования  $A$ . В момент, предшествующий коммутации, конденсатор не был заряжен. Следовательно, в первый момент после замыкания ключа, при  $t = 0$ , напряжение будет равно нулю:

$$u_C(0) = E + Ae^0 = 0.$$

Отсюда постоянная  $A = -E$ , и выражение (17.14) принимает вид

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (17.15)$$

График этой функции соответствует графику, приведенному на рис. 17.2. Напряжение плавно увеличивается от нуля до установившегося значения. Ток находим из уравнения (17.12):

$$i(t) = (E - u_C)/R.$$

Подставим вместо  $u_C$  выражение (17.15):

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}. \quad (17.16)$$

Зарядный ток конденсатора в первый момент ограничен только сопротивлением:  $i(0) = E/R$ . Затем он убывает по экспоненциальному закону (см. рис. 17.2).

1. Для схемы, приведенной на рис. 17.7, составьте дифференциальное уравнение и решите его. Постройте графики функций  $u_C(t)$  и  $i_C(t)$ .

2. Как определяется постоянная  $A$  при решении неоднородного дифференциального уравнения?

2.1. катушка с параметрами  $L = 8$  мГн и  $R = 8$  Ом включается на постоянное напряжение 16 В (см. рис. 17.3). Как изменяется ток за время переходного процесса? Чему равен ток через 2 мс после начала переходного процесса?

◇ В общем виде функции  $i(t)$  соответствует выражение (17.9). Подставим в него значения постоянной времени  $\tau = L/R = 1 \cdot 10^{-3}$  с и установившегося тока  $I_y = U/R = 2$  А. Получим

$$i(t) = 2(1 - e^{-t/10^{-3}}) \text{ А.}$$

Подставим сюда  $t = 2$  мс:

$$i(t) = 2(1 - \exp(-\frac{2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}})) = 1,73 \text{ А.}$$

График функции  $i(t)$  приведен на рис. 17.8. □

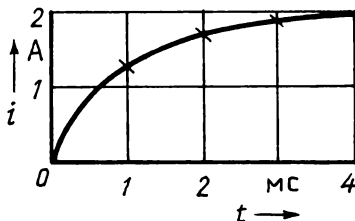


Рис. 17.8

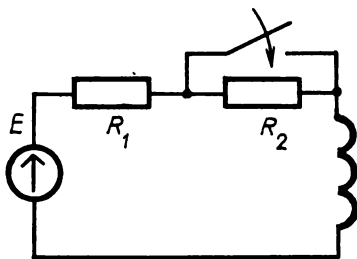


Рис. 17.9

2.2. В цепи (рис. 17.9)  $L = 0,18$  Гн,  $R_1 = R_2 = 12$  Ом,  $E = 24$  В. Один из резисторов в момент времени  $t = 0$  замыкают накоротко. Постройте график функции  $i(t)$ .

◇ Дифференциальное уравнение аналогично уравнению (17.6), а решение – формуле (17.8):

$$i(t) = I_y + Ae^{-t/\tau}. \quad (17.17)$$

Подставим сюда  $t = 0$  и приравняем начальному значению тока – току до коммутации, когда были включены оба резистора:

$$i(0) = I_y + Ae^0 = E/(2R).$$

После коммутации в схеме остается один резистор. Установившийся ток

$$I_y = i(t \rightarrow \infty) = E/R.$$

Из последних двух равенств следует

$$A = \frac{E}{2R} - \frac{E}{R} = -\frac{E}{2R},$$

По формуле (17.17) находим ток:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}.$$

Вычисляем:  $E/R = 2 \text{ A}$ ,  $\tau = L/R = 0,015 \text{ с}$ . Записываем:

$$i(t) = (2 - 1e^{-t/0,015}) \text{ A}.$$

Суммарная кривая показана на рис. 17.10. За время переходного процесса ток увеличивается от 1 до 2 А. □

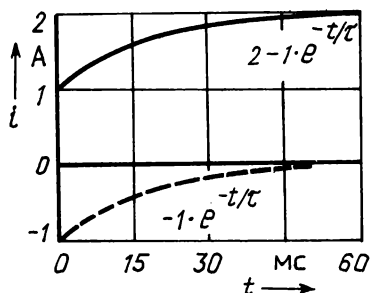


Рис. 17.10

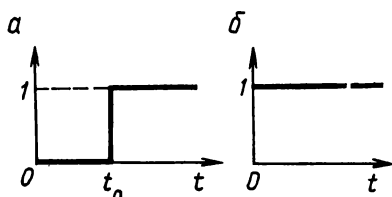


Рис. 17.11

#### 17.4. Единичные и импульсные воздействия

Выше было показано, как рассчитываются переходные процессы, возникающие при постоянном напряжении. Но воздействие (ток, напряжение) может иметь и другую, более сложную форму. Принцип наложения позволяет представить его суммой элементарных составляющих, реакции на которые известны. Одной из таких элементарных составляющих может быть единичная ступенчатая функция — *функция Хевисайда*. Она выглядит как ступенька (рис. 17.11, а), высота которой равна 1. (В момент времени  $t_0$  включен источник с напряжением 1 В или током 1 А.)

Единичный скачок может иметь два значения — либо 0, либо 1:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ 1, & t \geq t_0. \end{cases}$$

При  $t_0 = 0$  получается  $1(t)$  — единица при  $t \geq 0$  и нуль при  $t < 0$  (рис. 17.11, б).

Реакция цепи на воздействие единичного скачка называется *переходной характеристикой*.

Как было показано ранее, при включении последовательной  $RL$ -цепи

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Разделим функцию на  $U_0$ ; переходный ток, возникающий от единичного напряжения (т.е. переходная характеристика),

$$g(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Было показано также, что при включении  $RC$ -цепи

$$u_C(t) = U_0 (1 - e^{-t/\tau}).$$

Переходная характеристика

$$u_C(t) / U_0 = h(t) = 1 - e^{-t/\tau}; \quad (17.18)$$

это безразмерная величина.

Чтобы записать переходную характеристику, надо рассчитать переходный процесс при постоянном напряжении, а затем реакцию разделить на величину воздействия.

Заметим, что единичному напряжению, включенному в момент  $t_0$ , соответствует переходная характеристика с запаздыванием. В аргументе вместо  $t$  пишем  $t - t_0$ . Переходная характеристика (17.18) в этом случае

$$h(t - t_0) = 1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right).$$

Функция существует только при  $t \geq t_0$ .

Напряжение произвольной формы можно представить также последовательностью прямоугольных импульсов (рис. 17.12).

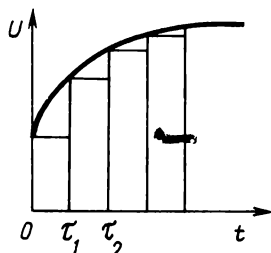


Рис. 17.12

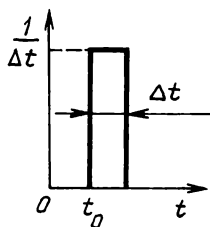


Рис. 17.13

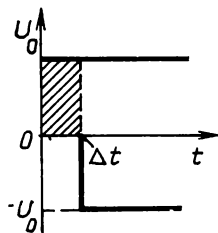


Рис. 17.14

Прямоугольный импульс бесконечно малой длительности  $\Delta t$  с амплитудой  $1/\Delta t$  называют *импульсной функцией* (рис. 17.13). Площадь импульса равна единице, она не зависит от  $\Delta t$ . Импульсная функция обозначается  $\delta(t - t_0)$  и называется также *дельта-функцией* или *функцией Дирака*.

Реакцию цепи на единичное импульсное воздействие называют *импульсной характеристикой*.

Чтобы записать импульсную характеристику, представим прямоугольный импульс суммой двух напряжений одинаковой амплитуды, но разной полярности (рис. 17.14). Отрицательное напряжение  $-U_0$  включено с запаздыванием на  $\Delta t$ . При  $t > \Delta t$  оба напряжения компенсируются, остается один прямо-

угольный импульс. Создаваемый им ток можно определить через переходную проводимость  $g(t)$  для первого скачка и  $g(t-\Delta t)$  — для второго:

$$i(t) = U_0 g(t) - U_0 g(t - \Delta t).$$

Из определения единичного импульса  $U_0 \Delta t = 1$  амплитуда  $U_0 = 1/\Delta t$ . Тогда

$$i(t) = \frac{g(t) - g(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

$$\text{В пределе } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(t - \Delta t)}{\Delta t} = g'(t), \text{ т.е.}$$

импульсная характеристика равна производной от переходной характеристики. В общем случае ее обозначают  $h'(t)$ , а размерность определяют из следующего отношения:

$$\frac{[\text{реакция}]}{[\text{воздействие}] \times [\text{время}]}.$$

Для импульсной проводимости  $g'(t)$  получается  $1/(\text{Ом} \cdot \text{с})$ .

В аргумент переходной и импульсной характеристик входит время, следовательно, это временные характеристики. Они устанавливают соотношение между воздействием на цепь и ее реакцией и используются в интеграле Дюамеля.

1. На какие элементарные составляющие можно разложить напряжение сложной формы? Дайте определение единичной и импульсной функций. Запишите их и постройте графики.

2. Что такое переходная характеристика? Как ее записать? В каких единицах она выражается?

3. Докажите, что импульсная характеристика равна производной от переходной характеристики.

3.1. Для схемы (см. рис. 17.7)  $E = 12 \text{ В}$ ,  $R = 2 \text{ кОм}$ ,  $C = 0,5 \text{ мкФ}$ . Найдите функции переходных напряжения и тока.

♦ Постоянная времени  $\tau = RC = 1 \text{ мс}$ . Начальные условия:  $u_C(0) = 0$ ,  $i(0) = U/R = 6 \text{ мА}$ ; установившиеся значения:  $U_C = 12 \text{ В}$ ,  $I_y = 0$ . Подставив полученные значения в формулы (17.5) и (17.16), получим:

$$u_C(t) = 12(1 - e^{-t/10^{-3}}) \text{ В}; \quad i(t) = 6e^{-t/10^{-3}} \text{ мА}.$$

Результаты расчета функций  $e^{-t/\tau}$  приведены в табл. 17.1. Графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$  показаны на рис. 17.2. □

3.2. Прямоугольный импульс напряжения с амплитудой  $U_0 = 20 \text{ В}$  и длительностью  $t_1 = 2 \text{ мс}$  подан на вход последовательной цепи с параметрами  $R = 2 \text{ кОм}$  и  $C = 0,5 \text{ мкФ}$ . Постройте графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

♦ В момент  $t = 0$  цепь включается на постоянное напряжение. Для этого случая было получено (см. формулы (17.15) и (17.16)):

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}); \quad i(t) = (U_0/R)e^{-t/\tau}.$$

Эти уравнения пригодны в интервале  $0 < t < t_1$ .

Находим:  $u_C(0) = 0$ ,  $i(0) = 10$  мА. Постоянная времени  $\tau = RC = 1$  мс.

При  $t_1 = 2$  мс имеем:

$$u_C(t_1) = 20(1 - e^{-2}) = 17,3 \text{ В}; \quad i(t_1) = \frac{20}{2 \cdot 10^{-3}} e^{-2} = 1,35 \text{ мА}.$$

Строим графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$  (соответственно рис. 17.15 и 17.16 в интервале времени от 0 до 2 мс). В момент  $t_1$  напряжение  $U_0$  исчезает; с этого времени начинается свободный переходный процесс:

$$u_C(t) = u_C(t_1) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right);$$

$$i(t) = -\frac{u_C(t_1)}{R} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)$$

при  $t_1 < t < \infty$ . Подставив сюда  $t = t_1$ , получим:

$$u_C(t_1) = 17,3 \text{ В}; \quad i(t_1) = 17,3/(2 \cdot 10^{-3}) = -8,65 \text{ мА}.$$

При  $t = 2t_1$  имеем:

$$u_C(2t_1) = 17,3 e^{-2} = 2,34 \text{ В}; \quad i(2t_1) = -8,65 e^{-2} = -1,2 \text{ мА}.$$

Наносим эти точки на графики (рис. 17.15, 17.16). □

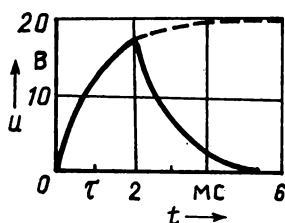


Рис. 17.15

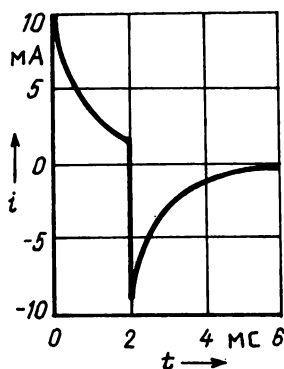


Рис. 17.16

3.3. Как изменятся графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$  в условиях задачи 3.2, если напряжение длится: а) 1 мс; б) 3 мс?

### 17.5. Интеграл Дюамеля

Заданное напряжение произвольной формы можно представить суммой постоянных напряжений, включаемых в разное время (рис. 17.17).

При  $t = 0$  включается напряжение  $u(0)$ , которое в следующий момент  $t_1$  увеличивается скачком на  $\Delta u_1$ , и т.д.

Пусть переходная проводимость цепи  $g(t)$  известна. Найдем ток в произвольный момент времени  $t$ . Рассуждаем так. Первый скачок напряжения  $u(0)$  создает ток  $u(0)g(t)$ , второй —  $\Delta u_1 g(t - \tau_1)$ , третий —  $\Delta u_2 g(t - \tau_2)$ . Так записываем токи от всех  $n$  скачков напряжения, а затем их сумму:

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k g(t - \tau_k), \quad (17.19)$$

где  $k$  — порядковый номер скачка напряжения:  $k = \overline{1, n}$ .

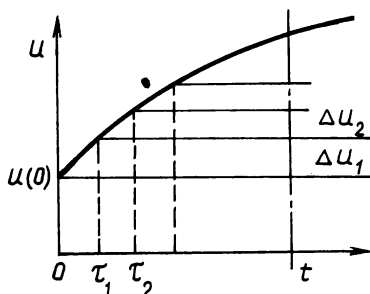


Рис. 17.17

Чтобы ступенчатое напряжение превратилось в напряжение, задаваемое плавной кривой, надо увеличить  $n$ ; в пределе  $n \rightarrow \infty$ . Тогда интервалы времени  $\Delta t$  и скачки напряжения  $\Delta u$  уменьшатся до бесконечно малых величин  $d\tau$ ,  $du$ . Высоту скачка умножим и разделим на  $d\tau$ . Получим

$$du = \frac{du}{d\tau} d\tau.$$

Появилась производная  $u'(\tau)$ , т.е.  $du = u'(\tau)d\tau$ .

Сумма в формуле (17.19) превращается в интеграл

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (17.20)$$

называемый *интегралом Дюамеля*.

Напряжение  $u(t)$  должно быть задано аналитически, уравнением. Находим производную  $u'(t)$  и вместо  $t$  записываем время  $\tau$ , лежащее в пределах от 0 до  $t$ . Переходные характеристики  $g(t)$  и  $h(t)$  конкретной цепи рассчитываем или берем из справочника и вместо  $t$  записываем в аргументе  $t - \tau$ .

Еще раз заметим, что  $\tau$  — это текущее время, им обозначены моменты появления скачков напряжения, поэтому оно изменяется в пределах от 0 до  $t$ . Время  $t$  — это момент наблюдения, тот момент, для которого надо вычислить ток.

Напряжение может быть задано и графически, осциллограммой; тогда разбиваем интервал времени от 0 до  $t$  на  $n$  промежутков и вычисляем ток приближенно, по формуле (17.19) на микрокалькуляторе. Чем больше  $n$ , тем точнее расчет.

Пусть напряжение  $u(t)$  состоит из прямоугольных импульсов (см. рис. 17.12). Единичный импульс, возникающий в момент времени  $\tau_1$ , создает ток, равный по определению импульсной проводимости  $g'(t - \tau_1)$ . Прямоугольный импульс напряжения с площадью  $u(\tau) d\tau$ , вызывает ток  $u(\tau)g'(t - \tau)$ . Суммируя реакции всех импульсов от  $\tau = 0$  до  $\tau = t$ , получаем

$$i(t) = g(0)u(t) + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \quad (17.21)$$

Формулы интеграла Дюамеля (17.20) и (17.21) взаимосвязаны: последняя получается нахождением интеграла из соотношения (17.20) по частям:

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)g(t) + \int_0^t g(t - \tau)du(\tau) = u(0)g(t) + \\ &+ u(\tau)g(t - \tau) \Big|_0^t + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Перед интегралом стоит плюс, так как  $g(t - \tau)/d\tau = -g'(t - \tau)$ . После подстановки пределов  $\tau$  первое слагаемое сокращается.

В общем случае в интеграл Дюамеля вместо  $u(\tau)$  следует подставить заданное воздействие, а взамен переходной  $g(t - \tau)$  или импульсной  $g'(t - \tau)$  проводимости — соответствующие характеристики  $h(t - \tau)$  и  $h'(t - \tau)$ ,

1. Выведите формулу (17.19). В каких случаях она используется? Как из нее получить интеграл Дюамеля?

2. Какие функции стоят под интегралом Дюамеля и как их получить? Чем  $\tau$  отличается от  $t$ ?

3. Выведите импульсный интеграл Дюамеля (17.21) одним из способов — суммируя частичные токи или интегрируя по частям равенство (17.20).

4.1. Для RC-цепи запишите переходную и импульсную характеристики.

◇ Воспользуемся готовым решением. Разделив выражения (17.15), (17.16) на  $U_0$ , получим переходные характеристики:

$$h(t) = 1 - e^{-t/(RC)}; \quad g(t) = \frac{1}{R} e^{-t/(RC)} \quad \text{См.}$$

Дифференцируя, находим импульсные характеристики:

$$h'(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} e^{-1}; \quad g'(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-t/(RC)}, \quad 1/(\text{Ом} \cdot \text{с}). \quad \square$$

## 18. Переходные процессы в последовательном контуре

### 18.1. Дифференциальное и характеристическое уравнения

Пусть цепь (рис. 18.1) включена на постоянное напряжение  $U_0$ . В момент  $t = 0$  ключ переводят в нижнее положение. Для контура, образовавшегося после коммутации, уравнение Кирхгофа имеет вид

$$u_L + u_a + u_C = 0$$

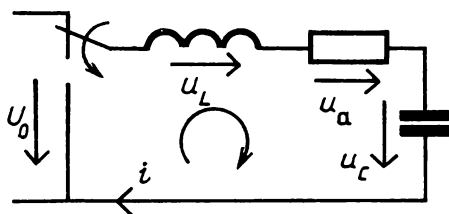


Рис. 18.1

или с учетом формул (17.1)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0.$$

Подставим сюда  $i = Cdu_C/dt$  :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (18.1)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Ему соответствует характеристическое уравнение  $LCp^2 + RCp + 1 = 0$ . Разделив его на  $LC$ , получим

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (18.2)$$

Введем обозначение:

$$R/(2L) = \delta. \quad (18.3)$$

Это коэффициент затухания. Учтем, что  $1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота  $\omega_0$ . Тогда уравнение (18.2) примет вид

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0.$$

Его корни:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (18.4)$$

Они действительные и равные, если  $\delta = \omega_0$ :

$$R/(2L) = 1/\sqrt{LC}.$$

Отсюда  $R = 2\sqrt{L/C} = 2\rho$ , где  $\rho$  — характеристическое сопротивление, т.е. корни действительные и равные, если добротность контура  $Q = \rho/R = 1/2$ . При меньшей добротности ( $\delta > \omega_0$ ) корни вещественные и разные. Если же  $Q > 0,5$ , то  $\delta < \omega_0$ . Чтобы извлечь корень,  $\delta$  и  $\omega_0$  поменяем местами:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega',$$

где  $\omega'$  — частота затухающих колебаний. Корни (18.4) в этом случае комплексные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega'.$$

Для идеальной катушки ( $R = 0$ ) коэффициент затухания  $\delta = R/(2L) = 0$  и корни мнимые:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_0.$$

Добротность  $\rho/R$  такого контура бесконечно велика.

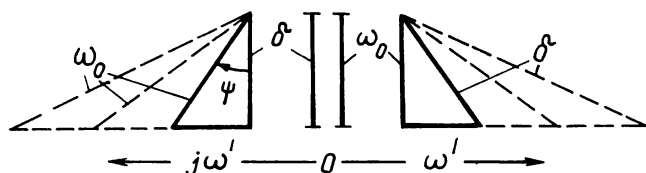


Рис. 18.2

Частоты затухания  $\delta$ , затухающих колебаний  $\omega'$  и резонансная  $\omega_0$  образуют прямоугольный треугольник (рис. 18.2). При  $Q = 1/2$  он вырождается в прямую,  $\delta = \omega_0$ , а  $\omega' = 0$ . В зависимости от соотношения  $\delta$  и  $\omega_0$  одной из этих величин соответствует гипотенуза. В пределе при  $\delta \rightarrow 0$  ( $Q \rightarrow \infty$ ) частота  $j\omega'$  становится равной  $j\omega_0$ , а  $\psi \rightarrow \pi/2$ .

Из курса математики известно, что решение уравнения (18.1) зависит от вида корней характеристического уравнения. Ниже будут рассмотрены все перечисленные случаи.

1. Начертите схему, приведенную на рис. 18.1, и запишите для нее дифференциальное и характеристическое уравнения.

2. Чему равны коэффициент затухания и частота затухающих колебаний? В каких единицах они выражаются?

3. Используя понятия  $\delta$  и  $\omega'$ , объясните, какими могут быть корни характеристического уравнения.

## 18.2. Аperiodический процесс

Для случая вещественных и разных корней решением уравнения (18.1) является функция

$$u_{C\text{ св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (18.5)$$

Дифференцируя ее, находим ток:

$$i_{\text{св}}(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}). \quad (18.6)$$

Чтобы определить постоянные интегрирования, подставим в оба уравнения  $t = 0$  и приравняем их начальным условиям  $u_C(0) = U_0$ ,  $i(0) = 0$ :

$$u_{C\text{св}}(0) = A_1 + A_2 = U_0; \quad i_{\text{св}}(0) = C(p_1 A_1 + p_2 A_2) = 0.$$

Имеем два уравнения с неизвестными  $A_1$  и  $A_2$ . Считая  $C \neq 0$ , раскрываем главный определитель и записываем неизвестные:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1;$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} U_0 & 1 \\ 0 & p_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{p_2 U_0}{p_2 - p_1}; \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_0 \\ p_1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-p_1 U_0}{p_2 - p_1}. \quad (18.7)$$

Подставляя сюда  $U_0$  и значения корней (18.4), вычисляем постоянные  $A_1, A_2$  и записываем окончательно функции (18.5), (18.6).

Используя формулу (18.6), находим индуктивное напряжение  $L \frac{di}{dt}$ :

$$u_{L\text{св}}(t) = LC (p_1^2 A_1 e^{p_1 t} + p_2^2 A_2 e^{p_2 t}). \quad (18.8)$$

Для случая равных корней ( $Q = 0,5$ ) решение уравнения (18.1) надо искать в виде

$$u_C(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (18.9)$$

Дифференцируя это выражение, находим ток  $C \frac{du_C}{dt}$ :

$$i(t) = C(pA_1 + A_2 + pA_2 t) e^{pt}. \quad (18.10)$$

Подставляем в формулы (18.9), (18.10)  $t = 0$  и приравниваем полученные значения начальным условиям:

$$u_C(0) = A_1 = U_0; \quad i(0) = C(pA_1 + A_2) = 0.$$

Отсюда находим постоянные  $A_1 = U_0$ ,  $A_2 = -pU_0$  и подставляем их в формулу (18.9):

$$u_C(t) = (U_0 - pU_0 t) e^{pt}.$$

Выразим корень через постоянную времени ( $p = -1/\tau$ ):

$$u_C(t) = U_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau}. \quad (18.11)$$

Аналогично преобразуем выражение (18.10):

$$i(t) = C(pU_0 - pU_0 + pA_2 t) e^{pt} = Cp(-pU_0) t e^{pt}.$$

Произведем замену

$$\frac{U_0}{1/(pC)} = - \frac{U_0}{1/(\delta C)} = -I_0 \quad (18,12)$$

и  $p = 1/\tau$ :

$$i(t) = -I_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (18,13)$$

Задавшись значениями  $t/\tau$ , рассчитаем  $i(t)$  при единичном токе  $I_0 = 1$  А (рис. 18.3). График функции  $u_C(t)$  при единичном напряжении  $U_0 = 1$  В строим, складывая ординаты экспоненты  $e^{-t/\tau}$  и функции  $\frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$ .

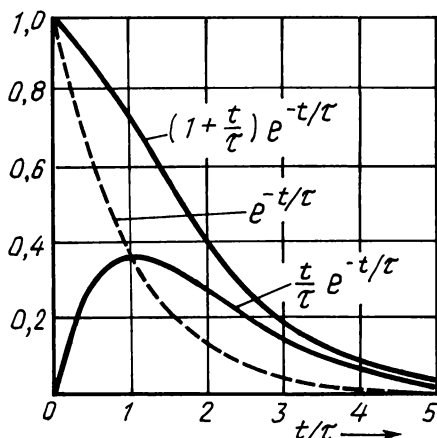


Рис. 18.3

1. Запишите решение дифференциального уравнения (18.1) для случаев: а) равных корней; б) вещественных и разных.

2. Из каких уравнений находят постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ ?

3. Известно аналитическое выражение функции  $u_C(t)$ . Как от него перейти к  $i(t)$  и  $u_L(t)$ ?

1.1. Для схемы (см. рис. 18.1)  $L = 25$  мГн,  $C = 40$  мкФ,  $R = 62,5$  Ом. Вычислите корни характеристического уравнения.

◊ Резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. Коэффициент затухания  $\delta = R/(2L) = 1,25 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. По формуле (18.4) находим

$$p_{1,2} = (-1,25 \pm \sqrt{1,25^2 - 1}) 10^3 = (-1,25 \pm 0,75) 10^3,$$

т.е.  $p_1 = -0,5 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>;  $p_2 = -2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

Заметим, что коэффициент затухания и корни выражаются в единицах угловой частоты (с<sup>-1</sup>). □

1.2. Для схемы (рис. 18.1)  $L = 25$  мГн,  $C = 40$  мкФ. Каким должно быть  $R$ , чтобы корни характеристического уравнения были действительные и равные? При каком  $R$  корни будут комплексными? Вычислите их, если  $R = 30$  Ом.

◇ Корни  $p_1 = p_2$ , если  $\delta = \omega_0$ , т.е.  $R = 2\rho$ . Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 25 \text{ Ом}$ . Следовательно, при  $R = 50 \text{ Ом}$  корни  $p_{1,2} = -\delta = 1,25 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Корни комплексные, если добротность  $Q > 1/2$ , т.е.  $\rho/R > 1/2$  или  $R < 2\rho$ . Отсюда  $R < 50 \text{ Ом}$ . При  $R = 30 \text{ Ом}$  коэффициент затухания  $\delta = R/(2L) = 0,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  ( $\omega_0 \text{ см. в задаче 1.1}$ ). Согласно формуле (18.4),

$$p_{1,2} = -600 \pm \sqrt{0,36 - 1 \cdot 10^3} = (-600 \pm j800) \text{ с}^{-1}. \square$$

1.3. Для схемы, приведенной на рис. 18.1,  $L = 0,01 \text{ Гн}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ . Вычислите корни характеристического уравнения (18.2) для случаев, когда  $R$  равно 250; 100; 200 Ом [ $-5 \cdot 10^3$  и  $-20 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $(-5 \pm j8,66) 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $-5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ].

### 18.3. Периодический затухающий процесс

Общим решением уравнения (18.1) для случая комплексно-сопряженных корней является функция вида

$$u_C(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi), \quad (18.14)$$

где  $A$  и  $\psi$  — произвольные постоянные. Продифференцировав ее ( $i = C du_C/dt$ ), запишем:

$$i(t) = CA(-\delta \sin(\omega' t + \psi) + \omega' \cos(\omega' t + \psi)) e^{-\delta t}. \quad (18.15)$$

Подставим в выражения (18.14), (18.15)  $t = 0$  и приравняем функции начальным значениям  $u_C(0) = U_0$ ,  $i(0) = 0$ :

$$u_C(0) = A \sin \psi = U_0; \quad (18.16)$$

$$i(0) = CA(-\delta \sin \psi + \omega' \cos \psi) = 0. \quad (18.17)$$

Из равенства (18.17), полагая  $CA \neq 0$ , имеем

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\omega'}{\delta}.$$

Отсюда

$$\psi = \arctg(\omega'/\delta). \quad (18.18)$$

Из равенства (18.16)

$$A = U_0 / \sin \psi = U'_0. \quad (18.19)$$

Подставив  $A$  и  $\psi$  в формулу (18.14), запишем окончательно  $u_C(t)$ .

Выражение для тока (18.15) можно упростить. Катеты  $\delta$  и  $\omega'$  выразим через гипотенузу  $\omega_0$  и угол  $\psi$  (рис. 18.4):

$$\delta = \omega_0 \cos \psi; \quad \omega' = \omega_0 \sin \psi. \quad (18.20)$$

Подставим их в формулу (18.15):

$$i(t) = CA \omega_0 (-\cos \psi \sin(\omega' t + \psi) + \sin \psi \cos(\omega' t + \psi)) e^{-\delta t}.$$

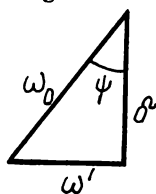


Рис. 18.4

Выражение в скобках — синус разности двух углов:

$$\sin(\psi - \omega' t + \psi) = \sin(-\omega' t) = -\sin \omega' t.$$

Заменим  $A$  напряжением  $U_0'$  (см. выражение (18.19)):

$$i(t) = -\omega_0 C U_0' e^{-\delta t} \sin \omega' t. \quad (18.21)$$

Так как

$$\frac{U_0'}{1/(\omega_0 C)} = \frac{U_0'}{\rho} = I_0,$$

где  $\rho$  — характеристическое сопротивление, то окончательно имеем

$$i(t) = -I_0 e^{-\delta t} \sin \omega' t. \quad (18.22)$$

Дифференцируя выражение (18.21), получаем

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L \omega_0 C U_0' (-\delta \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t) e^{-\delta t}.$$

Подставим вместо  $\delta, \omega'$  выражения (18.20);  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ :

$$u_L(t) = -U_0' e^{-\delta t} \sin(\psi - \omega' t).$$

Изменим знак угла:

$$u_L(t) = U_0' e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \psi). \quad (18.23)$$

1. Запишите решение  $u_C(t)$  в общем виде и определите постоянные  $A$  и  $\psi$ .

2. Приведите исходные выражения  $i(t)$  и  $u_L(t)$  к компактному виду (см. формулы (18.22) и (18.23)).

3. В каком соотношении находятся угловые частоты: резонансная, затухающих колебаний, коэффициент затухания, если  $Q > 0,5$ ?

2.1. Для схемы (см. рис. 18.1)  $L = 25$  мГн,  $C = 40$  мкФ. Корни характеристического уравнения  $p_1 = -0,5 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>,  $p_2 = -2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. Постройте графики функций  $u_C(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $i(t)$  при коротком замыкании контура, если  $U_0 = 150$  В.

♦ При действительных и разных корнях решение записываем в виде суммы двух экспонент (18.5). По формуле (18.7) находим постоянные интегрирования:

$$A_1 = \frac{-20 \cdot 10^3}{(-2 + 0,5) 10^3} \cdot 150 = 200 \text{ В}; \quad A_2 = -50 \text{ В}.$$

Постоянные времени экспонент:

$$\tau_1 = |1/p_1| = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_2 = |1/p_2| = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Подставим значения постоянных в общее решение (18.5):

$$u_C(t) = (200 \exp(-\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}}) - 50 \exp(-\frac{t}{0,5 \cdot 10^{-3}})) \text{ В}.$$

По этому выражению можно рассчитать  $u_C(t)$  на микрокалькуляторе, задавшись шагом, например  $h = 0,5\tau_2 = 0,25 \cdot 10^{-3}$  с. Но можно построить каждую экспоненту отдельно. Отложим отрезки, кратные  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (рис. 18.5). Вычислим значения экспонент в этих точках ( $e^{-1} = 0,368$ ,  $e^{-2} = 0,135, \dots$ ) и сведем в табл. 18.1.

Таблица 18.1

$t/\tau$	0	1	2	3
$200 e^{-t/\tau_1}$	200	73,6	27	10
$50 e^{-t/\tau_2}$	50	18,4	6,7	2,5

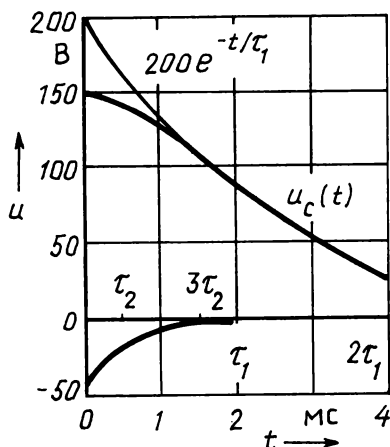


Рис. 18.5

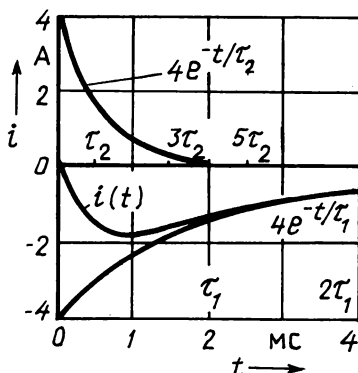


Рис. 18.6

Строим экспоненты и суммарную кривую  $u_C(t)$ .

Подставим значения коэффициентов в формулы (18.6) и (18.8):

$$i(t) = (4e^{-t/\tau_2} - 4e^{-t/\tau_1}) \text{ А};$$

$$u_L(t) = (-200e^{-t/\tau_2} + 50e^{-t/\tau_1}) \text{ В}$$

и построим графики (рис. 18.6, 18.7). Сведем вместе все три кривые (рис. 18.8). В момент  $t_1$ , когда  $u_L(t)$  меняет знак, ток имеет максимум, а кривая  $u_C(t)$  — перегиб. Времени  $t_2$  соответствуют максимум  $u_L(t)$  и перегиб  $i(t)$ . Ток отрицательный, так как емкость разряжается (направление тока противоположно указанному на рис. 18.1). □

2.2. Постройте графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$ , если  $L = 25$  мГн,  $C = 40$  мкФ,  $R = 50$  Ом,  $U_0 = 150$  В (см. рис. 18.1).

◇ Вычислим коэффициент затухания и резонансную частоту:  $\delta = R/(2L) = 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Корни  $p_{1,2} = -\delta = -10^3 \text{ с}^{-1}$ , постоянная времени  $\tau = |1/p| = 10^{-3}$  с. Согласно выражению (18.11),

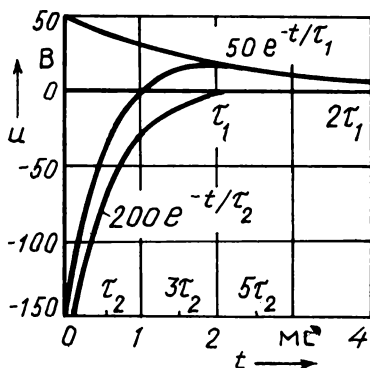


Рис. 18.7

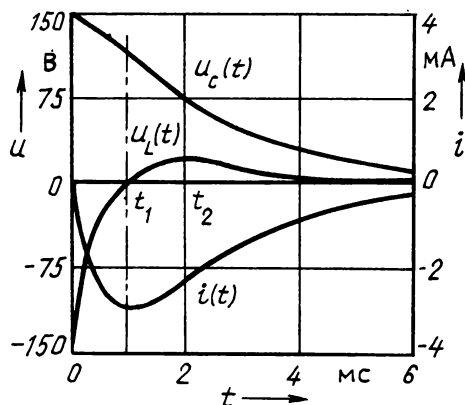


Рис. 18.8

$$u_C(t) = 150 \left( 1 + \frac{t}{0,001} \right) e^{-t/10^{-3}} \text{ В.}$$

По формулам (18.12) и (18.13) находим:

$$I_0 = \frac{U_0}{1/(\delta C)} = 6 \text{ А}; \quad i_{\text{св}}(t) = -6 \frac{t}{10^{-3}} e^{-t/10^{-3}} \text{ А.}$$

Форма графиков показана на рис. 18.3. Кривая выходит из начала координат; возрастая, при  $t = \tau$  она достигает максимума  $I_0/e$  и затем приближается к нулю несколько медленнее, чем экспонента. Заметим, что разряд конденсатора на критическое сопротивление — предельный случай аperiodического процесса. При дальнейшем уменьшении  $R$  он превращается в периодический (колебательный) процесс. □

#### 18.4. Логарифмический декремент колебаний. Незатухающие колебания.

Включение цепи на постоянное напряжение

График затухающих колебаний, соответствующий функции (18.14), показан на рис. 18.9. Затухание колебаний характеризуется отношением двух соседних амплитуд одного знака. Чтобы вычислить амплитуды, примем в формуле (18.14)  $\sin(\omega' t + \psi) = 1$ , тогда  $\sin(\omega' t + \psi + 2\pi) = 1$ , так что отношение амплитуд

$$\frac{U'_0 e^{-\delta t}}{U'_0 e^{-\delta(t+T')}} = e^{\delta T'},$$

где  $T' = 2\pi / \omega'$  — период затухающих колебаний (из формулы  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ ).

Натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд одного знака, равный  $\delta T'$ , называют *логарифмическим декрементом колебания*.

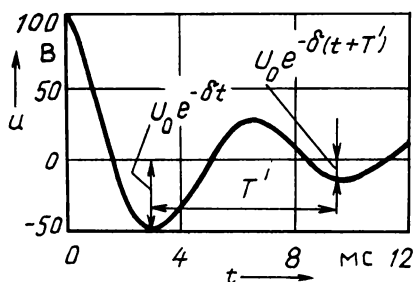


Рис. 18.9

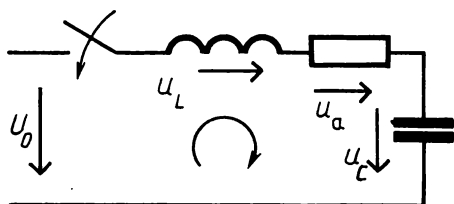


Рис. 18.10

Пусть логарифмический декремент колебания  $\delta T' = 1$ . Это значит, что отношение двух соседних амплитуд одного знака равно  $e^1 = 2,72$ . Кривая, подобно экспоненте, затухает за 3–5 периодов. В контуре с высокой добротностью колебания затухают медленно, соседние амплитуды почти равны, их отношение близко к единице, а  $\delta T' \approx 0$ . Для идеального случая, при  $R = 0$ , коэффициент затухания  $\delta = R/(2L) = 0$ , частота затухающих колебаний  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0$ , угол  $\psi = \arctg \frac{\omega'}{\delta} = \pi/2$ . Подставим эти значения в формулы (18.14), (18.22), (18.23):

$$u_C(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2); \quad i(t) = -I_0 \sin \omega_0 t; \quad u_L(t) = U_0 \sin(\omega_0 t - \pi/2).$$

Это уравнения синусоидальных незатухающих колебаний. Последние возникают в контуре без потерь (корни характеристического уравнения  $p_{1,2} = \pm j\omega_0$ ).

На рис. 18.10 приведена схема включения  $RLC$ -цепи. Для контура, образовавшегося после коммутации, уравнение Кирхгофа  $u_L + u_R + u_C = U_0$ . Подставив  $u_L = L di/dt$ ,  $i = C du_C/dt$ , превратим его в дифференциальное:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0. \quad (18.24)$$

Это неоднородное уравнение второго порядка. Его решение состоит из принужденной и свободной составляющих:

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

Частное решение уравнения (18.24) при  $t \rightarrow \infty$  — принужденная составляющая  $u_{C\text{пр}} = U_0$ . Свободная составляющая (форма уравнения и вид кривой) зависит от соотношения  $\delta$  и  $\omega_0$ , т.е. от корней характеристического уравнения. Так как последние могут быть действительными, комплексными или мнимыми, то их можно расположить на комплексной плоскости. На горизонтальной оси откладывают действительную часть корня, а на вертикальной — мнимую. На рис. 18.11 показаны для всех четырех случаев корни на комплекс-

ной плоскости и рядом — соответствующая им форма волны  $u_C(t)$  при затухании: сильном,  $\delta > \omega_0$ , критическом,  $\delta = \omega_0$ , слабом,  $\delta < \omega_0$ , без затухания,  $\delta = 0$  (см. рис. 18.11, а–г). Чем меньше затухание, тем больше добротность контура  $Q$ .

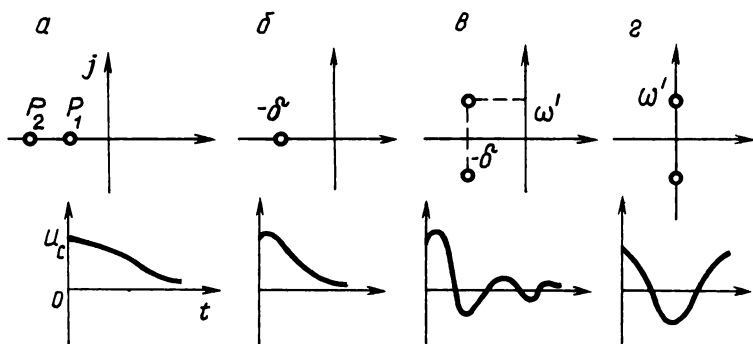


Рис. 18.11

При  $Q < 0,5$  общее решение как сумма принужденной и свободной составляющих

$$u_C(t) = U_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

конденсатор заряжается аperiодически. Если же  $Q > 0,5$  то процесс колебательный:

$$u_C(t) = U_0 + A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi).$$

Подставляя в решения  $u_C(t)$  и  $i(t)$  время  $t = 0$  и приравнявая полученные значения начальным условиям  $u(0) = 0$ ,  $i(0) = 0$ , определяем постоянные интегрирования.

1. Дайте определение логарифмического декремента колебаний. Докажите, что он равен произведению  $\delta T'$ . При каких условиях колебания не затухают? Чему равен в этом случае  $\delta T'$ ?

2. Запишите функции  $u_C(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $i(t)$  незатухающих колебаний, покажите их векторами на комплексной плоскости. В каком соотношении находятся векторы  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$  относительно вектора  $\underline{I}$  (опережает, отстает)?

3. Запишите уравнение Кирхгофа для  $RLC$ -цепи, включаемой на постоянное напряжение, и получите из него дифференциальное уравнение. Чему равна принужденная составляющая? Запишите функцию  $u_C(t)$  при действительных и комплексных корнях.

3.1. Для схемы, приведенной на рис. 18.1,  $U_0 = 100$  В,  $L = 25$  мГн,  $C = 40$  мкФ,  $R = 10$  Ом. Постройте графики функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

♦ Вычислим частоты затухания, резонансную и затухающих колебаний:

$$\delta = R/(2L) = 200 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1000 \text{ с}^{-1}; \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 980 \text{ с}^{-1}.$$

Так как  $\delta < \omega_0$ , то корни мнимые,  $p_{1,2} = (-200 \pm j980) \text{ с}^{-1}$ . По формуле (18.18)

$$\psi = \arctg(\omega'/\delta) = \arctg(980/200) = 78,5^\circ$$

или в радианах  $\psi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 78,5 = 1,37$ .

Из формулы (18.19) находим  $U'_0 = U_0 / \sin \psi = 102 \text{ В}$ . Подставляем  $\psi$  и  $U'_0$  в выражение (18.14):

$$u_C(t) = 102 \exp\left(-\frac{t}{0,005}\right) \sin(980t + 1,37) \text{ В}.$$

Здесь частота  $\delta$  заменена постоянной времени  $\tau = 1/\delta = 0,005 \text{ с}$ .

Функцию  $u_C(t)$  рассчитаем на микрокалькуляторе МК-54. Заносим в регистры памяти значения величин  $U'_0, \omega', \Delta t, \psi, \tau, t = 0$ :

102 x  $\rightarrow$  П 1 980 x  $\rightarrow$  П 2 0,001 x  $\rightarrow$  П 3 1,37 x  $\rightarrow$  П 4

0,005 x  $\rightarrow$  П 5 0 x  $\rightarrow$  П 0

Программа:

. F ПРГ П  $\rightarrow$  x 2 П  $\rightarrow$  x 0  $\times$  П  $\rightarrow$  x 4 + F sin П  $\rightarrow$  x 0

П  $\rightarrow$  x 5 : / - / Fe<sup>x</sup>  $\times$  П  $\rightarrow$  x 1  $\times$  C/П П  $\rightarrow$  x 0 П  $\rightarrow$  x 3 + x  $\rightarrow$  П

0 C/П БП 00

Результат:

t, мс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$u_C$ , В	100	59	-12	-51	-38	-5	25	23	4,4	-12	-13	-46	5

График функции  $u_C(t)$  показан на рис. 18.12. Период затухающих колебаний  $T' = 2\pi/\omega' = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Моменты времени, в которых функция равна нулю, смещены на полпериода, т.е. на 3,2 мс.

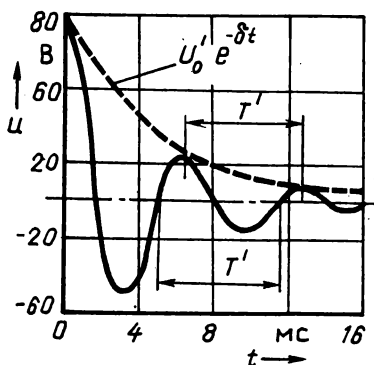


Рис. 18.12

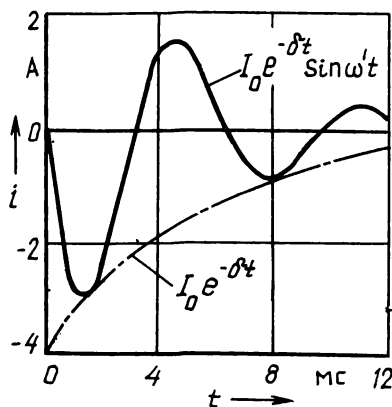


Рис. 18.13

Если построить две экспоненты  $\pm U'_0 e^{-t/\tau}$ , то график функции  $u_C(t)$  будет касаться экспонент в определенные моменты времени (см. рис. 18.12). Точки касания одной из экспонент смещены на  $T'$ .

Чтобы записать функцию  $i(t)$ , вычислим характеристическое сопротивление и ток:

$$\rho = 1/(\omega_0 C) = 25 \text{ Ом}; I_0 = U_0' / \rho = 4,1 \text{ А.}$$

Согласно формуле (15.22),

$$i(t) = -4,1 e^{-t/0,005} \sin 980t.$$

Рассчитываем ток по той же программе и строим график (рис. 18.13). □

#### 18.5. Включение $RL$ -цепи со слабым затуханием на гармоническое напряжение. Биения

Пусть показанный на рис. 18.10 контур с добротностью  $Q > 0,5$  подключен к источнику синусоидального напряжения с частотой  $\omega$ :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

В установившемся режиме ток отстает от напряжения на угол  $\varphi$ , а  $u_C$  отстает от тока на  $\pi/2$ , так что начальная фаза  $\psi_C = \psi_u - \varphi - \pi/2$ . Установившееся напряжение

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C)$$

представляет собой *принужденную составляющую*, т.е. предельное значение  $u_C$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Общее решение как сумма принужденной и свободной, заданной формулой (18.14), составляющих

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C) + A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi). \quad (18.25)$$

Здесь  $A$  и  $\psi$  — произвольные постоянные. Чтобы определить их, нужно составить еще одно уравнение. Запишем:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C\omega U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_C) + CA e^{-\delta t} (-\delta \sin(\omega' t + \psi) + \omega' \cos(\omega' t + \psi)).$$

Подставляем в обе функции  $t = 0$  и приравниваем полученные значения начальным условиям:

$$U_{Cm} \sin \psi_C + A \sin \psi = 0; \quad (18.26)$$

$$\omega U_{Cm} \cos \psi_C + A(-\delta \sin \psi + \omega' \cos \psi) = 0. \quad (18.27)$$

Из уравнения (18.26)

$$A = -U_{Cm} \frac{\sin \psi_C}{\sin \psi}.$$

Подставляем полученное выражение в уравнение (18.27) и решаем его относительно  $\psi$ :

$$\psi = \arctg \frac{\omega'}{\omega / \tg \psi_C + \delta}. \quad (18.28)$$

С учетом  $A$  общее решение уравнения (18.25) имеет вид

$$u_C(t) = U_{Cm}(\sin(\omega t + \psi_C) - \frac{\sin \psi_C}{\sin \psi} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi)). \quad (18.29)$$

Заносим в память микрокалькулятора исходные данные:

$\omega \times \rightarrow \Pi 1, \omega' \times \rightarrow \Pi 2, \delta \times \rightarrow \Pi 3, \psi_C \times \rightarrow \Pi 4, \psi \times \rightarrow \Pi 5,$

$U_{Cm} \times \rightarrow \Pi 6, \text{ шаг } \Delta t \times \rightarrow \Pi 7, t = 0 \times \rightarrow \Pi 0,$

Программа:

F ПРГ  $\Pi \rightarrow x 2 \Pi \rightarrow x 1 \Pi \rightarrow x 4$  F tg :  $\Pi \rightarrow x 3 +$

: F tg<sup>-1</sup>  $x \rightarrow \Pi 5$  F sin  $\Pi \rightarrow x 4$  F sin  $\Leftrightarrow : x \rightarrow \Pi 8$

$\Pi \rightarrow x 2 \Pi \rightarrow x 0 \times \Pi \rightarrow x 5 +$  F sin  $\Pi \rightarrow x 3 \Pi \rightarrow x 0 \times$  F e<sup>x</sup>  $\times$

$\Pi \rightarrow x 8 \times \Pi \rightarrow x 1 \Pi \rightarrow x 0 \times \Pi \rightarrow x 4 +$  F sin  $\Leftrightarrow \Pi \rightarrow x 6 \times$

C/ $\Pi \Pi \rightarrow x 0 \Pi \rightarrow x 7 + x \rightarrow \Pi 0$  C/ $\Pi$  БП 16

Пусть  $\omega = 942 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega' = 980 \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta = -50 \text{ с}^{-1}$ ,  $\psi_C = \pi/4$ ,  $U_{Cm} = 2 \text{ В}$ .  
График функции (18.29) при этих значениях показан на рис. 18.14. Напряжение начинается с нуля, амплитуда его увеличивается от периода к периоду. Пятый период близок к установившемуся синусоидальному напряжению.

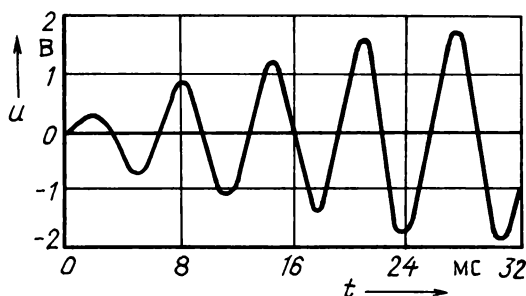


Рис. 18.14

Особо выделим случай для контуров с высокой добротностью. У них  $\delta \ll \omega_0$ , частота затухающих колебаний  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  равна резонансной  $\omega_0$  (уже при  $Q \geq 3,5$  погрешность такого допущения менее 1%). Если частота входного напряжения  $\omega$  близка к  $\omega_0$ , то  $\psi = \psi_C$  (см. формулу (18.28)) и переходное напряжение (см. формулу (18.29)) превращается в разность двух синусоид с одинаковыми амплитудами:

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C) - U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \psi_C). \quad (18.30)$$

Программа:

F ПРГ  $\Pi \rightarrow x 1 \Pi \rightarrow x 0 \times$  F sin  $\Pi \rightarrow x 2 \Pi \rightarrow x 0 \times$

$$\times F \sin - \Pi \rightarrow x \quad 4 \times C/\Pi \quad \Pi \rightarrow x \quad 3 \quad \Pi \rightarrow x \quad 0 + x \rightarrow \Pi \quad 0$$

С/П БП 00

Заносим:  $\omega \quad x \rightarrow \Pi \quad 1 \quad \omega_0 \quad x \rightarrow \Pi \quad 2 \quad \Delta t = 0,001 \quad x \rightarrow \Pi \quad 3, \quad U_{Cm} \quad x \rightarrow \Pi \quad 4,$   
 $t = 0 \quad x \rightarrow \Pi \quad 0.$

Пусть  $U_{Cm} = 10 \text{ В}, \psi_C = 0, \omega = 1256 \text{ с}^{-1}, \omega_0 = 942 \text{ с}^{-1}$  (соответственно 200 и 150 Гц). Результаты расчета приведены на рис. 18.15.

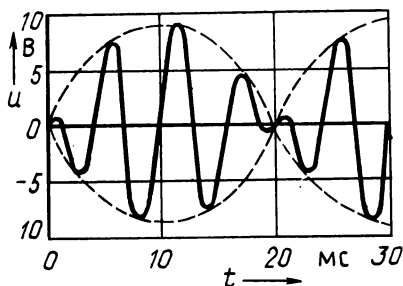


Рис. 18.15

Амплитуды увеличиваются и затем уменьшаются: образуются биения. Период биений 20 мс, т.е. их частота  $f_b = 1/0,02 = 50 \text{ Гц}$ ; она равна разности частот питающей  $f$  и резонансной  $f_0$ :  $(200 - 150) \text{ Гц}$ , в общем случае  $f_b = f - f_0$ . Частота колебаний равна средней частоте:

$$f_{\text{общ}} = (f + f_0)/2 = 175 \text{ Гц}.$$

Образование биений поясним с помощью вращающихся векторов (рис. 18.16, а). Пусть один из них, например  $U_{Cm}$  (помеченный точкой), соответствует первому слагаемому в выражении (18.30) и вращается с угловой частотой  $\omega$ . Вектор  $-U_{Cm}$  соответствует второму слагаемому, он вращается вдвое медленнее. При  $t = 0$  оба вектора находятся в противофазе, сумма их равна нулю. За некоторое время  $t$  один вектор повернулся на  $90^\circ$ , а второй — только на  $45^\circ$  (рис. 18.16, б–з). Длина результирующего вектора увеличивается от позиции к позиции и достигает максимума, когда составляющие совпадают по направлению (рис. 18.16, д).

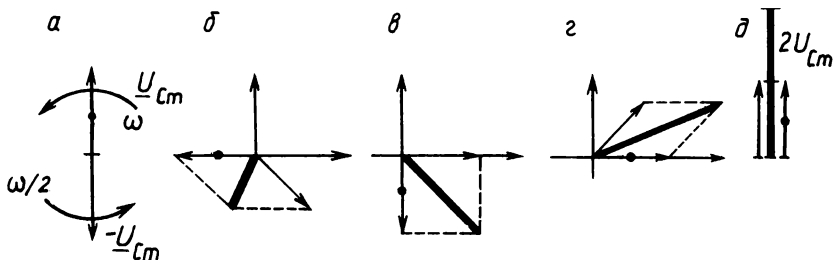


Рис. 18.16

Расположим результирующие векторы для различных моментов времени на одном рисунке и соединим их концы плавной кривой (рис. 18.17). Получилась спираль. Наибольшая амплитуда равна  $2U_{Cm}$ , затем она уменьшается до нуля. С учетом коэффициента затухания  $\delta$ , отношения  $\omega/\omega_0$  и угла  $\psi$  амплитуда колебаний уменьшается не до нуля, а до определенного значения. Биения постепенно затухают, переходный режим сменяется установившимся.

1. Как найти постоянные интегрирования  $A$  и  $\psi$  при включении  $RLC$ -цепи на синусоидальное напряжение? Чему они равны?

2. В каких случаях и как образуются биения? Чему равна частота биений?

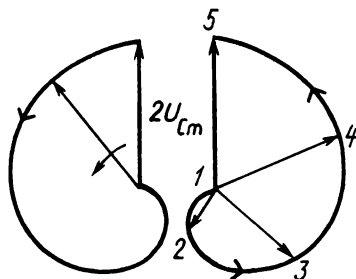


Рис. 18.17

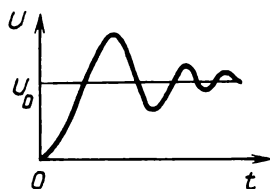
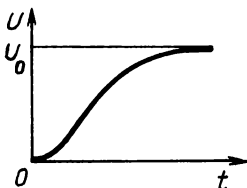


Рис. 18.18

4.1. По рис. 18.12 определите логарифмический декремент колебаний и сравните его с расчетным, если  $\delta = 200 \text{ с}^{-1}$ ,  $T' = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Во сколько раз различаются амплитуды?

◇ По графику измеряем две соседние (отрицательные) амплитуды: 51 и 14 В. Натуральный логарифм  $\ln(51/14) = 1,28$ . Находим  $\delta T' = 200 \cdot 6,4 \cdot 10^{-3} = 1,28$ . За один период амплитуда уменьшилась в  $e^{1,28} = 3,6$  раза (или  $51/14 = 3,6$ ). □

4.2. Во сколько раз уменьшится амплитуда свободного колебания за один период, если  $\delta = 400 \text{ с}^{-1}$ , а  $T' = 250 \text{ мкс}$ ?

◇ Логарифмический декремент  $\delta T' = 0,1$ ,  $e^{0,1} = 1,1$  раза. □

4.3. Покажите на графике, как будет изменяться  $u_C(t)$  при включении колебательного контура на постоянное напряжение, если корни характеристического уравнения: а) действительные и разные; б) мнимые [рис. 18.18].

## 19. Расчет переходных процессов операторным методом

### 19.1. Основные понятия и теоремы

В основе операторного метода лежит прямое интегральное преобразование Лапласа. Пусть известна функция вещественной переменной, например  $i(t)$ . *Изображением по Лапласу* называют функцию, которая получается при вычислении интеграла

$$\int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt, \quad (19.1)$$

где  $p = \sigma + j\omega$  — комплексное число, оператор; предполагается, что его действительная часть  $\sigma > 0$ .

Подынтегральную функцию  $i(t)$  называют *оригиналом*, а интеграл (19.1) — *изображением*  $I(p)$ . Между оригиналом и изображением нет равенства, есть только взаимное соответствие:  $i(t) \rightleftharpoons I(p)$ .

Из курса математики известны основные свойства прямого преобразования Лапласа.

1. Каждому оригиналу соответствует вполне определенное изображение, и наоборот (*единственность*).

† 2. Изображение суммы функций равно сумме изображений каждой из функций в отдельности (*линейность*):

$$i_1(t) + i_2(t) \doteq I_1(p) + I_2(p).$$

3. При умножении оригинала на число изображение умножается на то же число (*пропорциональность*):

$$Ri(t) \doteq RI(p).$$

Из теорем операторного исчисления для решения задач наиболее часто используется *теорема запаздывания*: функции-оригиналу, сдвинутой вправо вдоль оси времени на  $t_1$ , соответствует ее изображение, умноженное на  $e^{-pt_1}$ :

$$i(t - t_1) \doteq I(p) e^{-pt_1}.$$

Изображения функций находят, вычисляя интеграл (19.1). Так, постоянному напряжению  $U_0$  соответствует

$$\int_0^{\infty} U_0 e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} U_0 e^{-pt} \Big|_0^{\infty}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  предел функции  $e^{-pt} = 1/e^{pt}$  равен нулю; при  $t = 0$   $e^{-pt} = 1$ :

$$U_0 \doteq U_0 / p.$$

Чтобы получить изображение постоянной, надо разделить ее на  $p$ .

Экспоненциальной функции  $e^{-at}$  соответствует изображение

$$\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt.$$

Складываем показатели степени, находим интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{-(a+p)} e^{-(a+p)t} \Big|_0^{\infty}.$$

При  $t = \infty$  получаем нуль, при  $t = 0$  — единицу. Окончательно имеем

$$e^{-at} \doteq \frac{1}{p + a}.$$

Зная изображения постоянной и экспоненциальной функций, найдем изображение ранее встречавшейся функции:

$$1 - e^{-at} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p + a} = \frac{a}{p(p + a)}.$$

Аналогичным образом находят изображение и других, более сложных, функций. Пары оригинал — изображение сводят в таблицы (см. справочники по операционному исчислению или учебники по ТЛЭЦ).

На простейших примерах было показано, как находить изображение аналитически. При решении задач можно пользоваться готовыми таблицами соответствия. Переход от изображения к оригиналу с помощью таблиц — одно из преимуществ операторного метода.

1. Запишите формулу прямого преобразования Лапласа; перечислите его основные свойства.

2. Как находят изображения функций? Докажите, что  $e^{at} \stackrel{*}{=} 1/(p-a)$ .

## 19.2. Изображение индуктивного и емкостного напряжений

Используем известные из курса математики преобразования изображений при дифференцировании и интегрировании оригиналов. Чтобы записать изображение производной, надо изображение функции умножить на  $p$  и вычесть значение функции при  $t = 0$ :

$$\frac{di}{dt} = pI(p) - i(0).$$

В соответствии со свойством пропорциональности

$$u_L = L \frac{di}{dt} \stackrel{*}{=} pLI(p) - Li(0). \quad (19,2)$$

Определенному интегралу соответствует изображение подынтегральной функции, деленное на  $p$ .

$$\int_0^t i(t) dt \stackrel{*}{=} \frac{I(p)}{p}.$$

Емкостное напряжение из формулы  $i = C \frac{dU_C}{dt}$  выражается с помощью неопределенного интеграла:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Здесь не учитывается, был ли конденсатор заряжен до начала переходного процесса. Если в момент коммутации конденсатор имеет начальное напряжение, то учесть это обстоятельство позволяет применение определенного интеграла с бесконечным нижним  $(-\infty)$  и переменным верхним  $(t)$  пределами:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

Первое слагаемое правой части определяет начальное значение напряжения

$u_C(0)$  и является величиной постоянной, второе – определенный интеграл. Оригиналу  $u_C(t)$  соответствует изображение

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I(p). \quad (19.3)$$

1. Найдите изображения производной и определенного интеграла  $i(t)$ , считая заданным изображение  $I(p)$ .

2. Найдите изображения  $U_L(p)$  и  $U_C(p)$ . Что в них изменится при нулевых начальных условиях?

1.1. Найдите изображение единичной функции  $1(t)$ .

◇ Используем формулу (19.1):

$$\int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty}.$$

Подставляя пределы, находим  $1(t) \doteq 1/p$ . □

1.2. Найдите изображение постоянного напряжения  $U_0$ , включаемого в момент времени  $t_1$ .

◇ Постоянное напряжение, включаемое в момент  $t_1$  (рис. 19.1), можно записать через единичную функцию:  $U_0 \cdot 1(t - t_1)$ . Используя задачу 1.1 и теорему запаздывания, находим

$$U_0(t - t_1) \doteq \frac{U_0}{p} e^{-pt_1}. \quad \square$$

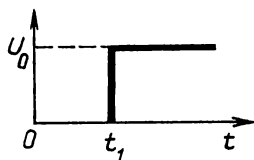


Рис. 19.1

1.3. Найдите изображение импульсной функции  $\delta(t)$ .

◇ По формуле (19.1) находим

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt.$$

Подставим  $t = 0$ :

$$\delta(t) \doteq e^{-p \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t) dt.$$

Так как интеграл от  $\delta(t)$  в интервале существования этой функции равен единице, то  $\delta(t) \doteq 1$ .

Импульсной функции, существующей в момент  $t_1$ ,

$$\delta(t - t_1) \doteq e^{-pt_1}$$

(см. теорему запаздывания). □

### 19.3. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

#### Операторная схема замещения

Последовательную  $RLC$ -цепь, подключенную к источнику  $e_1(t)$ , переключим на другой источник  $e(t)$  (рис. 19.2). Для послекоммутационной схемы составим уравнение Кирхгофа:  $u_a + u_L + u_C = e(t)$ . Заменяем функции их изображениями, считая известными  $I(p)$  и  $E(p)$ . С учетом формул (19.2) и (19.3) имеем

$$\underbrace{RI(p)}_{u_a} + \underbrace{pLI(p) - Li(0)}_{u_L} + \underbrace{\frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I(p)}_{u_C} = E(p).$$

Величины, содержащие независимые начальные условия  $i(0)$  и  $u_C(0)$ , перенесем в правую часть,  $I(p)$  вынесем за скобки:

$$I(p) \left( R + pL + \frac{1}{pC} \right) = E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \quad (19.4)$$

Выражение в скобках называют *операторным сопротивлением* и обозначают  $Z(p)$ . По форме оно напоминает комплексное:  $\underline{Z} = R + j\omega L + 1/(j\omega C)$ , различие только в том, что вместо  $j\omega$  записан оператор  $p$ .

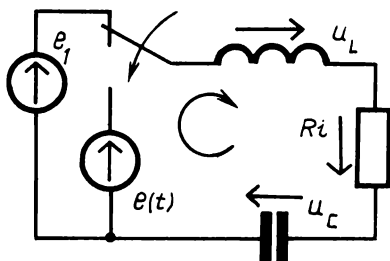


Рис. 19.2

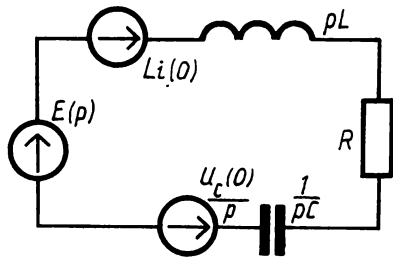


Рис. 19.3

Из уравнения (19.4) находим изображение тока:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{Z(p)}. \quad (19.5)$$

Это закон Ома в операторной форме.

В числителе выражения (19.5), кроме операторной ЭДС  $E(p)$ , стоят изображения двух внутренних ЭДС:  $Li(0)$  и  $u_C(0)/p$ . Последние учитывают начальные условия — ток в индуктивности и напряжение на емкости; изображение  $u_C(0)/p$  записано с минусом. Для схемы с нулевыми начальными условиями

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}.$$

Составим схему, которая будет удовлетворять закону Ома в операторной форме — *операторную схему замещения* (рис. 19.3). Индуктивное сопротивление

ние  $j\omega L$  заменим операторным сопротивлением  $pL$  и внутренней ЭДС  $Li(0)$ . Активное сопротивление оставим без изменения: в преобразовании Лапласа оно является постоянным коэффициентом. Емкость покажем в виде операторного сопротивления  $1/(pC)$  и внутренней ЭДС  $u_C(0)/p$ . Зададим стрелкой положительное направление операторного тока. Оно совпадает с направлением внутренних ЭДС. Для составленной таким образом схемы уравнение второго закона Кирхгофа аналогично уравнению (19.4).

Для узла, в котором сходится  $n$  ветвей, уравнение Кирхгофа имеет вид

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0.$$

Если известны изображения токов  $I_k(p)$ , то, используя свойство линейности, записываем:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0,$$

т.е. алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю. Для контура, содержащего  $n$  ветвей,

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I(p) = \sum_{k=1}^n (E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p}),$$

где  $Z_k(p)$  — операторные сопротивления ветвей.

В контуре алгебраическая сумма изображений напряжений равна алгебраической сумме изображений ЭДС.

Мы записали законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Следовательно, рассчитывая переходные процессы с помощью преобразования Лапласа, можно использовать все методы, основанные на этих законах: контурных токов, узловых напряжений, эквивалентного генератора, наложения и др.

1. Запишите законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.
2. Как составляется операторная схема замещения?
3. Какое направление имеют внутренние ЭДС относительно тока?

2.1. Цепь (рис. 19.4) включают на постоянное напряжение. Найдите выходное напряжение  $u_2(t)$ .

♦ На рисунке показана операторная схема замещения. Изображение выходного напряжения

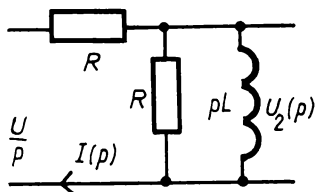


Рис. 19.4

$$u_2(p) = I(p) \frac{RpL}{R + pL}.$$

Так как изображение тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + RpL/(R + pL)},$$

то

$$U_2(p) = \frac{U}{p} \frac{RpL}{R^2 + 2RLp} = \frac{URL}{2RL} \frac{1}{R/(2L) + p}.$$

Получили табличное изображение  $\frac{1}{\alpha + p} \stackrel{\cdot}{=} e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha = R / (2L)$ .

Выходное напряжение  $u_2(t) = \frac{U}{2} e^{-\alpha t}$  представляет собой экспоненциально затухающий импульс. □

#### 19.4. Переход от изображения к оригиналу

Пусть составлена операторная схема замещения; одним из методов найдено изображение переходного напряжения  $U(p)$  или тока  $I(p)$ . Следующий этап в решении задачи — нахождение оригинала. Иными словами, в формуле прямого преобразования Лапласа

$$\int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt = I(p)$$

известна правая часть — функция  $I(p)$ , а надо найти  $i(t)$ . Аналитическое решение этой задачи сложное. На практике используют таблицы соответствия или теорему разложения.

Если изображение отличается от табличного, его надо привести к табличному виду, т.е. алгебраически преобразовать в сумму более простых изображений, которые есть в таблицах. В некоторых случаях быстрее, чем по таблицам, оригинал находится по теореме разложения. Замечено, что изображение представляет собой правильную рациональную дробь. Например,

$$I(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где  $a_k, b_k$  — числа.

Многочлен  $B(p)$  в знаменателе дроби имеет более высокий порядок, чем  $A(p)$  в ее числителе. Такую дробь можно записать как сумму простых дробей:

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2}, \quad (19.6)$$

где  $A_1, A_2$  — числа, пока неизвестные;  $p_1, p_2$  — корни уравнения  $B(p) = 0$ .

Стоящие в правой части равенства (19.6) функции  $1/(p - p_1)$ ,  $1/(p - p_2)$  — табличные изображения. Им соответствуют оригиналы  $e^{p_1 t}$ ,  $e^{p_2 t}$ . Чтобы определить коэффициенты  $A_1, A_2$ , умножим обе части равенства (19.6) на  $p - p_1$ :

$$(p - p_1) \frac{A(p)}{B(p)} = A_1 + A_2 \frac{p - p_1}{p - p_2}.$$

Пусть  $p \rightarrow p_1$ . Тогда справа останется только  $A_1$ . Но слева — неопреде-

ленность вида  $0/0$ , поскольку  $p_1$  — корень  $B(p) = 0$ . Раскрываем неопределенность по правилу Лопиталя:

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{\frac{d}{dp} ((p - p_1) A(p))}{\frac{d}{dp} B(p)} = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{1 \cdot A(p) + A'(p)(p - p_1)}{B'(p)}.$$

Вместо  $p$  подставляем  $p_1$ . Остается

$$A_1 = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}.$$

Чтобы найти  $A_1$ , надо: подставить в числитель  $p_1$  вместо  $p$  и вычислить его; от знаменателя взять производную по  $p$  и вычислить при  $p=p_1$ ; разделить оба числа.

Если умножить обе части равенства (19.6) на  $p - p_2$  и повторить те же рассуждения, что и выше, найдем

$$A_2 = \frac{A(p_2)}{B'(p_2)}.$$

В общем случае, если знаменатель  $B(p)$  имеет  $n$  корней, для корня  $p_k$

$$A_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}. \quad (19.7)$$

Теперь, когда вычислены коэффициенты  $A_k$ , от изображения в виде суммы простых дробей перейдем к оригиналу. Каждому слагаемому

$$A_k \frac{1}{p - p_k} \doteq A_k e^{p_k t},$$

а всему изображению

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} \doteq \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}.$$

Зачастую знаменатель имеет нулевой корень, т.е. принимает вид  $pB(p)$ . Производная от знаменателя в этом случае  $B(p) + pB'(p)$ .

Вычисляем коэффициенты по формуле (19.7). При  $p = 0$   $A_0 = \frac{A(0)}{B(0)}$ ,

так как  $pB'(p) \Big|_{p=0} = 0$ ; при  $p = p_1$   $A_1 = \frac{A(p_1)}{p_1 B'(p_1)}$ , поскольку  $B(p_1) = 0$ , и так для всех корней. Функция-оригинал будет иметь постоянную составляющую  $A_0$ :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} . \quad (19.8)$$

Экспоненты при  $A_0$  нет, так как при  $p_0 = 0$

$$\frac{A_0}{p - p_0} = \frac{A_0}{p} \doteq A_0 .$$

При  $t \rightarrow \infty$  множитель  $e^{p_k t} \rightarrow 0$  (корень  $p_k$  отрицательный), и в равенстве (19.8) остается только  $A_0$  — значение функции в установившемся режиме.

1. Каким способом можно найти функцию-оригинал, если известно ее изображение?

2. Выведите формулу для вычисления коэффициентов при экспонентах.

3. Как выглядит оригинал, если в знаменателе изображения есть один нулевой корень? Почему  $A_0 = f(\infty)$ ?

3.1. Для цепи (рис. 19.5) с параметрами  $E = 120$  В,  $R_1 = 80$  Ом,  $R_2 = 60$  Ом,  $C = 50 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $L = 40 \cdot 10^{-3}$  Гн определите изображение напряжения  $U_C(p)$ .

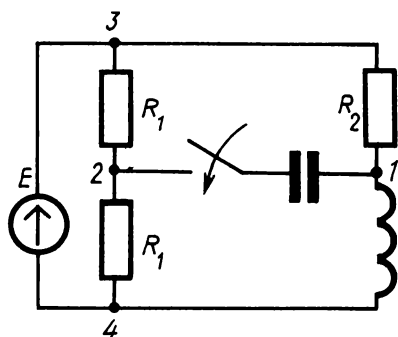


Рис. 19.5

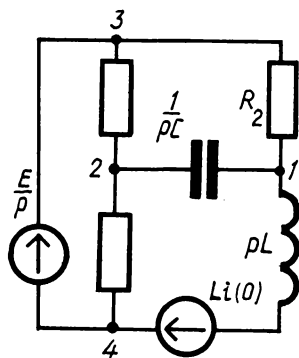


Рис. 19.6

◇ Составим операторную схему замещения (рис. 19.6). Так как емкость отключена ( $u_C(0) = 0$ ), то внутреннюю ЭДС —  $u_C(0)/p$  на схеме не показываем. Схема имеет три контура. Если использовать метод контурных токов, придется составлять и решать три уравнения. При решении методом узловых напряжений достаточно двух уравнений (узел 4 примем за базу, напряжение  $U_3(p) = E/p$ , неизвестные  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$ ). Запишем уравнения в общем виде (будем помнить, что здесь  $U$ ,  $J$  — изображения,  $Y$  — операторная проводимость):

$$\begin{aligned} Y_{11}U_1 - Y_{12}U_2 - Y_{13}U_3 &= J_{11} ; \\ -Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 - Y_{23}U_3 &= J_{22} . \end{aligned}$$

Находим узловые собственные и взаимные проводимости:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= 1/R_2 + pC + 1/(pL) ; \quad Y_{22} = pC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} ; \\ Y_{12} &= pC ; \quad Y_{13} = 1/R_2 ; \quad Y_{23} = 1/R_1 . \end{aligned}$$

$$\text{Узловые токи: } J_{11} = \frac{-Li(0)}{pL} = \frac{-i(0)}{p}; \quad J_{22} = 0.$$

Изображение  $U_3 = E/p$  известно. Перенесем слагаемые с  $U_3$  в правую часть и учтем, что  $i(0) = E/R_2$ :

$$U_3 Y_{13} - \frac{i(0)}{p} = \frac{E}{pR_2} - \frac{E}{pR_2} = 0.$$

Имеем:

$$Y_{11}U_1 - Y_{12}U_2 = 0; \quad -Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = Y_{23}U_3.$$

Решаем полученную систему. Определитель

$$\Delta = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2.$$

Изображения напряжений узлов:

$$U_1 = \frac{Y_{23}Y_{12}}{\Delta} U_3; \quad U_2 = \frac{Y_{11}Y_{23}}{\Delta} U_3.$$

Изображение напряжения на емкости как разность  $U_2 - U_1$

$$U_C(p) = \frac{Y_{23}(Y_{11} - Y_{12})}{\Delta} U_3.$$

Подставим сюда выражения для узловых проводимостей:

$$U_C(p) = \frac{E(1/R_2 + 1/(pL))}{pR_1((1/R_2 + pC + 1/(pL))(pC + 2/R_1) - p^2C^2)}.$$

Приведем числитель и знаменатель дроби к виду многочлена относительно  $p$ . Для этого умножим дробь на  $p/p$ , раскроем скобки, сгруппируем слагаемые:

$$U_C(p) = \frac{\frac{E}{a} \frac{1}{R_2 C} p + \frac{E}{a} \frac{1}{LC}}{p(p^2 + \frac{1}{a}(\frac{R_1}{L} + 2\frac{1}{R_2 C})p + \frac{2}{aLC})},$$

где  $a = R_1/R_2 + 2$ . Дополнительно обозначим в знаменателе

$$\frac{1}{a}(\frac{R_1}{L} + 2\frac{1}{R_2 C}) = 2\alpha; \quad \frac{2}{aLC} = \omega_0^2.$$

Тогда

$$U_C(p) = \frac{\frac{E}{a} \frac{1}{R_2 C} p + \frac{E}{a} \frac{1}{LC}}{p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)}.$$

Вычислим:  $a = 3,33$ ,  $\alpha = 400 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 0,3 \cdot 10^6 \text{ (с}^{-1}\text{)}^2$ ,  $\frac{E}{a} \frac{1}{R_2 C} = 11\,880 \text{ В/с}$ ,  
 $\frac{E}{a} \frac{1}{LC} = 18 \cdot 10^6 \text{ В/с}^2$ . Подставим численные значения:

$$U_C(p) = \frac{11\,880p + 18 \cdot 10^6}{p(p^2 + 2 \cdot 400p + 0,3 \cdot 10^6)} \quad (19.9)$$

Так выглядит изображение  $U_C(p)$  в окончательном виде.  $\square$

### 19.5. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Дифференцирующими и интегрирующими называют цепи, которые имеют на выходе напряжение, пропорциональное производной или интегралу от входного напряжения. Примерами таких цепей являются последовательно соеди-

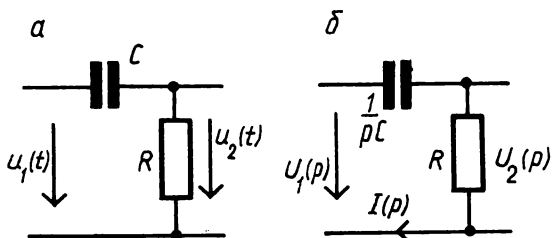


Рис. 19.7

ненные конденсатор и резистор (рис. 19.7, а). Для операторной схемы замещения (рис. 19.7, б) запишем уравнение Кирхгофа:

$$\frac{1}{pC} I(p) + RI(p) = U_1(p). \quad (19.10)$$

Параметры цепи  $R$  и  $C$  выбирают так, чтобы вторым слагаемым (падением напряжения на резисторе) можно было пренебречь. Тогда изображение тока

$$I(p) \approx \frac{U_1(p)}{1/(pC)} = pCU_1(p),$$

а изображение выходного, весьма малого напряжения  $u_2$

$$U_2(p) = RI(p).$$

Подставив сюда выражение для  $I(p)$ , получим

$$U_2(p) = RCpU_1(p).$$

Умножению изображения на  $p$  соответствует дифференцирование оригинала (при нулевых начальных условиях):

$$u_2(t) = \tau \frac{du_1}{dt},$$

где  $\tau = RC$  — постоянная времени.

Выходное напряжение  $u_2$  пропорционально производной от входного  $u_1$ . Постоянная времени  $\tau$  должна быть во много раз меньше длительности входного сигнала.

Если конденсатор и резистор поменять местами и изменить соотношение их параметров, получится интегрирующая цепь (рис. 19.8). Здесь  $R$  должно быть столь большим, чтобы можно было пренебречь первым слагаемым в уравнении Кирхгофа (19.10). Тогда изображение тока

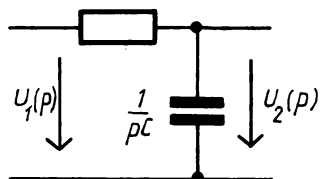


Рис. 19.8

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R},$$

а выходного напряжения

$$U_2(p) = \frac{1}{pC} I(p) = \frac{1}{RC} \frac{U_1(p)}{p}.$$

Так как делению на  $p$  соответствует интегрирование, то этому изображению соответствует оригинал

$$\frac{1}{\tau} \int_0^t u_1(t) dt = u_2(t).$$

В интегрирующей цепи постоянная  $\tau = RC$  должна быть много больше времени интегрирования  $t$ , чтобы  $u_2$  не стало соизмеримым с напряжением  $Ri$  на резисторе.

Выходное напряжение  $u_2$  в обеих схемах мало; чтобы их использовать, нужен усилитель.

Аналогичные по назначению цепи можно составить с катушкой индуктивности. Однако последняя обладает активным сопротивлением и емкостью; точность операции (дифференцирования либо интегрирования) на этом элементе будет значительно ниже.

1. Начертите дифференцирующую и интегрирующую схемы и их операторные схемы замещения.

2. Докажите, что выходное напряжение пропорционально производной или интегралу от  $u_1$ .

3. Какое соотношение должно быть между  $\tau$  и длительностью сигнала в дифференцирующей и интегрирующей цепях?

4.1. Приведите к табличному виду изображение  $U_C(p)$ , задаваемое формулой (19.9)

◇ Можно записать:

$$p(p^2 + 2 \cdot 400p + 0.3 \cdot 10^6) = p(p - p_1)(p - p_2),$$

где  $p_1, p_2$  — корни. Делим почленно числитель дроби (19.9) на знаменатель:

$$U_C(p) = \frac{11\,880}{(p - p_1)(p - p_2)} + \frac{18\,10^6}{p(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Получили два табличных изображения. Остается выписать из таблиц соответствующие оригиналы и, группируя слагаемые, привести к компактному виду. Если первая часть задачи является простой, то вторая — довольно сложная. □

4.2. По изображению (19.9) найдите оригинал  $u_C(t)$ .

◇ В изображении

$$U_C(p) = \frac{11\,880p + 18 \cdot 10^6}{p(p^2 + 2 \cdot 400p + 0,3 \cdot 10^6)} \quad (19.11)$$

знаменатель имеет вид  $pB(p)$ . Вычислим корни:

$$p_0 = 0; p_{1,2} = -400 \pm \sqrt{400^2 - 0,3 \cdot 10^6} = -400 \pm j374 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя  $p = 0$  в числитель и многочлен  $B(p)$  уравнения (19.11), находим

$$A_0 = \frac{18 \cdot 10^6}{0,3 \cdot 10^6} = 60 \text{ В}.$$

Производная  $B'(p) = 2p + 2 \cdot 400$ . Подставляем  $p_1$ :

$$A_1 = \frac{A(p_1)}{p_1 B'(p_1)} = \frac{11\,880(-400 + j374)}{(-400 + j374)(2(-400 + j374) + 2 \cdot 400)} = 34e^{j152^\circ}.$$

Так как корни комплексные, то  $A_2$  получается комплексно-сопряженным с  $A_1$ :

$$A_2 = \frac{A(p_2)}{p_2 B'(p_2)} = 34e^{-j152^\circ}$$

Оригинал в общем виде

$$u_C(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Обозначив корни  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$ , подставим значения коэффициентов и корней:

$$60 + 34e^{j152^\circ} e^{(-\delta + j\omega_{\text{св}})t} + 34e^{-j152^\circ} e^{(-\delta - j\omega_{\text{св}})t}$$

Внесем  $e^{-\delta t}$  за скобки, показатели степени при  $e$  сложим:

$$60 + 34e^{-\delta t} (e^{j(\omega_{\text{св}} t + 152^\circ)} + e^{-j(\omega_{\text{св}} t + 152^\circ)}).$$

Вспомнив формулу Эйлера  $(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})/2 = \cos\alpha$ , увидим, что выражение в скобках равно  $2\cos(\omega_{\text{св}} t + 152^\circ)$ . Окончательно имеем

$$u_C(t) = 60 + 68e^{-400t} \cos(374t + 152^\circ).$$

Проверим:

$$t = 0, u_C(0) = 60 + 68 \cos 152^\circ = 60 + 68(-0,883) \approx 0;$$

$$t = \infty, u_C(\infty) = 60 = A_0.$$

Ответ удовлетворяет начальным условиям и установившемуся режиму. Из условия

$\omega_{\text{св}} = 2\pi \frac{1}{T}$  определим период свободных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{374} = \frac{6,28}{374} = 16,8 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Рассчитаем график функции  $u_C(t)$  на микрокалькуляторе. (В тех задачах, где корни  $p_1, p_2$  вещественные, вычисления значительно проще.)  $\square$

## 20. Использование спектрального метода

### 20.1. Ряд Фурье в комплексной форме

В § 17.5 было показано, что напряжение произвольной формы может быть представлено последовательностью единичных (или импульсных) скачков напряжения. Но в качестве элементарной составляющей импульса можно выбрать и третью форму — синусоиду. Она имеет определенные частоту, амплитуду и начальную фазу, на вход цепи поступила давно, так что режим в цепи установившийся. Импульс состоит из суммы синусоид. Задача переходного процесса заменяется расчетом синусоид в установившемся режиме. Такой метод исследования называется *спектральным анализом*. В его основе лежит представление заданного импульса интегралом Фурье. Последний получается из ряда Фурье в комплексной форме.

Несинусоидальное периодическое напряжение (или ток) можно записать рядом Фурье (см. § 16.1):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \quad (20.1)$$

где  $A_0$  — постоянная составляющая;  $k, A_k, \psi_k$  — соответственно порядковый номер гармоники, ее амплитуда и начальная фаза;  $\omega_1$  — частота первой гармоники.

Каждую входящую в ряд синусоиду можно представить вращающимся радиусом-вектором на комплексной плоскости. Так, первая гармоника

$$A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) = \text{Im } \underline{A}_1 e^{j\omega_1 t}, \quad (20.2)$$

где  $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$  — комплексная амплитуда;  $e^{j\omega_1 t}$  — оператор, указывающий на вращение вектора в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки;  $\text{Im}$  — обозначение мнимой части, напоминая, что надо рассматривать только проекцию вращающегося вектора на вертикальную ось.

Представим комплексную амплитуду — вектор  $\underline{A}_1$  — в виде суммы двух

векторов  $\frac{1}{2} A_1 e^{j\psi_1}$  и  $-\frac{1}{2} A_1 e^{-j\psi_1}$  (рис. 20.1). Второй вектор комплексно сопряжен с первым ( $-j\psi_1$ ) и повернут на  $180^\circ$  ( $-\frac{1}{2} A_1$ ). Обозначим второй вектор  $\frac{1}{2} \underline{A}_{-1}$ . Длина каждого вектора равна половине ампли-

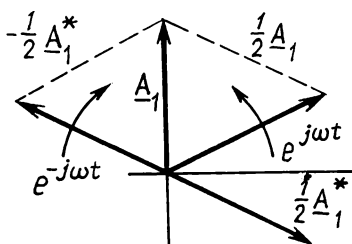


Рис. 20.1

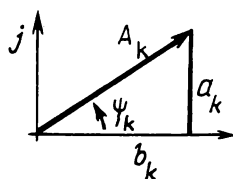


Рис. 20.2

туды, и вращаются они в противоположные стороны (первый против, а второй по часовой стрелке), в результате чего в момент времени  $t$  получаем векторы:

$$\frac{1}{2} \underline{A}_1 e^{j\omega_1 t}; \quad \frac{1}{2} \underline{A}_{-1} e^{-j\omega_1 t} \quad (20.3)$$

Сумма этих двух векторов в любой момент времени направлена вдоль мнимой оси. Тогда мнимая часть от комплексной амплитуды  $\underline{A}_1$  — правая часть формулы (20.2) — равна

$$\frac{1}{2j} (\underline{A}_1 e^{j\omega_1 t} + \underline{A}_{-1} e^{-j\omega_1 t}).$$

Считая, что каждая гармоника состоит из таких пар векторов (20.3), запишем ряд Фурье (20.1) в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_1 t} \quad (20.4)$$

Здесь коэффициент  $1/2$  показывает, что каждая гармоника, кроме нулевой, входит под знак суммы дважды; порядковый номер гармоники  $k$  принимает все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , включая и нуль:  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; угловая частота  $k\omega_1$  в зависимости от знака ( $\pm$ ) порядкового номера гармоники будет положительной либо отрицательной. Отрицательная угловая частота указывает на вращение вектора по направлению движения часовой стрелки и позволяет проанализировать предшествующее состояние функции (по оси вращения влево от  $t = 0$ ).

Выведем формулу для комплексной амплитуды. В алгебраической форме (рис. 20.2).

$$\underline{A}_k = b_k + j a_k = j (a_k - j b_k).$$

Амплитуды косинусоидальных  $a_k$  и синусоидальных  $b_k$  гармоник заменим формулами Фурье (16.7), (16.8):

$$j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt \quad (20.5)$$

Используя формулу Эйлера  $\cos \alpha - j \sin \alpha = e^{-j\alpha}$ , приводим формулу (20.5) к виду

$$j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Выражаем период  $T$  через угловую частоту первой гармоники ( $\omega_1 = 2\pi f = 2\pi/T$ ). Окончательно комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники

$$A_k = j \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (20,6)$$

1. Запишите ряд Фурье в комплексной форме; перечислите все входящие в него символы и объясните их назначение.
2. Выведите формулу для комплексной амплитуды  $k$ -й гармоники.

## 20.2. Переход от ряда Фурье к интегралу Фурье

Непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической функции, у которой период  $T$  повторения сигнала стремится к бесконечности. Тогда частота первой гармоники  $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow d\omega$  будет бесконечно малой. Разность между частотами соседних гармоник  $\omega_{k+1} - \omega_k$  равна частоте первой гармоники  $d\omega$ . Получается, что частоты гармоник  $k\omega_1$  вместо дискретных значений стали принимать бесчисленное множество непрерывных, бесконечно близких между собой значений:  $k\omega_1 \rightarrow \omega$ .

Если в формуле (20.6) заменить  $\omega_1$  на  $d\omega$ ,  $k\omega_1$  на  $\omega$  и заменить пределы интегрирования  $\mp T/2$  на  $\mp \infty$ , то для любого текущего значения частоты  $\omega$  комплексная амплитуда гармоники

$$\underline{A}_k(\omega) = j \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (20,7)$$

Она пропорциональна интегралу Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (20,8)$$

который представляет собой функцию комплексной частоты.

По формуле (20.8) можно преобразовать функцию времени  $f(t)$  в функцию частоты  $F(j\omega)$ . Операцию отыскания  $F(j\omega)$  по формуле (20.8) называют *прямым преобразованием Фурье*, а саму функцию — *частотной характеристикой* или *спектральной плотностью*.

Используя понятие спектральной плотности, формулу (20.7) можно переписать так:

$$\underline{A}_k(\omega) = j \frac{d\omega}{\pi} F(j\omega). \quad (20.9)$$

Подставим это выражение под знак суммы комплексного ряда (20.4):

$$f(t) = \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j \frac{d\omega}{\pi} F(j\omega) e^{jk\omega_1 t}.$$

Учитывая, что после предельного перехода  $T \rightarrow \infty$  дискретные частоты  $k\omega_1$  потеряли смысл, сумму следует заменить интегралом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (20.10)$$

Это *обратное преобразование Фурье*. Оно представляет непериодическую функцию  $f(t)$  — одиночный импульс — суммой бесконечно большого числа синусоид. Амплитуды этих синусоид малы: сама функция  $F(j\omega)$  имеет конечное значение, но после умножения на  $d\omega$  произведение (20.9) становится бесконечно малым. Частоты  $\omega$  принимают все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Прямое и обратное преобразования Фурье можно записать так же, как и преобразование Лапласа:  $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(j\omega)$ , т.е. функции-оригиналу  $f(t)$  соответствует изображение по Фурье, и наоборот.

1. Докажите, что комплексная амплитуда пропорциональна интегралу Фурье.

2. Перечислите три названия, которые имеет функция  $F(j\omega)$ .

3. Поясните, как получена формула (20.10) — обратное преобразование Фурье.

1.1. Прямоугольные импульсы напряжения с амплитудой  $U$  и длительностью  $\tau$  следуют друг за другом. Постройте частотный спектр, если период повторения импульсов  $T$  равен:  $2\tau$ ,  $4\tau$ ,  $12\tau$ .

◇ Выберем начало координат в середине импульса (рис. 20.3). Функция, симметричная относительно оси координат, имеет в ряду Фурье только косинусоиды (см. § 16.2):

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_k \cos k\omega_1 t,$$

где

$$U_0 = U \frac{\tau}{T}; \quad (20.11)$$

$$U_k = \frac{2}{\pi} U \frac{1}{k} \sin k \pi \frac{\tau}{T} \quad (20.12)$$

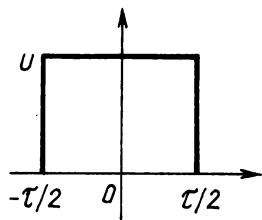


Рис. 20.3

(см. формулу (16.14)).

Чтобы сравнить дискретные спектры импульсов различной скважности, будем по оси координат откладывать не сами амплитуды гармоник, а их относительные значения — отношение амплитуды  $k$ -й гармоники (20.12) к постоянной составляющей (20.11):

$$\frac{U_m(k)}{U_0} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{\tau} \frac{1}{k} \sin k \pi \frac{\tau}{T} \quad (20.13)$$

(заметим, что в тех случаях, когда нет постоянной составляющей, берут отношение  $k$ -й и 1-й гармоник).

Относительные амплитуды гармоник, вычисленные по формуле (20.13) для заданных в условии значений  $T/T$ , сведены в табл. 20.1.

Т а б л и ц а 20.1

$T/\tau$ \ $k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1,27	0	-0,44	0	0,25	0	-0,18	0	-	-
4	1,78	1,27	0,6	0	-0,35	-0,42	-0,25	0	-	-
12	1,98	1,91	1,78	1,66	1,48	1,27	1,05	0,83	0,6	0,38

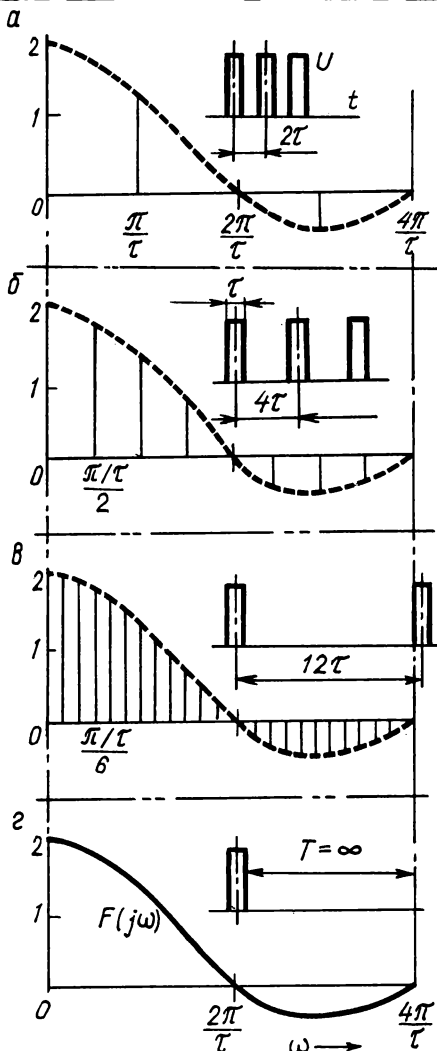


Рис. 20.4

Строим график (рис. 20.4, а). По оси абсцисс откладываем частоты гармоник. Частота первой гармоники при  $T = 2\tau$

$$\omega_1 = 2\pi/T = \pi/\tau.$$

Из точек, кратных  $\omega_1$ , проводим перпендикуляры соответствующей длины (см. табл. 20.1). По сравнению с первым случаем при скважности импульсов  $T/\tau = 4$  частота первой гармоники

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{4\tau} = \frac{\pi/\tau}{2}$$

уменьшилась в два раза (рис. 20.4, б), а при  $T/\tau = 12$  (рис. 20.4, в) — в шесть раз:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12\tau} = \frac{\pi/\tau}{6}.$$

Однако через нуль функция проходит на одной и той же частоте  $2\pi/\tau$ . Чем больше период, тем больше гармоник укладывается на этом отрезке частоты. Сравнивая три верхних графика, видим, что с увеличением  $T$  амплитуды соседних гармоник различаются незначительно (см. табл. 20.1), а частоты их сближаются. В пределе дискретный спектр превращается в сплошной (рис. 20.4, г), а по форме он повторяет огибающую амплитуд. Последней кривой соответствует функция  $F(j\omega)$  — спектральная плотность импульса, и для нее можно найти по формуле (20.8) математическое выражение. □

### 20.3. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа.

#### Амплитудно- и фазочастотная характеристики спектральной плотности

Для функций, которые оцениваются по мнимой (вертикальной) оси, а  $u(t)$ ,  $i(t)$  являются именно такими функциями, в формуле прямого преобразования Лапласа (19.1) можно принять оператор  $p = j\omega$ . Тогда спектральная плотность импульса будет равна изображению по Лапласу:

$$F(j\omega) = F(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Чтобы найти спектральную плотность функции, надо взять из таблиц ее изображение по Лапласу и заменить в нем оператор  $p$  на  $j\omega$ .

Преобразование Фурье, как и преобразование Лапласа, имеет те же свойства единственности, линейности, пропорциональности. Для него справедливы теоремы подобия и запаздывания оригинала:

$$f(kt) \doteq \frac{1}{k} F(j\frac{\omega}{k}); \quad f(t+t_1) \doteq F(j\omega) e^{\pm j\omega t_1}$$

(т.е. запаздывание смещает фазовый спектр функции на угол  $\omega t_1$ , но амплитудный спектр не изменяется).

Справедлива также теорема о смещении спектра функции: чтобы изменить угловые частоты всех гармоник на  $\pm\omega_0$ , надо умножить функцию на оператор  $e^{\pm j\omega_0 t}$ :

$$F(j\omega \pm j\omega_0) \doteq f(t) e^{\pm j\omega_0 t}.$$

Перечисленные свойства и теоремы позволяют найти для заданной функции изображение или, наоборот, по изображению — оригинал.

Спектральная плотность  $F(j\omega)$  — это комплексная функция. Как всякое комплексное число или выражение, она имеет модуль и фазу. Поясним это на примере импульса экспоненциальной формы  $Ue^{-at}$ . Изображение по Лапласу такой функции известно (см. § 19.1):

$$e^{-at} \doteq 1/(p+a).$$

Заменяя  $p$  на  $j\omega$ , находим спектральную плотность (изображение по Фурье):

$$U(j\omega) = U/(a+j\omega).$$

В показательной форме

$$U(j\omega) = \frac{U}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\psi(\omega)},$$

где  $\psi(\omega) = \arctg(\omega/a)$  — зависимость фазы от угловой частоты (т.е. ФЧХ).

Зависимость модуля функции от угловой частоты (в этом примере

$U/\sqrt{a^2 + \omega^2} = U(\omega)$  – АЧХ. Ее задают уравнением и для большей наглядности – графиком.

Чтобы записать АЧХ и ФЧХ спектральной плотности, надо перевести выражение последней в показательную форму.

Зная спектральную плотность, можно решать следующие задачи.

1. Вычислить ток в цепи при включении на ее вход импульса напряжения.

Спектральную плотность тока находим по закону Ома:

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}$$

(где  $Z(j\omega)$  – комплексное входное сопротивление), а затем по изображению  $I(j\omega)$  – оригинал  $i(t)$ .

Заметим, что спектральный метод принципиально не учитывает начальных условий, и поэтому при расчете переходных процессов он может применяться ограниченно – только для задач с нулевыми начальными условиями. От операторного метода он отличается лишь заменой  $p$  на  $j\omega$  и не дает никаких упрощений. Поэтому переходные процессы рекомендуется рассчитывать более общим операторным методом.

2. Заданы схема и напряжение  $u_1(t)$  на ее входе. Определить выходное напряжение  $u_2(t)$ .

Чтобы решить такую задачу, надо предварительно определить комплексный коэффициент передачи, т.е. отношение комплексных напряжений  $\underline{U}_2$  на выходе и  $\underline{U}_1$  на входе:

$$\underline{U}_2 / \underline{U}_1 = T(j\omega).$$

Тогда спектральная плотность выходного напряжения  $U_2(j\omega)$  равна произведению коэффициента передачи по напряжению и спектральной плотности входного напряжения:

$$U_2(j\omega) = T(j\omega) U_1(j\omega).$$

Затем от изображения можно перейти к оригиналу  $u_2(t)$ . Однако многие задачи заканчиваются определением спектра: по спектру можно выбрать полюсу пропускания, форму частотных характеристик и ответить на другие вопросы. Ценность спектрального метода именно в том и состоит, что он позволяет связать напряжения (или токи) в переходном процессе с частотными характеристиками цепи. Зная спектральную плотность входного напряжения и частотную характеристику цепи  $T(j\omega)$ , сразу находим спектральную плотность выходного напряжения.

1. Как от изображения по Лапласу перейти к изображению по Фурье?

2. Перечислите основные свойства и теоремы преобразования Фурье.

3. Объясните, как получить АЧХ и ФЧХ спектральной плотности.

4. Для решения каких задач целесообразно применять спектральный метод?

2.1. Запишите спектральную характеристику прямоугольного импульса напряжения  $U$  длительностью  $\tau$  и постройте ее график.

♦ Вычисления упрощаются, если представить импульс существующим с момента вре-

мени  $-\tau/2$  до  $\tau/2$  (см. рис. 20.3). Так как вне этого промежутка времени  $f(t) = 0$ , то в интеграле Фурье (20.8) пределы  $\mp \infty$  заменим на  $\mp \tau/2$ :

$$U(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U e^{-j\omega t} dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\frac{U}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{U}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}).$$

Умножим и разделим полученное выражение на 2, Минус внесем в скобки:

$$\frac{2U}{\omega} \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j}.$$

Вторая дробь – это  $\sin(\omega\tau/2)$ . Окончательно получим

$$U(j\omega) = 2U \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega}.$$

График удобнее строить, если умножить числитель и знаменатель на  $\tau$ .

$$U(j\omega) = U\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

Из курса математики известно, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ , т.е. при  $\omega = 0$  получается

$U(j\omega) = U\tau$ . Результаты для остальных значений углов  $\omega\tau/2$  сведем в табл. 20.2.

Т а б л и ц а 20.2

$\omega\tau/2$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$	$5\pi/2$	$3\pi$
$\sin(\omega\tau/2)$	1	0,91	0,64	0,30	0	-0,18	-0,21	-0,13	0	0,13	0
$\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$	1	0,91	0,64	0,30	0	-0,18	-0,21	-0,13	0	0,13	0

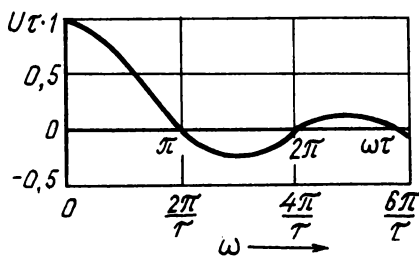


Рис. 20.5

Кривую спектральной плотности строим в относительных единицах  $U(j\omega)/(U\tau)$  (рис. 20.5). По оси абсцисс наносим углы  $\omega\tau/2$ , а затем пересчитываем их в угловую частоту  $\omega$ . Так, если угол  $\omega\tau/2 = \pi$ , то ему соответствует  $\omega = 2\pi/\tau$ . График по форме та-

кой же, как на рис. 20.4,  $z$ , а ординаты в два раза меньше, так как каждая гармоника учтена два раза.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Этот пример иллюстрирует технику определения спектральной плотности. Выражения спектральной плотности (и ее график) других форм сигналов приведены в справочниках, а наиболее распространенных — в учебниках. Если же потребуются найти спектральную плотность функции, которой нет в справочнике, то проще сначала найти изображение по Лапласу, а затем заменить  $p$  на  $j\omega$ , как это было показано на примере экспоненциального напряжения.

#### 20.4. Формула Рэлея. Распределение энергии в спектре импульса

Согласно закону Джоуля—Ленца, энергия пропорциональна квадрату тока или напряжения:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} Ri^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{R} dt.$$

Докажем, что энергию импульса можно вычислить также по его спектральной плотности. Примем  $R = 1$  Ом. В интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t) dt,$$

используя обратное преобразование Фурье (20.10), одну из функций  $u(t)$  выразим через изображение  $U(j\omega)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Так как время и частота — независимые переменные, то порядок интегрирования можно изменить:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{j\omega t} dt.$$

Последний интеграл отличается от прямого преобразования Фурье (20.8) только знаком при показателе степени  $j\omega t$ , т.е. знаком мнимой части. Обозначим его  $U(-j\omega)$ . Но произведение комплексного числа и сопряженного равно квадрату модуля:

$$U(j\omega) U(-j\omega) = U^2(\omega).$$

Так как это четная функция частоты, можно изменить пределы интегрирования, удвоив результат:

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U^2(\omega) d\omega,$$

т.е. энергия импульса численно равна площади, заключенной между осью абсцисс и квадратом модуля спектральной плотности. Это *формула Рэлея*.

Для вычисления энергии импульса достаточно иметь его АЧХ. Если цепь пропускает ограниченную полосу частот между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то вычисляют интеграл в этих пределах. За ширину спектральной плотности импульсов прямоугольной, треугольной, трапецеидальной и других форм принимают полосу частот от нуля до  $\omega_1 = 2\pi/\tau$ . В ней сосредоточено 90 % всей энергии импульса. Чем меньше  $\tau$ , тем шире должна быть полоса пропускания цепи.

1. Выведите формулу Рэлея.

2. При какой полосе пропускания передается 90 % энергии импульса?

3. Вычислите граничную частоту, если длительность импульса  $2 \cdot 10^{-6}$  с.

3.1. Постройте частотные характеристики комплексного входного сопротивления цепи, схема которой показана на рис. 20.6. (У к а з а н и е. См. табл. 10.2 и рис. 10.5).

3.2. Для схемы, приведенной на рис. 20.6, запишите комплексный коэффициент передачи по напряжению  $T(j\omega)$ .

◇ Входное и выходное комплексные напряжения:

$$\underline{U}_1 = Z_{\text{вх}} I; \quad \underline{U}_2 = -jX_C I,$$

а их отношение

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-jX_C}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

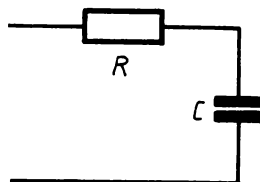


Рис. 20.6

представляет  $T(j\omega)$ .

В показательной форме, используя собственную частоту  $\omega' = 1/(RC)$ , запишем:

$$T(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega')^2}} \exp(-j \arctg \frac{\omega}{\omega'}).$$

Здесь дробь — АЧХ  $T(\omega)$ , а аргумент экспоненциальной функции — ФЧХ  $\psi(\omega)$ . Обе характеристики проще рассчитывать в единицах относительной частоты  $\omega/\omega'$ . □

## 20.5. Условия неискаженной передачи сигналов

Пусть на вход цепи подано напряжение, спектральная плотность которого в показательной форме имеет вид  $\underline{U}_1(\omega) e^{j\psi(\omega)}$ . Известен комплексный коэффициент передачи — частотная характеристика цепи  $T(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ . Тогда спектральная плотность выходного напряжения равна произведению этих функций:

$$T(\omega) \underline{U}_1(\omega) e^{j(\psi(\omega) + \varphi(\omega))}.$$

Выясним, каким требованиям должны удовлетворять АЧХ  $T(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$  цепи, чтобы сигнал прошел через нее неискаженным. Считаем, что информация заключена в форме сигнала: напряжения  $u_2(t)$  и  $u_1(t)$  по форме должны быть идентичны.

Допускаем, что амплитуда сигнала может измениться в  $k$  раз и сам сигнал может запаздывать на время  $\tau$ . Изменению амплитуды соответствует изменение его спектральной характеристики во столько же раз, а по теореме запаздыва-

ния сдвиг вправо по оси времени можно учесть коэффициентом  $e^{-j\omega\tau}$ . Получается, что спектральная характеристика неискаженного выходного напряжения равна

$$kU_1(\omega) e^{j(\psi(\omega) - \tau\omega)}$$

Сопоставляем два последних выражения. Они будут равны, если  $T(\omega) = k$ ,  $\varphi(\omega) = -\tau(\omega)$ . Это и есть условия неискаженной передачи сигнала.

На рис. 20.7 показаны графики: АЧХ цепи  $T(\omega)$  должна соответствовать горизонтальная прямая (на всех частотах, от 0 до  $\infty$ , усиление или ослабление в  $k$  раз). ФЧХ выражается наклонной прямой, выходящей из начала координат.

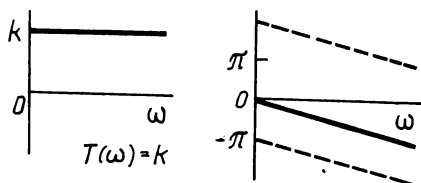


Рис. 20.7

Впрочем, форма сигнала не изменится, если все его гармоники сдвинуть на угол, кратный  $2\pi$  и даже  $\pi$ . В последнем случае изменится лишь полярность сигнала, что не столь важно. ФЧХ можно записать более общим уравнением:

$$\varphi(\omega) = k\pi - \tau\omega,$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . На графике характеристики будут выходить из точек, кратных  $\pi$  (на рис. 20.7 показаны штриховыми линиями для  $k = +1$ ). На практике удастся лишь некоторое приближение к приведенным идеальным характеристикам.

1. Какими должны быть АЧХ и ФЧХ цепи, чтобы сигнал не искажался?
2. Выведите уравнения для АЧХ и ФЧХ цепи, не искажающей сигнал, и начертите их графики.



Для расчета переходных процессов используются два основных метода: классический и операторный. Классическим методом рассчитывают цепи первого и второго порядков. Расчет заключается в составлении и решении дифференциального уравнения. Переходные процессы в цепях третьего и высших порядков рассчитывают операторным методом: чертят операторную схему замещения и одним из методов (узловых напряжений, контурных токов, эквивалентного источника) находят изображения, а затем по таблицам или по теореме разложения отыскивают соответствующие им функции  $u(t)$  или  $i(t)$ .

Принцип наложения используется для расчета установившихся режимов при периодических несинусоидальных напряжениях. Он же позволяет найти форму одиночного импульса на выходе схемы, представив входной импульс

суммой элементарных воздействий. Если за элементарное воздействие принят скачок или  $\delta$ -функция, то применяют интеграл Дюамеля, если синusoида, — спектральный метод.

Практически спектральный метод используют так:

1) по заданной функции времени (напряжения или тока) находят ее спектральную функцию (т.е. изображение по Фурье);

2) по заданной схеме записывают передаточную частотную характеристику цепи;

3) перемножая обе функции, находят спектральную плотность выходного напряжения (тока).

Сама форма спектральной плотности позволяет ответить на многие вопросы. Особая ценность спектрального метода именно в том и состоит, что он объединяет частотные характеристики входного сигнала и цепи.

## Литература

1. *Атабеков Г.И.* Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978. — 592 с.
2. *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
3. *Люсев А.К.* Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
4. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высш. шк., 1981. — 333 с.
5. *Попов В.П.* Основы теории цепей. — М.: Высш. шк., 1985. — 496 с.
6. Теория линейных электрических цепей / Б.В. Афанасьев, О.Е. Гольдин, И.Г. Кляцкин, Г.Я. Пинес. — М.: Высш. шк., 1973. — 592 с.
7. *Шебес М.Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высш. шк., 1982. — 488 с.

## Оглавление

Предисловие .....	3
Методические указания .....	5
Основные обозначения .....	7
<b>I. Методы расчета цепей</b>	
1. Электрическая цепь .....	13
1.1. Двухполосники. Цепи линейные и нелинейные. ....	13
1.2. Источник напряжения и источник тока. ....	13
1.3. Согласованный режим. Законы Кирхгофа. ....	14
2. Теоремы компенсации и взаимности. Эквивалентное преобразование пассивных схем. Метод контурных токов .....	16
2.1. Теорема компенсации. Последовательное, параллельное и смешанное соединение приемников .....	16
2.2. Определение токов по уравнениям Кирхгофа. Закон Ома для ветви с ЭДС .....	18
2.3. Метод контурных токов. ....	20
2.4. Принцип взаимности .....	21
2.5. Расчет цепей методом контурных токов .....	23
3. Методы наложения, узловых напряжений, эквивалентного источника. ....	25
3.1. Метод наложения. Входные и взаимные проводимости ветвей .....	25
3.2. Метод узловых напряжений. ....	26
3.3. Теорема об активном двухполоснике. Метод эквивалентного источника. . .	28
3.4. Расчет цепей методом узловых напряжений .....	32
3.5. Расчет цепей методом эквивалентного источника .....	33
<b>II. Цепи при синусоидальных ЭДС</b>	
4. Синусоидальный ток. ....	43
4.1. Основные понятия .....	43
4.2. Синусоида и вращающийся радиовектор. Угловая частота. Фаза, начальная фаза и разность фаз. ....	44
4.3. Действующее и среднее значения. ....	46
4.4. Цепи, содержащие один из элементов. ....	48
4.5. Векторные диаграммы .....	50
5. Последовательное соединение элементов цепи. ....	52
5.1. Условные положительные направления тока и напряжения. Векторная диаграмма. Треугольник напряжений. ....	52
5.2. Треугольник сопротивлений. Закон Ома. Разность фаз напряжения и тока. .	53
5.3. Последовательное соединение нескольких приемников. Топографическая векторная диаграмма. ....	55
5.4. Комплексное сопротивление .....	57
5.5. Комплексное напряжение. Переход от мгновенного напряжения к комплексному, и наоборот .....	59
6. Параллельное соединение пассивных двухполюсников. ....	62
6.1. Активная и реактивная составляющие тока. Треугольник токов. ....	62
6.2. Активная и реактивная проводимости. Треугольник проводимостей. Полная проводимость .....	64

6.3. Преобразование последовательного соединения в эквивалентное параллельное и обратно. Расчет параллельной схемы . . . . .	66
6.4. Комплексная проводимость ветви. . . . .	68
6.5. Расчет параллельной схемы в комплексной форме. . . . .	70
7. Мощность . . . . .	71
7.1. Мгновенная мощность. Активная мощность. . . . .	71
7.2. Индуктивная и емкостная мощности . . . . .	73
7.3. Активная и реактивная мощности. . . . .	75
7.4. Треугольник мощностей. Полная мощность. Коэффициент мощности. . . . .	77
7.5. Комплексная мощность . . . . .	80
8. Расчет сложных цепей . . . . .	80
8.1. Метод контурных токов . . . . .	80
8.2. Метод узловых напряжений. . . . .	81
8.3. Метод эквивалентного источника. Метод наложения . . . . .	84
8.4. Методика построения векторных диаграмм. Баланс мощностей . . . . .	87
8.5. Эквивалентные преобразования схем. . . . .	89
9. Трехфазные цепи . . . . .	92
9.1. Устройство трехфазной цепи . . . . .	92
9.2. Четырехпроводная трехфазная цепь. . . . .	95
9.3. Звезда без нейтрального провода . . . . .	97
9.4. Соединение по схеме "треугольник" . . . . .	99
9.5. Мощность трехфазной цепи . . . . .	101
<b>III. Частотные характеристики входных и передаточных функций цепей</b>	
10. Частотные характеристики входного сопротивления . . . . .	111
10.1. Частотные характеристики входного сопротивления последовательной $RL$ -цепи. . . . .	111
10.2. Частотные характеристики входного сопротивления последовательной $RC$ -цепи. . . . .	113
10.3. Резонанс напряжений . . . . .	115
10.4. Добротность . . . . .	116
10.5. Частотные характеристики входного сопротивления последовательного контура. . . . .	118
11. Последовательный колебательный контур . . . . .	121
11.1. Амплитудно- и фазочастотная характеристики тока . . . . .	121
11.2. Передаточная функция. . . . .	122
11.3. Частотные характеристики высокодобротного контура. Резонансные кривые. . . . .	125
11.4. Полоса пропускания. Влияние нагрузки на полосу пропускания . . . . .	128
11.5. Применение колебательных контуров . . . . .	130
12. Параллельный колебательный контур . . . . .	131
12.1. Резонанс токов. Резонансная частота . . . . .	131
12.2. Параметры параллельного контура с малыми потерями . . . . .	133
12.3. Амплитудно- и фазочастотная характеристики входного сопротивления параллельного контура . . . . .	136
12.4. Выходное напряжение. Токи ветвей. Полоса пропускания . . . . .	138
12.5. Сложный контур . . . . .	139
13. Активные цепи и цепи с обратной связью . . . . .	143
13.1. Эквивалентные схемы. Дуальность . . . . .	143
13.2. Понятие об усилении. Обратная связь . . . . .	145

13.3. Управляемые источники. Операционный усилитель . . . . .	148
13.4. Схемы замещения транзистора и каскада резонансного усилителя . . . . .	151
13.5. Расчет схем с зависимыми источниками . . . . .	154
14. Две индуктивно связанные катушки . . . . .	157
14.1. Взаимная индуктивность. Сопротивление и ЭДС взаимной индукции. Коэффициент связи. . . . .	157
14.2. Согласная и встречная связь катушек. Одноименные зажимы. . . . .	159
14.3. Последовательное соединение двух катушек . . . . .	161
14.4. Параллельное соединение двух катушек . . . . .	163
14.5. Расчет разветвленных цепей с взаимной индуктивностью. . . . .	166
15. Связанные колебательные контуры. . . . .	171
15.1. Воздушный трансформатор . . . . .	171
15.2. Виды связи контуров. Резонансные явления . . . . .	174
15.3. Полный резонанс . . . . .	176
15.4. Передаточные амплитудно- и фазочастотная характеристики . . . . .	178
15.5. Передаточные характеристики при различных связях. Полоса пропускания . . . . .	182
<b>IV. Цепи при периодических несинусоидальных воздействиях. Переходные процессы</b>	
16. Цепи при периодических несинусоидальных воздействиях. . . . .	192
16.1. Ряд Фурье. Дискретные спектры. . . . .	192
16.2. Виды и условия симметрии периодических несинусоидальных кривых . . . . .	194
16.3. Разложение несинусоидальной функции в ряд Фурье . . . . .	196
16.4. Активная мощность. Действующее и среднее значения. Коэффициенты, характеризующие форму кривой . . . . .	198
16.5. Расчет цепей при несинусоидальном напряжении. Влияние индуктивности и емкости на кривую тока. . . . .	202
17. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом . . . . .	207
17.1. Переходный процесс. Законы коммутации. Свободный переходный процесс . . . . .	207
17.2. Включение $RL$ -цепи на постоянное напряжение. . . . .	210
17.3. Включение $RC$ -цепи на постоянное напряжение. . . . .	213
17.4. Единичные и импульсные воздействия . . . . .	215
17.5. Интеграл Дюамеля . . . . .	218
18. Переходные процессы в последовательном контуре. . . . .	220
18.1. Дифференциальное и характеристическое уравнения . . . . .	220
18.2. Аperiodический процесс. . . . .	222
18.3. Периодический затухающий процесс . . . . .	225
18.4. Логарифмический декремент колебаний. Незатухающие колебания. Включение цепи на постоянное напряжение . . . . .	228
18.5. Включение $RLC$ -цепи со слабым затуханием на гармоническое напряжение. Биения. . . . .	232
19. Расчет переходных процессов операторным методом . . . . .	225
19.1. Основные понятия и теоремы. . . . .	235
19.2. Изображение индуктивного и емкостного напряжений . . . . .	237
19.3. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Операторная схема замещения . . . . .	239
19.4. Переход от изображения к оригиналу. . . . .	241
19.5. Дифференцирующие и интегрирующие цепи. . . . .	245
20. Использование спектрального метода . . . . .	248
20.1. Ряд Фурье в комплексной форме . . . . .	248

20.2. Переход от ряда Фурье к интегралу Фурье . . . . .	250
20.3. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа. Амплитудно- и фазочастотная характеристики спектральной плотности . . . . .	253
20.4. Формула Рэлея. Распределение энергии в спектре импульса . . . . .	256
20.5. Условия неискаженной передачи сигналов . . . . .	257
Л и т е р а т у р а . . . . .	260

Справочное издание

Яцкевич Вячеслав Владимирович

# ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Справочное пособие

Заведующий редакцией Л.Д. Духвалов

Редактор Е.В. Сукач

Младшие редакторы В.М. Кушнелевич, И.В. Моховикова, Т.И. Крючкова

Художественный редактор Ю.С. Сергачев

Технический редактор С.И. Шердюкова

Корректоры Л.А. Шлыкович, З.Б. Звонарева

Оператор И.В. Скубий

ИБ № 2761

Подписано в печать 30.01.90 г. Формат 60х90/16. Бумага офсет. Гарнитура Пресс Роман.

Офсетная печать. Усл. печ.л. 16,5. Усл. кр.-отт. 17. Уч.-изд.л. 17,09. Тираж. 5000 экз.

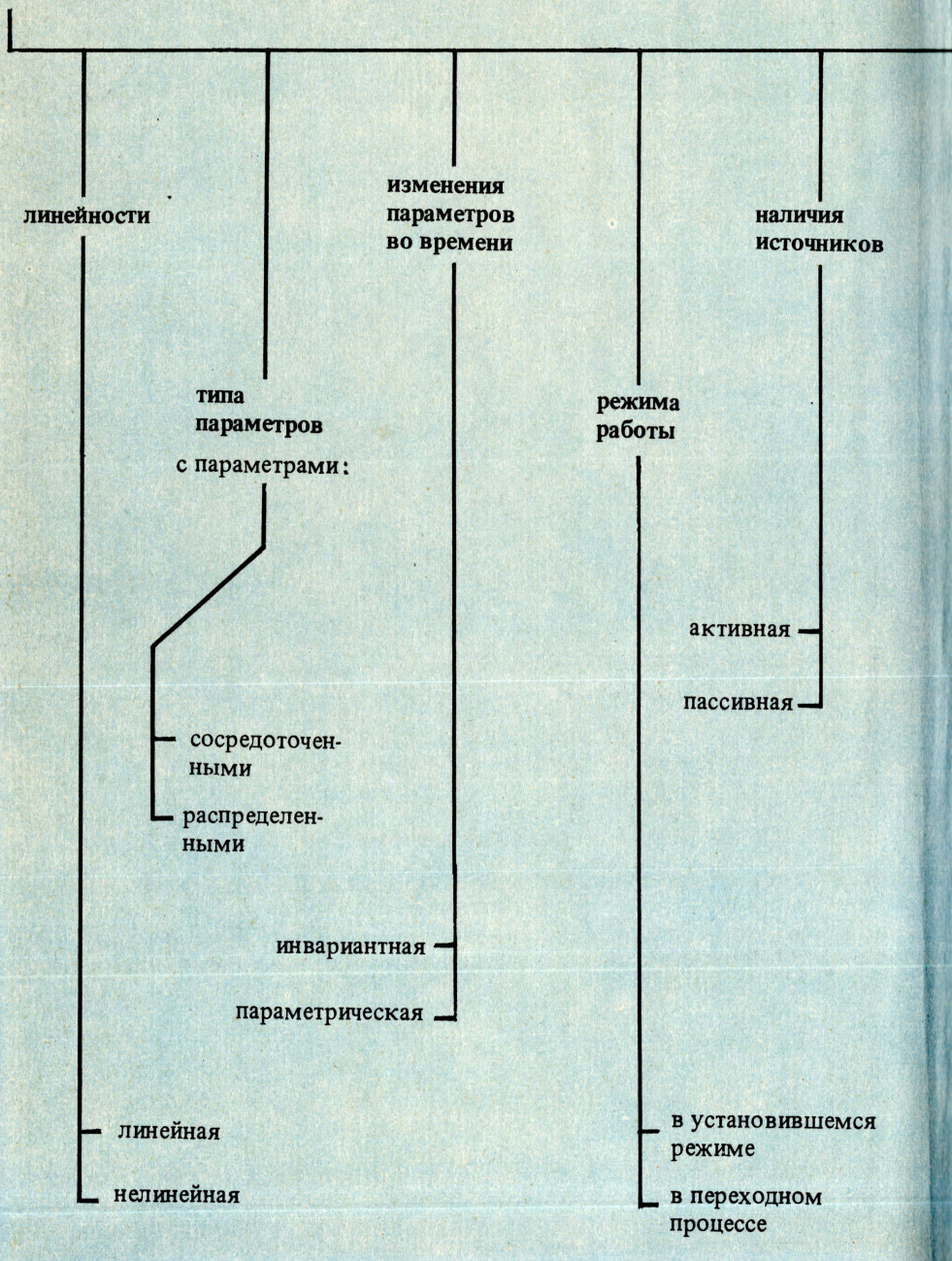
Заказ 5110. Цена 1 р. 20 к.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по печати. 220048,

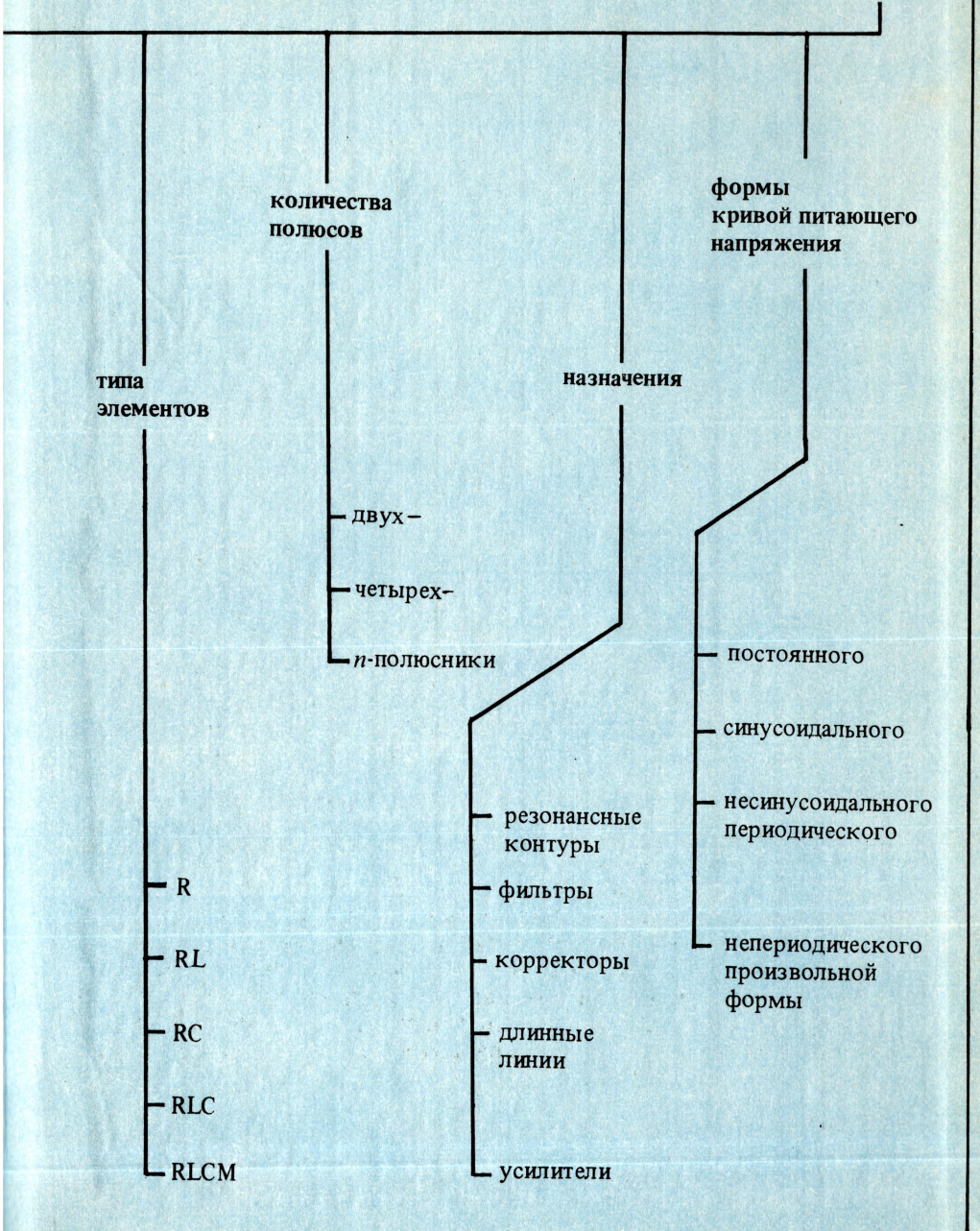
Минск, проспект Машерова, 11.

Типография "Победа". 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11.

# КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧ



ЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ПРИЗНАКАМ



1 р. 20 к.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗВЕЗДНАЯ ШКОЛА»