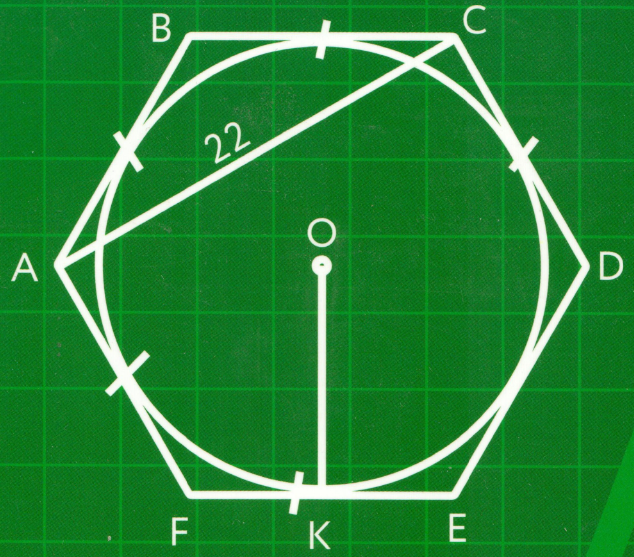


БОЛЬШАЯ ПЕРЕМЕНА

Э.Н. БАЛАЯН

ГЕОМЕТРИЯ

ЗАДАЧИ НА ГОТОВЫХ ЧЕРТЕЖАХ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ И ЕГЭ

8 КЛАСС

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Э.Н. БАЛАЯН ГЕОМЕТРИЯ ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ 8 КЛАСС

ISBN 978-5-222-30435-8

ФЕНИКС

phoenix_book

Большая перемена

Э. Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ

8 класс

Профильный уровень

Ростов-на-Дону
Феникс
2018

УДК 373.167.1:514
ББК 22.14я72
КТК 444
Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ : 8 класс : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2018. — 156 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-30435-8

Предлагаемое вниманию читателя пособие содержит более 600 разноуровневых задач и упражнений по основным темам программы геометрии (планиметрии) 8 класса, скомпонованных в комплект по готовым чертежам, содержащий 24 таблицы.

Эти упражнения дают возможность учителю в течение минимума времени решить и повторить значительно больший объем материала и тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами. К наиболее трудным задачам приведены решения и указания. Задачи повышенной сложности отмечены знаком *.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, студентам — будущим учителям, учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также выпускникам для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ.

УДК 373.167.1:514
ISBN 978-5-222-30435-8 ББК 22.14я72

Предисловие

На начальном этапе изучения геометрии основную трудность для учащихся представляет выполнение чертежа, на которое расходуется много времени.

Предлагаемое вниманию читателя пособие ставит целью устранить этот пробел с помощью готовых чертежей.

На уроках геометрии зачастую каждое высказывание и ответ на вопрос сопровождаются демонстрацией чертежа, при этом чертеж и данные из условия задачи должны находиться в поле зрения учащихся в процессе решения задачи. Когда учащиеся наглядно видят условие, то легче решают задачи. По этой причине упражнения на готовых чертежах оказывают неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем, способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и видеть различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

В пособии на всех чертежах равные углы и отрезки отмечены одинаковыми знаками, прямые углы — квадратиками, что дает возможность учащимся значительно быстрее ориентироваться в условиях задачи. Большинство задач предназначено в качестве устных упражнений. Учитель может заранее подготовить их на доске или плакатах и отводить на решение по 10–15 минут в начале каждого урока.

При выполнении упражнений происходит активная мыслительная деятельность учащихся, что в свою очередь приводит к эффективному непроизвольному запоминанию определений, свойств и признаков изучаемых фигур, которые периодически повторяются в процессе выполнения разнообразных упражнений и лучше запоминаются. Большое значение имеет и то, что учащиеся с бóльшим удовольствием предпочитают выполнять эти упражнения, чем отвечать на теоретические вопросы.

Наконец, предлагаемые упражнения быстро готовят учащихся к запоминанию и самостоятельному решению таких задач, для которых эти упражнения являются элементами.

Предлагаемая методика проведения уроков с использованием упражнений на готовых чертежах, несомненно, способствует повышению творческой активности учащихся, развитию логического мышления, является эффективным средством усвоения и закрепления теоретического материала.

Пособие представляет собой три комплекта упражнений по геометрии для учащихся 8-х классов, составленных в виде таблиц. Все задания соответствуют ныне действующей программе по геометрии (планиметрии). Пособие может быть использовано учителями, работающими по учебнику Л.С. Атанасяна «Геометрия, 7–11» и другим книгам.

В пособии 24 таблицы. В каждой таблице количество задач различно. Как правило, они составлены в порядке возрастающей трудности, что дает возможность учителю проводить работу дифференцированно.

К наиболее трудным задачам приведены подробные решения с пояснениями, а к остальным — указания и ответы, что дает возможность проверить правильность решения.

Отметим, что предлагаемые упражнения не ставят целью заменить систему задач из вышеуказанных пособий, а являются лишь дополнением к ней. Они дают возможность учителю сэкономить значительную часть времени на изучение соответствующих тем и способствуют усилению практической направленности преподавания геометрии.

Раздел I

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки (рис. 1).

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

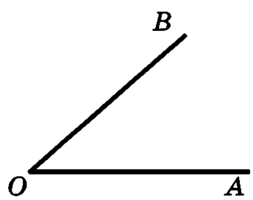


Рис. 1

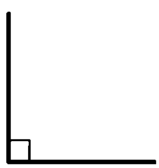


Рис. 2

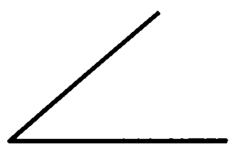


Рис. 3

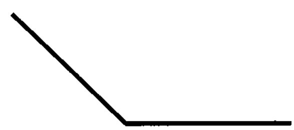


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

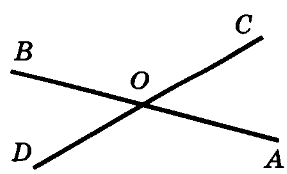


Рис. 5

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

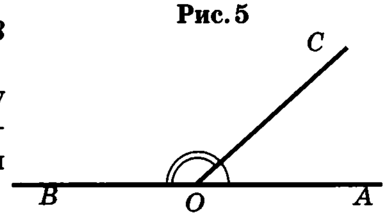


Рис. 6

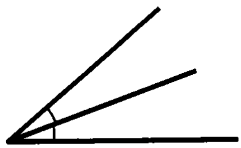


Рис. 7

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

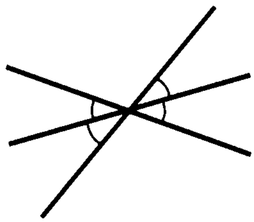


Рис. 8

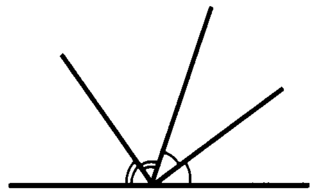


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;
внутренние накрест лежащие:
$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;
внешние накрест лежащие:
$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;
внутренние односторонние:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;
внешние односторонние:
$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

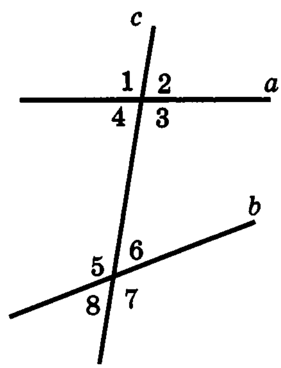


Рис. 10

2. Многоугольник

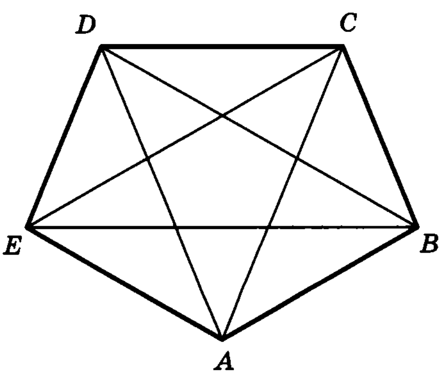


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

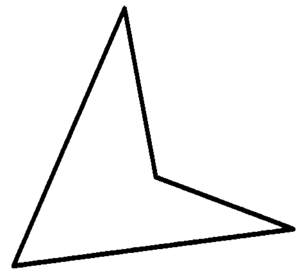


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

Свойства

1. Каждый угол правильного n-угольника равен $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.

6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$.

7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

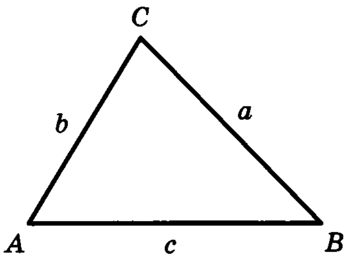


Рис. 13

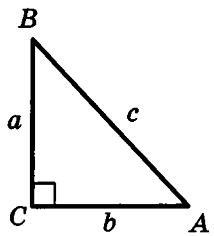


Рис. 14

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — **углы**.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\ BC = a,\ AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

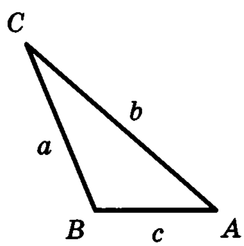


Рис. 15

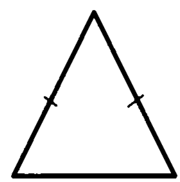


Рис. 16

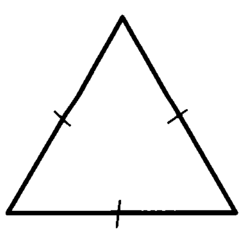


Рис. 17

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Свойства равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18):

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

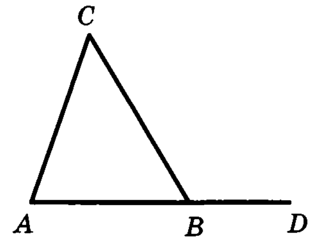


Рис. 18

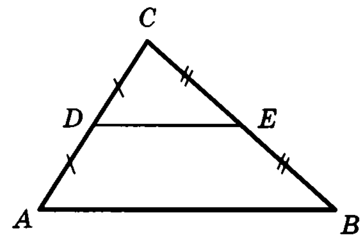


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак *(признак равенства по двум сторонам и углу между ними)*.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20):

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

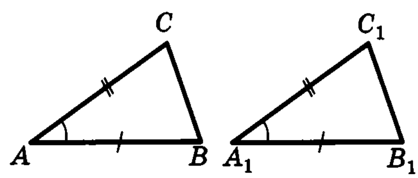


Рис. 20

II признак *(признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам)*.

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21):

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

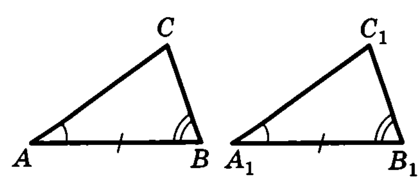


Рис. 21

III признак *(признак равенства по трем сторонам)*.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22):

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

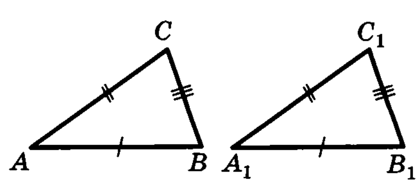


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23):

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24):

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

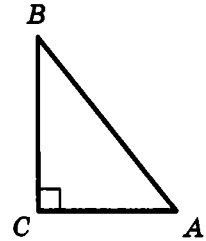


Рис. 23

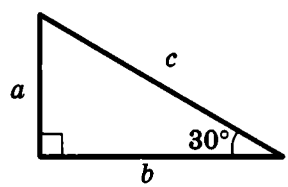


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. **Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны** (рис. 25):

$$AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

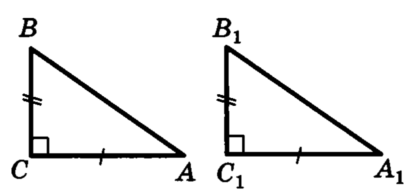


Рис. 25

2. **Если катет и прилежащий к нему острый угол** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26):

$$AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

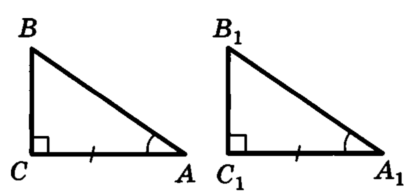


Рис. 26

3. **Если гипотенуза и острый угол** одного прямоугольного треугольника

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27):

$$AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

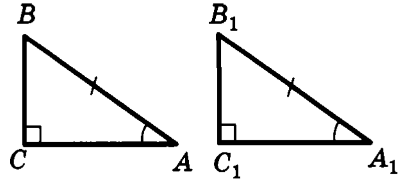


Рис. 27

4. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны** (рис. 28):

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1.$$

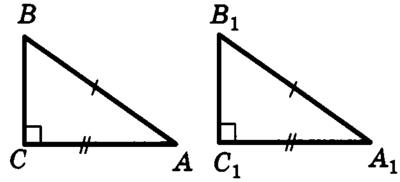


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:
1) точка пересечения медиан;
2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

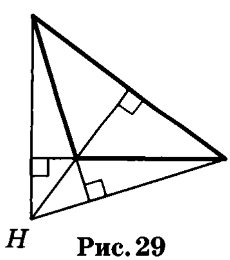


Рис. 29

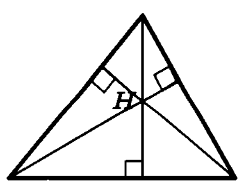


Рис. 30

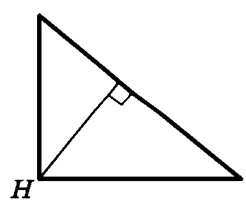


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.** В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

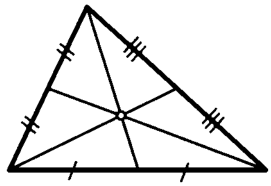


Рис. 32

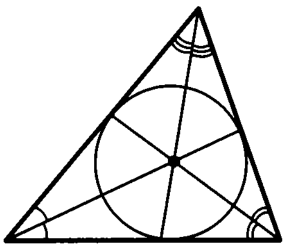


Рис. 33

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

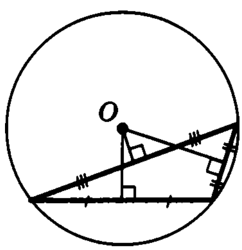


Рис. 34

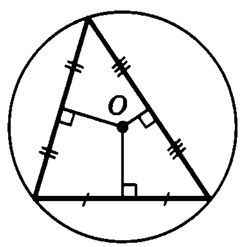


Рис. 35

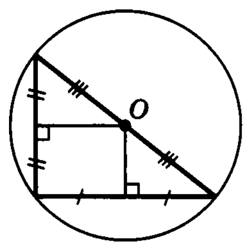


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

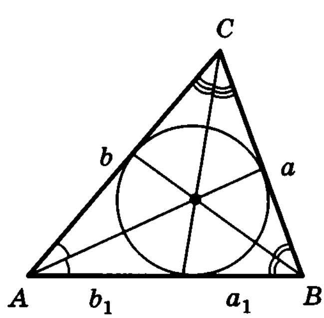


Рис. 37

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\,.$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c.

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\,.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\,.$$

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1.$$

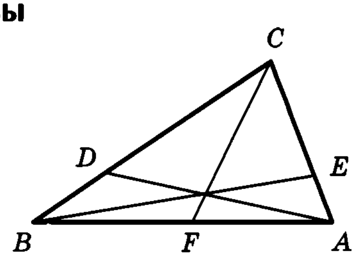


Рис. 38

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

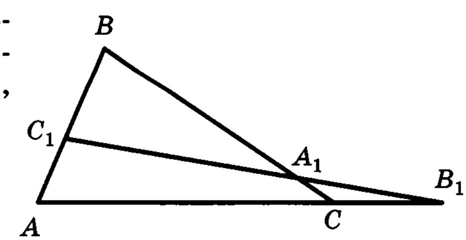


Рис. 39

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

16. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$;

2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

4) $S = pr$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

5) $S = \frac{abc}{4R}$;

6) $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$;

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

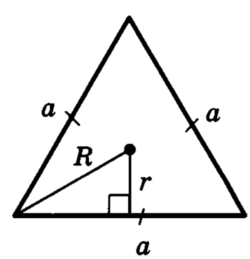


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

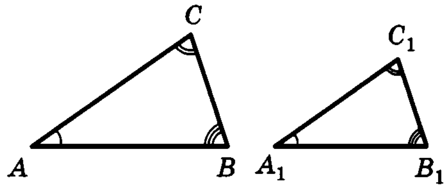


Рис. 41

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

19. Признаки подобия треугольников

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42):

$$\angle A = A_1,\ \angle B = B_1.$$

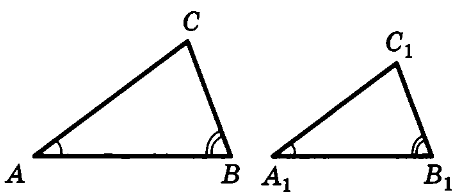


Рис. 42

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43):

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

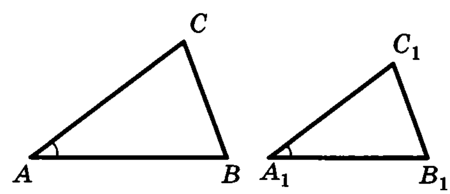


Рис. 43

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

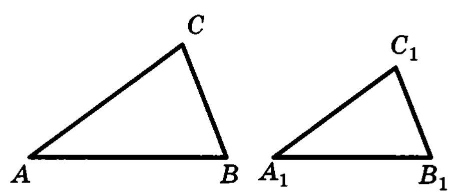


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности многоугольников) **пропорциональны квадратам их сходственных сторон.**

В частности, **площади кругов относятся как квадраты радиусов** (или диаметров).

20. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

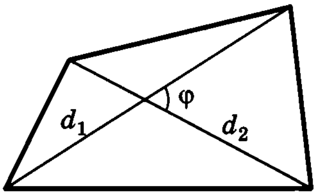


Рис. 45

2. Вписанный (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

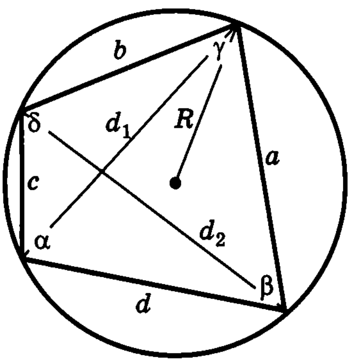


Рис. 46

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47):

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

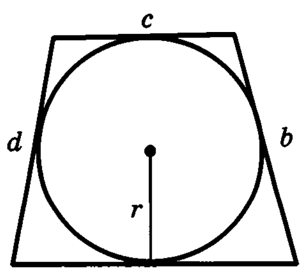


Рис. 47

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48):

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ — площадь параллелограмма.

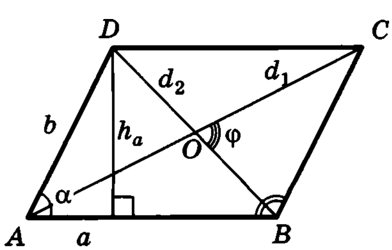


Рис. 48

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180°$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

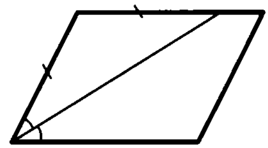


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b – основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две непараллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

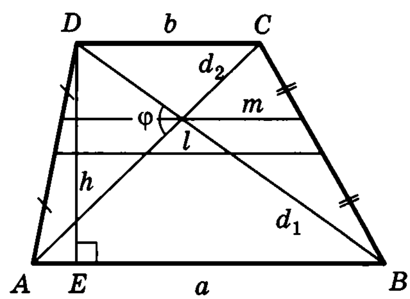


Рис. 50

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$m \parallel a \parallel b$; $m = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$\angle A + \angle D = 180°$; $\angle B + \angle C = 180°$.

$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$ — площадь трапеции.

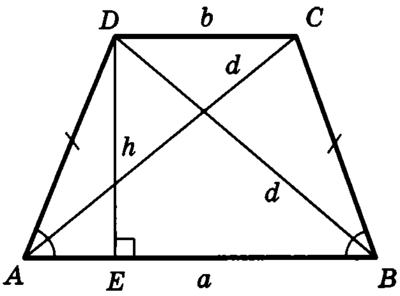


Рис. 51

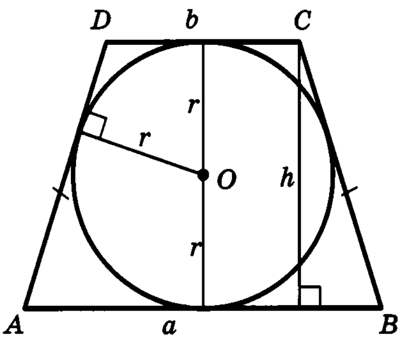


Рис. 52

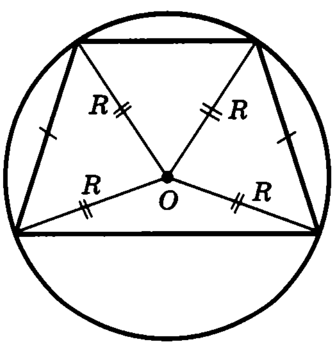


Рис. 53

22.1. Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

22.2. Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90°.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции).}$$

$$AE = a - b.$$

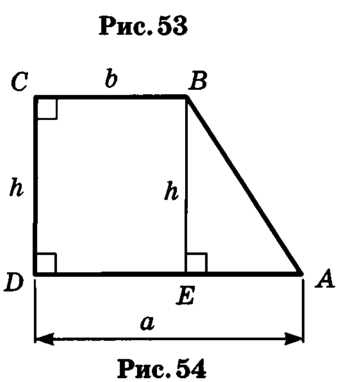


Рис. 54

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

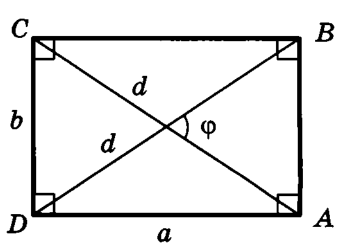


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, **у прямоугольника диагонали равны.**

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$

24. Ромб

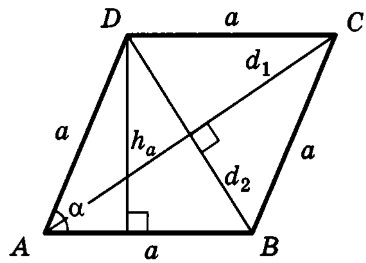


Рис. 56

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов:*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C; BD — биссектриса углов B и D.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

25. Квадрат

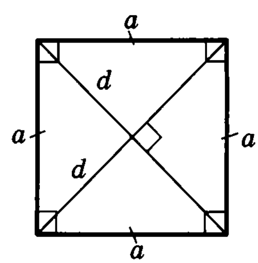


Рис. 57

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

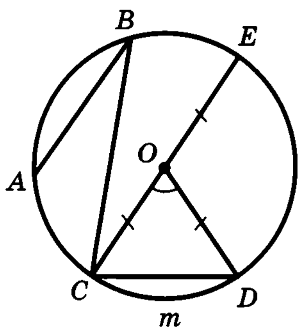


Рис. 58

Обозначение: r или R.

На рис. 58 $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

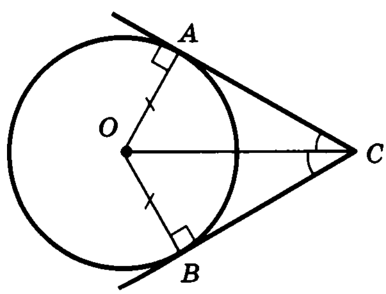


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

28. Окружность и треугольник

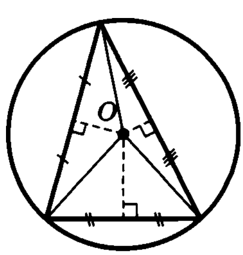


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

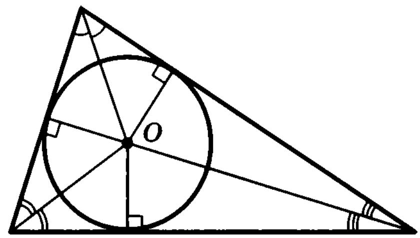


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62):

$$\alpha + \beta = 180°.$$

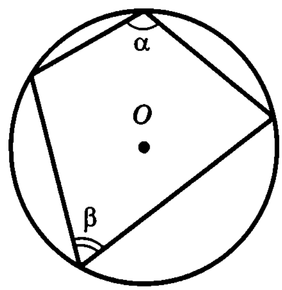


Рис. 62

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63):

$$a + c = b + d.$$

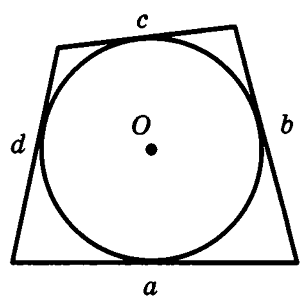


Рис. 63

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64):

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

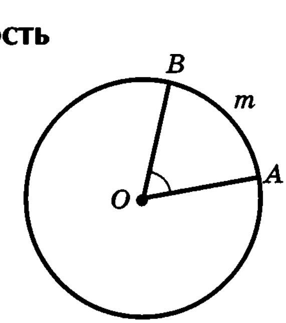


Рис. 64

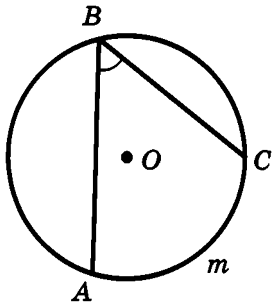


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68):

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

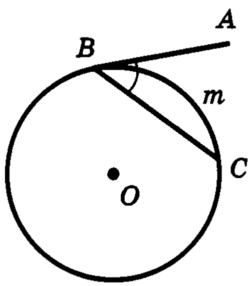


Рис. 66

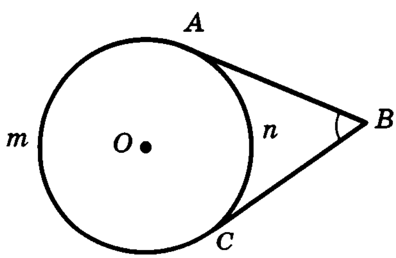


Рис. 67

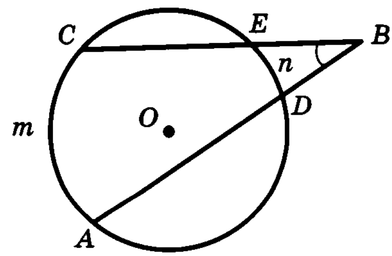


Рис. 69

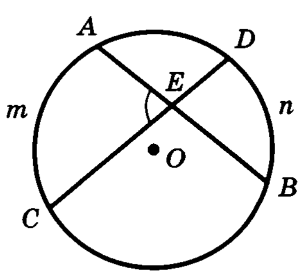


Рис. 68

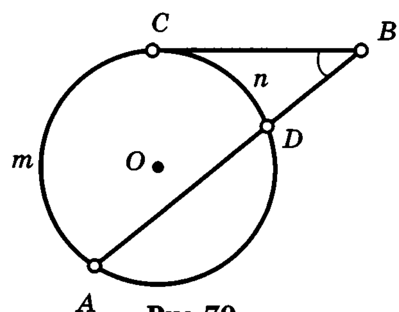


Рис. 70

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 71):

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

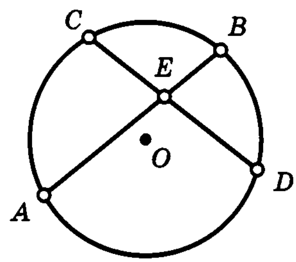


Рис. 71

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 73):

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

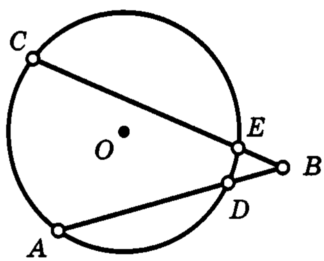


Рис. 72

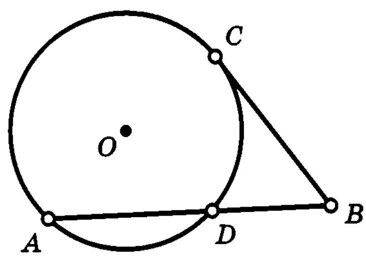


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{2}CR$ — площадь круга;

$\pi = \dfrac{C}{D} \approx 3{,}14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора (рис. 74).

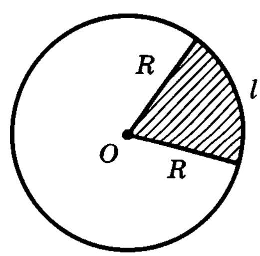


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:
1) начальной точкой;
2) направлением;
3) длиной (модулем).

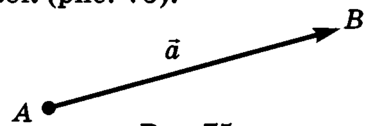


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$\vec{a}$, $\vec{m}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Неколлинеарные векторы:

$\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{ST}$.

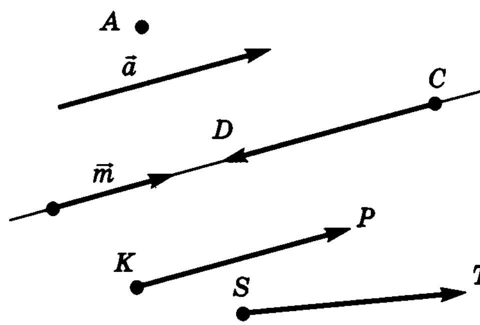


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$.

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75).

Координатами вектора $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И обратно, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ (правило треугольника),}$$

$$\text{или } \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

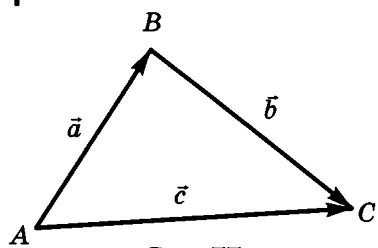


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

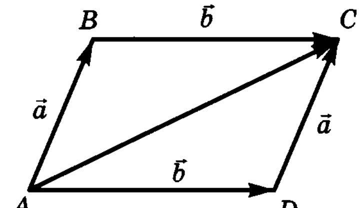


Рис. 78

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

4. *Разностью векторов* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a} \text{ (рис. 79).}$$

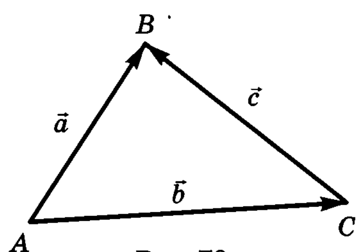


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ *на число* k называется вектор $k\vec{a}(ka_1;\ ka_2)$.

Из определения следует, что:

1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;*

2) *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Основные свойства умножения вектора на число:

1) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ — *сочетательный* закон;

2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *I распределительный* закон;

3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *II распределительный* закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80):

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$

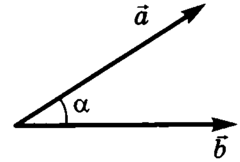


Рис. 80

1) Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$, тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Верно и обратное: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2) Если $\alpha<90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; если $\alpha>90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон);
3) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон);
4) $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

40. Уравнение окружности

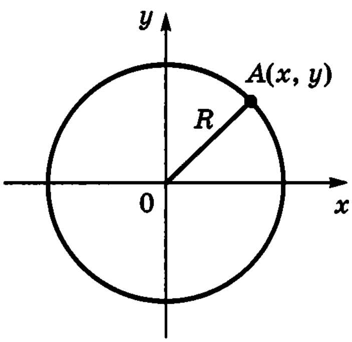


Рис. 81

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности $M(x_0;\ y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

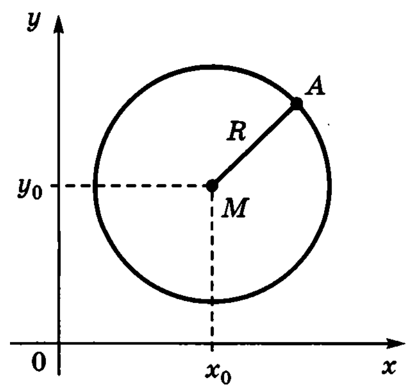


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

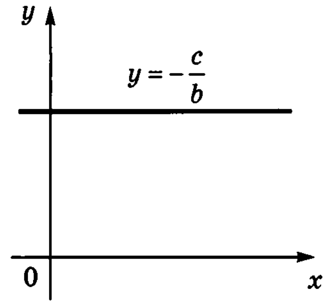


Рис. 83

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

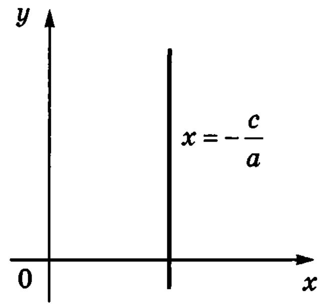


Рис. 84

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат (0; 0) (рис. 85).

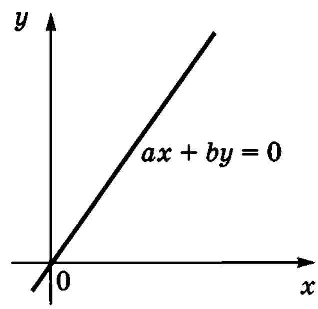


Рис. 85

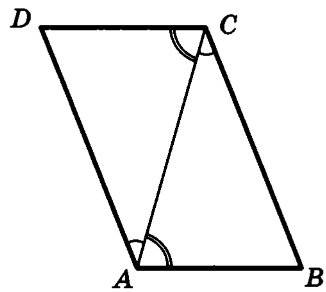
Раздел II

УПРАЖНЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ

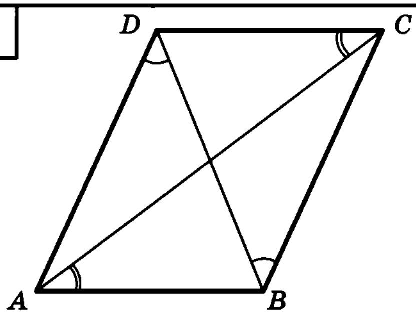
ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм. *Таблица 1*

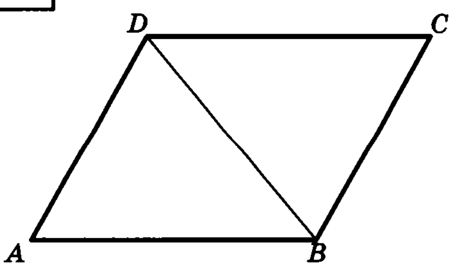
1



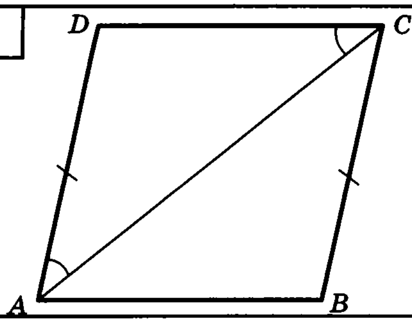
2



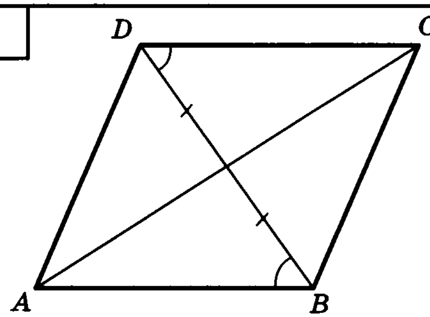
3 $\Delta ABD = \Delta CBD$



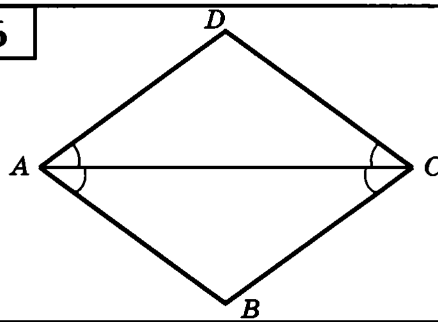
4



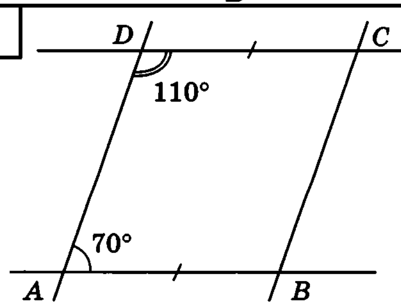
5



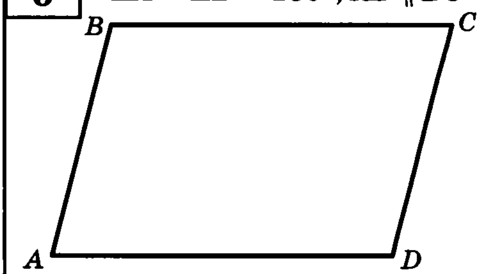
6



7

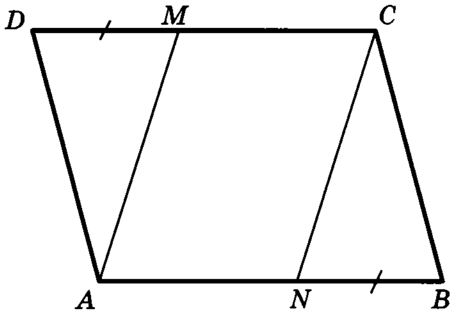


8 $\angle A + \angle B = 180°, AD \parallel BC$

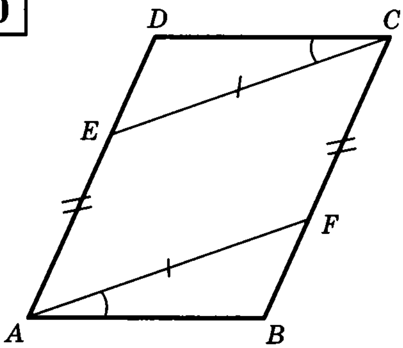


Окончание табл. 1

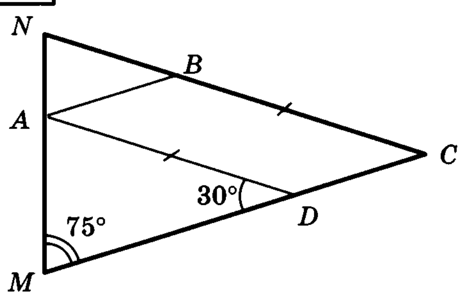
9 $AMCN$ — параллелограмм



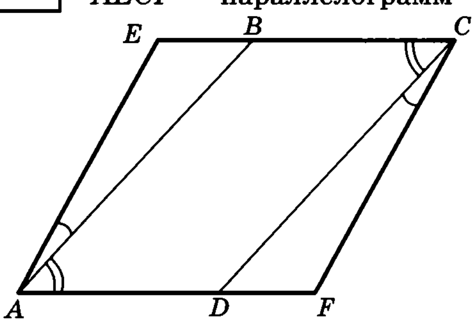
10



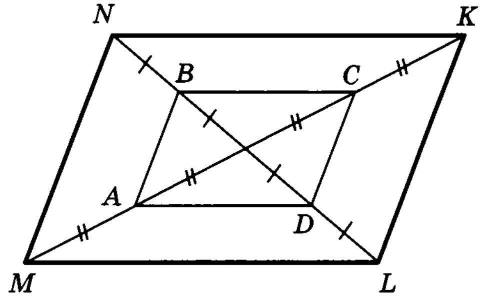
11 $MC = NC$



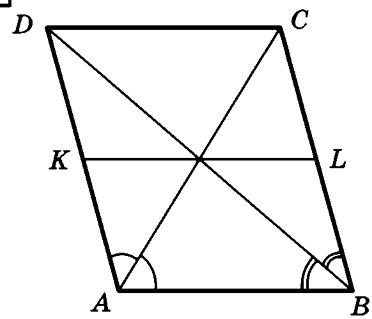
12 $AECF$ — параллелограмм



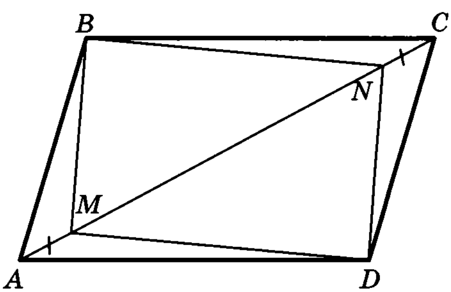
13 $MNKL$ — параллелограмм



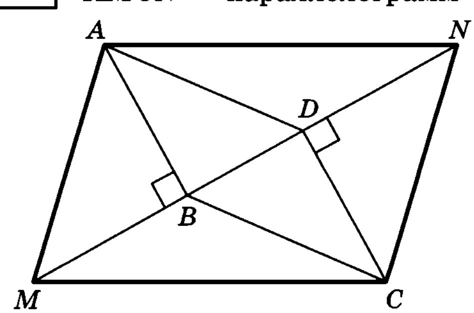
14 $AKLB$ — параллелограмм



15 $MBND$ — параллелограмм



16 $AMCN$ — параллелограмм

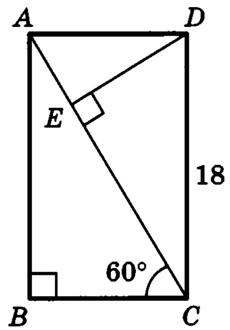


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

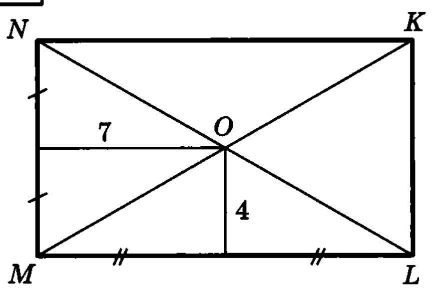
Найдите периметр параллелограмма. *Таблица 2*

1

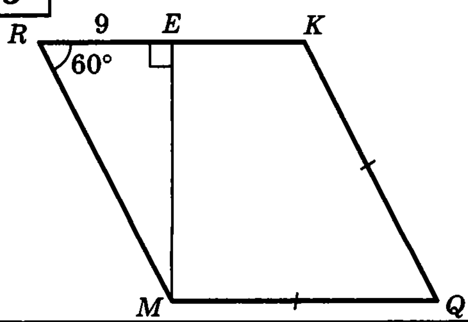
$AC = 22$



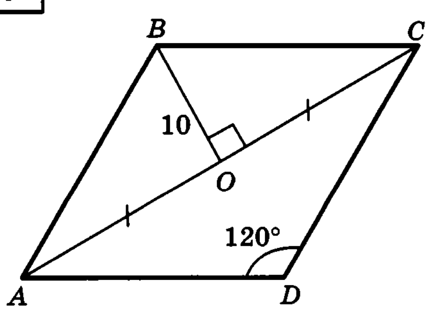
2



3

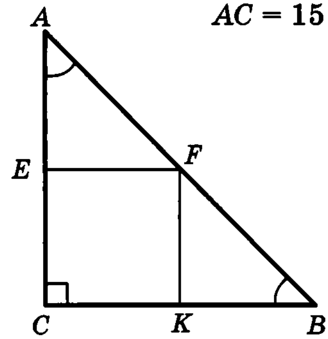


4



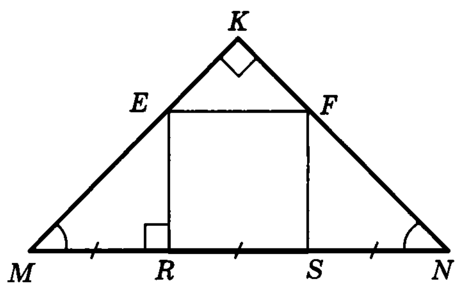
5

$AC = 15$



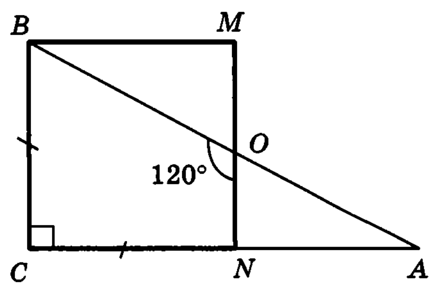
6

$MN = 30$

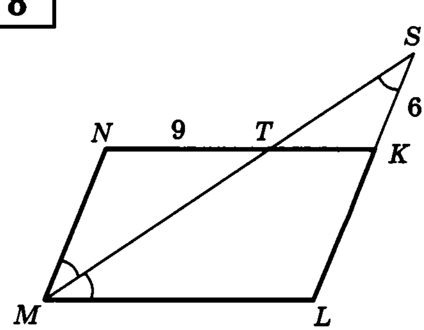


7

$AB = 24$

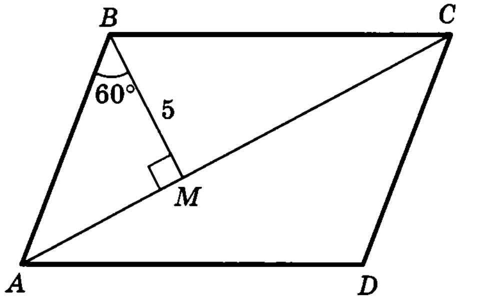


8

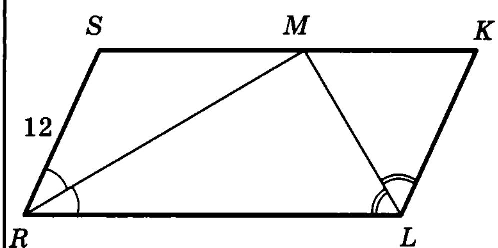


Окончание табл. 2

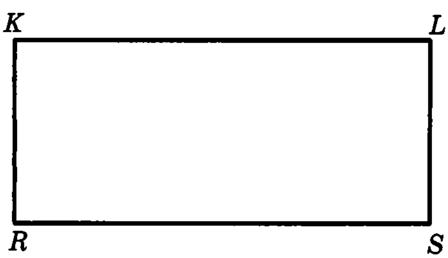
9 $BC = 2AB$



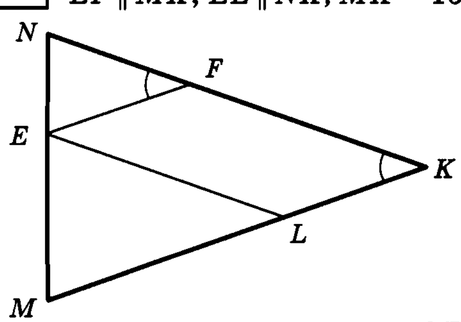
10



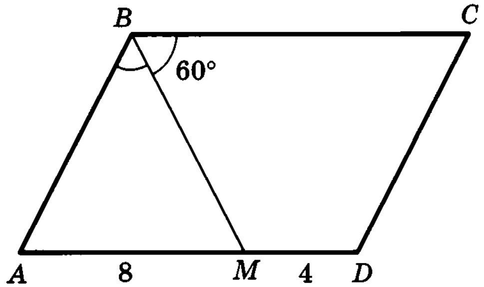
11 $KL - KR = 9$, $KL : KR = 5 : 2$



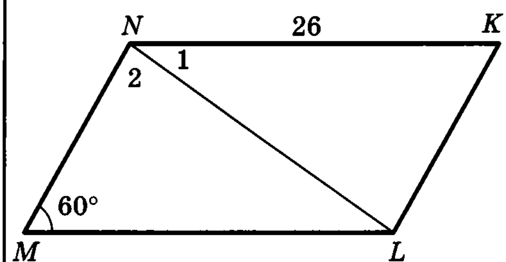
12 $EF \parallel MK$, $EL \parallel NK$, $MK = 15$



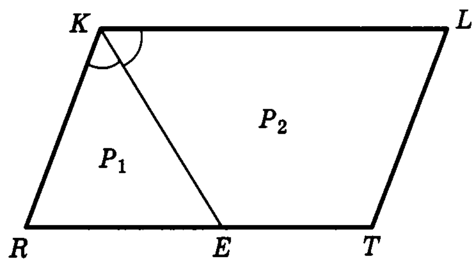
13



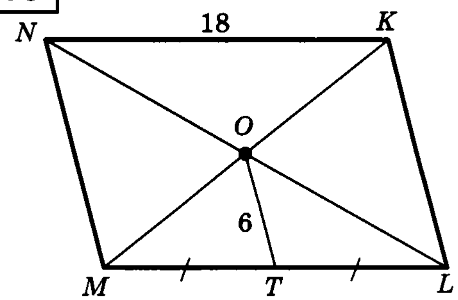
14 $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 3$



15 $KL : KR = 12 : 7$
$P_2 - P_1 = 10$



16

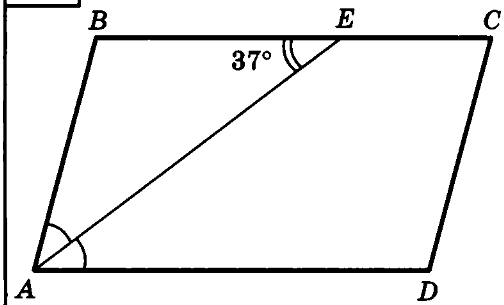


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

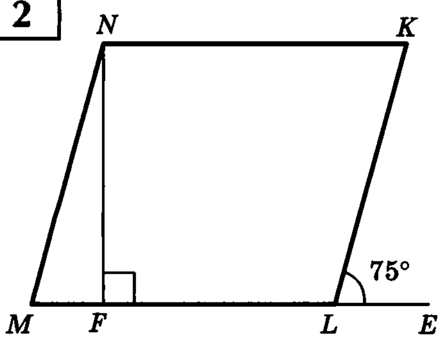
Найдите неизвестные углы.

Таблица 3

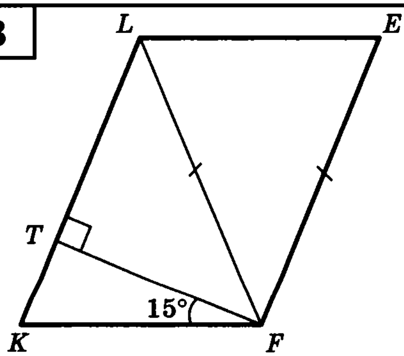
1



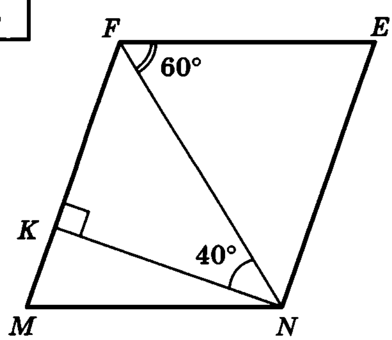
2



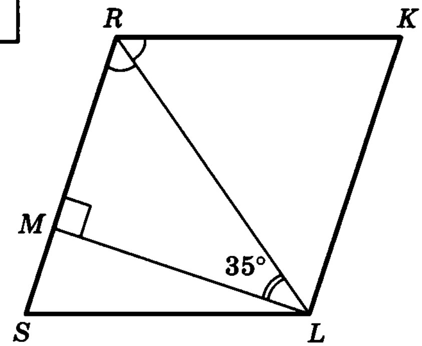
3



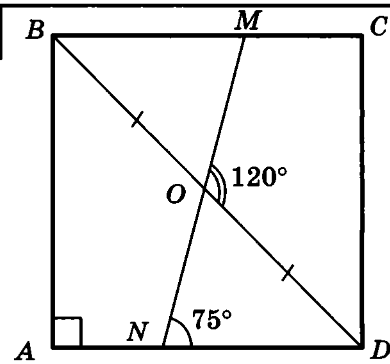
4



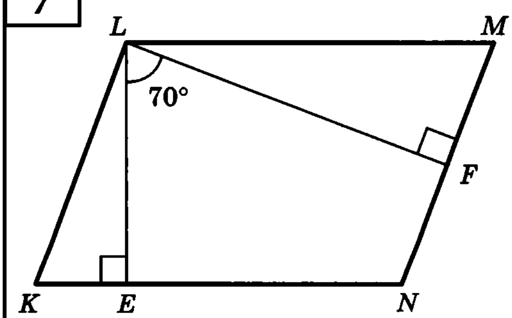
5



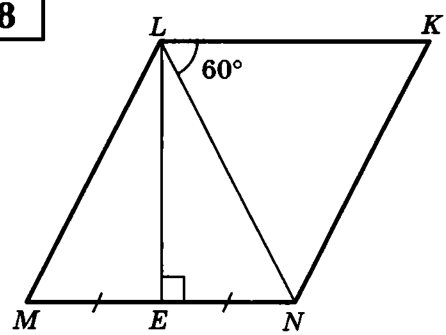
6



7

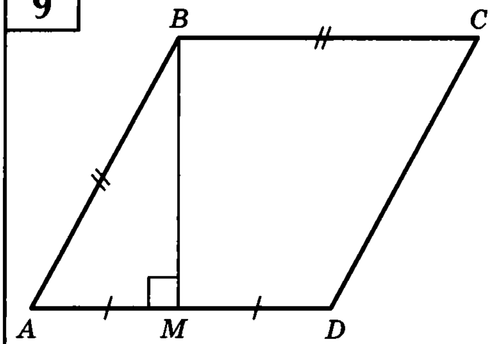


8

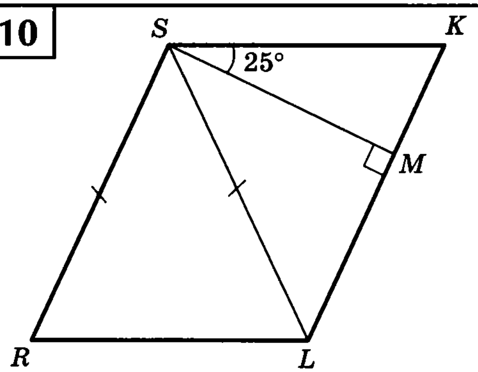


Окончание табл. 3

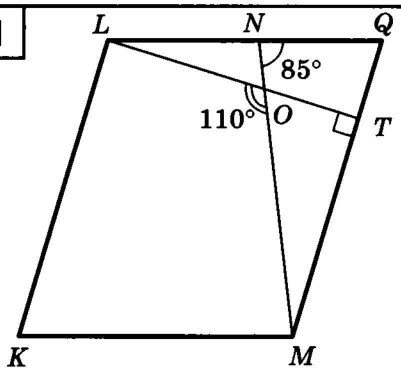
9



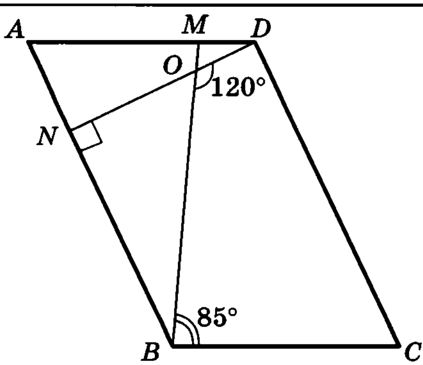
10



11

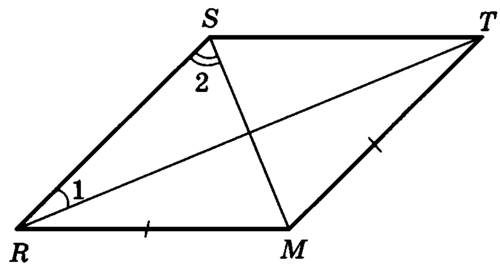


12



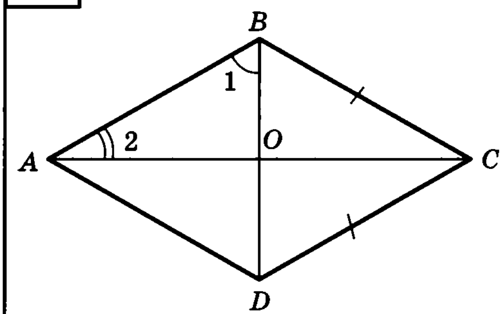
13

$\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$



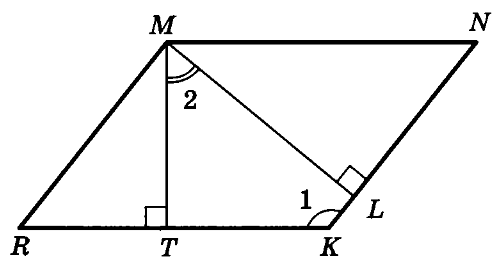
14

$\angle 1 - \angle 2 = 30°$

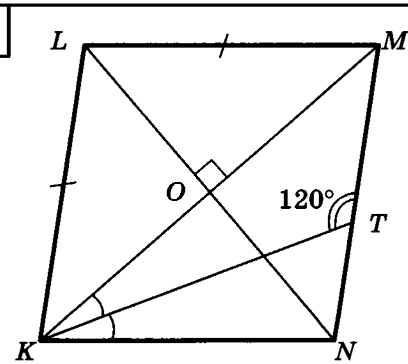


15

$\angle 1 - \angle 2 = 80°$



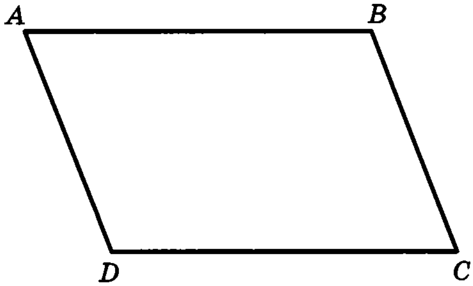
16



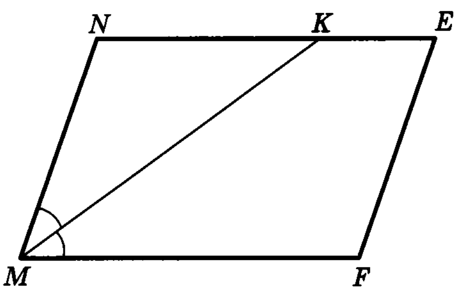
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Найдите стороны параллелограмма, если $P = 48$. *Таблица 4*

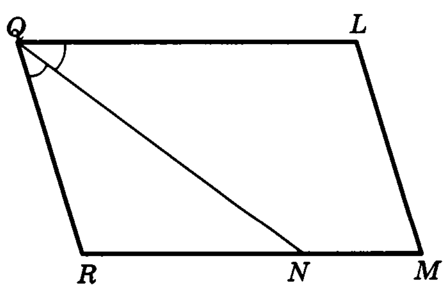
1 $AB - BC = 4$



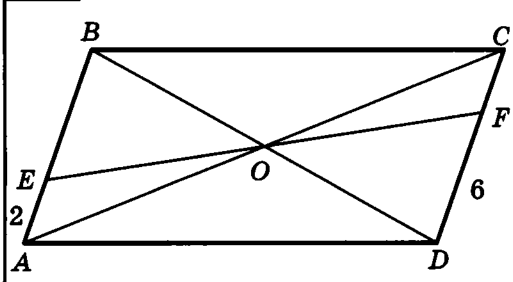
2 $NK : KE = 5 : 2$



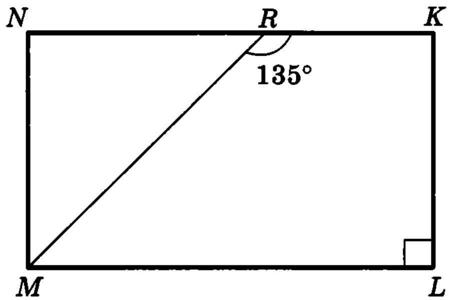
3 $QR - MN = 6$



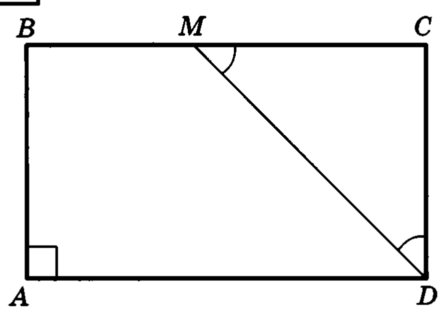
4



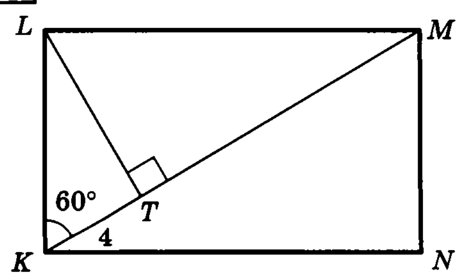
5 $MN - RK = 3$



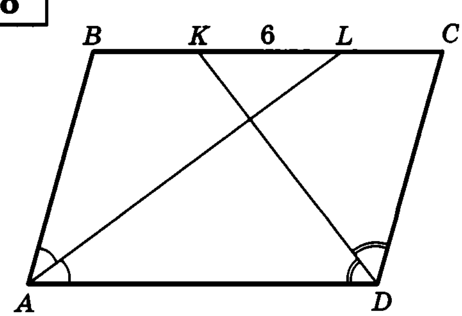
6 $AB + BM = 15$



7



8

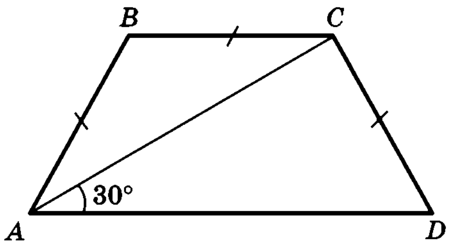


ТРАПЕЦИЯ

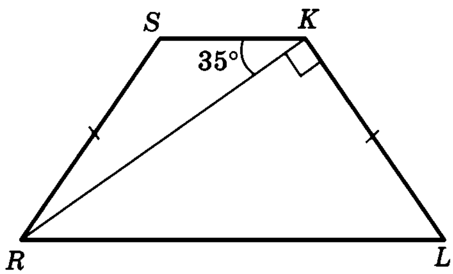
Таблица 5

Найдите углы трапеции.

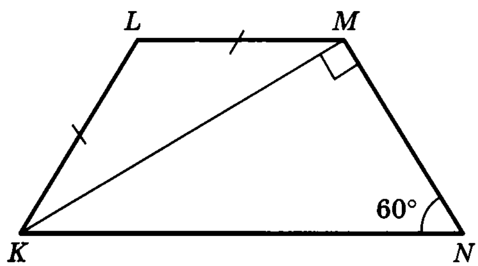
1



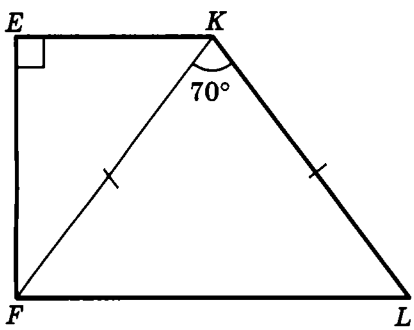
2



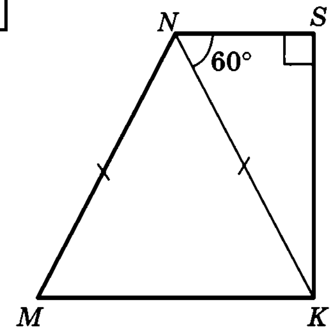
3



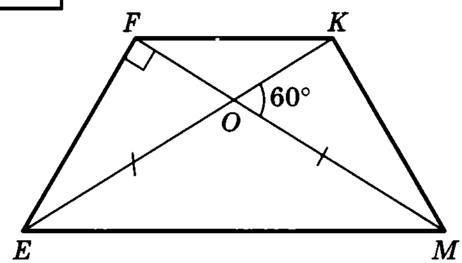
4



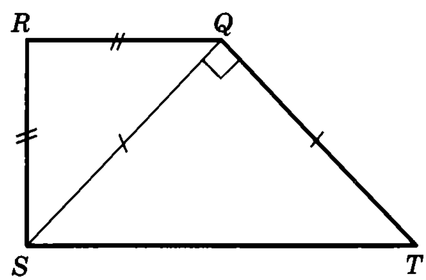
5



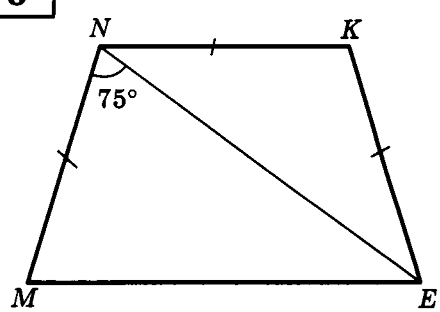
6



7

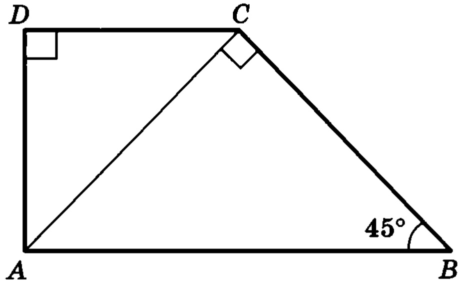


8



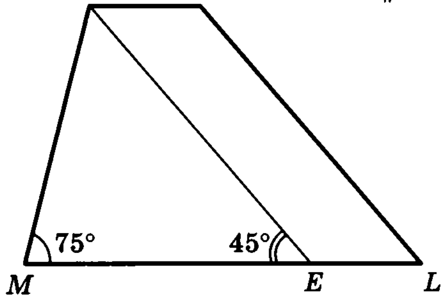
Продолжение табл. 5

9

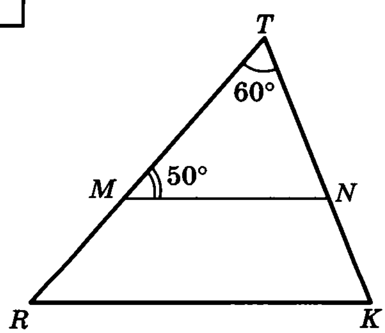


10

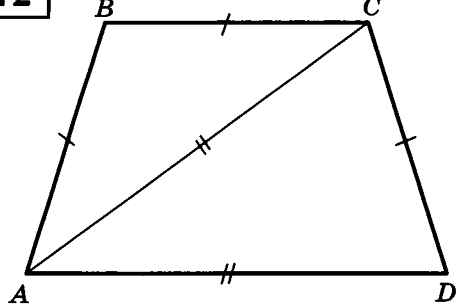
$NE \parallel KL$



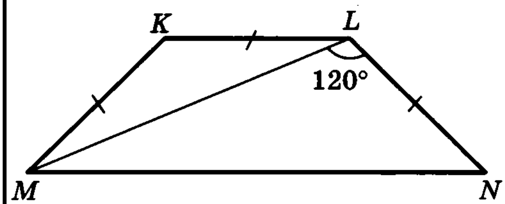
11



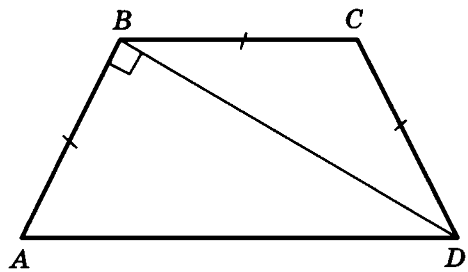
12



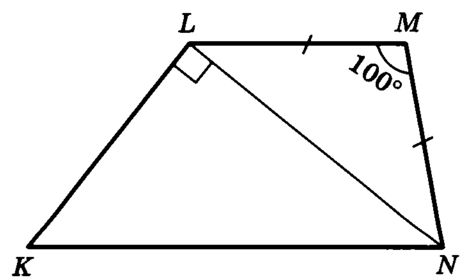
13



14

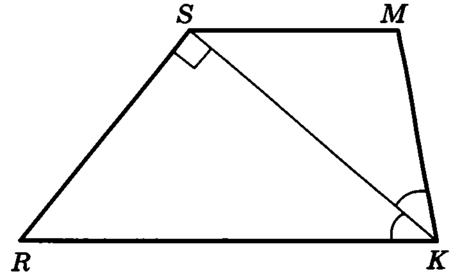


15



16

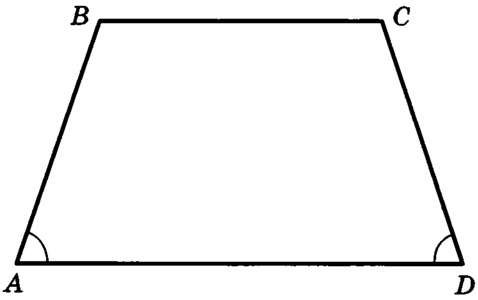
$\angle M : \angle MKR = 5 : 4$



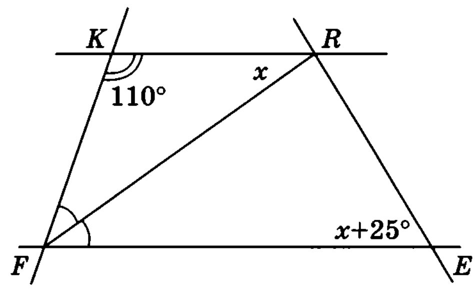
Окончание табл. 5

17

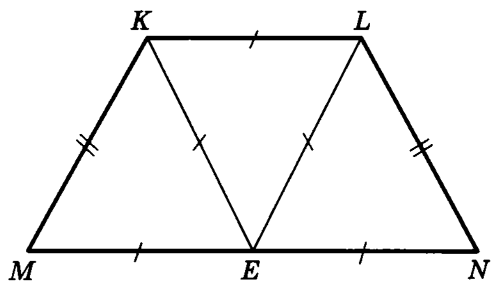
$\angle A : \angle B = 7 : 11$



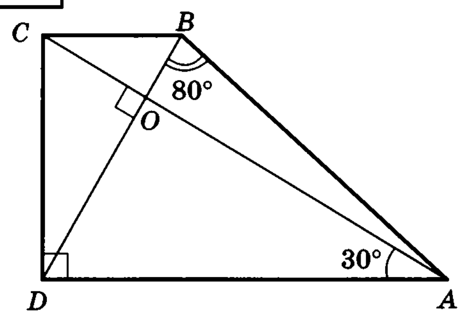
21



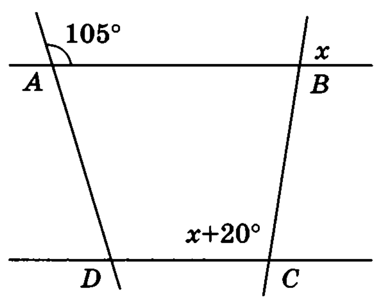
18



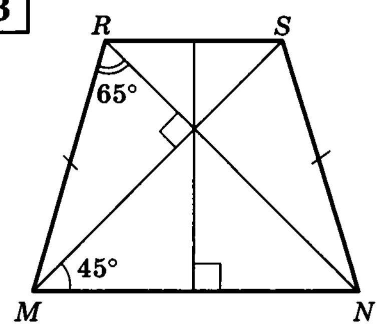
22



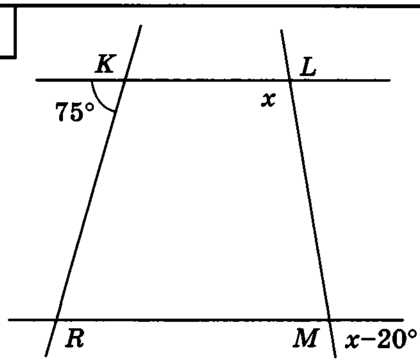
19



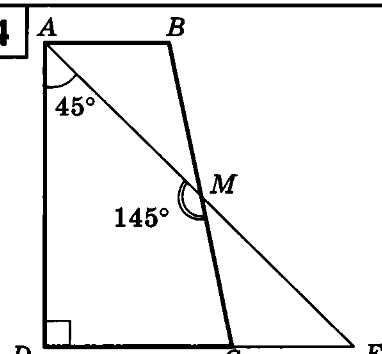
23



20



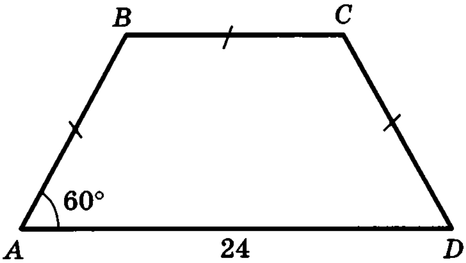
24



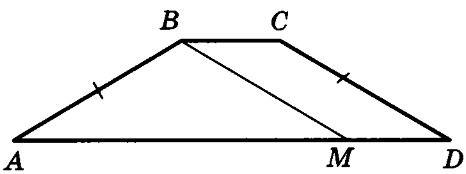
ТРАПЕЦИЯ

Найдите P_{ABCD}. *Таблица 6*

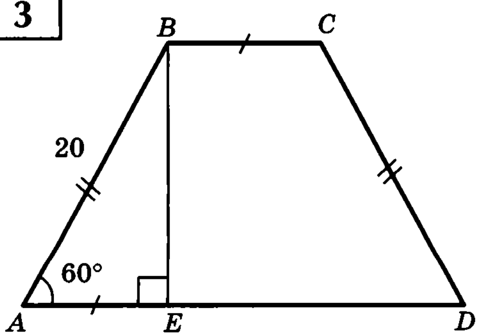
1



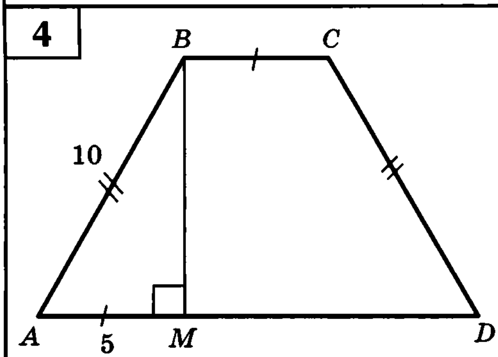
2 $BM \parallel CD$, $P_{\Delta ABM} = 29$



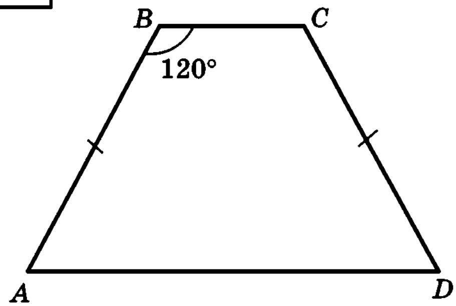
3



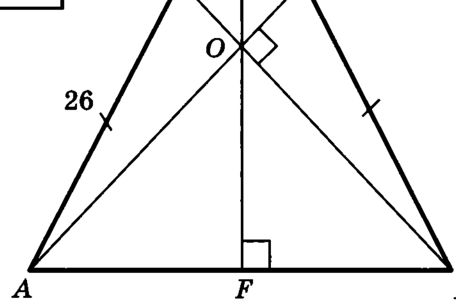
4



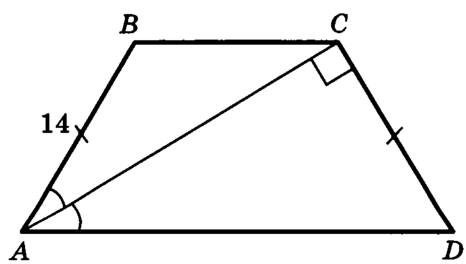
5 $AD : AB = 3 : 2$, $BC = 15$



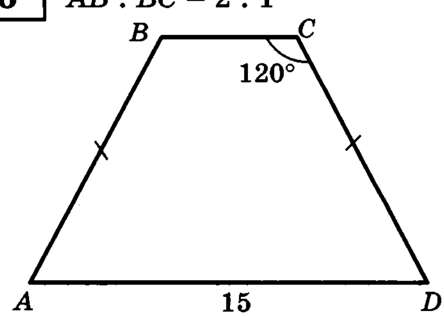
6 $EF = 24$



7



8 $AB : BC = 2 : 1$

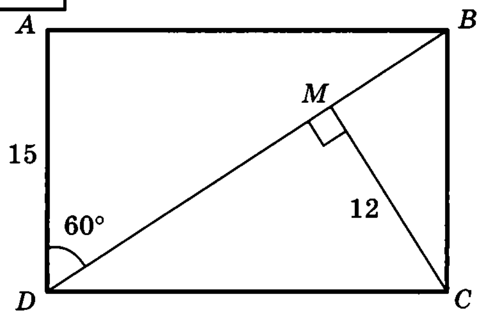


ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

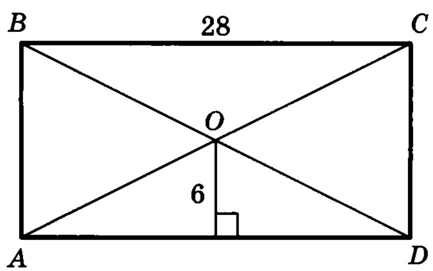
Таблица 7

Найдите S_{ABCD}.

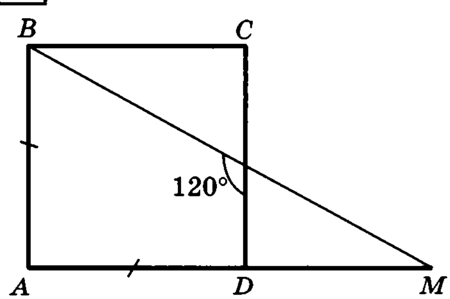
1



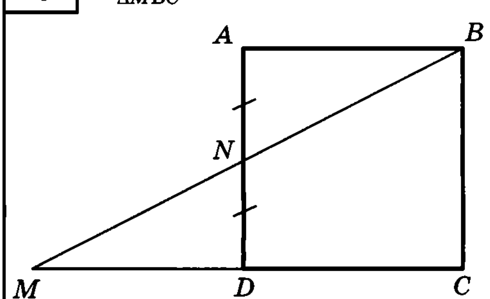
2



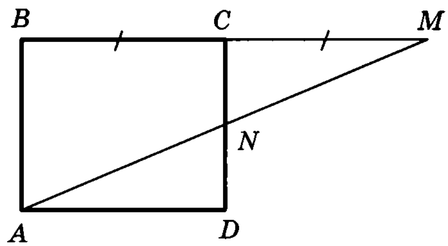
3 $BM = 34$



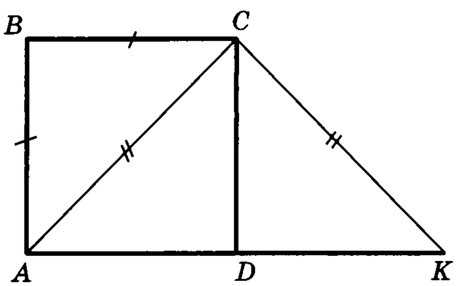
4 $S_{\Delta MBC} = 64$



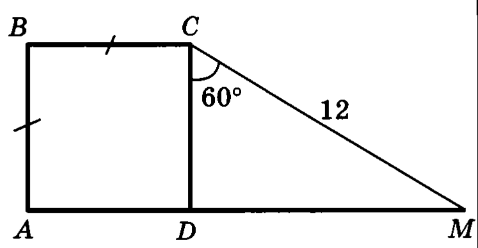
5 $P_{ABCD} = 56$, $BM - AB = 20$



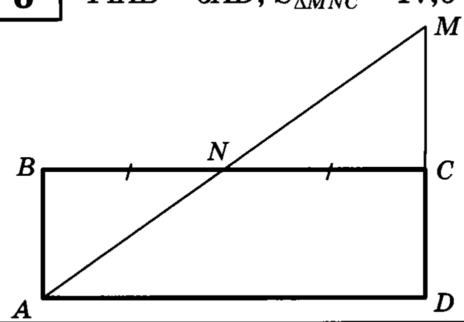
6 $S_{\Delta ACK} = 256$



7

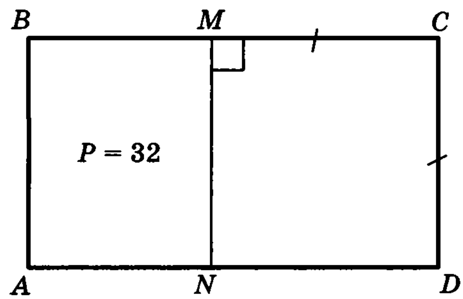


8 $14AB = 5AD$, $S_{\Delta MNC} = 17{,}5$

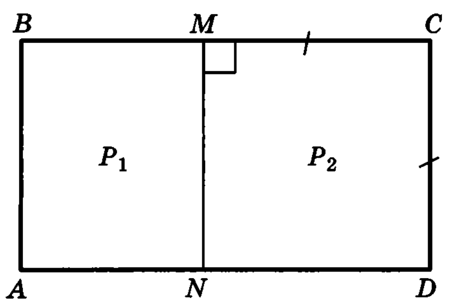


Продолжение табл. 7

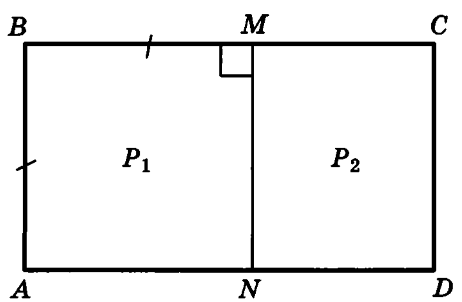
9 $MC - BM = 2$



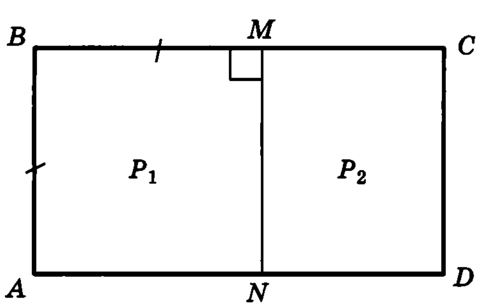
10 $P_2 - P_1 = 4$, $7AB = 9BM$



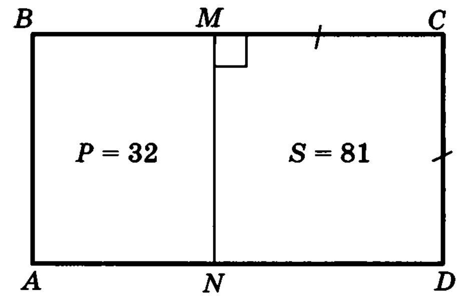
11 $P_1 : P_2 = 9 : 8$, $P_1 + P_2 = 68$



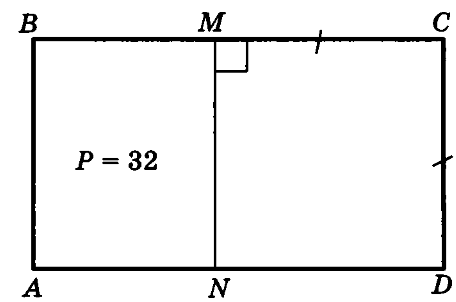
12 $P_1 + P_2 = 68$, $P_1 - P_2 = 4$



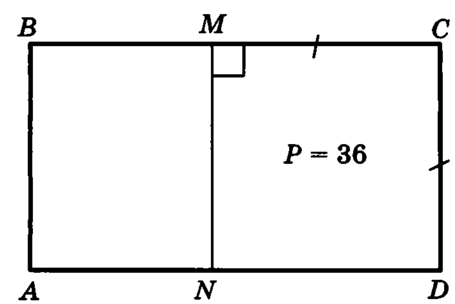
13



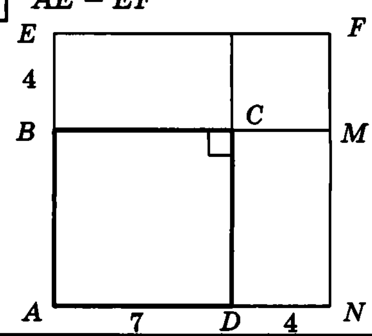
14 $P_{ABCD} = 50$



15 $P_{ABCD} = 50$

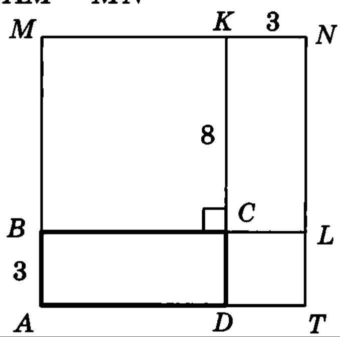


16 $AE = EF$

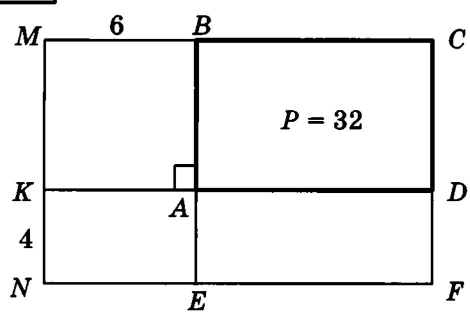


Окончание табл. 7

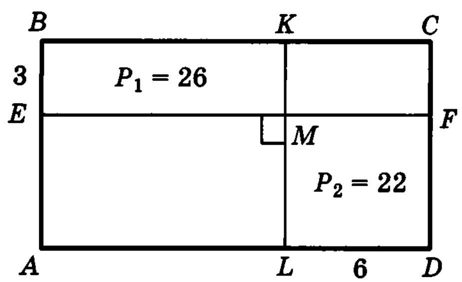
17 $AM = MN$



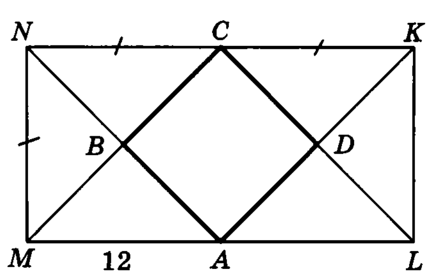
18



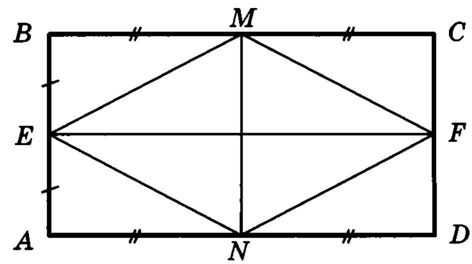
19



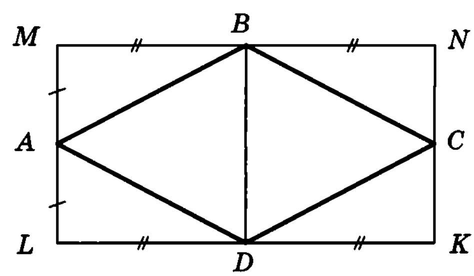
20



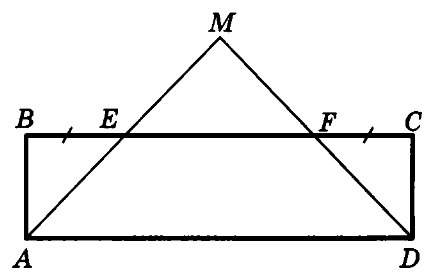
21 $S_{MENF} = 64$



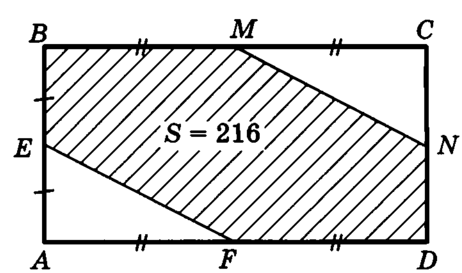
22 $S_{MNKL} = 288$



23 $AB : BC = 1 : 4$, $EF = 2BE$, $P_{\Delta MEF} = 16$



24

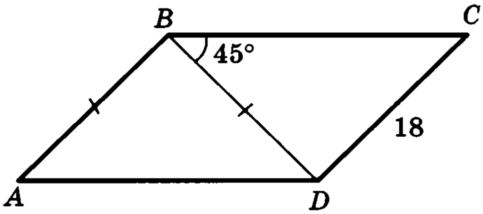


ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

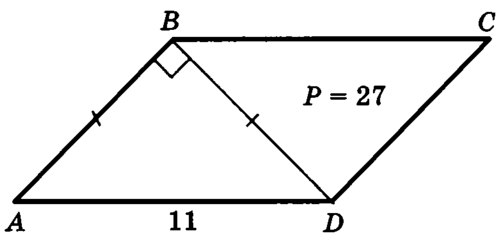
Найдите S_{ABCD}.

Таблица 8

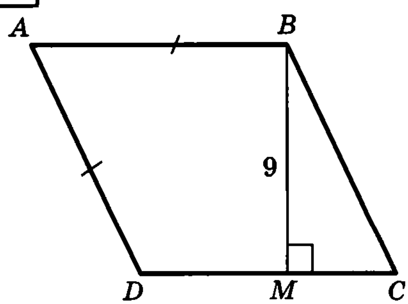
1



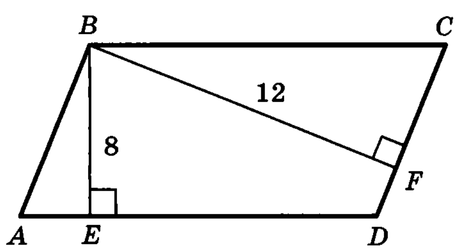
2



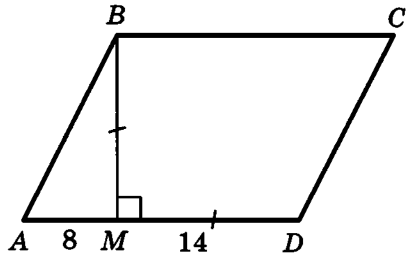
3 $P = 40$



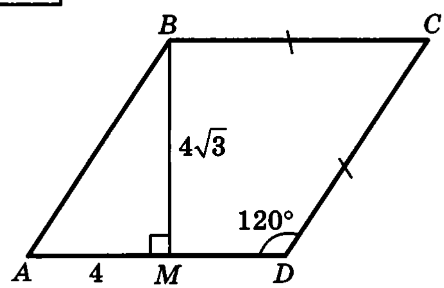
4 $P = 50$



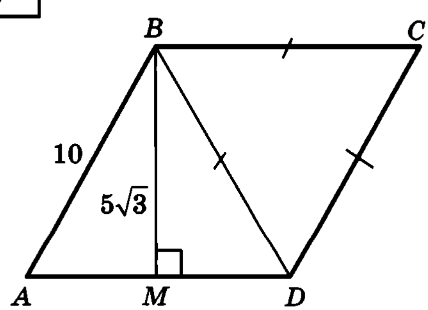
5



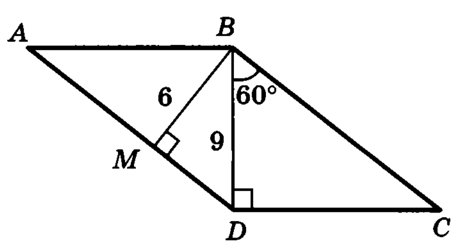
6



7

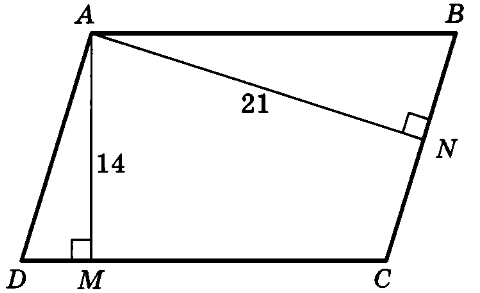


8

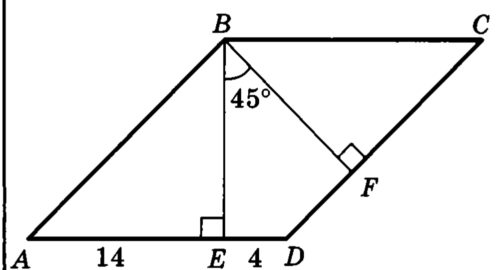


Продолжение табл. 8

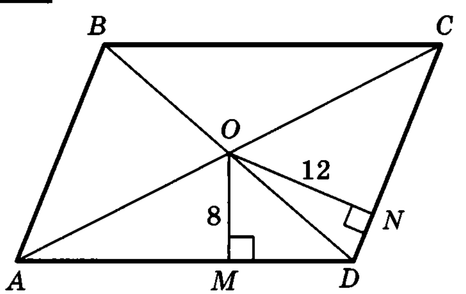
9 $AB - BC = 8$



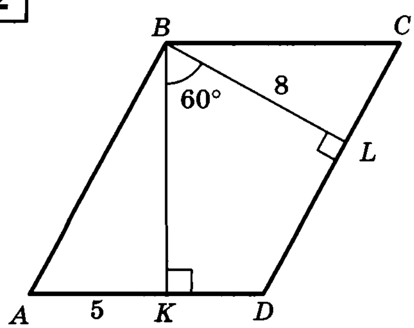
10



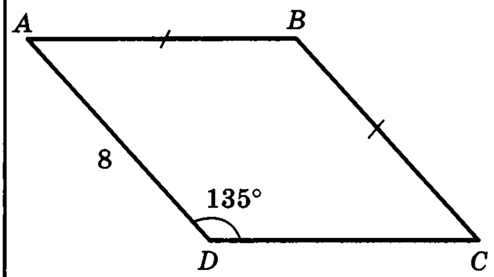
11 $P = 80$



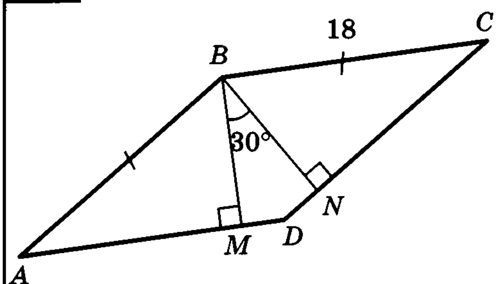
12



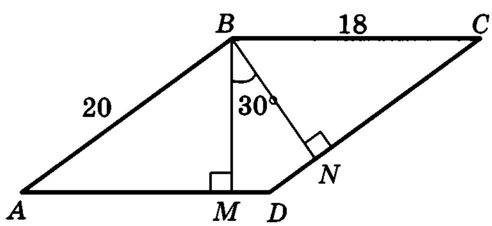
13



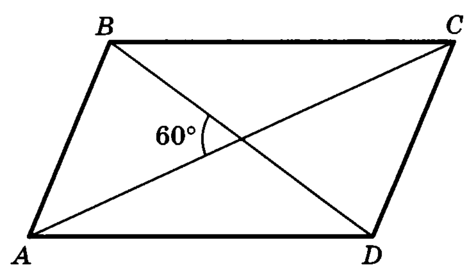
14



15

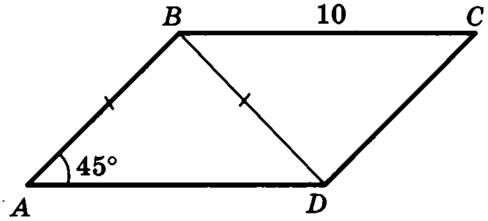


16 $AC = 24,\ BD = 18$

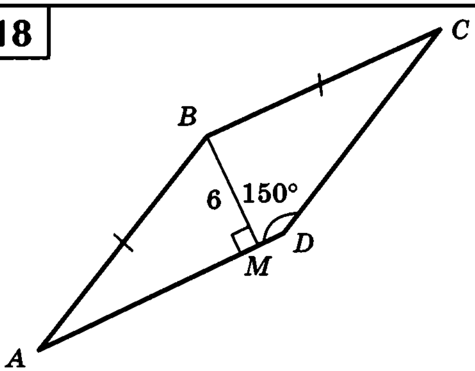


Окончание табл. 8

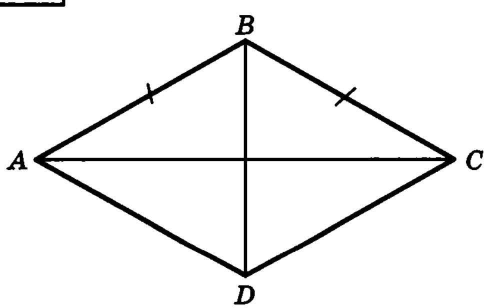
17



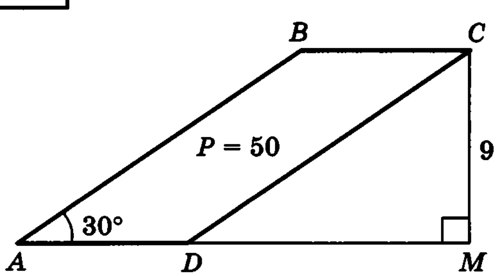
18



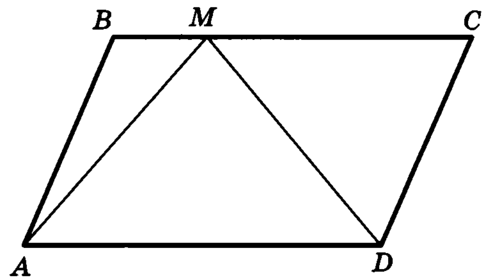
19 $AC : BD = 7 : 4, AC + BD = 33$



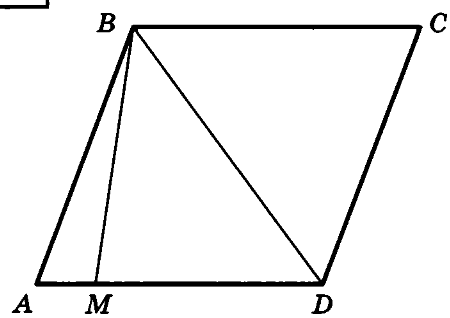
20



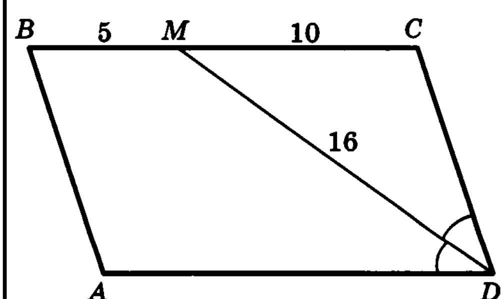
21 $S_{\Delta AMD} = 42$



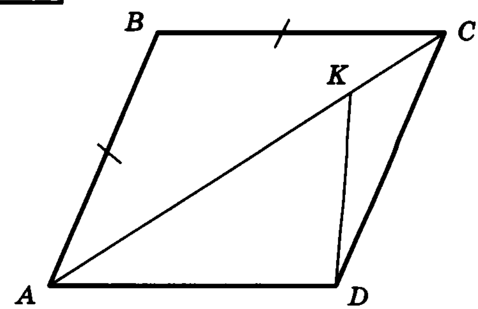
22 $S_{\Delta ABM} = 12, AM : MD = 1 : 3$



23 $S_{\Delta MCD} = 48$



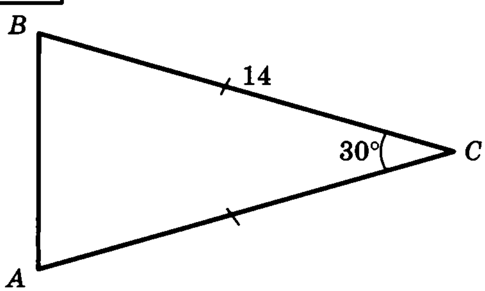
24 $S_{\Delta AKD} = 32,\ AK : KC = 4 : 1$



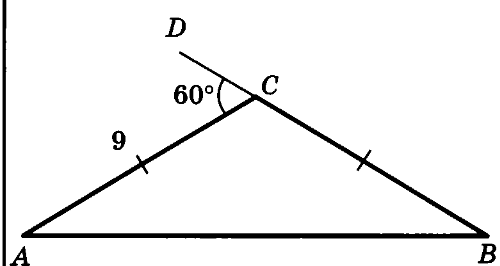
ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Найдите $S_{\Delta ABC}$. *Таблица 9*

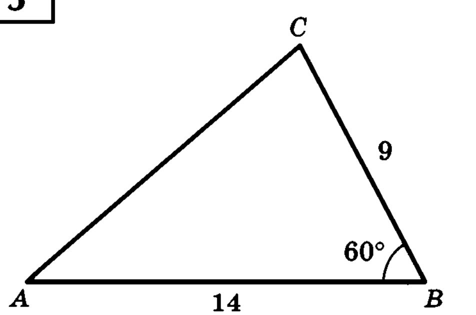
1



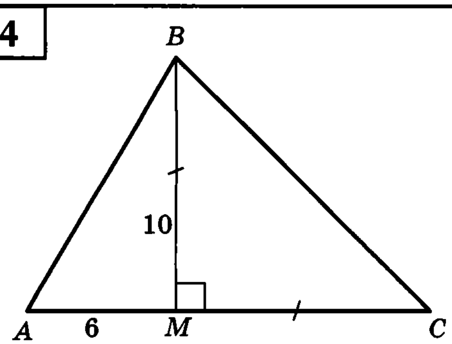
2



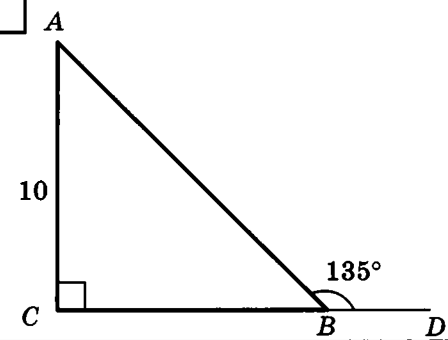
3



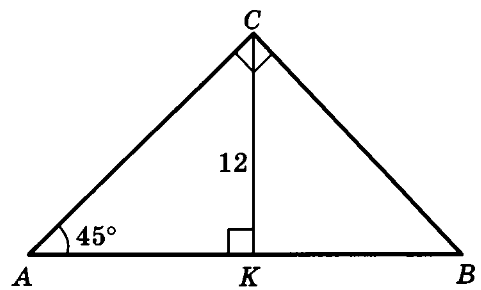
4



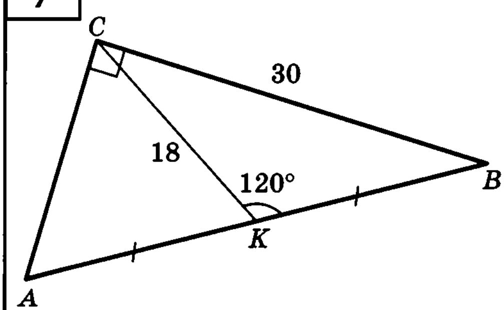
5



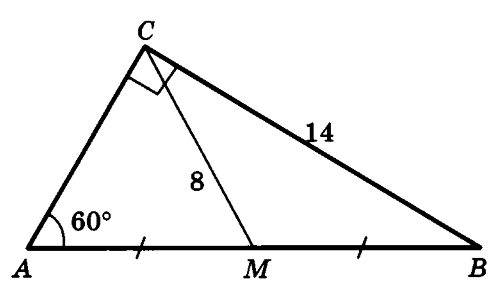
6



7

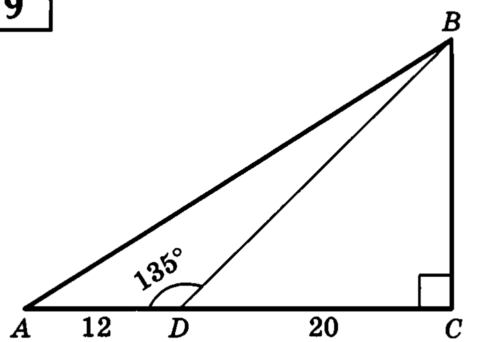


8

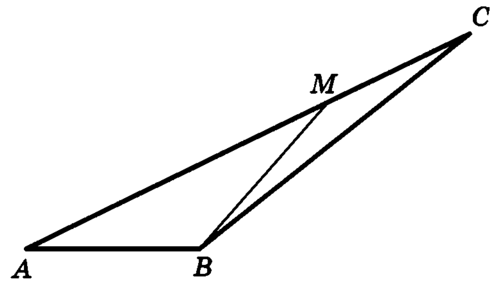


Продолжение табл. 9

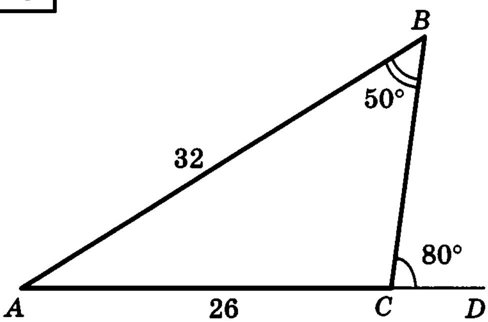
9



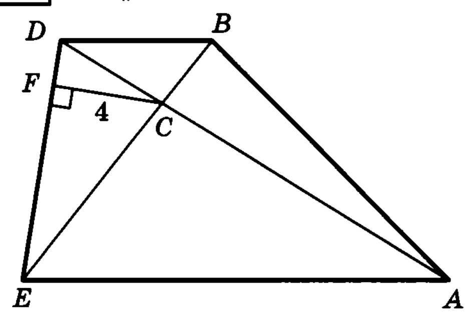
13 $AM : MC = 2 : 1$, $S_{\Delta ABM} = 30$



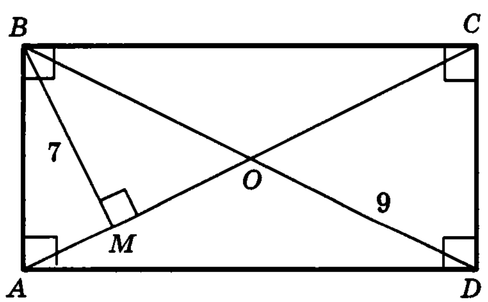
10



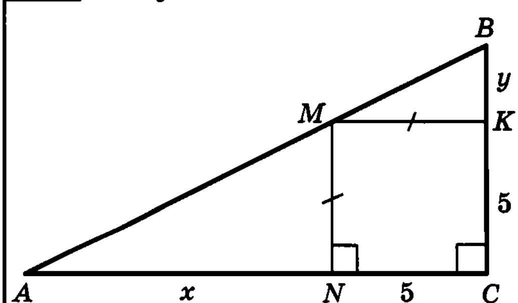
14 $AE \parallel BD$, $DE = 9$



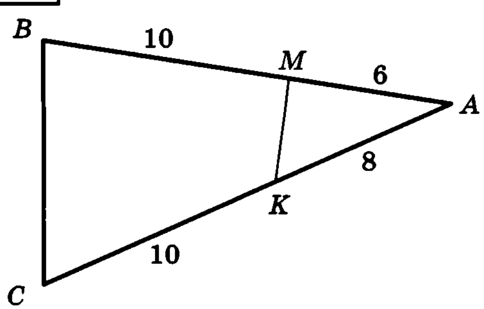
11



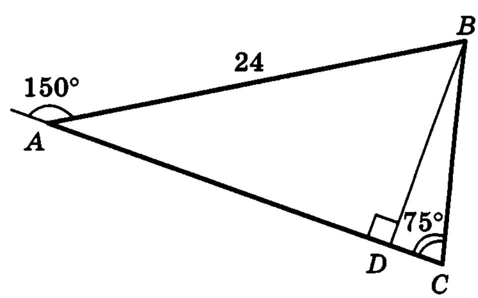
15 $x + y = 14$



12 $S_{\Delta AKM} = 13$

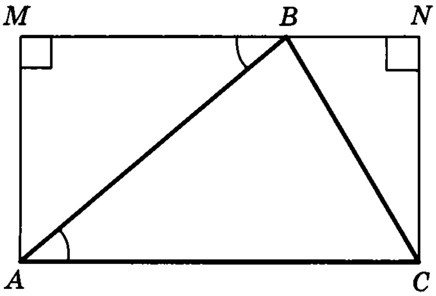


16

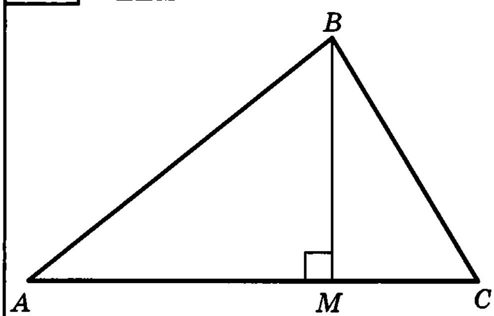


Окончание табл. 9

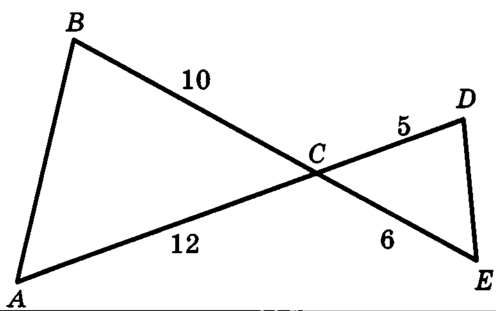
17 $S_{AMNC} = 56$



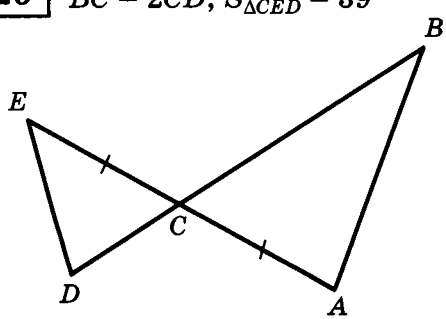
18 $S_{\Delta ABM} = 44$, $AM : MC = 11 : 5$



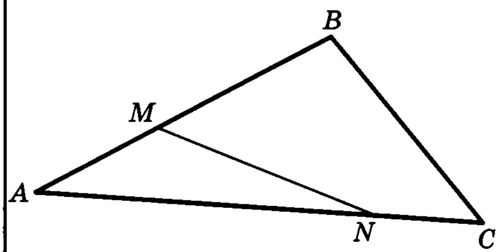
19 $S_{\Delta CDE} = 13$



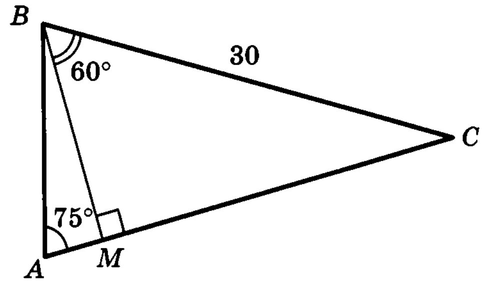
20 $BC = 2CD$, $S_{\Delta CED} = 39$



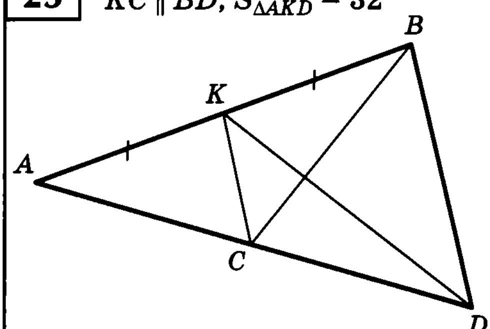
21 $AB = AN$, $AC = 3AM$, $S_{\Delta MAN} = 36$



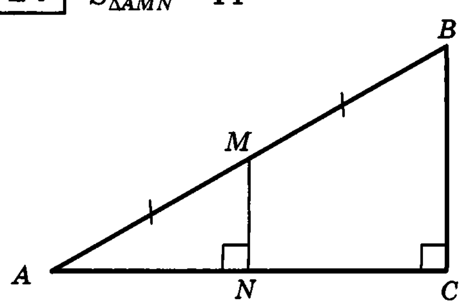
22



23 $KC \parallel BD$, $S_{\Delta AKD} = 32$



24 $S_{\Delta AMN} = 14$

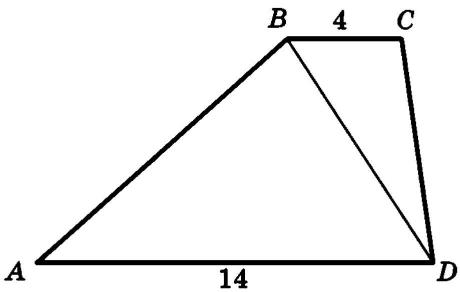


ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

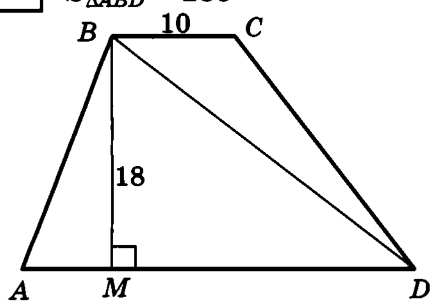
Найдите S_{ABCD}.

Таблица 10

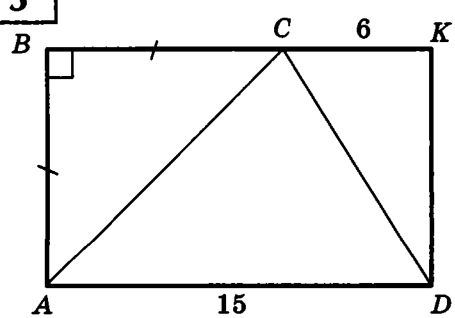
1 $S_{\Delta ABD} = 56$



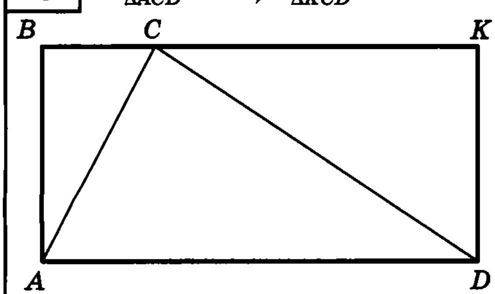
2 $S_{\Delta ABD} = 288$



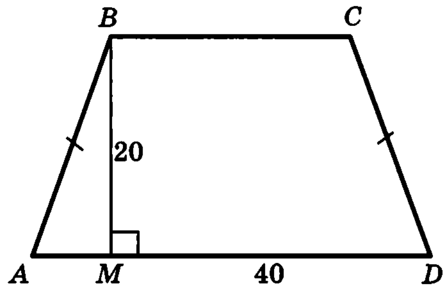
3



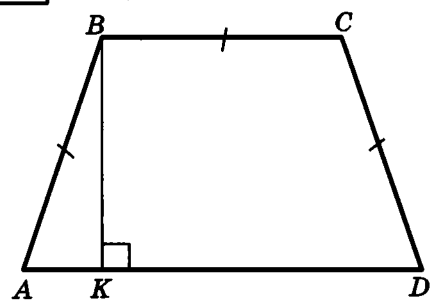
4 $S_{\Delta ACD} = 64$, $S_{\Delta KCD} = 48$



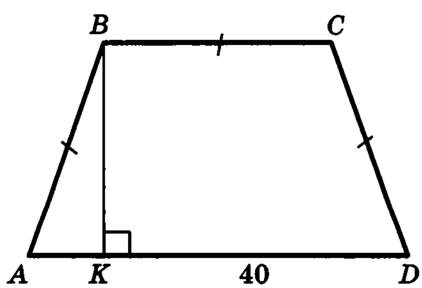
5



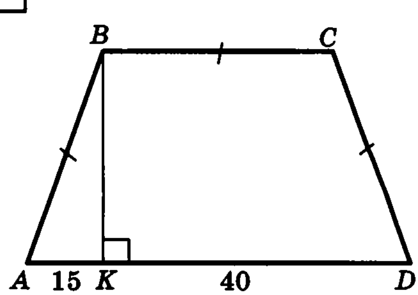
6 $P_{ABCD} = 130$, $AD = 55$



7 $P_{ABCD} = 130$

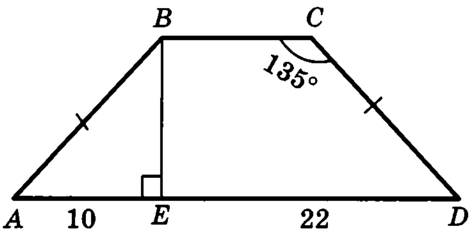


8

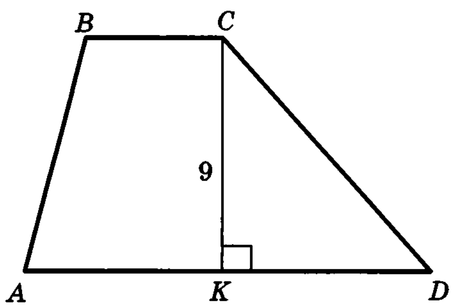


Продолжение табл. 10

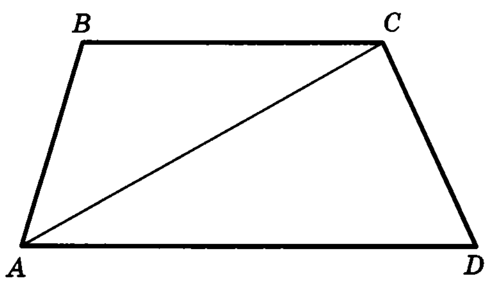
9



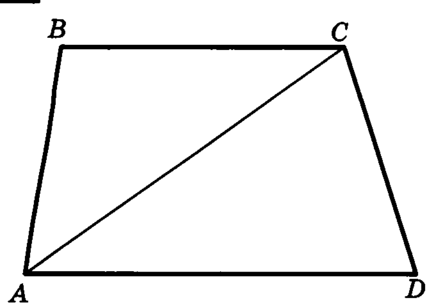
10 $AD = 3BC$, $CK = 75\%\ AD$



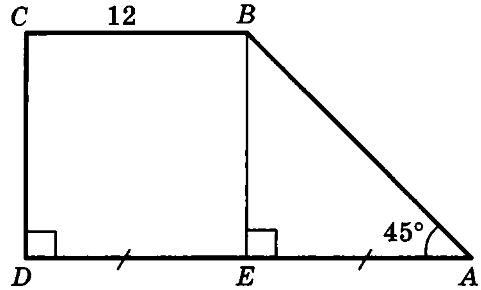
11 $AD : BC = 4 : 3$, $S_{\Delta ABC} = 30$



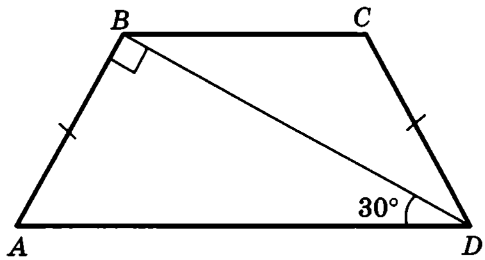
12 $AD : BC = 4 : 5$, $S_{\Delta ACD} = 35$



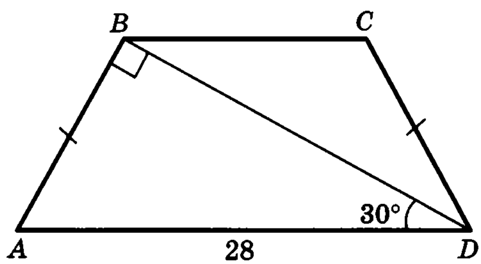
13



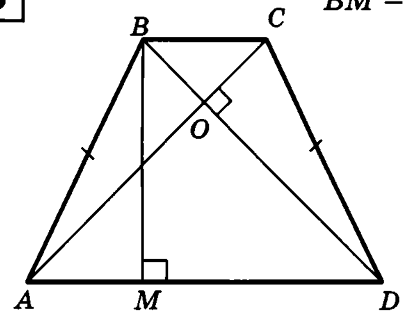
14 $P_{ABCD} = 70$



15

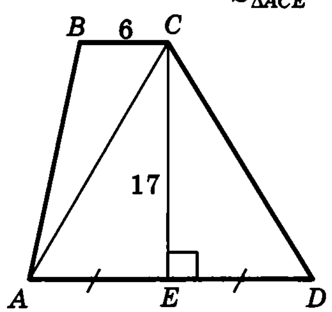


16 $BM = 10$

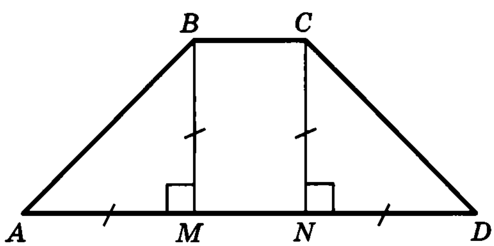


Продолжение табл. 10

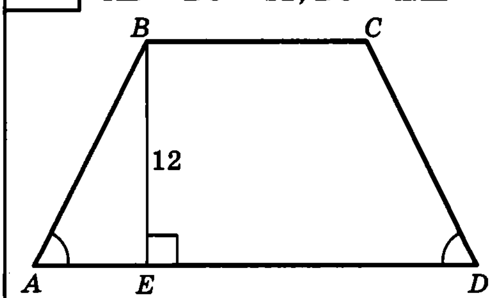
17 $S_{\Delta ACE} = 85$



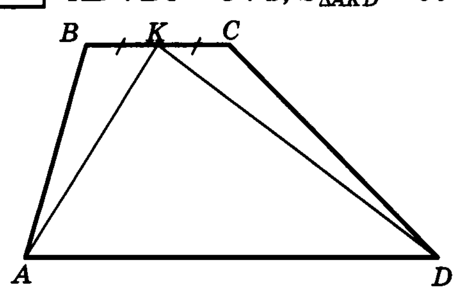
18 $AD - BC = 18$, $S_{BMNC} = 54$



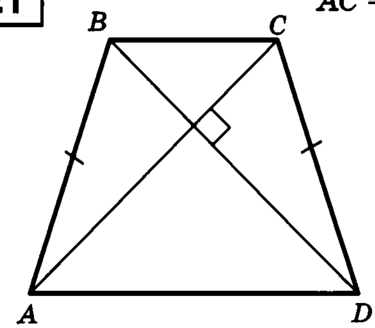
19 $AD - BC = 12$, $BC = 2AE$



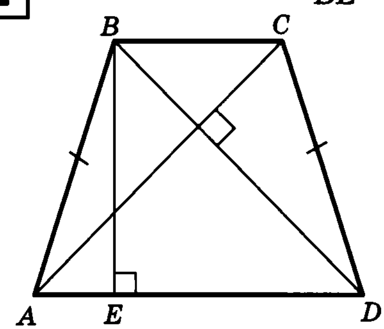
20 $AD : BC = 3 : 1$, $S_{\Delta AKD} = 60$



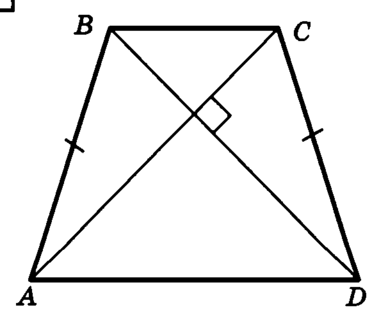
21 $AC = 26$



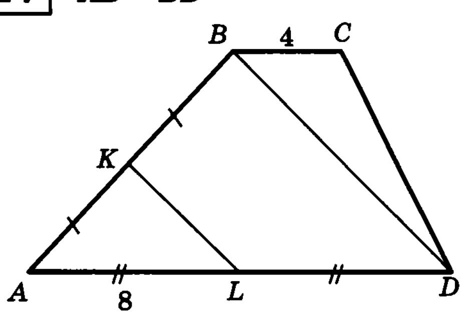
22 $BE = 9$



23 $AD + BC = 18$

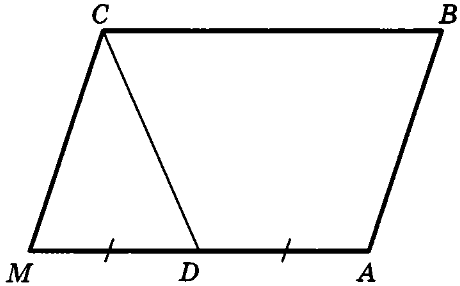


24 $AB = BD$

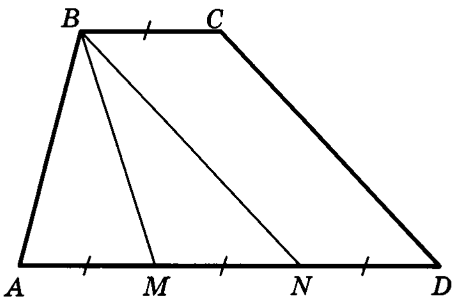


Окончание табл. 10

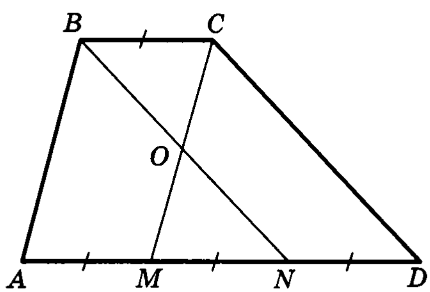
25 $S_{MCBA} = 180$



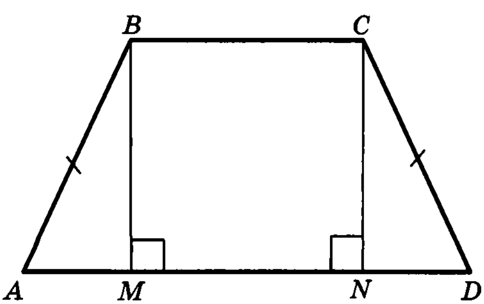
26 $S_{\Delta BMN} = 105$



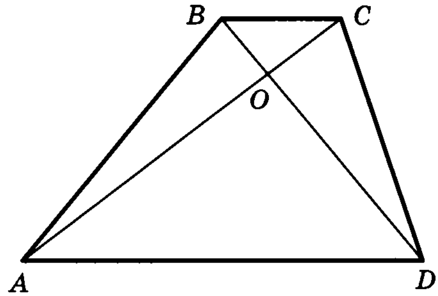
27 $S_{\Delta BOC} = 10$



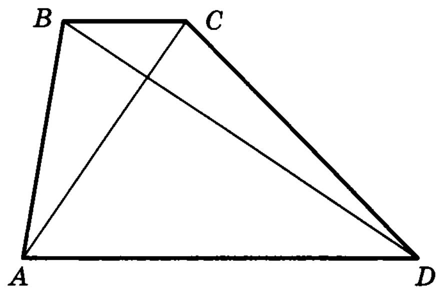
28 $BC = 2AM = 8$



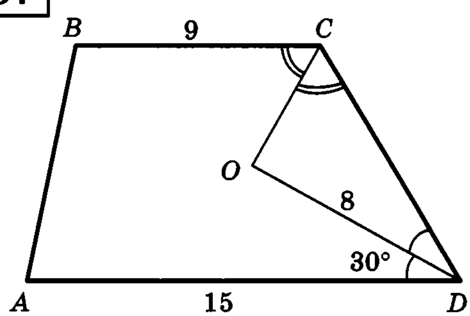
29 $S_{\Delta BOC} = 4,\ S_{\Delta AOD} = 25$



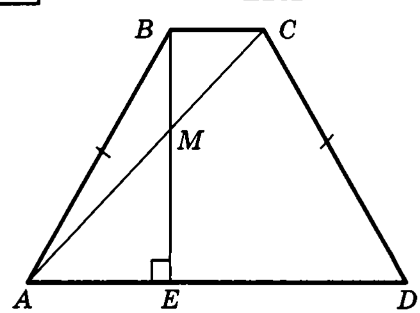
30 $S_{\Delta ACD} = 270,\ S_{\Delta BCD} = 90$



31



32* $AD = 5BC,\ S_{\Delta AME} = 16$



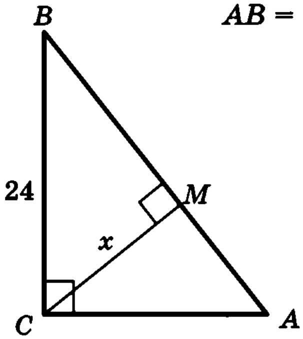
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Таблица 11

Найдите x.

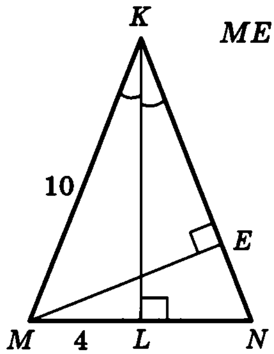
1

$AB = 25$



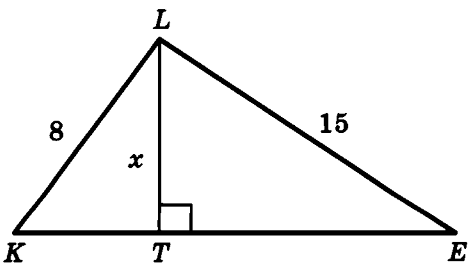
2

$ME = x$

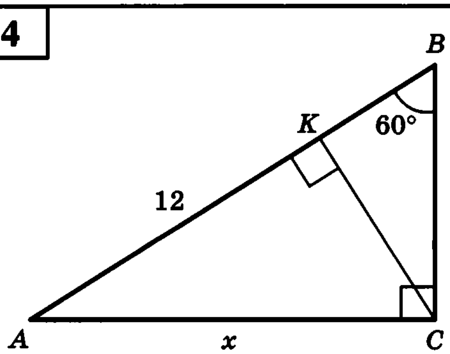


3

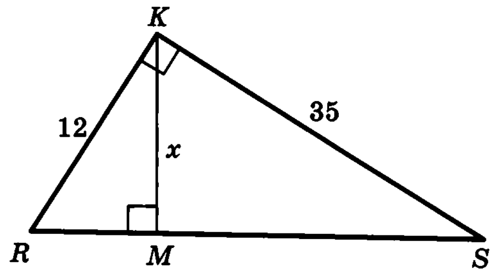
$KE = 17$



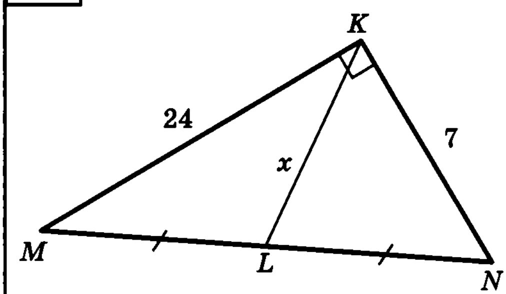
4



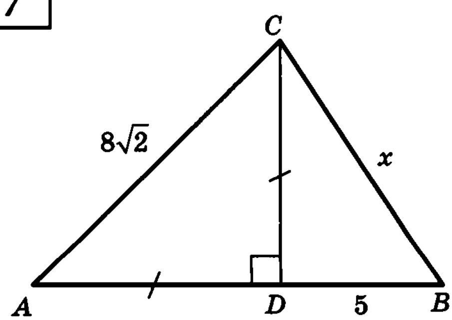
5



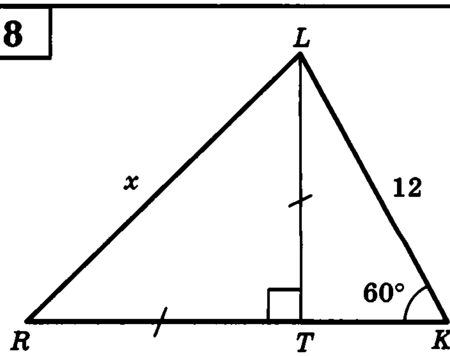
6



7

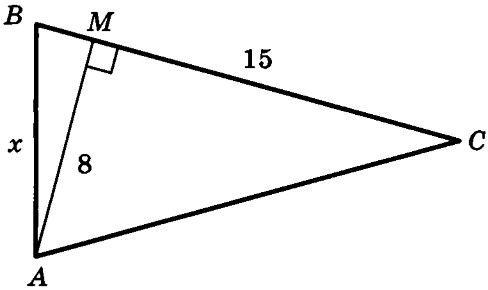


8

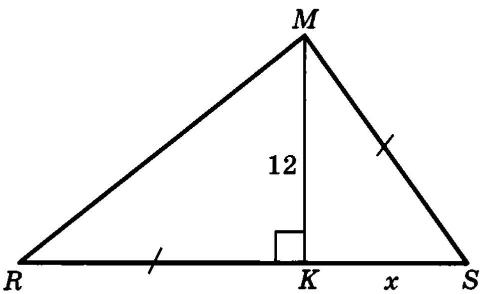


Продолжение табл. 11

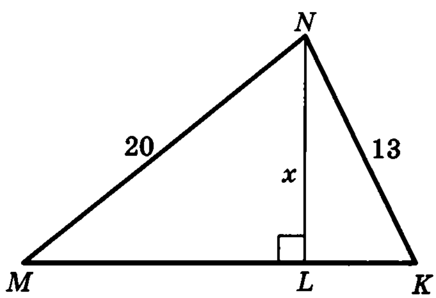
9 $AC = BC$



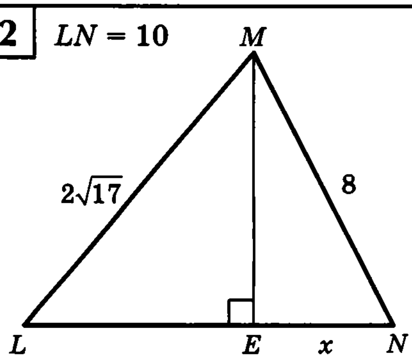
10 $RS = 18$



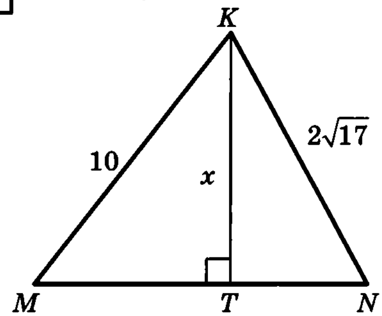
11 $MK = 21$



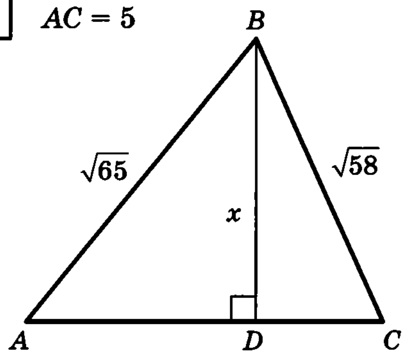
12 $LN = 10$



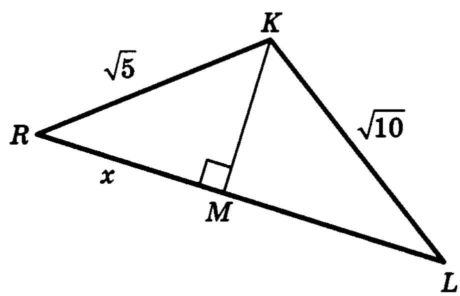
13 $MN = 8$



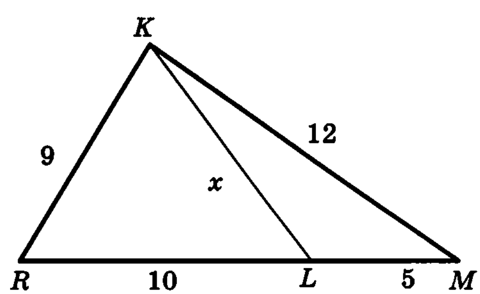
14 $AC = 5$



15 $RL = \sqrt{18}$

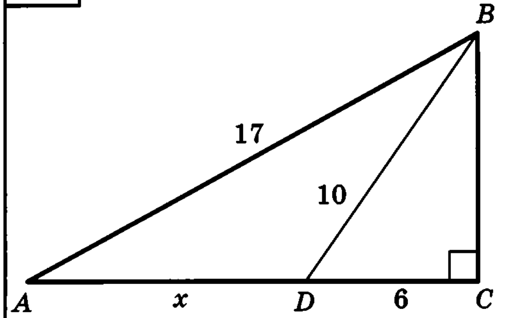


16*

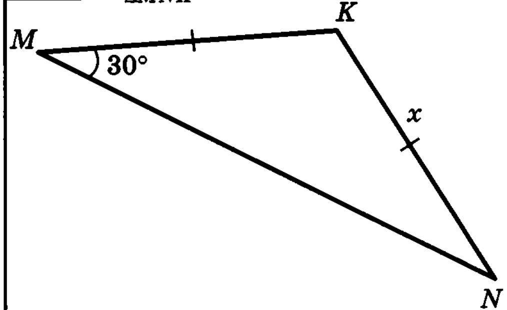


Продолжение табл. 11

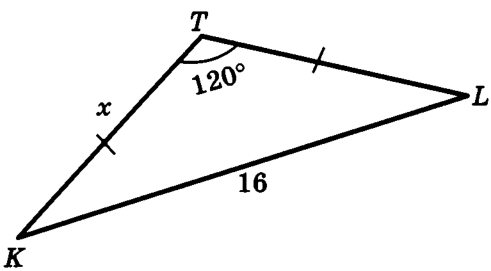
17



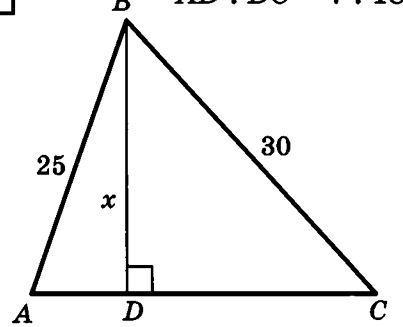
21 $S_{\Delta MNK} = 81\sqrt{3}$



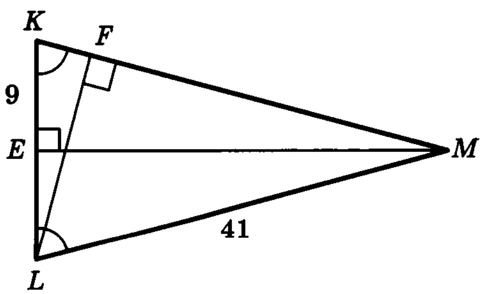
18



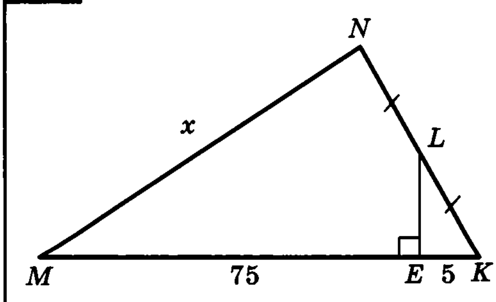
22 $AD : DC = 7 : 18$



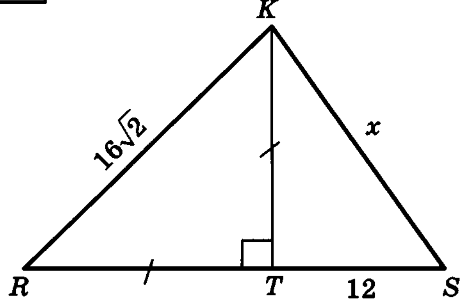
19 $LF = x$



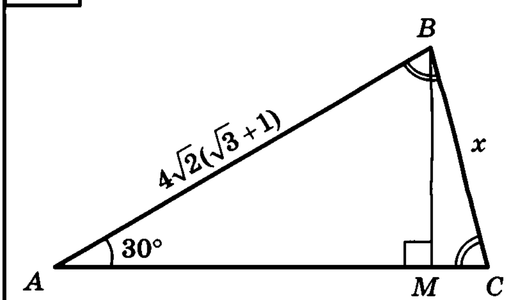
23 $S_{\Delta MNK} = 960$



20

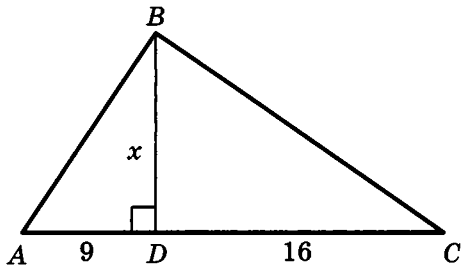


24*

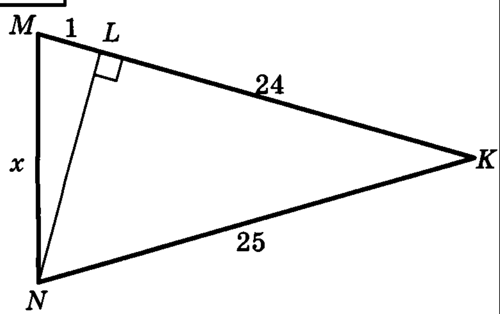


Продолжение табл. 11

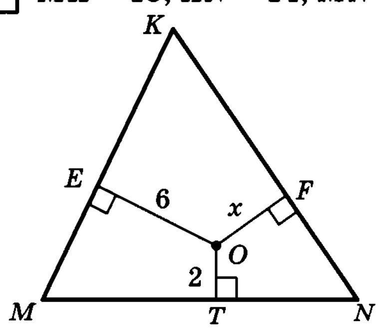
25 $AB : BC = 3 : 4$



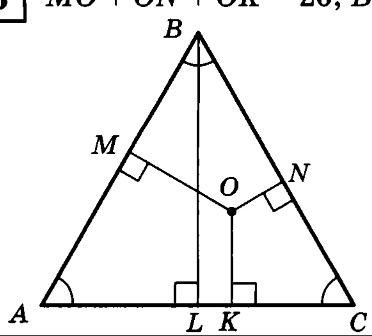
26



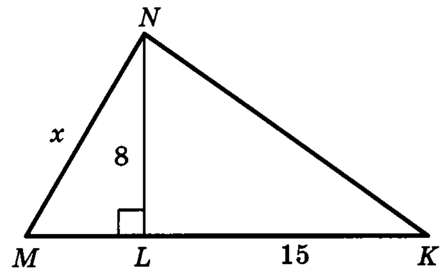
27 $MK = 13,\ KN = 14,\ MN = 15$



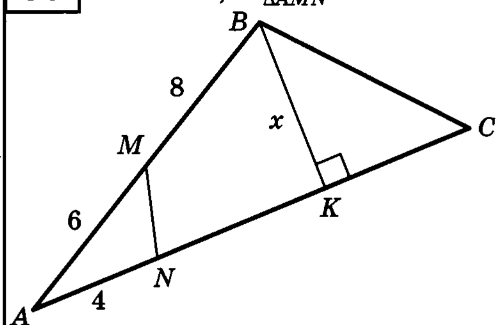
28 $MO + ON + OK = 26,\ BL = x$



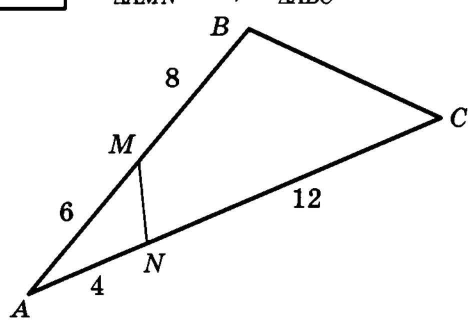
29 $MN + ML = 16$



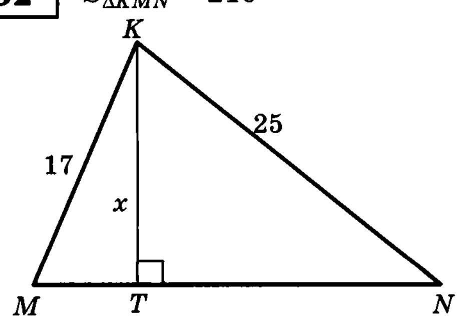
30 $NC = 12,\ S_{\Delta AMN} = 9$



31 $S_{\Delta AMN} = 9,\ S_{\Delta ABC} = x$

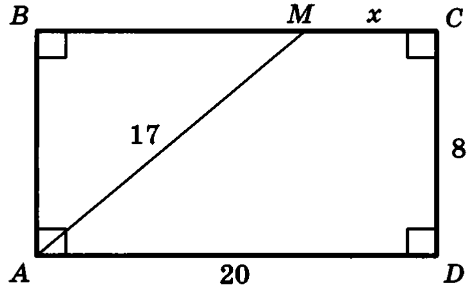


32* $S_{\Delta KMN} = 210$

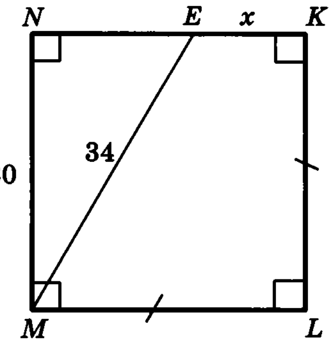


Продолжение табл. 11

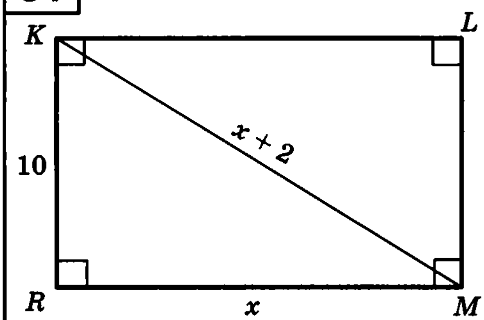
33



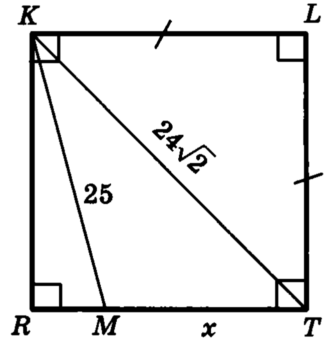
37



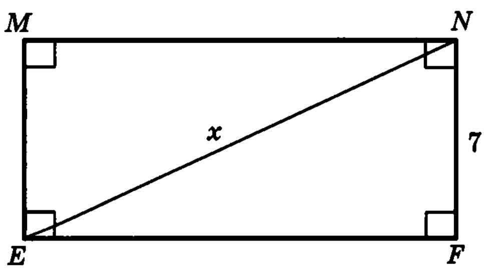
34



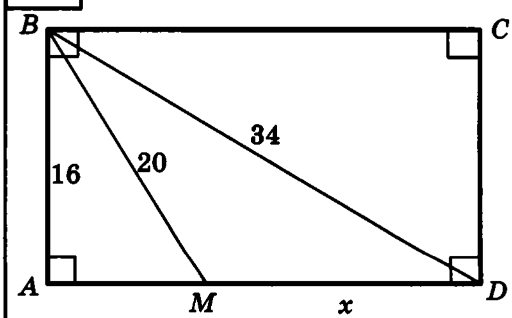
38



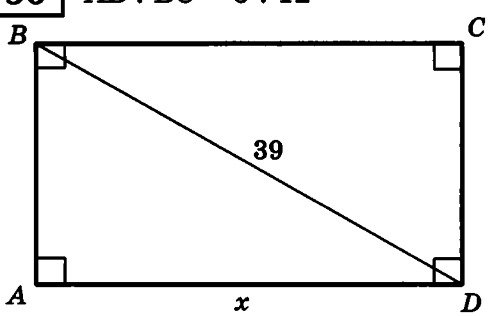
35 $P_{EMNF} = 62$



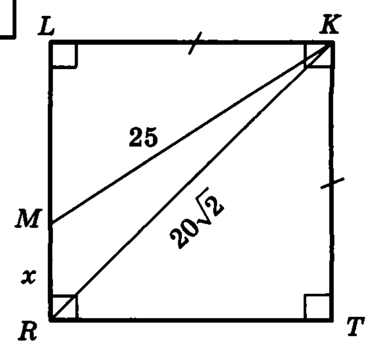
39



36 $AB : BC = 5 : 12$

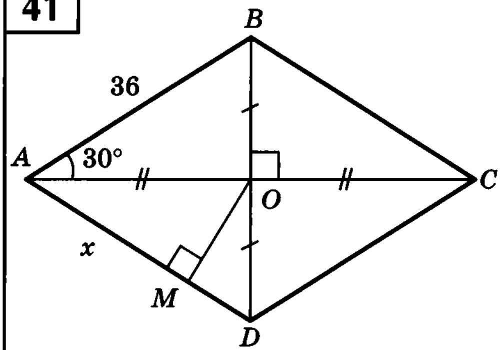


40

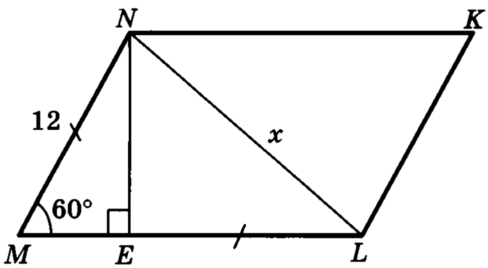


Продолжение табл. 11

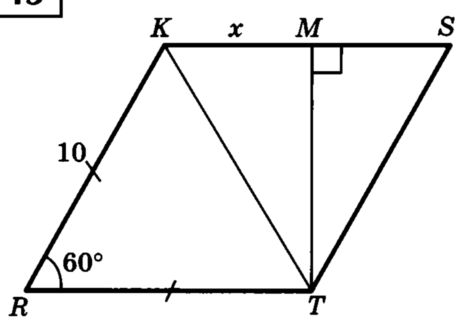
41



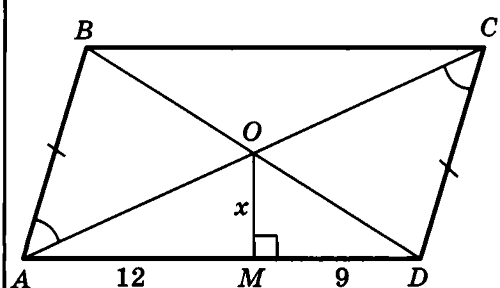
42 $MNKL$ — параллелограмм



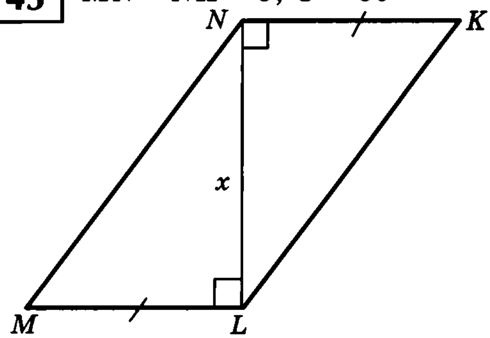
43



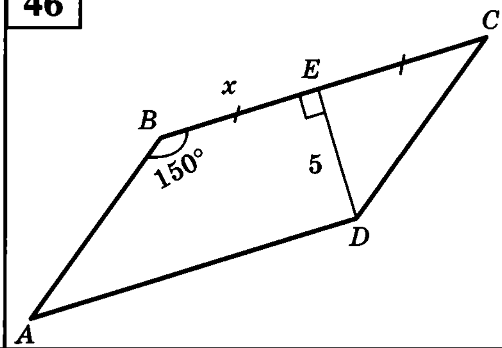
44 $S_{ABCD} = 252$



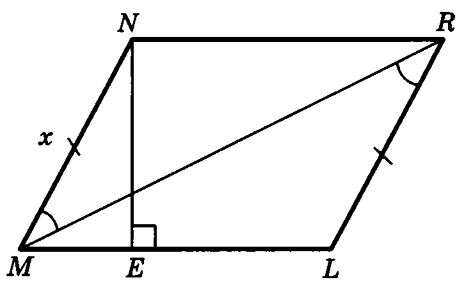
45 $MN - NK = 9, \ P = 50$



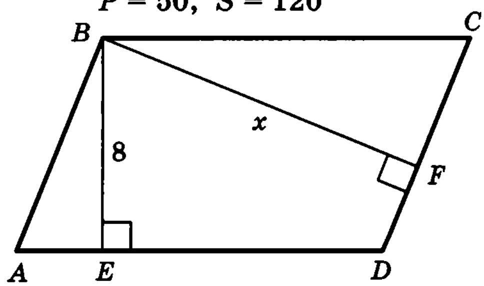
46



47 $S_{MNRL} = 72, \ NE = 8, \ MR = 17$

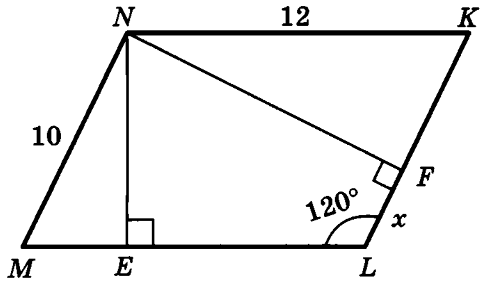


48 $ABCD$ — параллелограмм
$P = 50, \ S = 120$

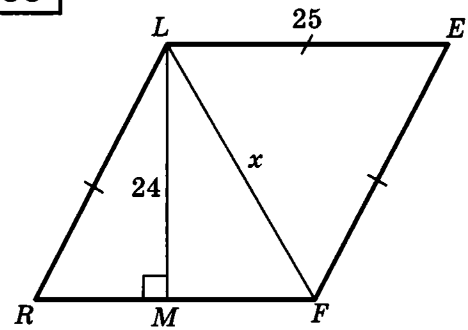


Продолжение табл. 11

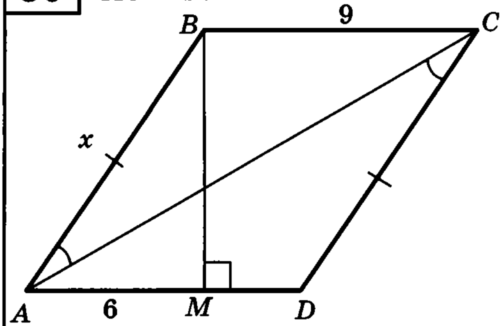
49 $MNKL$ — параллелограмм



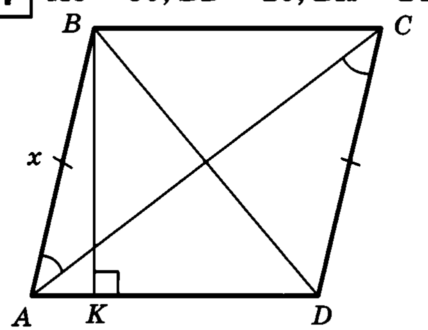
53



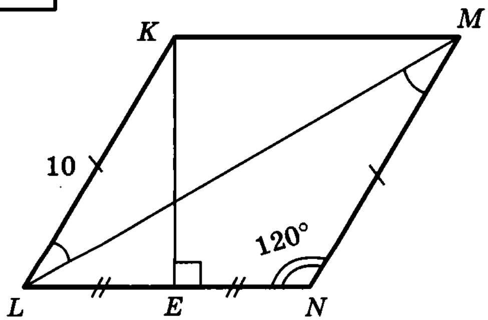
50 $AC = 17$



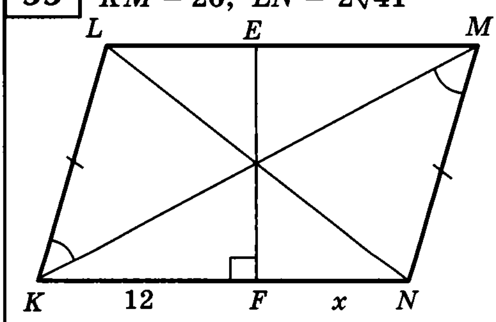
54 $AC = 30,\ BD = 26,\ BK = 24$



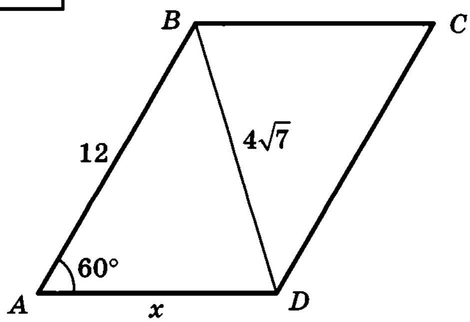
51 $LM = x$



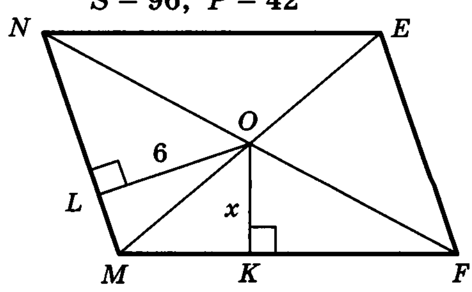
55 $KM = 26,\ \ LN = 2\sqrt{41}$



52 $ABCD$ — параллелограмм

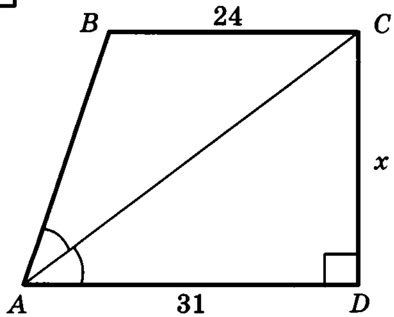


56 $MNEF$ — параллелограмм
$S = 96,\ \ P = 42$

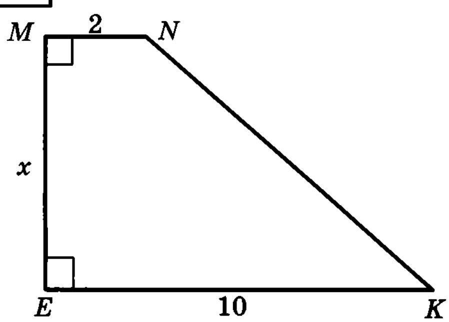


Продолжение табл. 11

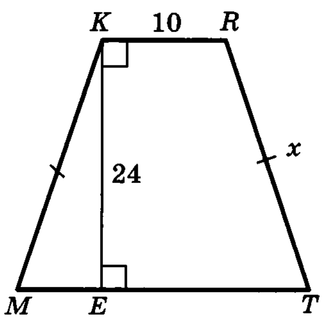
57 $ABCD$ — трапеция



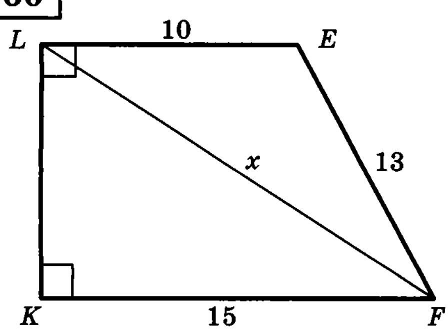
58 $ME : NK = 3 : 5,\ P = 28$



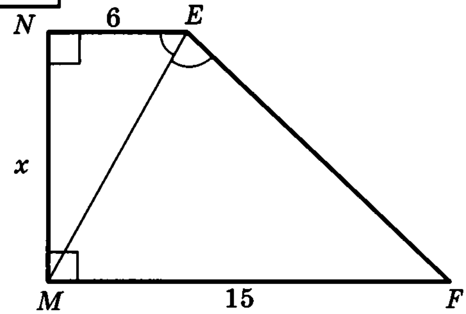
59 $MT = KE$



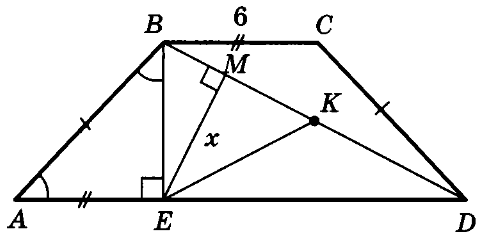
60



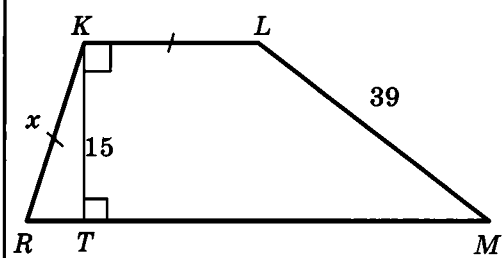
61



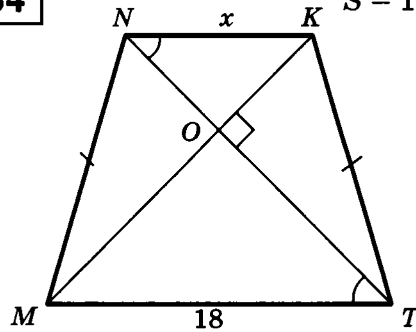
62* $ABCD$ — трапеция
$BK = KD$



63 $RM = 61$

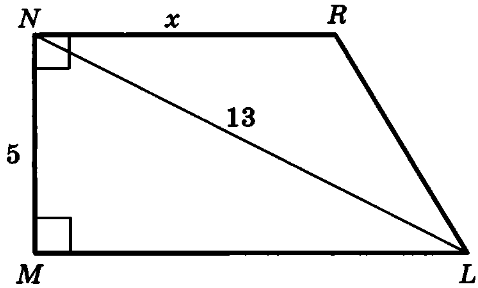


64 $S = 196$

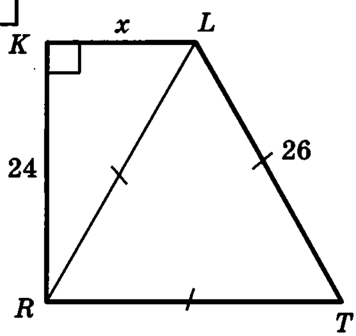


Окончание табл. 11

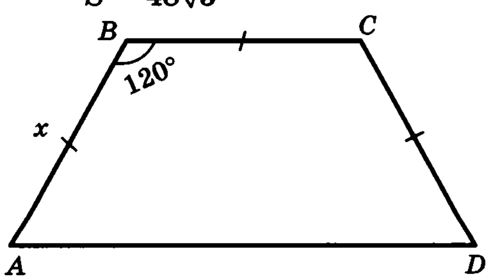
65 $S_{MNRL} = 50$



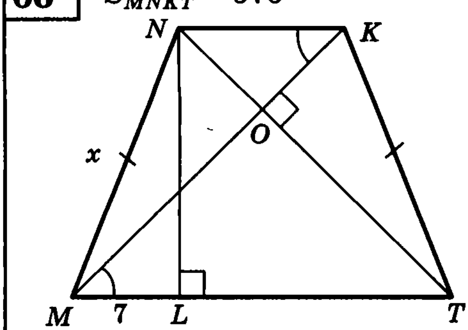
66



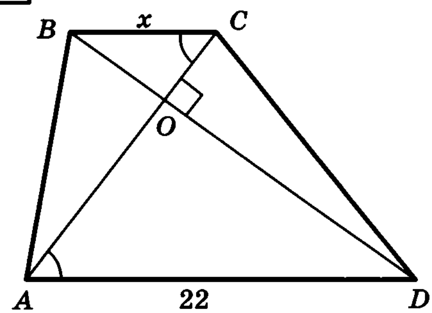
67 $ABCD$ — трапеция, $S = 48\sqrt{3}$



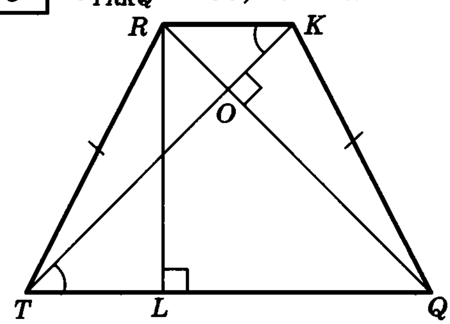
68* $S_{MNKT} = 576$



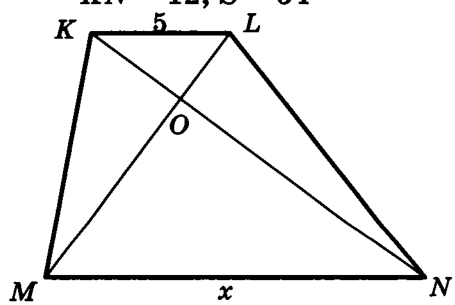
69* $AC = 20,\ BD = 21$



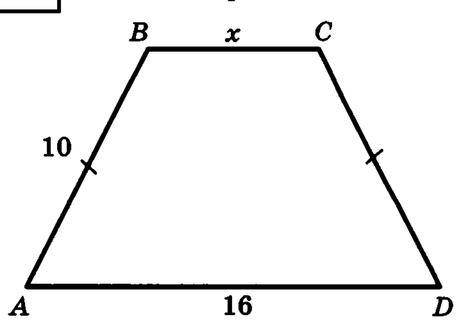
70* $S_{TRKQ} = 100,\ RL = x$



71* $MKLN$ — трапеция, $ML = 9$, $KN = 12$, $S = 54$



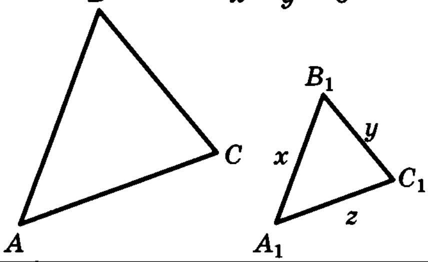
72* $ABCD$ — трапеция, $S = 80$



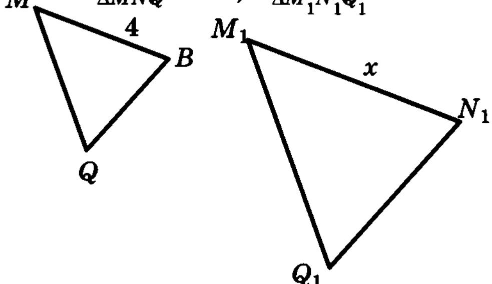
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Найдите x, y, z. *Таблица 12*

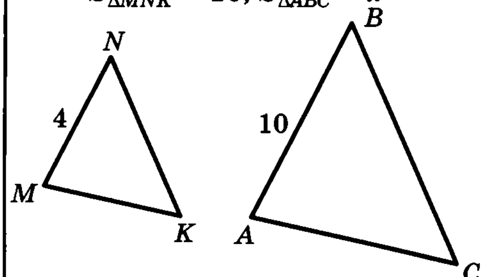
1 $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB : BC : AC = 9 : 7 : 8$, $x - y = 6$



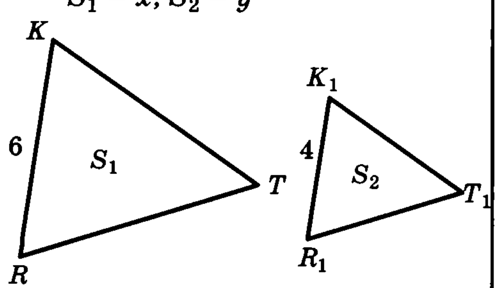
2 $\Delta MNQ \sim \Delta M_1N_1Q_1$, $S_{\Delta MNQ} = 32$, $S_{\Delta M_1N_1Q_1} = 50$



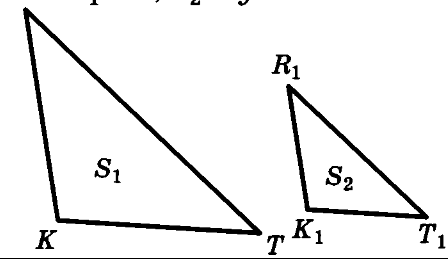
3 $\Delta MNK \sim \Delta ABC$, $S_{\Delta MNK} = 16$, $S_{\Delta ABC} = x$



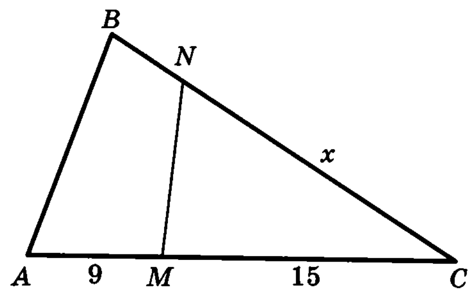
4 $\Delta RKT \sim \Delta R_1K_1T_1$, $S_1 + S_2 = 78$, $S_1 = x$, $S_2 = y$



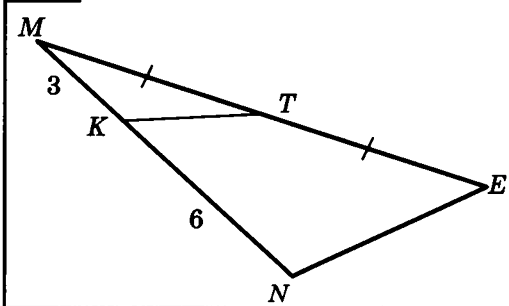
5 $\Delta RKT \sim \Delta R_1K_1T_1$, $S_1 - S_2 = 156$, $KR : K_1R_1 = 8 : 5$, $S_1 = x$, $S_2 = y$



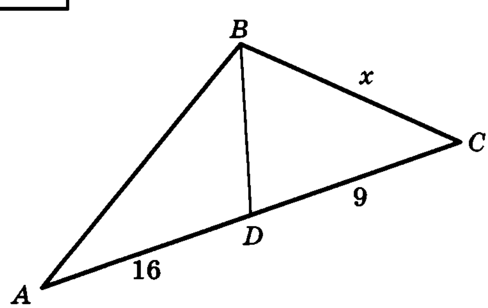
6 $\Delta ABC \sim \Delta MNC$, $BC = 21$



7 $S_{\Delta MKT} = 8$, $S_{\Delta MNE} = x$

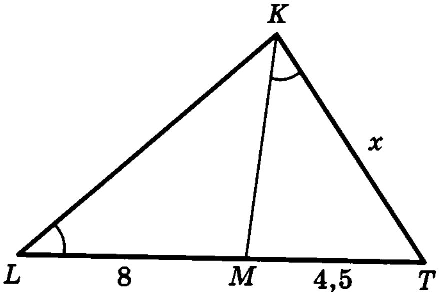


8 $\Delta ABC \sim \Delta BCD$

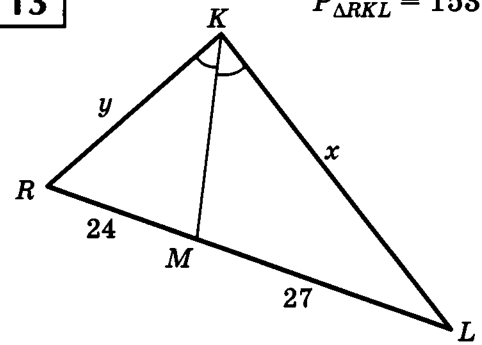


Продолжение табл. 12

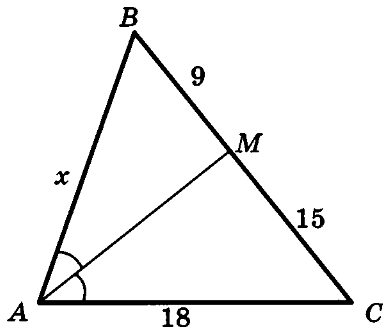
9 $\Delta KMT \sim \Delta LKT$



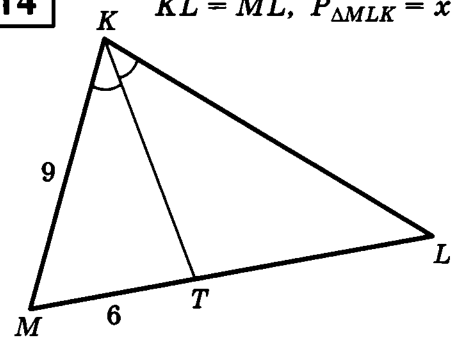
13 $P_{\Delta RKL} = 153$



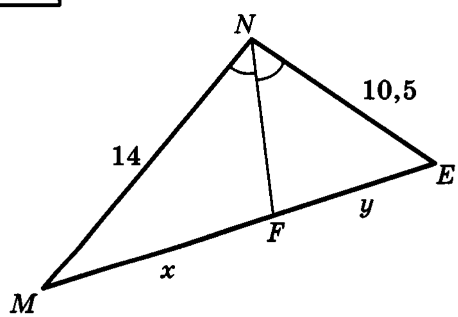
10



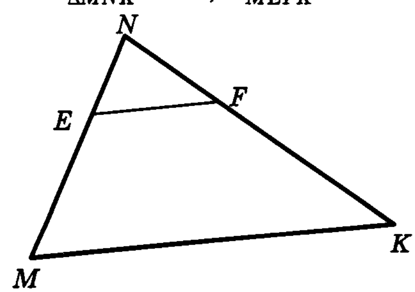
14 $KL = ML$, $P_{\Delta MLK} = x$



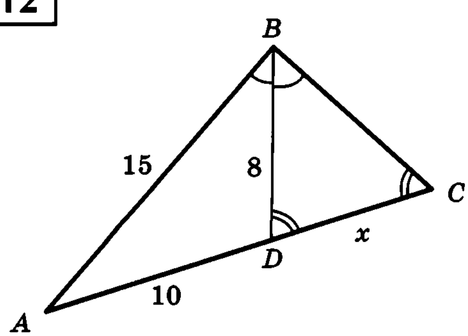
11 $ME = 20$



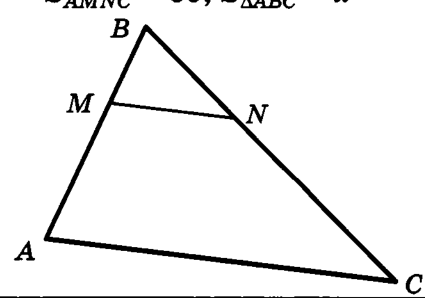
15 $EF \parallel MK$, $NE : MN = 1 : 3$, $S_{\Delta MNK} = 54$, $S_{MEFK} = x$



12

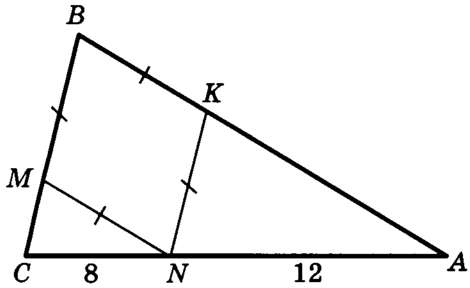


16 $MN \parallel AC$, $BM : BA = 1 : 4$, $S_{AMNC} = 60$, $S_{\Delta ABC} = x$

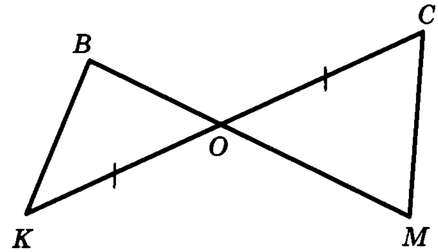


Окончание табл. 12

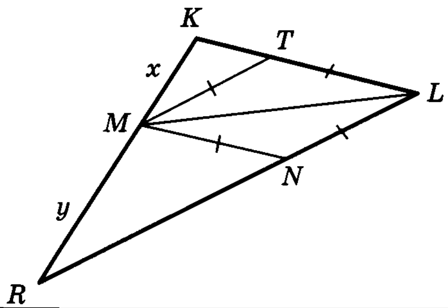
17 $P_{\Delta ABC} = 55$, $BC = x$, $AB = y$



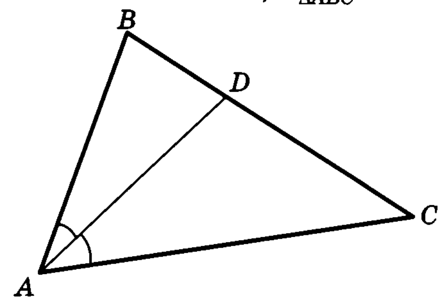
21 $OB : OM = 5 : 7$, $S_{\Delta BOK} = 5$, $S_{\Delta COM} = x$



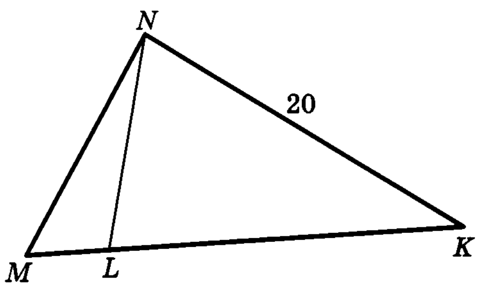
18 $RL = 14$, $RK = 12$, $KL = 10$



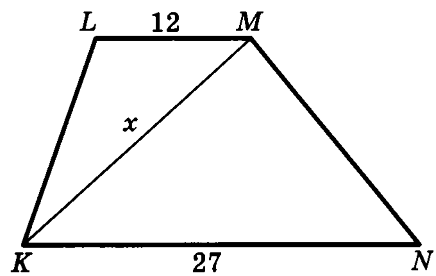
22 $AC = BC$, $BC - AB = 4{,}8$, $BD : DC = 3 : 5$, $P_{\Delta ABC} = x$



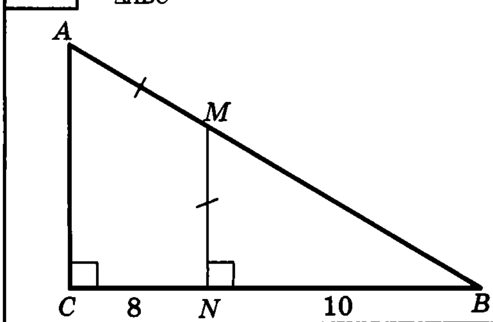
19 $S_{\Delta MNL} : S_{\Delta NLK} = 1 : 3$, $NK : MK = ML : LK$, $MK = x$



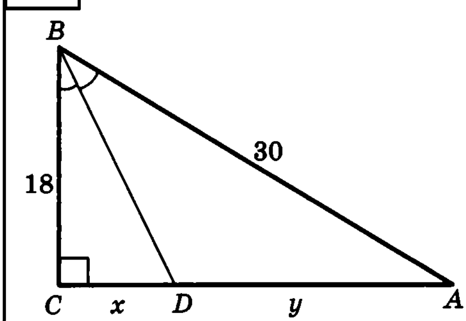
23 $LM \parallel KN$, $\Delta LKM \sim \Delta KMN$



20* $P_{\Delta ABC} = x$



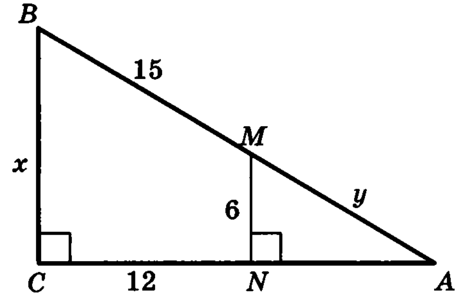
24



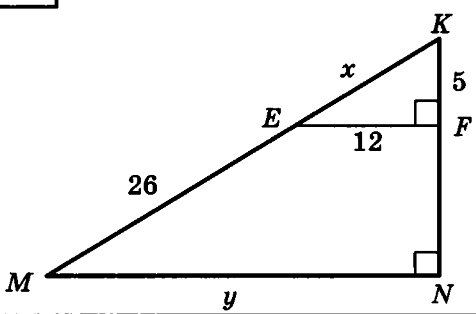
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Найдите x, y. *Таблица 13*

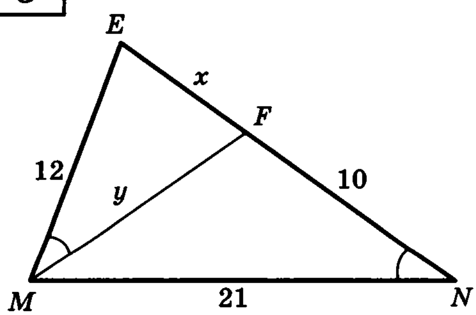
1



2

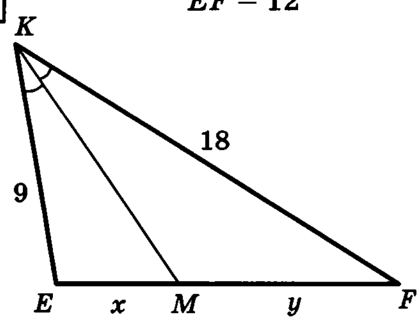


3



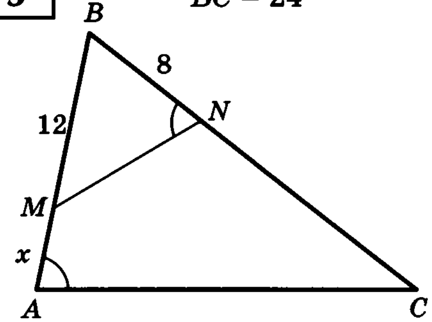
4

$EF = 12$

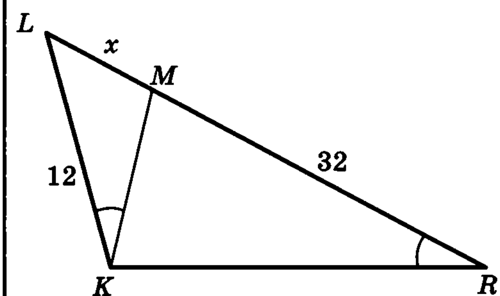


5

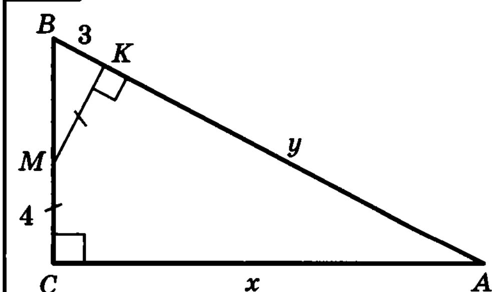
$BC = 24$



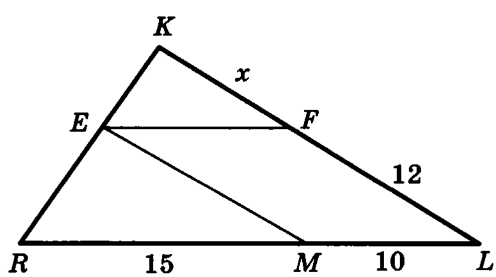
6



7

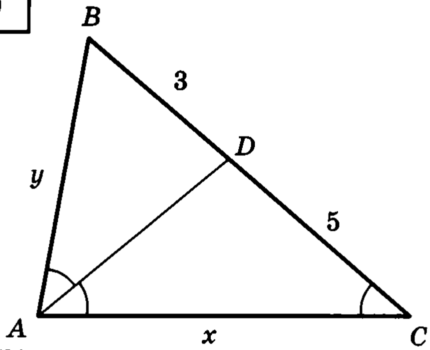


8

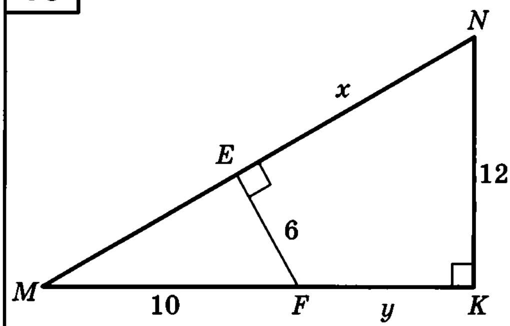


Продолжение табл. 13

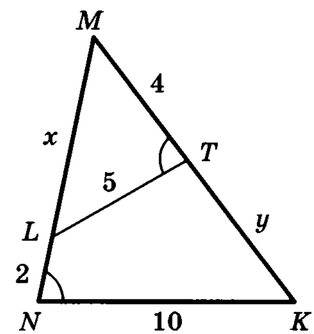
9



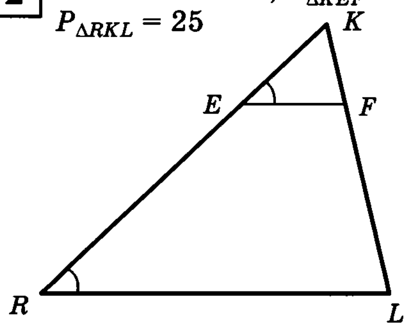
10



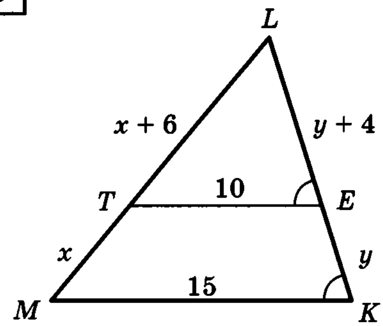
11



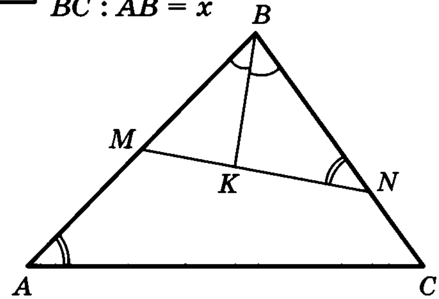
12 $KE : ER = 1 : 4$, $P_{\Delta KEF} = x$
$P_{\Delta RKL} = 25$



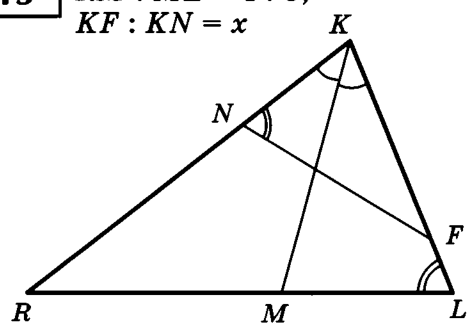
13



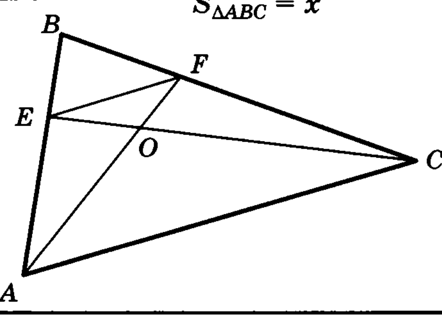
14* $MK : KN = 2 : 3$,
$BC : AB = x$



15* $RM : ML = 4 : 3$,
$KF : KN = x$

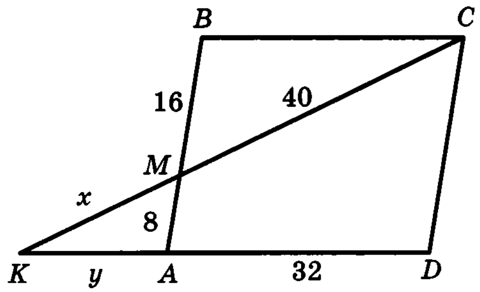


16* $S_{\Delta AEO} = S_{\Delta COF} = 8$, $S_{\Delta EOF} = 4$,
$S_{\Delta ABC} = x$

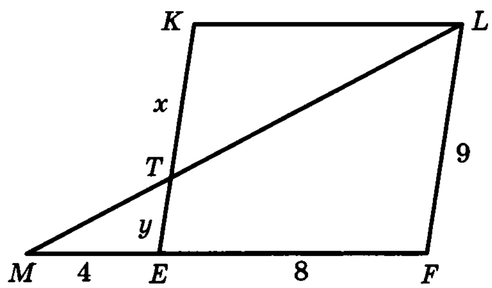


Продолжение табл. 13

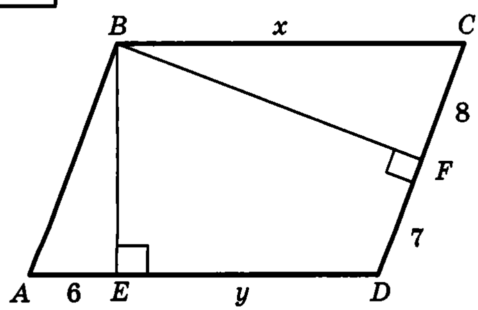
17 $ABCD$ — параллелограмм



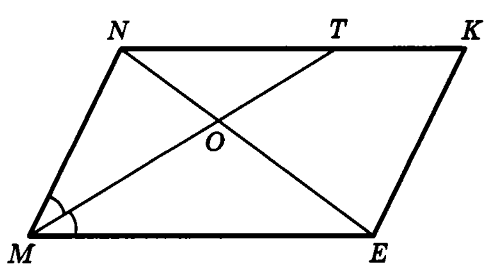
18 $EKLF$ — параллелограмм



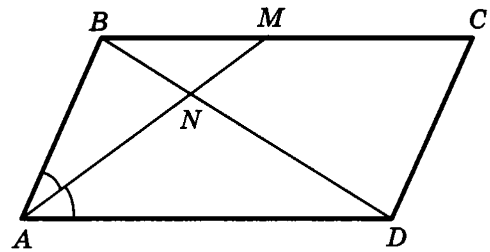
19 $ABCD$ — параллелограмм



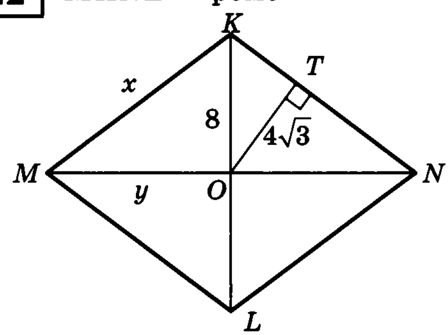
20 $MNKE$ — параллелограмм
$MN : NK = 2 : 3$, $NO : OE = x$



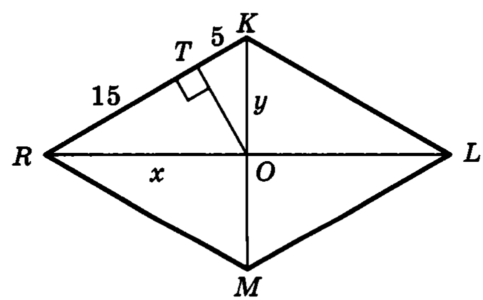
21 $ABCD$ — параллелограмм
$AB : BC = 4 : 9$, $BN : ND = x$



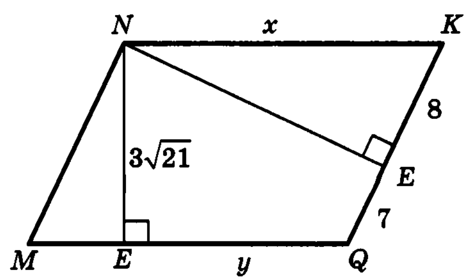
22 $MKNL$ — ромб



23 $RKLM$ — ромб

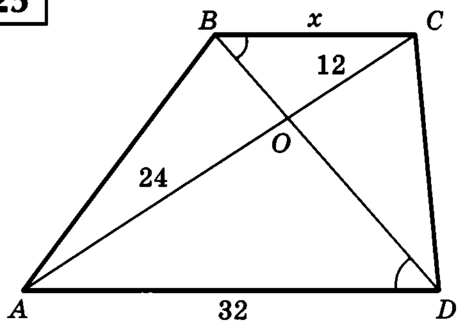


24 $MNKQ$ — параллелограмм

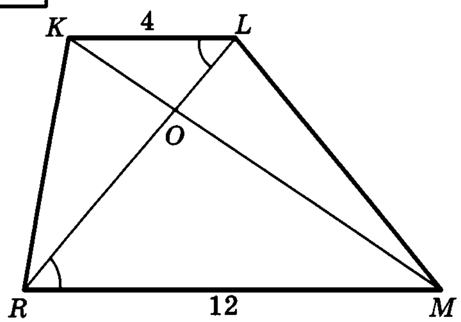


Окончание табл. 13

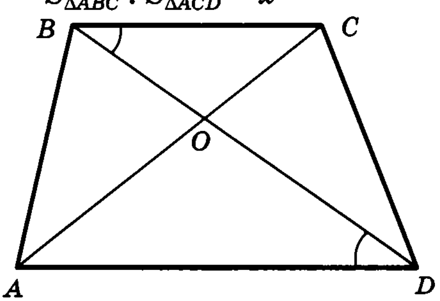
25



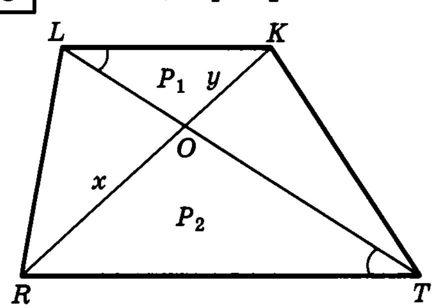
26* $S_{\Delta ROM} = 45$, $S_{\Delta KOL} = x$



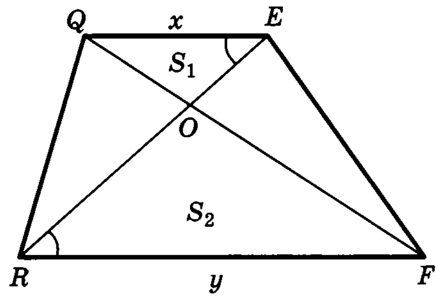
27 $AO : OC = 3 : 2$,
$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ACD} = x$



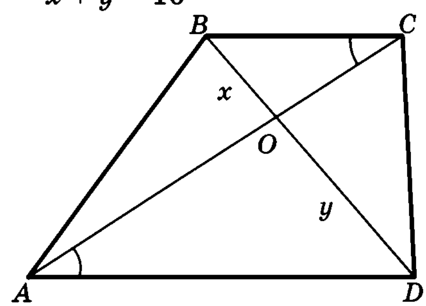
28 $RK = 20$, $P_1 : P_2 = 2 : 3$



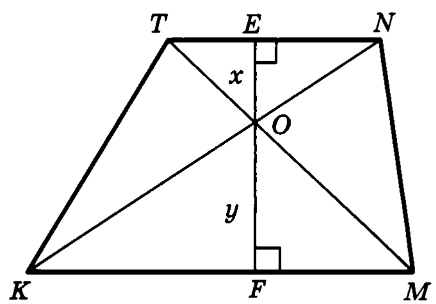
29 $S_1 : S_2 = 1 : 9$, $x + y = 4{,}8$



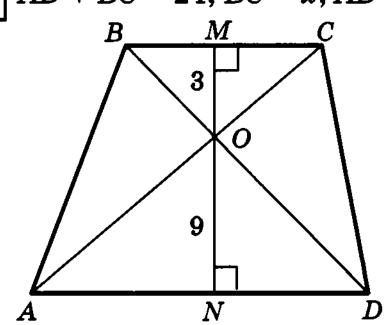
30 $S_{\Delta BOC} : S_{\Delta AOD} = 2 : 3$,
$x + y = 10$



31 $TN = 12$, $KM = 18$, $x + y = 20$



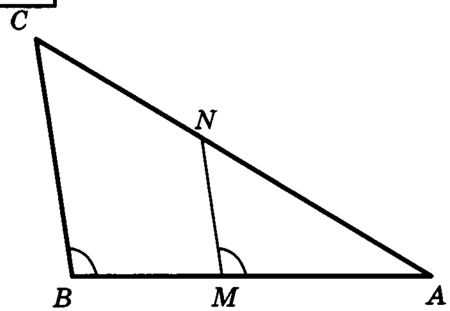
32* $AD + BC = 24$, $BC = x$, $AD = y$



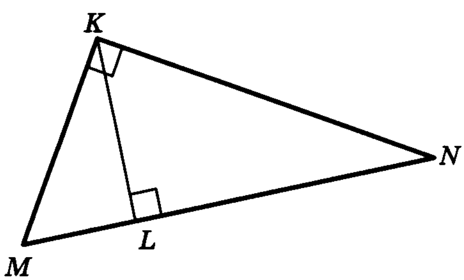
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие. *Таблица 14*

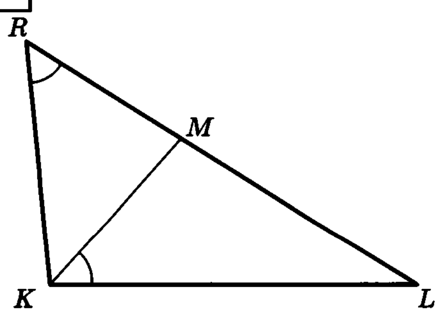
1



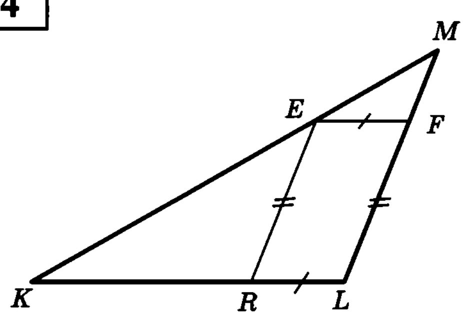
2



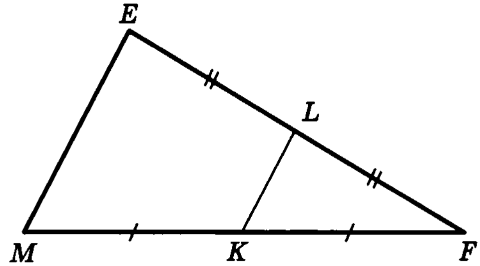
3



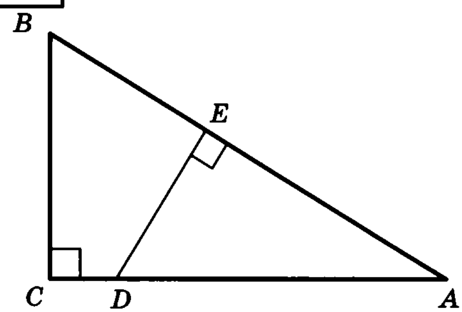
4



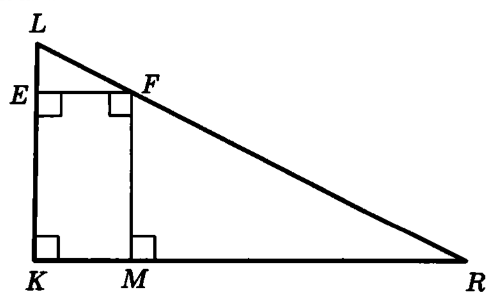
5



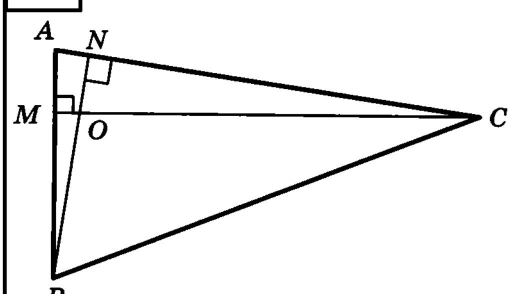
6



7

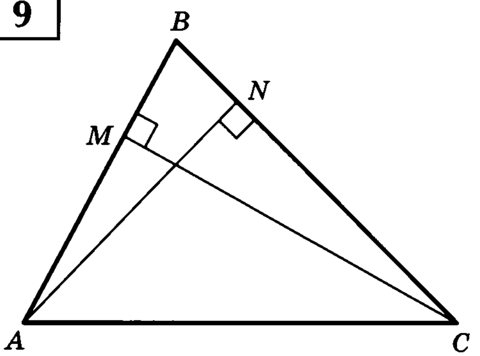


8

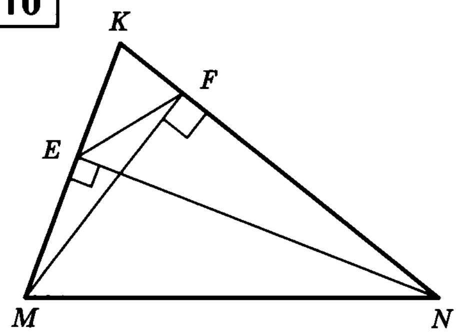


Окончание табл. 14

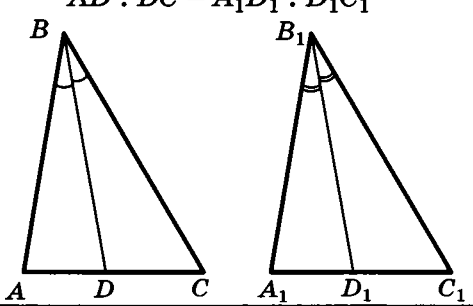
9



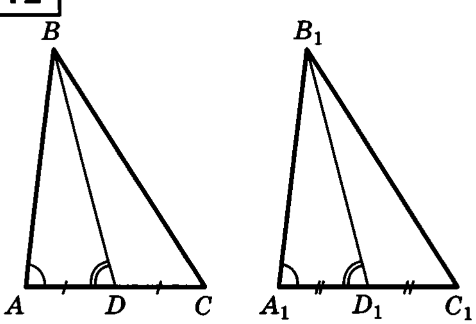
10



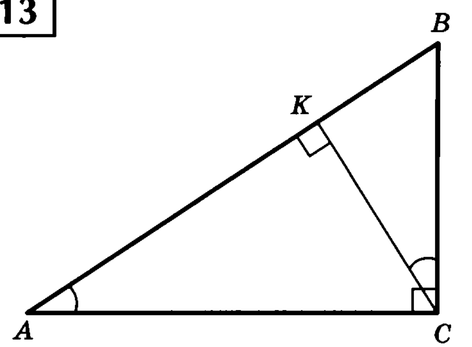
11 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$,
$AD : DC = A_1D_1 : D_1C_1$



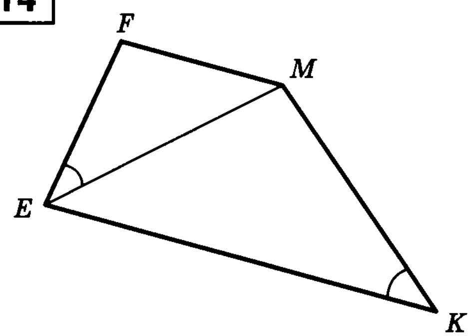
12



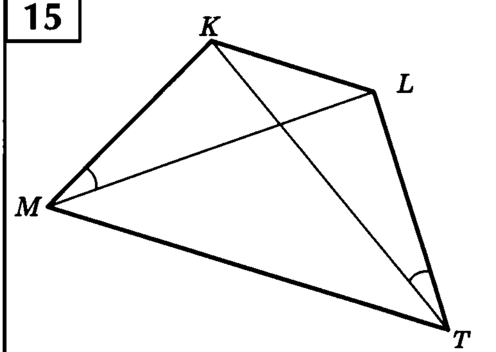
13



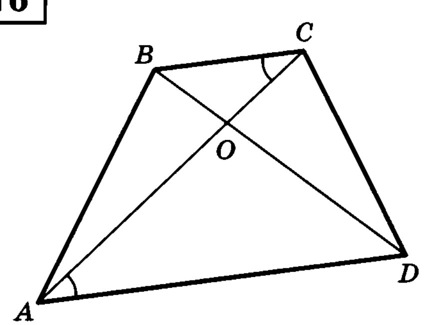
14



15



16

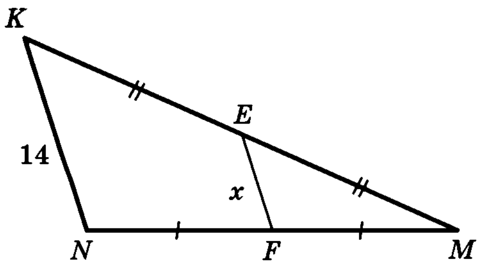


СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

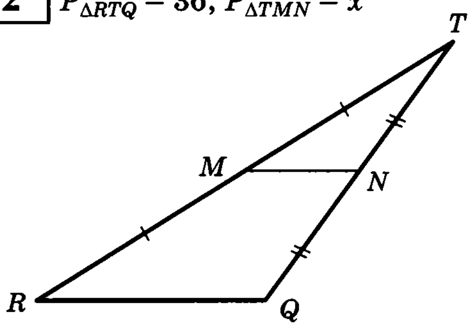
Найдите x.

Таблица 15

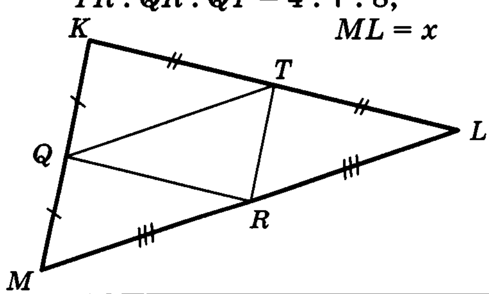
1



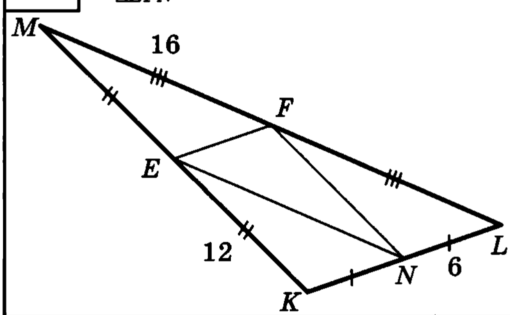
2 $P_{\Delta RTQ} = 36$, $P_{\Delta TMN} = x$



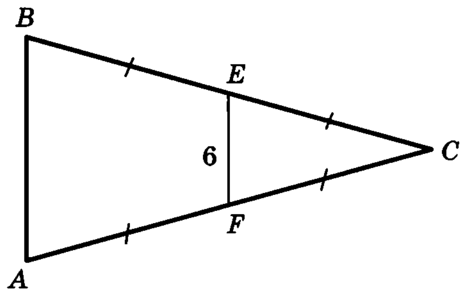
3 $P_{\Delta MKL} = 54$, $TR : QR : QT = 4 : 7 : 8$, $ML = x$



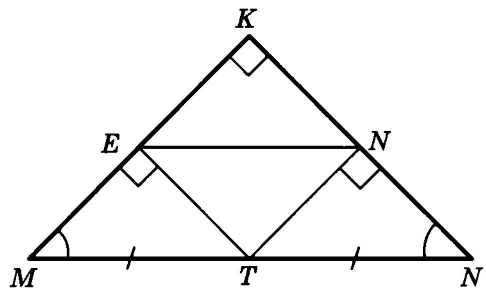
4 $P_{\Delta EFN} = x$



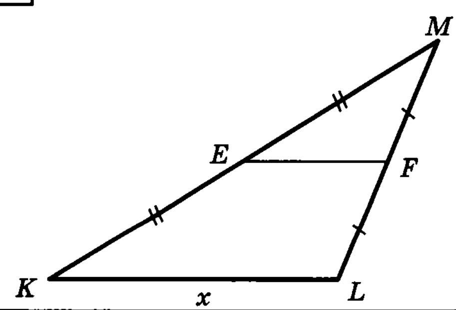
5 $P_{\Delta ABC} = 34$, $AC = x$



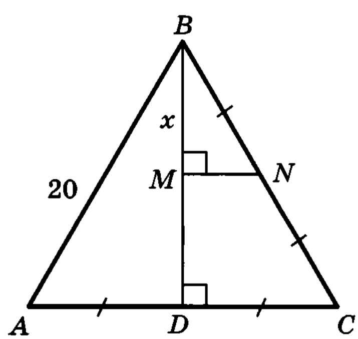
6 $MN = 28$, $P_{\Delta TEF} = x$



7 $KL - EF = 10$



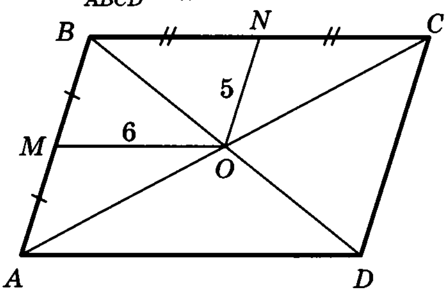
8



Окончание табл. 15

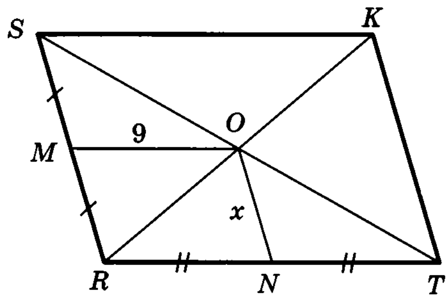
9

$ABCD$ — параллелограмм
$P_{ABCD} = x$



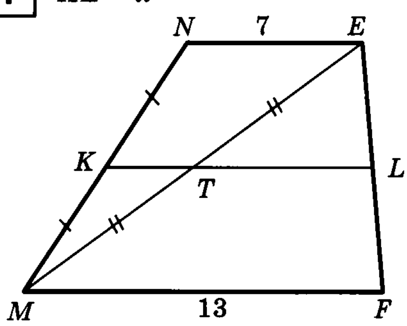
10

$P_{RSKT} = 60$

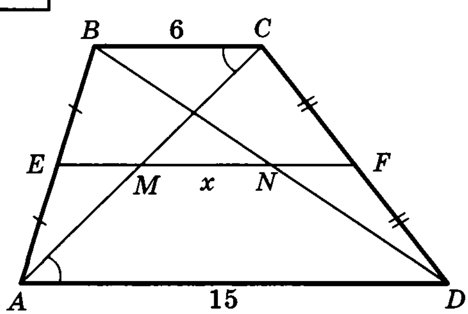


11

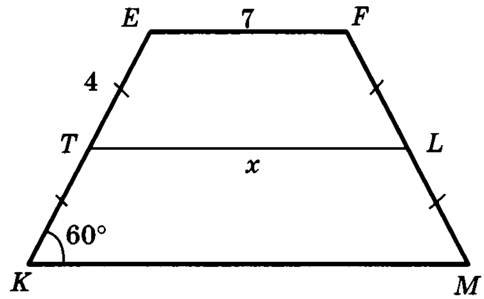
$KL = x$



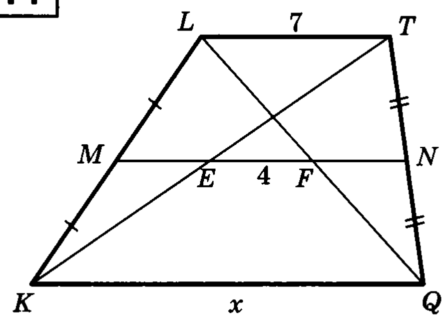
12



13

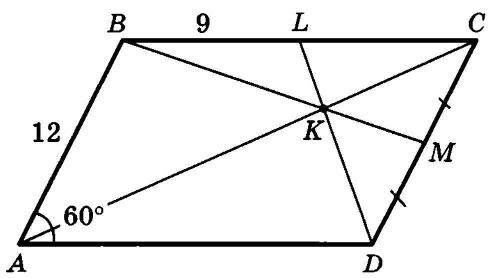


14



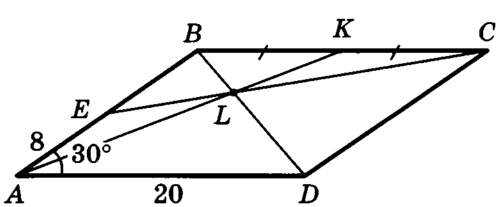
15*

$ABCD$ — параллелограмм
$S_{ABCD} = x$



16*

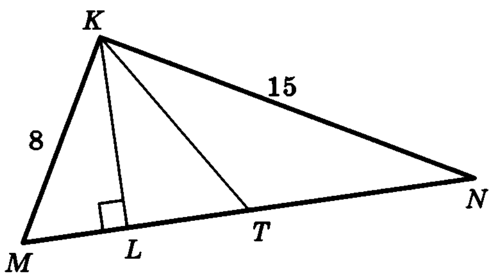
$ABCD$ — параллелограмм
$S_{ABCD} = x$



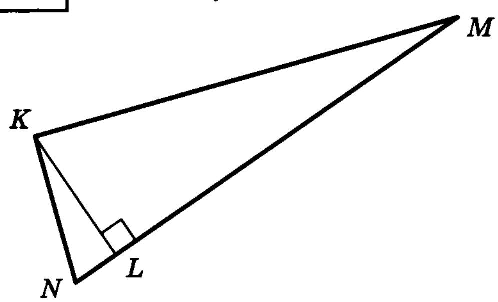
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Найдите неизвестные линейные элементы ΔMNK ($\angle K = 90°$). *Таблица 16*

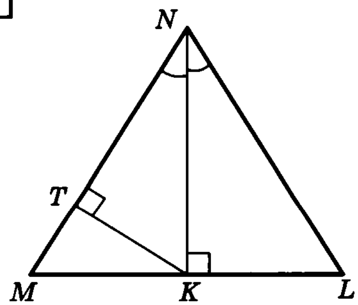
1 $MT = TN$



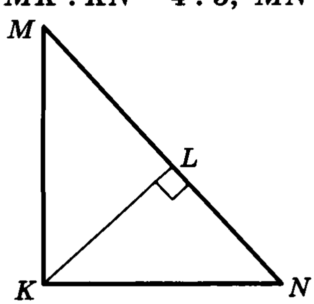
2 $MN = 26$, $KN : KM = 5 : 12$



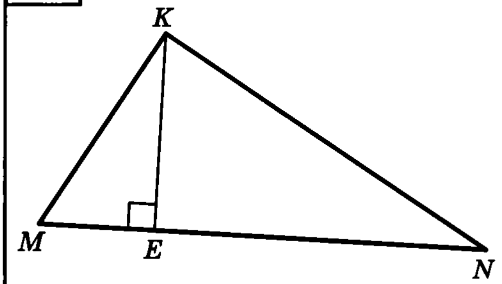
3* $MT : TN = 4 : 9$, $ML + NK = 14$



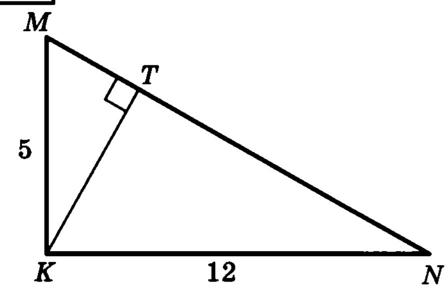
4 $MK : KN = 4 : 3$, $MN = 50$



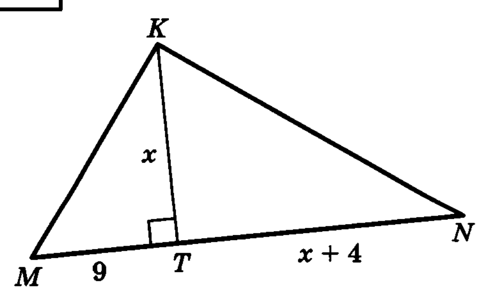
5 $MK : KN = 5 : 6$, $EN - ME = 11$



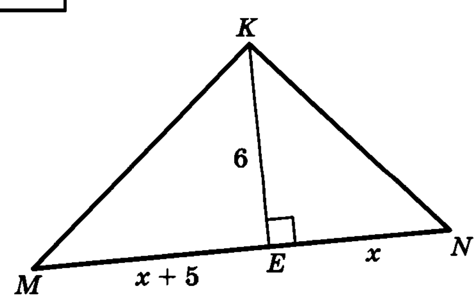
6 $MN = 13$



7

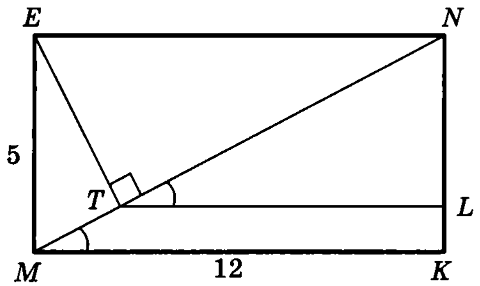


8

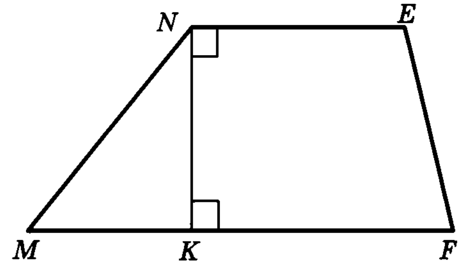


Окончание табл. 16

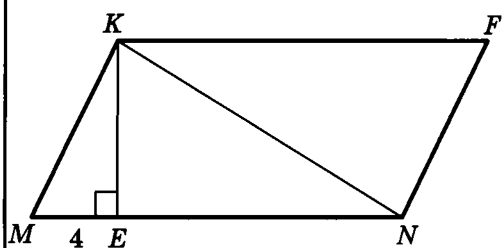
9



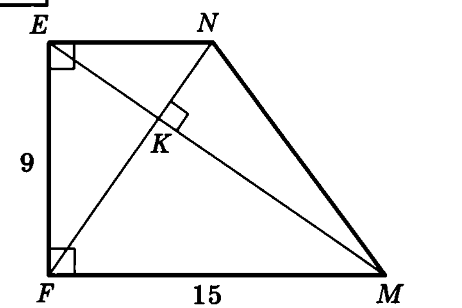
13 $NE : MF = 1 : 2$, $S_{\Delta MNK} = 18$, $NK : KF = 3 : 4$



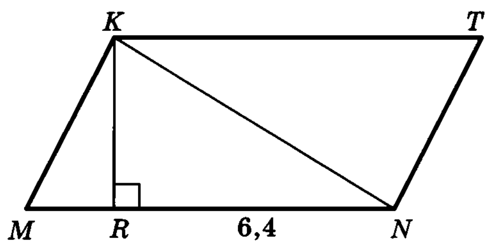
10 $MKFN$ — параллелограмм $MK : MN = 1 : 2$



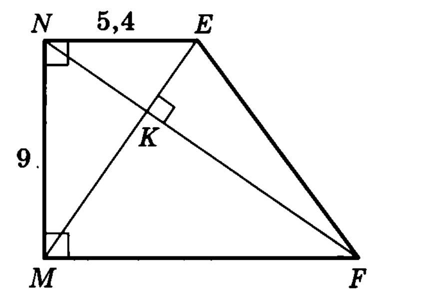
14



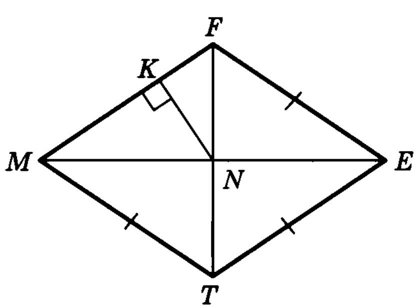
11 $MKTN$ — параллелограмм $MK : KT = 3 : 4$



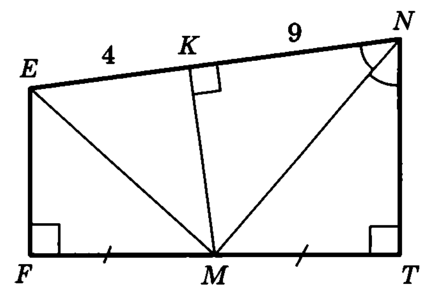
15



12* $ME : FT = 3 : 2$, $S_{\Delta MKN} = 27$



16

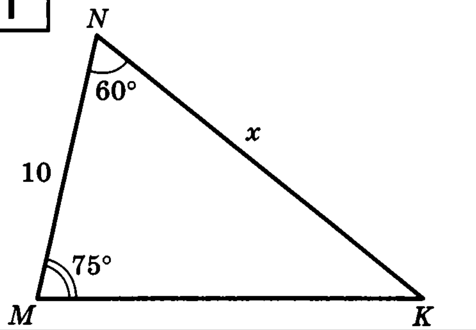


СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

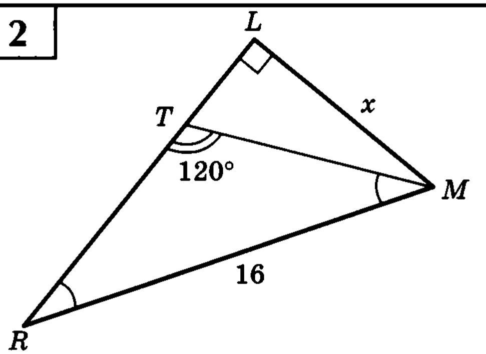
Найдите x.

Таблица 17

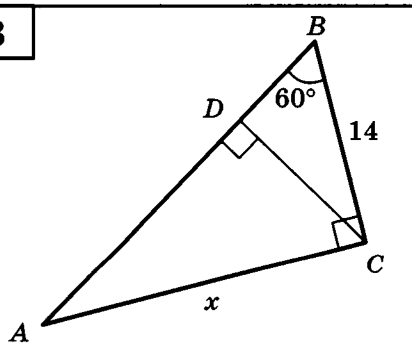
1



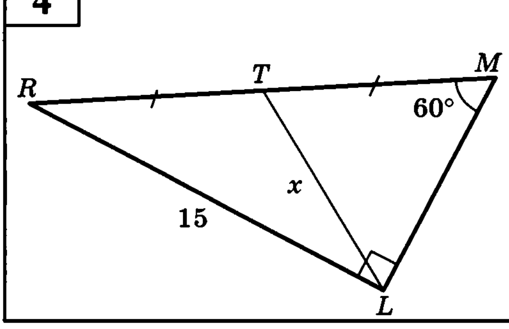
2



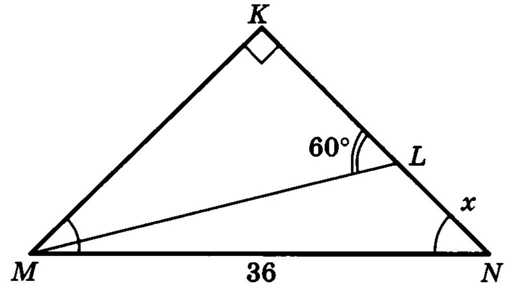
3



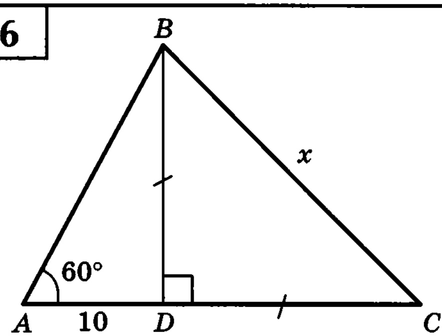
4



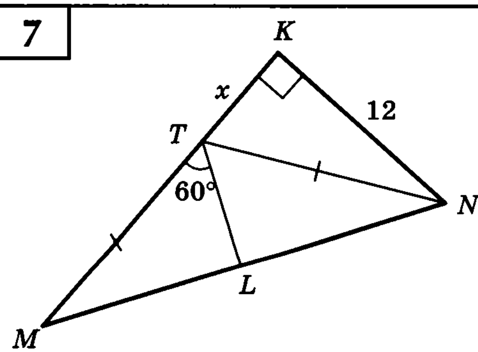
5



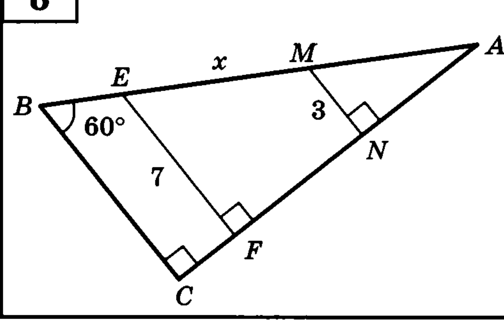
6



7

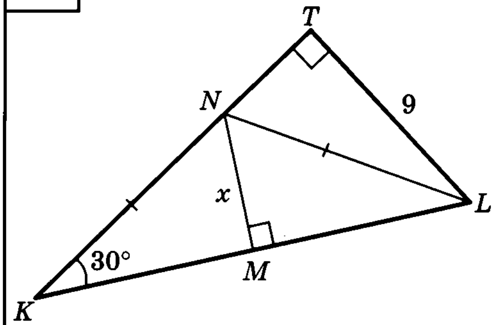


8

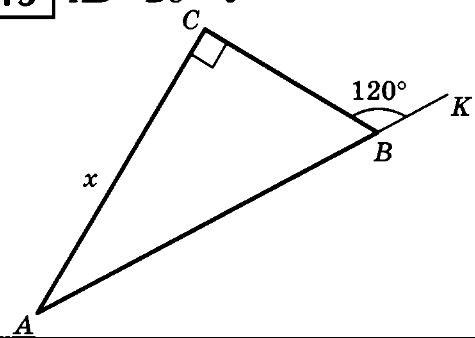


Продолжение табл. 17

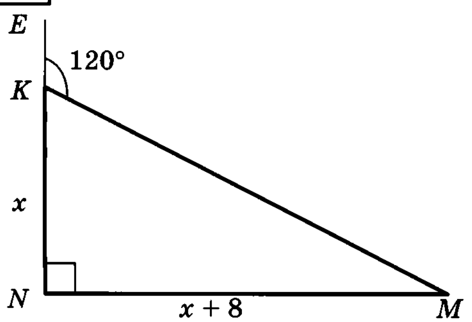
9



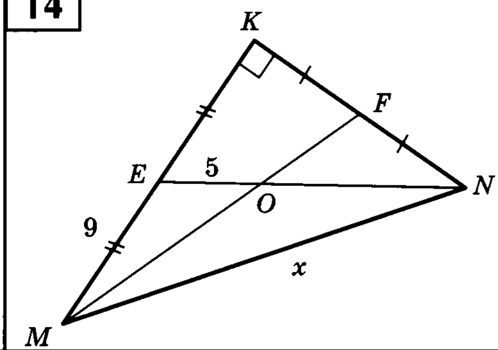
13 $AB - BC = 6$



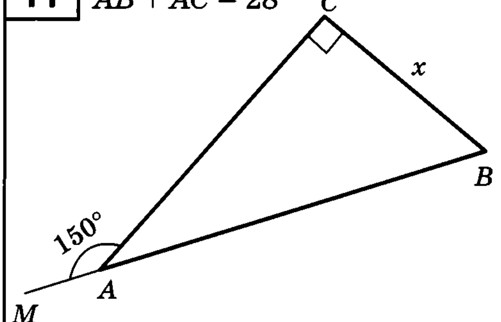
10



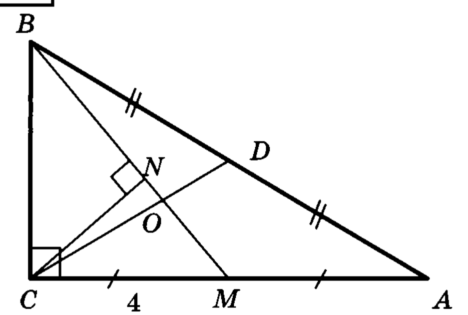
14



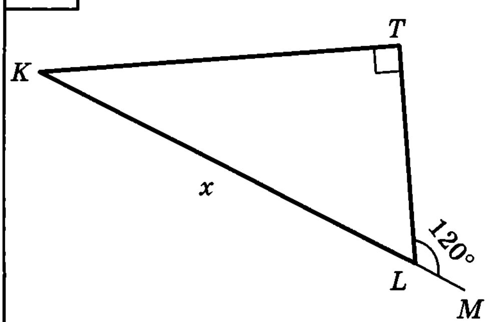
11 $AB + AC = 28$



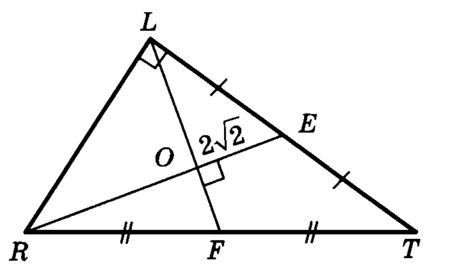
15 $MN = 3, AB = x$



12 $KL + TL = 18$

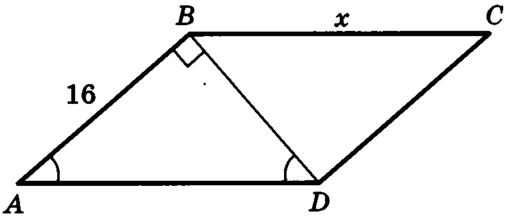


16 $RT = x$

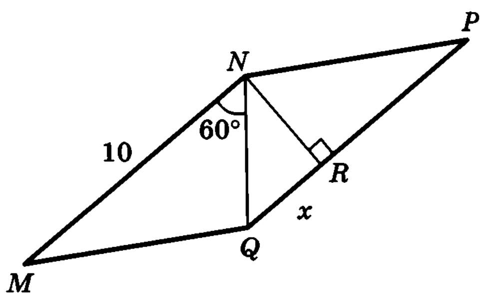


Окончание табл. 17

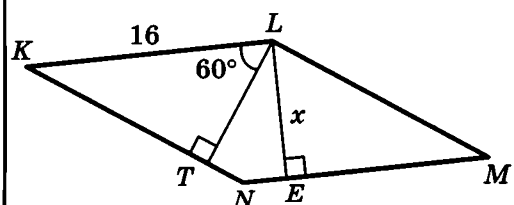
17



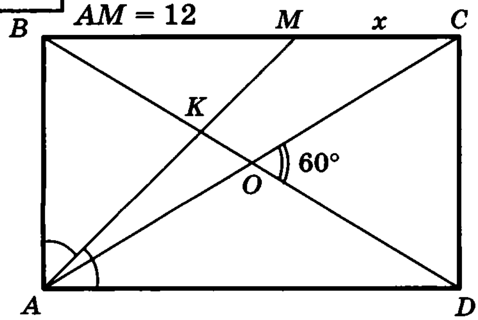
18 $MNPQ$ — параллелограмм



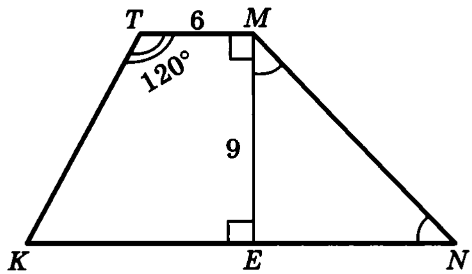
19 $KLMN$ — ромб



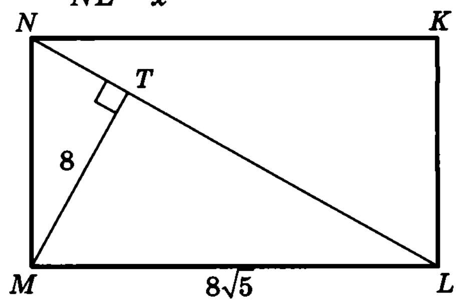
20 $ABCD$ — прямоугольник
$AM = 12$



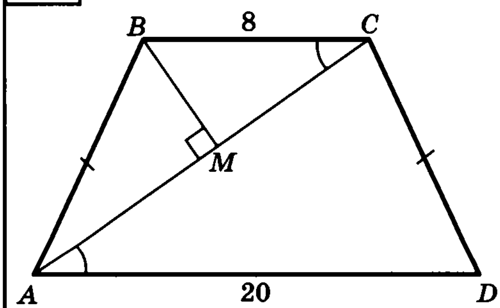
21 $KN = x$



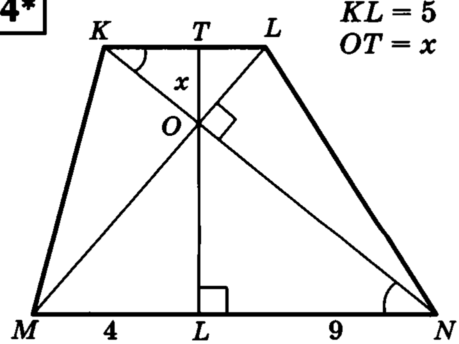
22 $MNKL$ — параллелограмм
$NL = x$



23 $AM : MC = x$



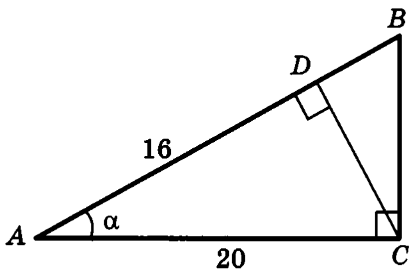
24* $KL = 5$
$OT = x$



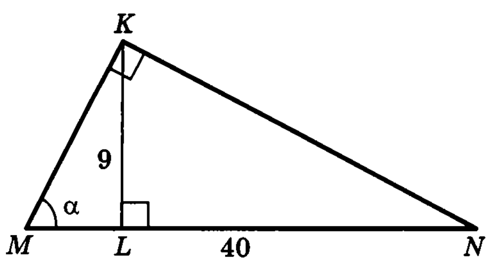
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 18

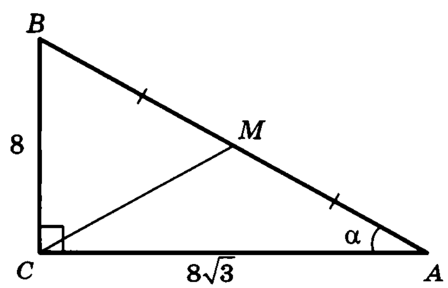
1 BC, BD, CD, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



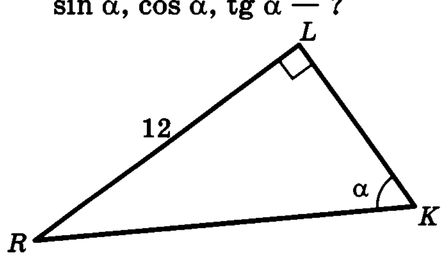
2 MK, ML, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



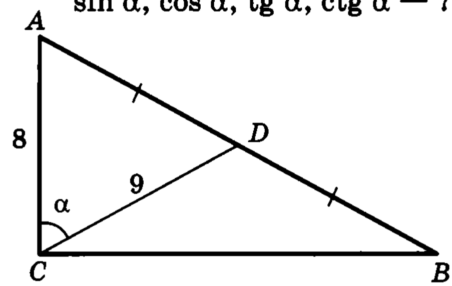
3 CM, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



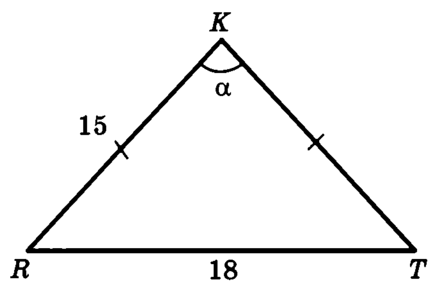
4 $RK = 2LK$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



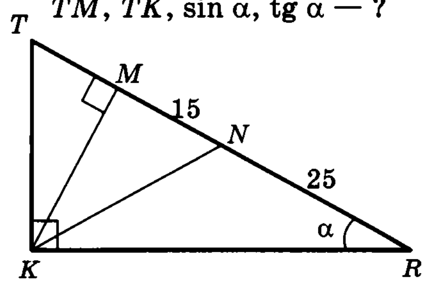
5 $\angle ACB = 90°$ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



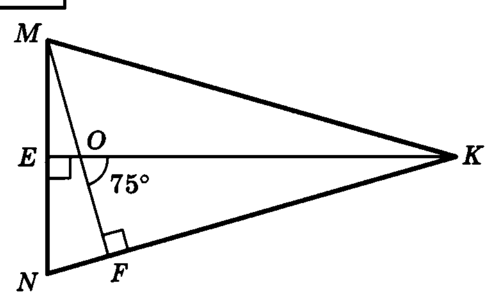
6 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



7 KN — медиана, KN, KR, TM, TK, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?

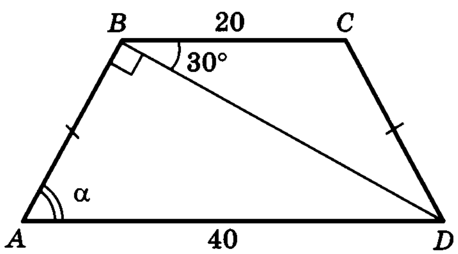


8* $KN = KM$, $MF : KE$ — ?

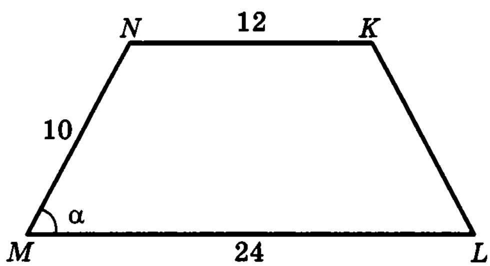


Окончание табл. 18

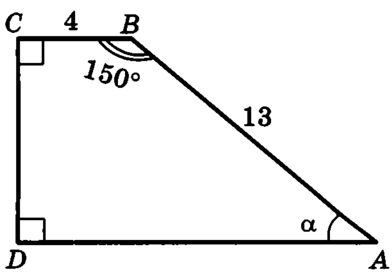
9 AB, BD, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



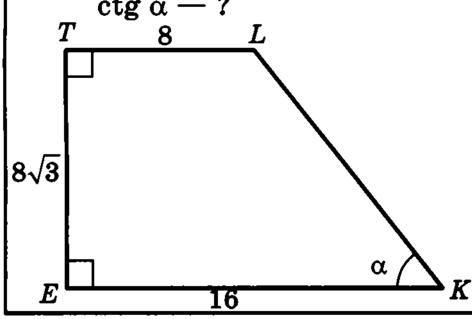
10 $MNKL$ — трапеция
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



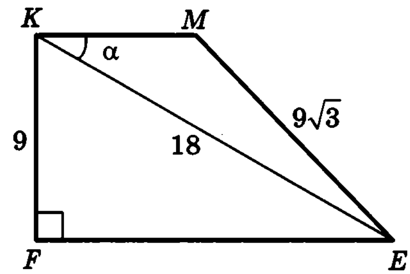
11 AD, CD, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



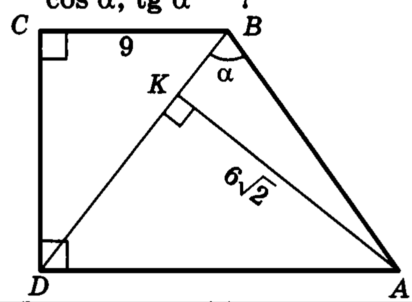
12 LK, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



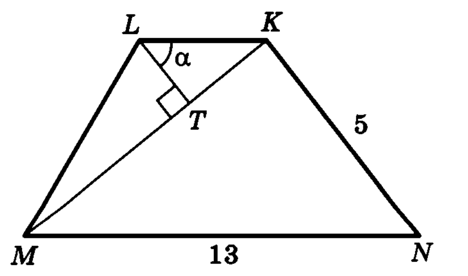
13 $KMEF$ — трапеция
$\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, KM — ?



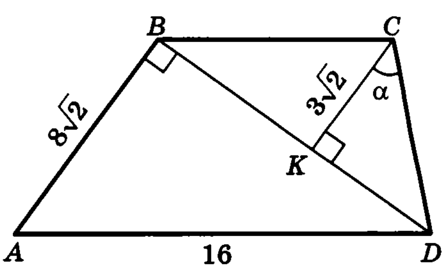
14 $BD = 9\sqrt{2}$, AB, AD, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



15 $MLKN$ — трапеция, $MK = 12$
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



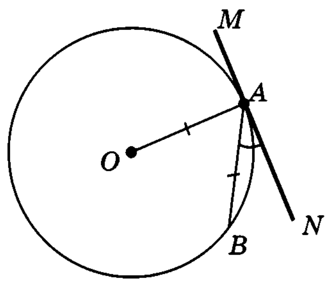
16 $ABCD$ — трапеция
$\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — ?



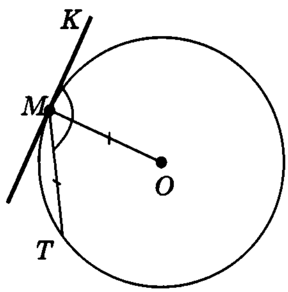
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Таблица 19

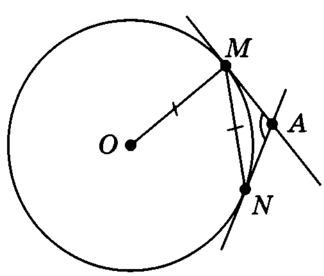
1 $\angle BAN$ — ?



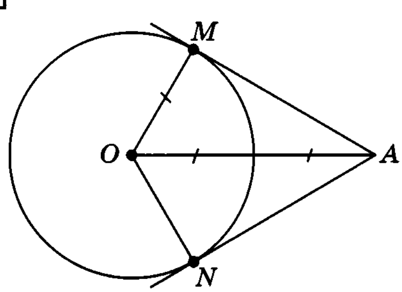
2 $\angle KMT$ — ?



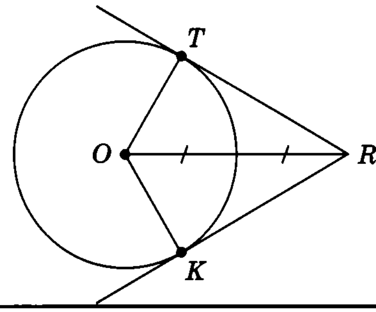
3 $\angle MAN$ — ?



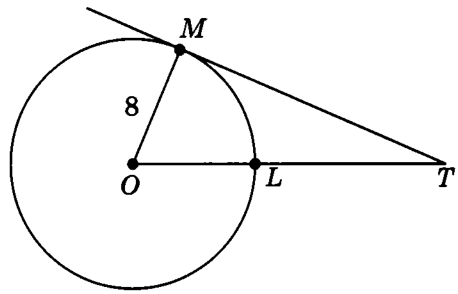
4 $\angle MAN$ — ?



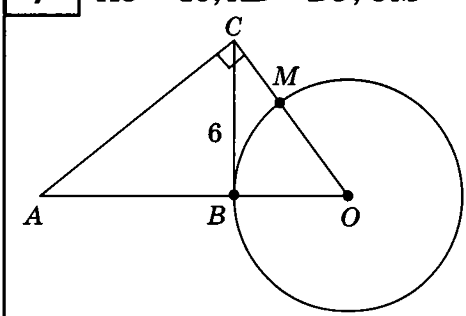
5 $\angle TOK$ — ?



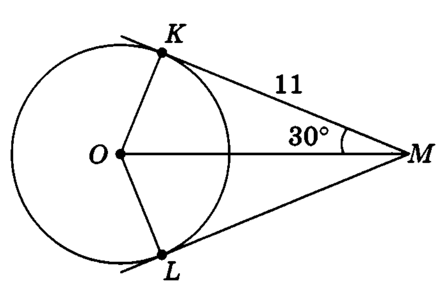
6 $OT = 17$, MT, LT — ?



7 $AO = 13$, $AB > BO$, OM — ?

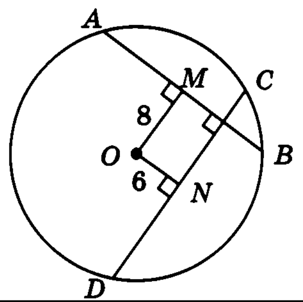


8 KL — ?

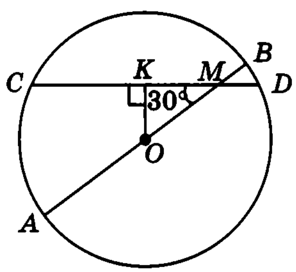


Окончание табл. 19

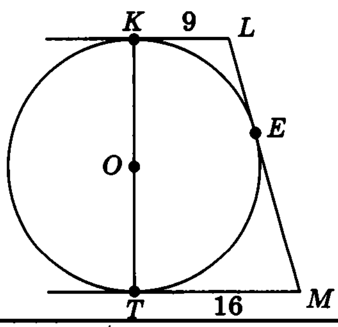
9 $AO = 10$, AB, CD — ?



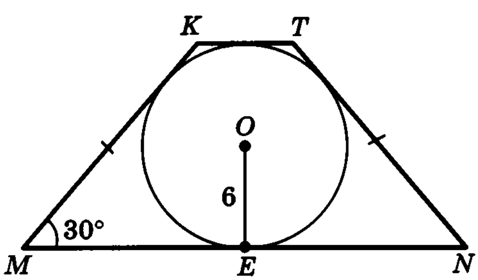
10 $MB = 4$, $AM = 12$, OK — ?



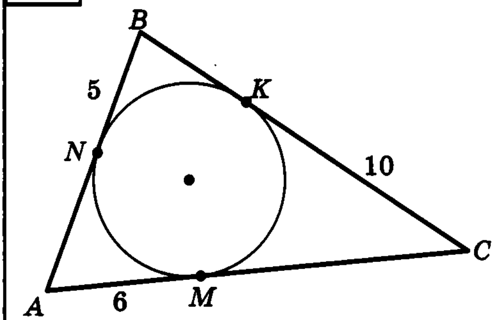
11 KT — ?



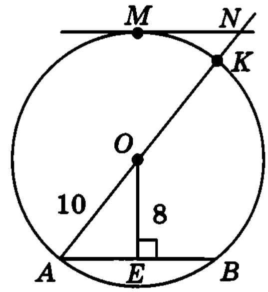
12 MK, NT — ?



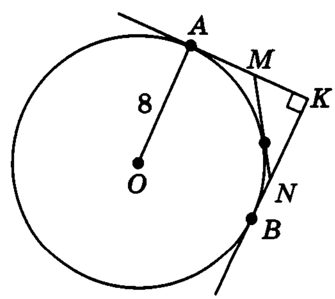
13 $P_{\Delta ABC}$ — ?



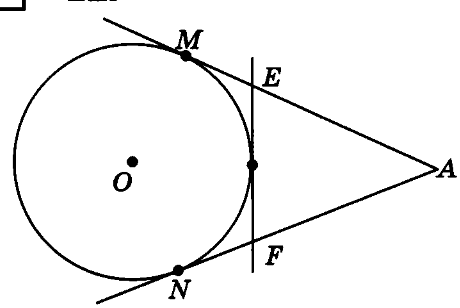
14 ON — ?



15 $P_{\Delta MNK}$ — ?



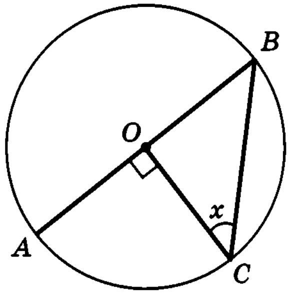
16 $P_{\Delta AEF} = 36$, AM, AN — ?



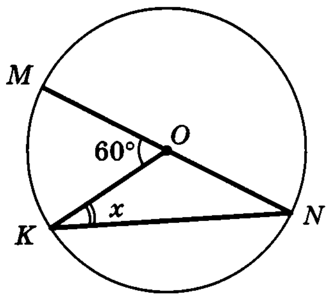
ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Найдите x. *Таблица 20*

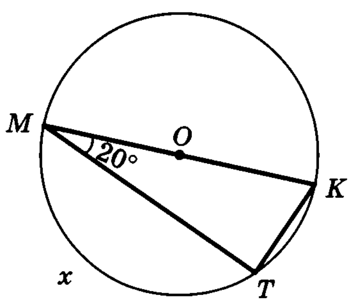
1



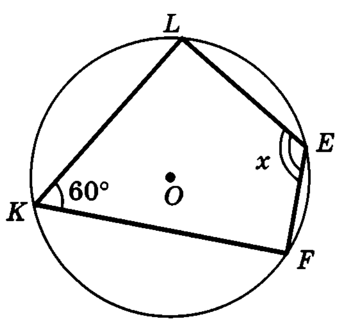
2



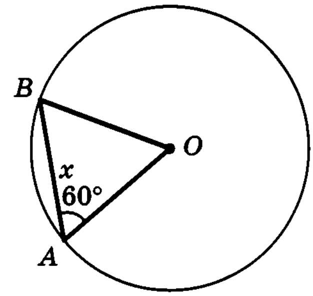
3



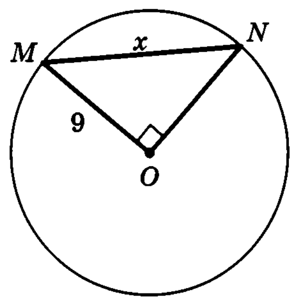
4



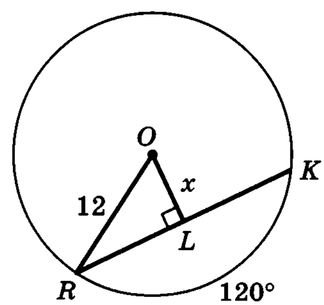
5



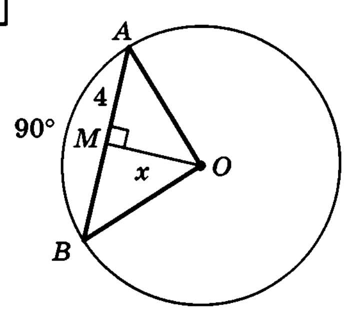
6



7

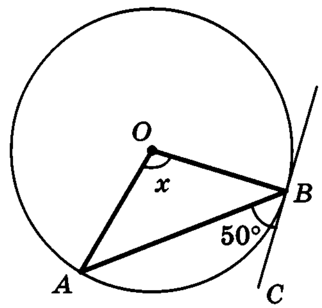


8

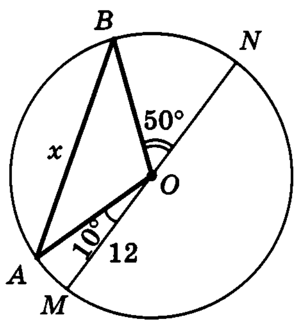


Продолжение табл. 20

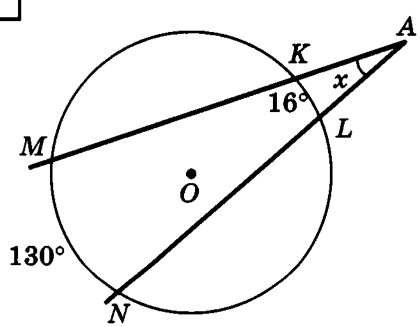
9



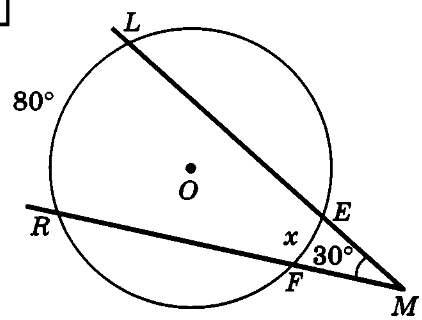
10



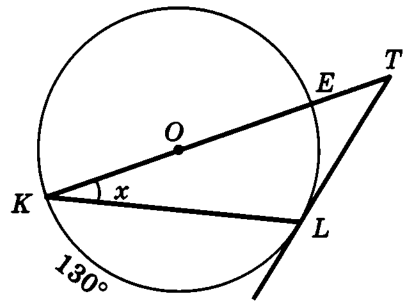
11*



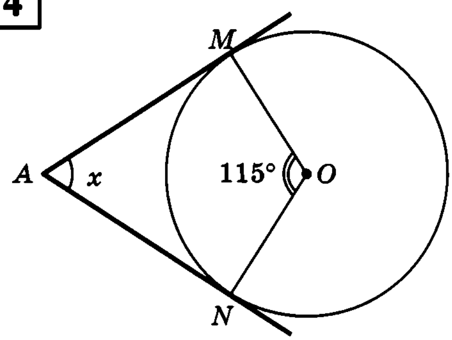
12



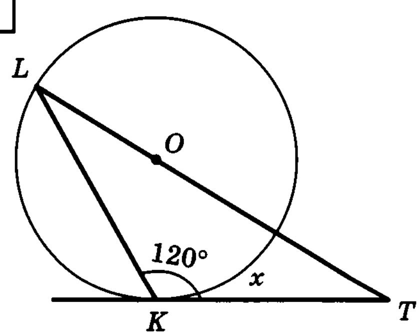
13



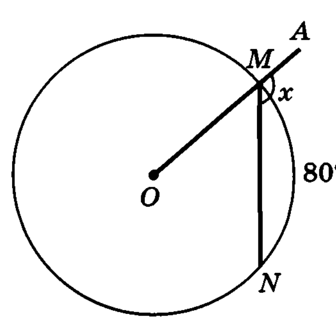
14



15

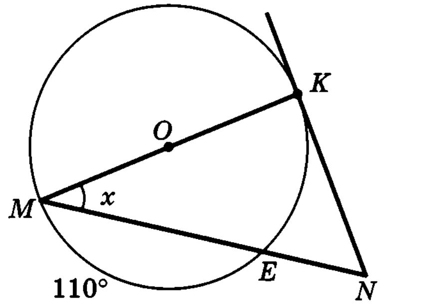


16

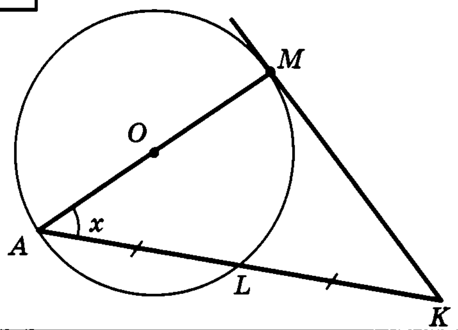


Продолжение табл. 20

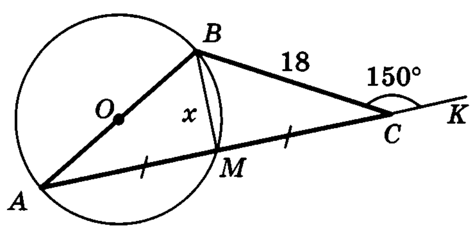
17



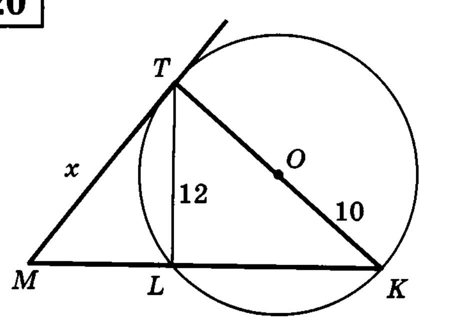
18



19

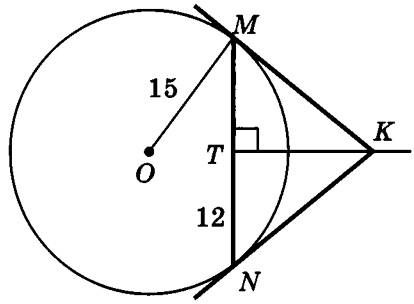


20

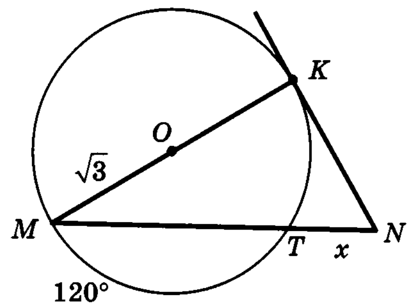


21

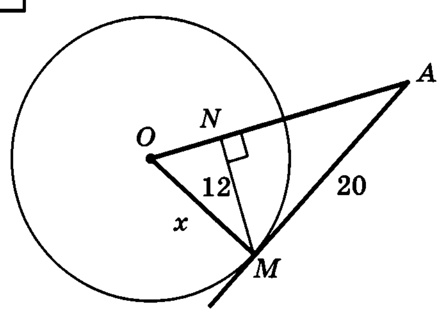
$TK = x$



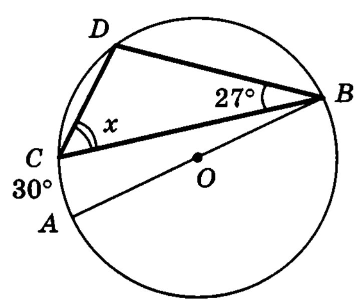
22



23

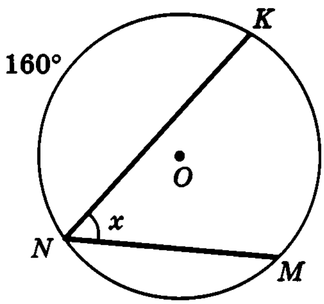


24

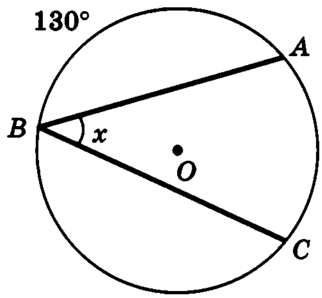


Продолжение табл. 20

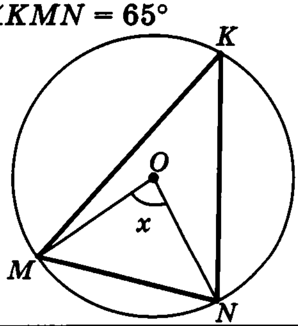
25 $\cup KM = \cup NM$



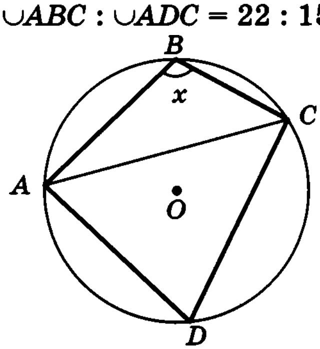
26 $\cup AC : \cup BC = 8 : 15$



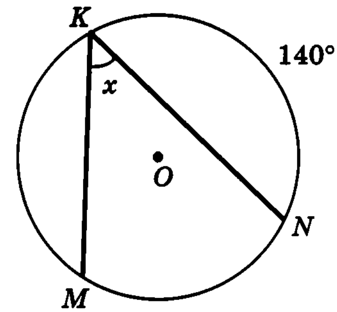
27 $\cup MK : \cup MN = 15 : 8$, $\angle KMN = 65°$



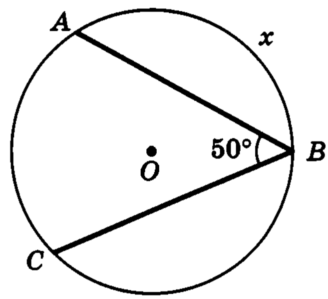
28 $\cup ABC : \cup ADC = 22 : 15$



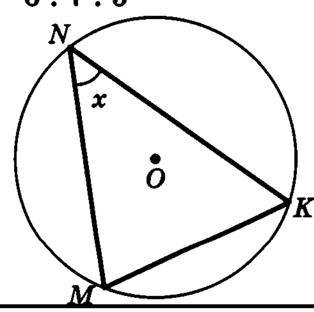
29 $\cup MK : \cup MN = 6 : 5$



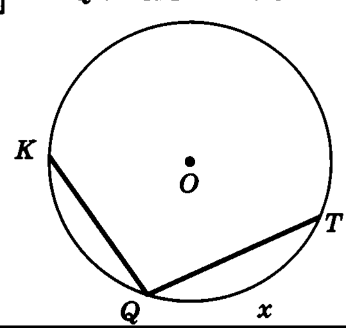
30 $\cup AB : \cup BC = 25 : 27$



31 $\cup NM : \cup MK : \cup NK = 6 : 7 : 5$

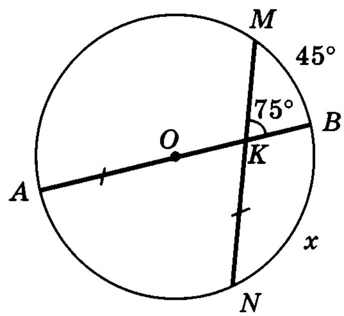


32 $\cup KQ : \cup KT = 1 : 3$

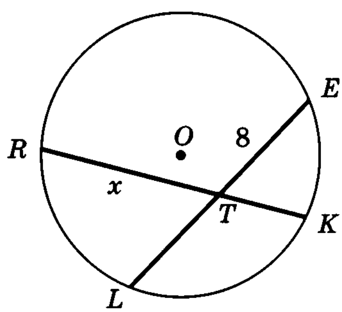


Окончание табл. 20

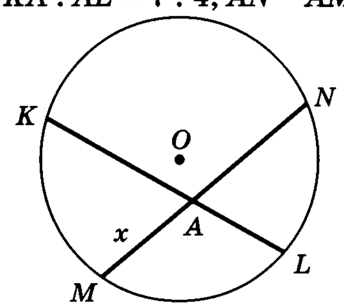
33



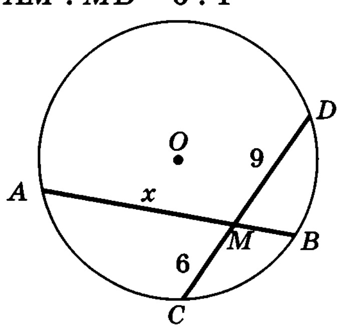
34 $LE = 13$, $RT : TK = 5 : 2$



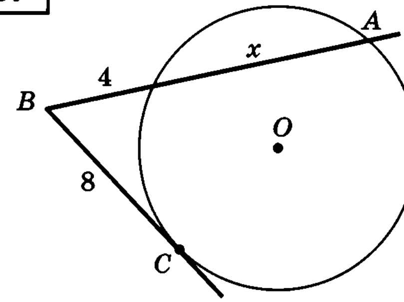
35 $MA : AN = 5 : 6$,
$KA : AL = 7 : 4$, $AN - AM = 2$



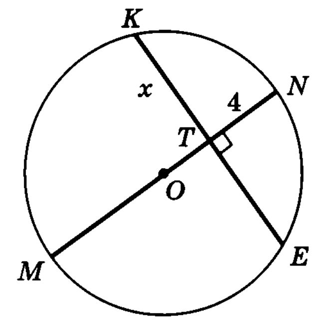
36 $AM : MB = 6 : 1$



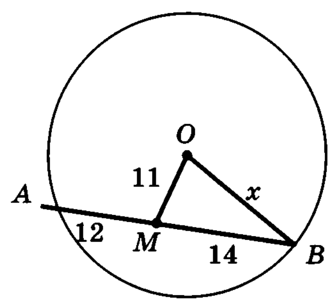
37



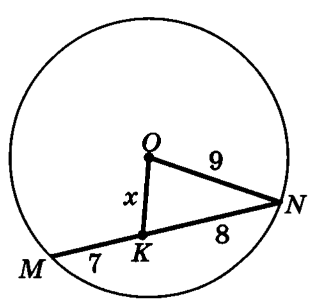
38 $MT = 9$



39



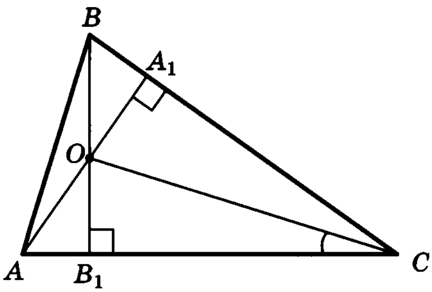
40



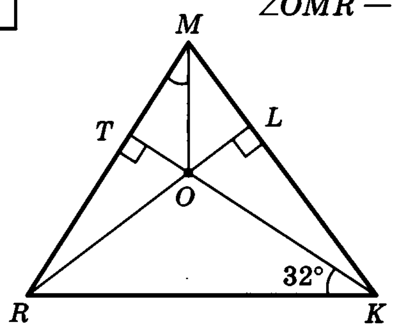
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 21

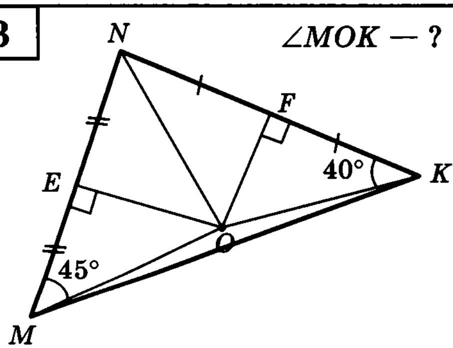
1 $\angle BAC = 73°$, $\angle ACO$ — ?



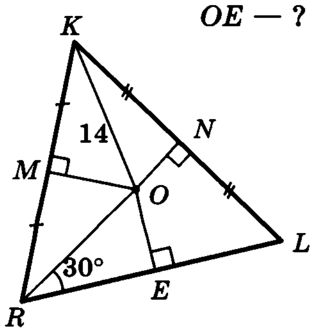
2 $\angle OMR$ — ?



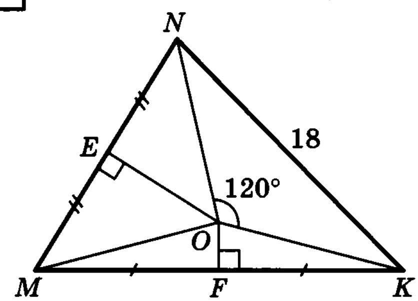
3 $\angle MOK$ — ?



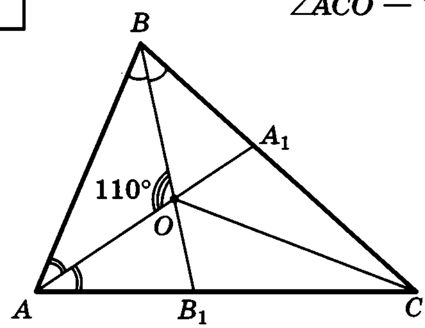
4 OE — ?



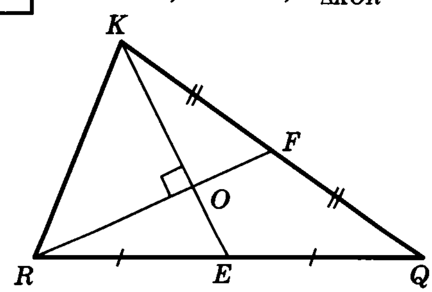
5 MO — ?



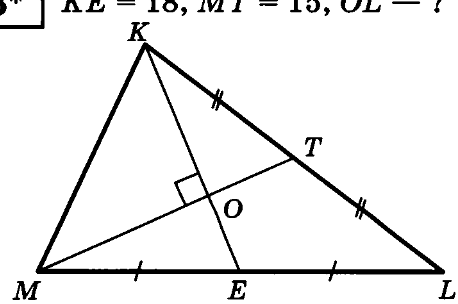
6 $\angle ACO$ — ?



7 $KE = 12$, $RF = 9$, $S_{\Delta KOR}$ — ?

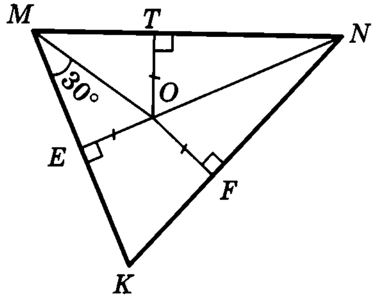


8* $KE = 18$, $MT = 15$, OL — ?

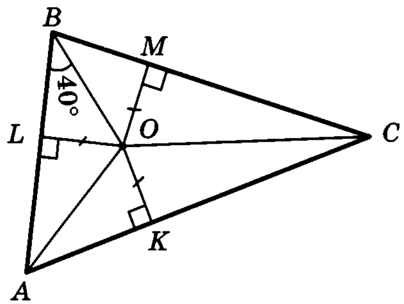


Продолжение табл. 21

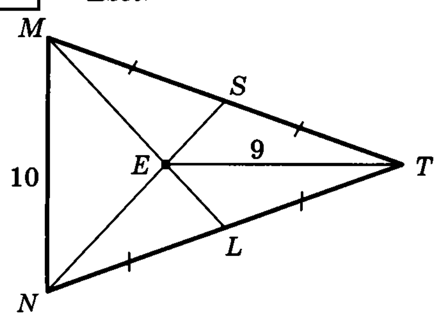
9 $\angle KON$ — ?



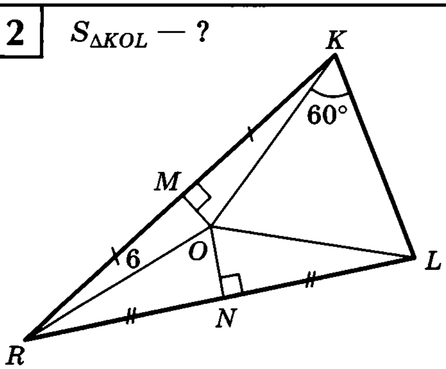
10 $\angle AOC$ — ?



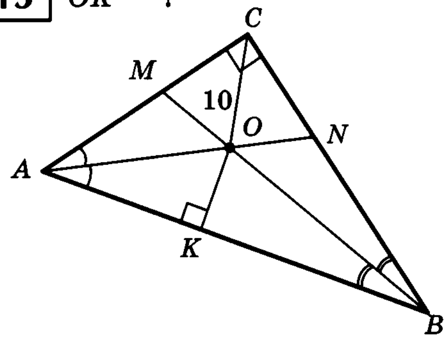
11 $S_{\Delta MTN}$ — ?



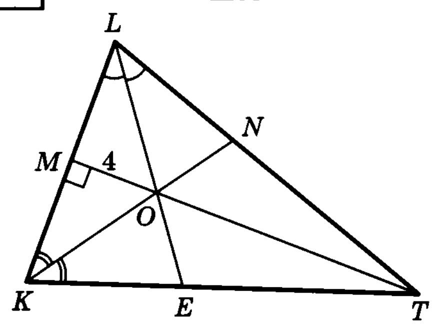
12 $S_{\Delta KOL}$ — ?



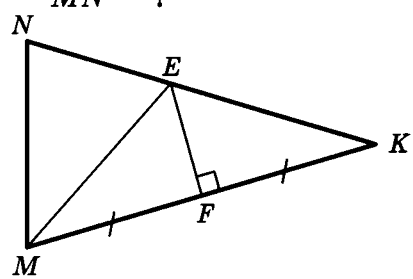
13 OK — ?



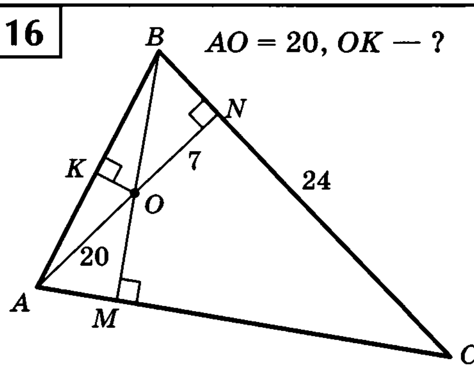
14 $LT = 14$, $S_{\Delta LOT}$ — ?



15 $MK = NK = 24$, $P_{\Delta MNE} = 39$, MN — ?

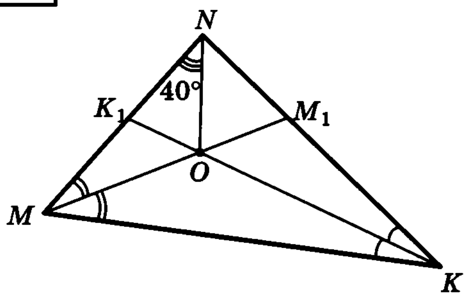


16 $AO = 20$, OK — ?

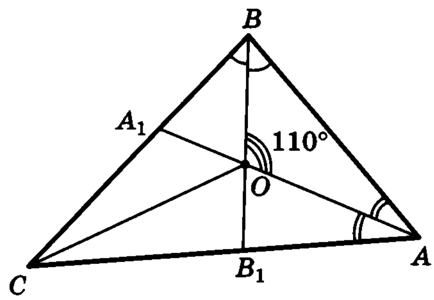


Окончание табл. 21

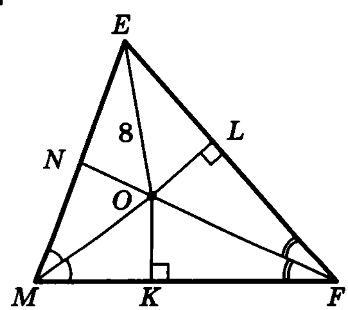
17 $\angle MOK$ — ?



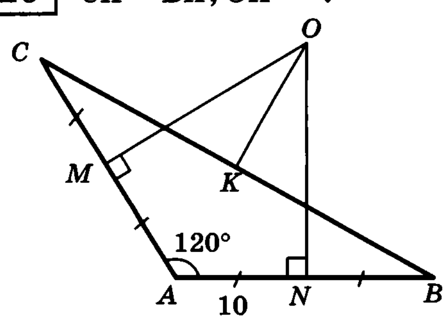
18 $\angle ACO$ — ?



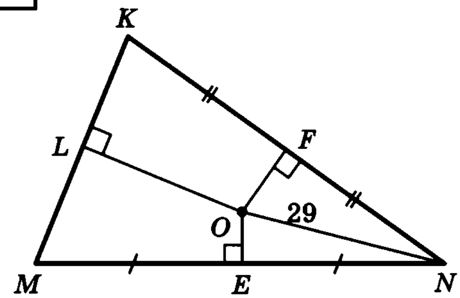
19 $\angle MEF = 60°$, OK — ?



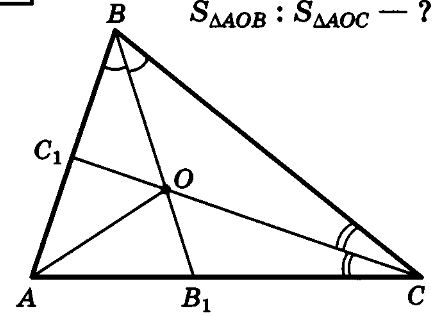
20 $CK = BK$, OK — ?



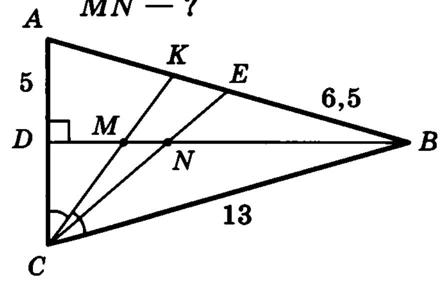
21 $MK = 40$, OL — ?



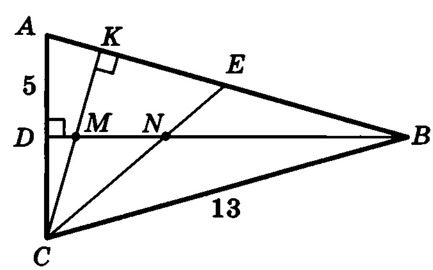
22 $AB = 10$, $AC = 15$, $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta AOC}$ — ?



23* $AB = BC$, CE — медиана, MN — ?



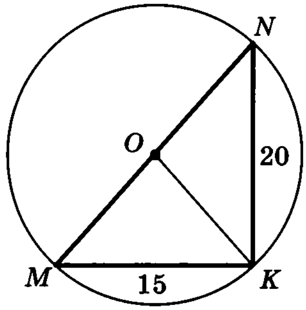
24* $AB = BC$, $AE = BE$, CE — медиана, MN — ?



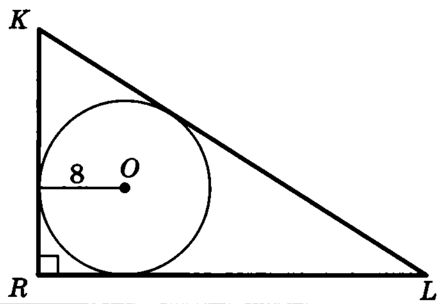
ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Таблица 22

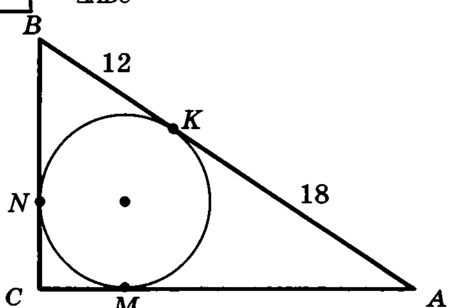
1 OK — ?



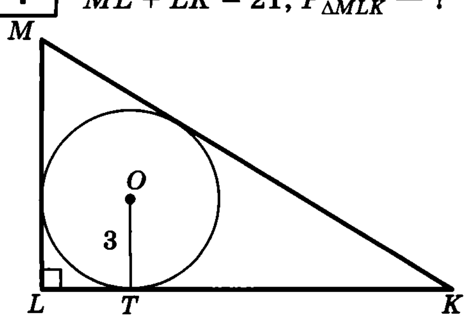
2 $KL = 35$, $P_{\Delta KRL}$ — ?



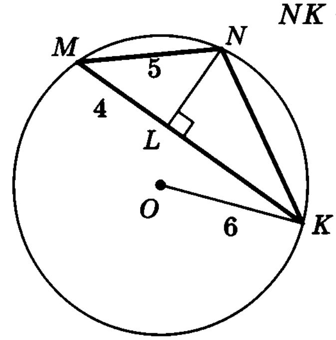
3 $P_{\Delta ABC}$ — ?



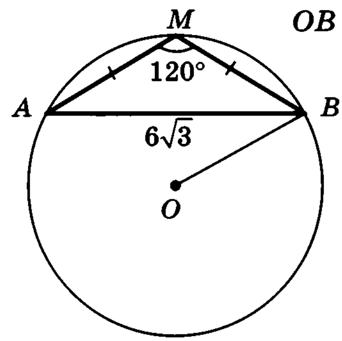
4 $ML + LK = 21$, $P_{\Delta MLK}$ — ?



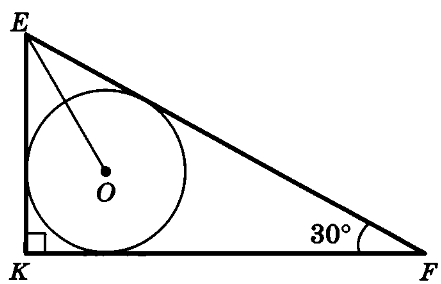
5 NK — ?



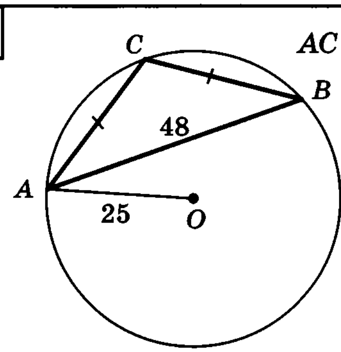
6 OB — ?



7 $EO = 20$, KF — ?



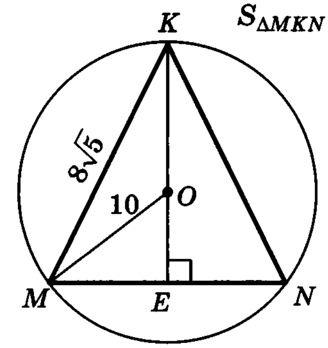
8* AC — ?



Продолжение табл. 22

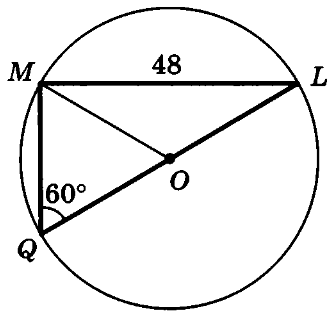
9

$S_{\Delta MKN}$ — ?



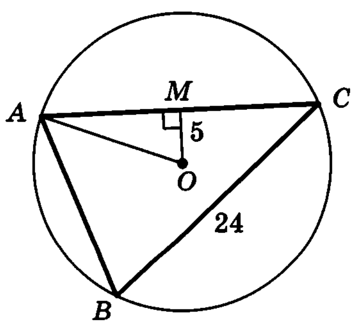
10

MO — ?



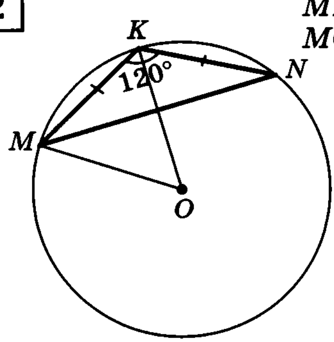
11

$AC = BC$, AO — ?



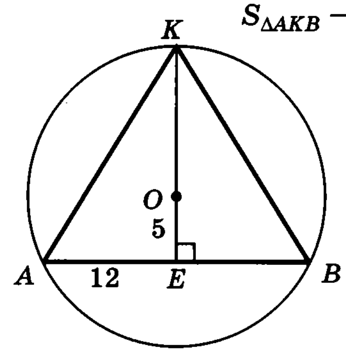
12

$MK = 10$,
MO — ?



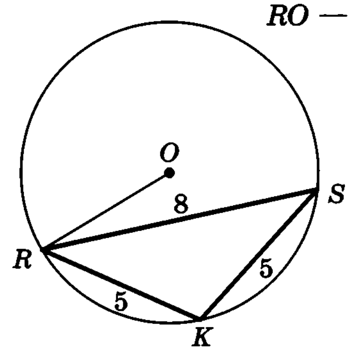
13

$S_{\Delta AKB}$ — ?



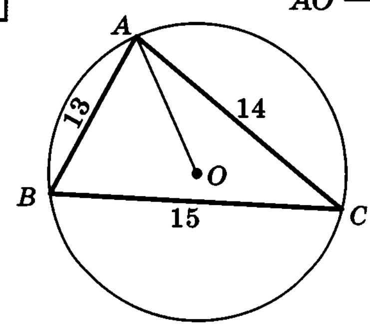
14

RO — ?



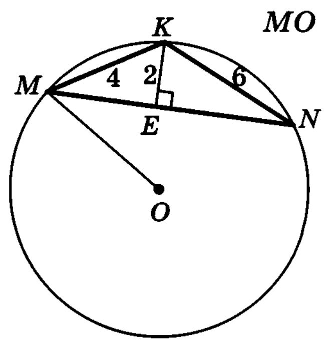
15

AO — ?

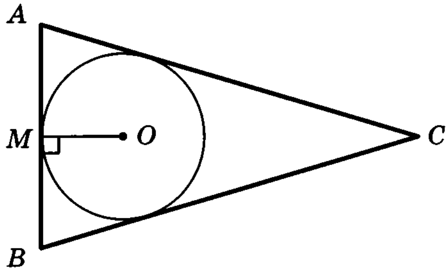
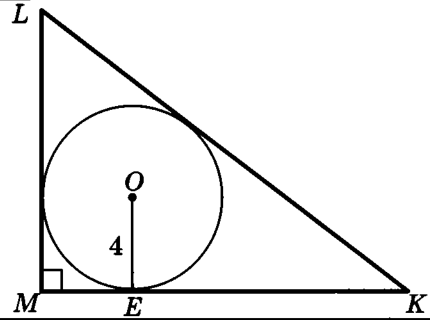
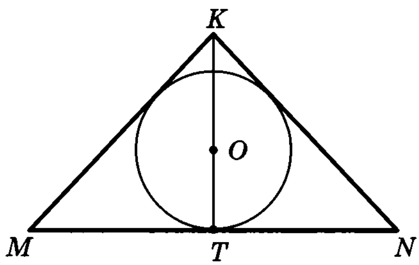
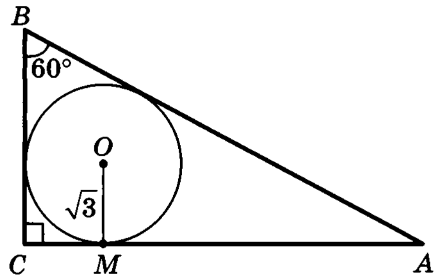
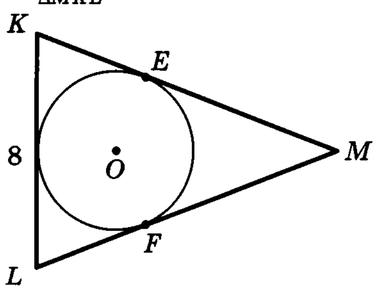
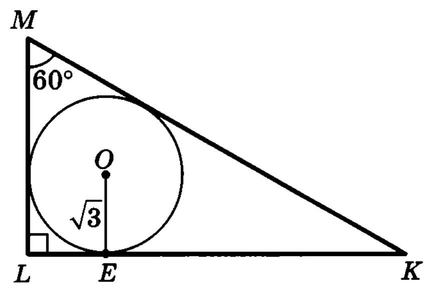
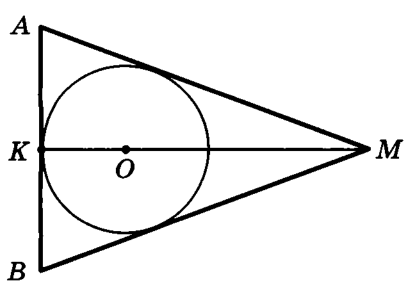
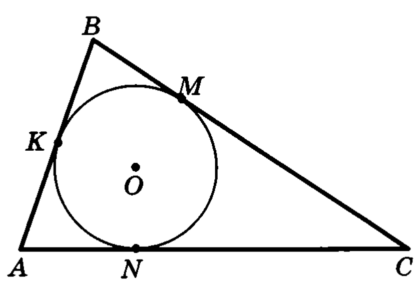


16

MO — ?



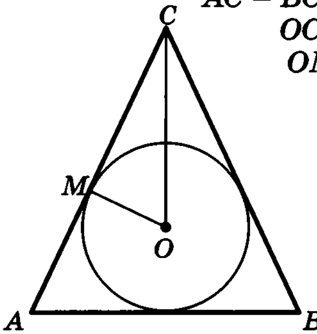
Продолжение табл. 22

17 $AC = BC = 26$, $AO = 20$, OM — ? 	**21** $LK = 20$, $S_{\Delta LMK}$ — ? 
18 $P_{\Delta MKN} = 40$, $OT : KT = 2 : 5$, MN — ? 	**22** $S_{\Delta ABC}$ — ? 
19 $MK = ML$, $KE : EM = 2 : 3$, $P_{\Delta MKL}$ — ? 	**23** ML — ? 
20 $AM = BM = 30$, $OM : OK = 12 : 5$, AB — ? 	**24** $BC = 20$, $AB = 10$, $AC = 24$, BM — ? 

Продолжение табл. 22

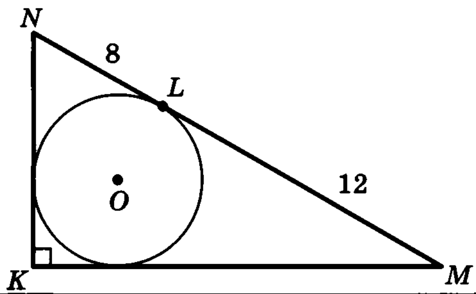
25

$AC = BC = 20$, $OC = 10$, OM — ?



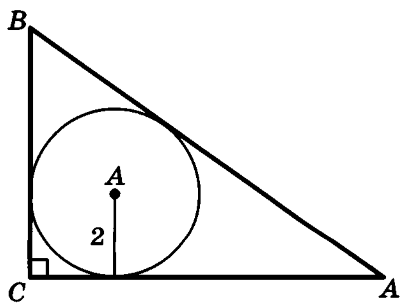
26

$S_{\Delta MKN}$ — ?



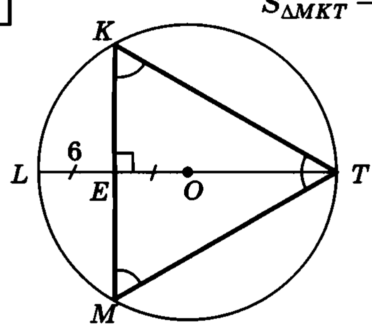
27

$AC + BC = 17$, $S_{\Delta ABC}$ — ?



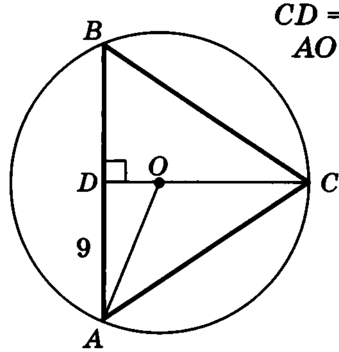
28

$S_{\Delta MKT}$ — ?



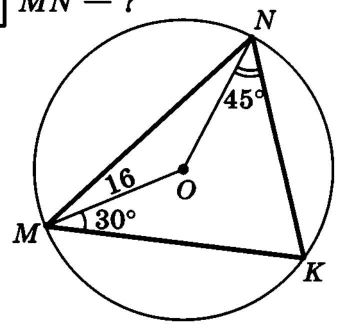
29

$CD = 12$, AO — ?



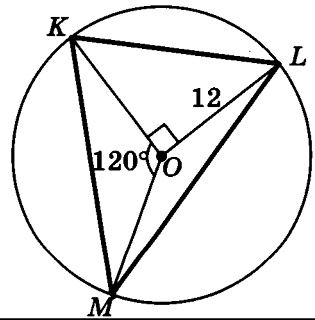
30

MN — ?



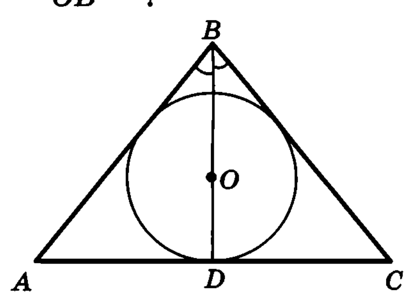
31

ML — ?



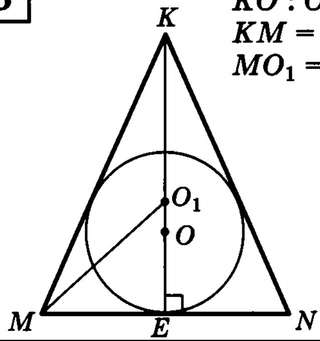
32

$AB = BC = 10$, $BD = 8$, OB — ?

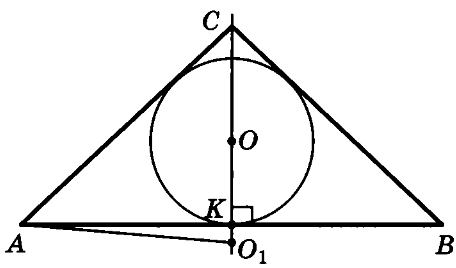


Продолжение табл. 22

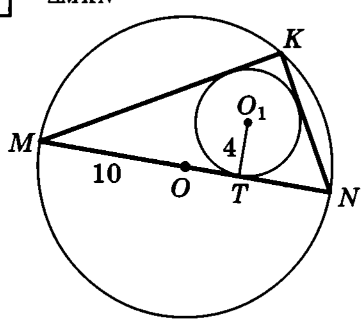
33 $KO : OE = 5 : 3$, $KM = KN$, $MO_1 = R$ — ?



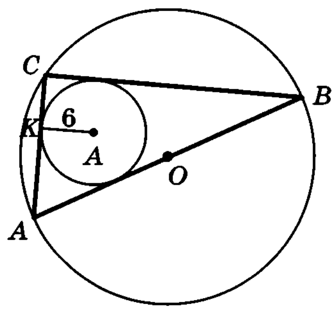
34 $AC = BC$, $OC = 10$, $OK = 8$, $AO_1 = R$ — ?



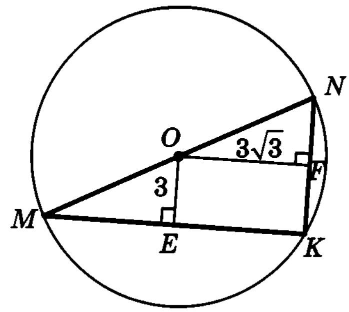
35 $P_{\Delta MKN}$ — ?



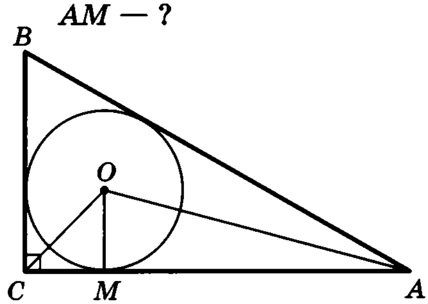
36 $P_{\Delta ABC} = 72$, AO — ?



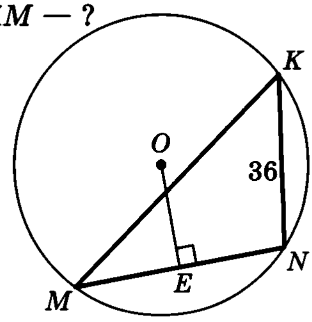
37 MO — ?



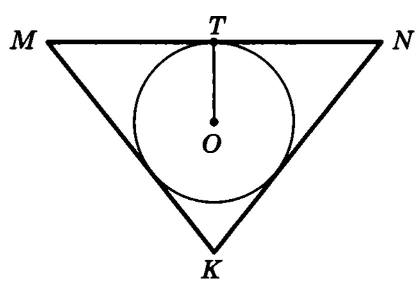
38 $AO = 13$, $CO = 5\sqrt{2}$, AM — ?



39 $MN = 40$, $OE = 21$, $\sin \angle M$ — ?

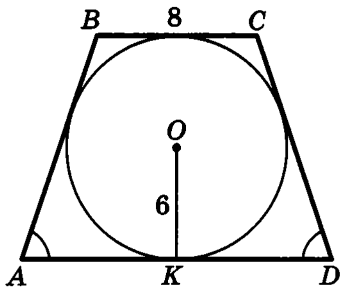


40 $KM = KN = 10$, $\cos \angle M = 0{,}6$, OT — ?

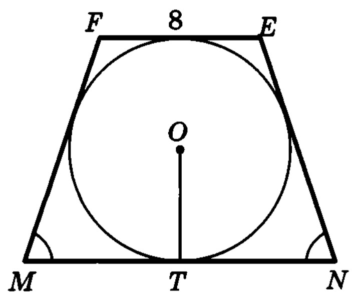


Продолжение табл. 22

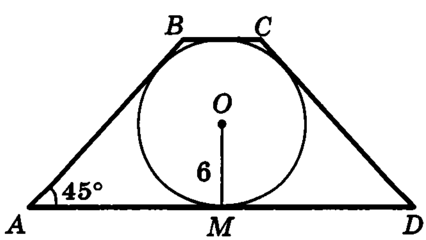
41 AD — ?



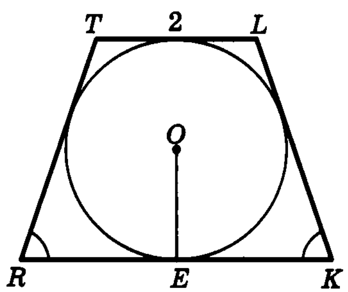
42 $MN = 18$, OT — ?



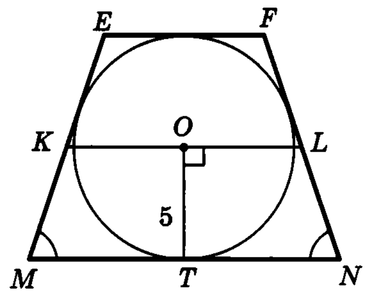
43 $AB = CD$, S_{ABCD} — ?



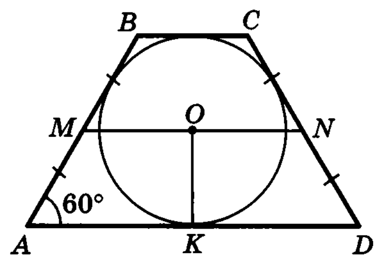
44 $RK = 18$, OE — ?



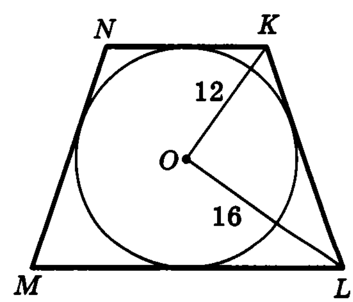
45 $KL = 8$, S_{MEFN} — ?



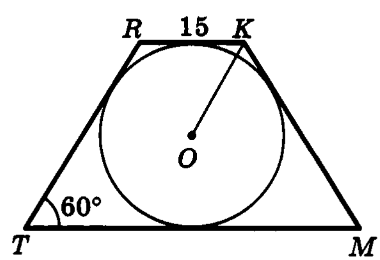
46 $MN = 20$, OK — ?



47 $MN = KL$, S_{MNKL} — ?

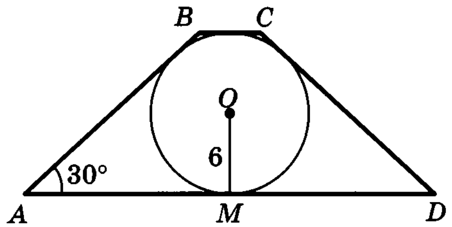


48 $TM \parallel RK$, OK — ?

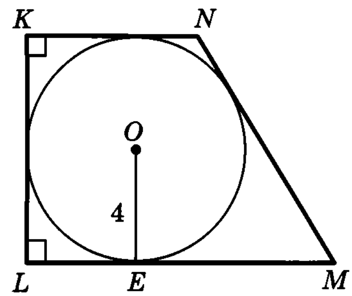


Продолжение табл. 22

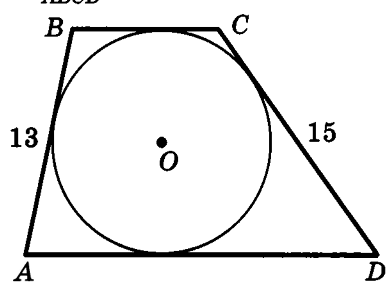
49 $ABCD$ — трапеция, $AB = BC$, $AD + BC$ — ?



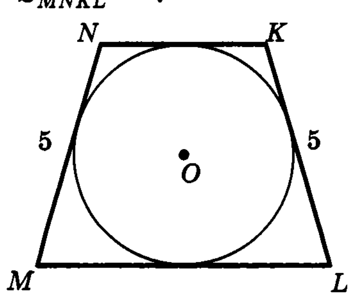
50 $ML - NK = 6$, P_{MNKL} — ?



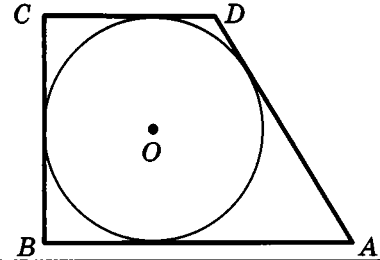
51 $AD \parallel BC$, $AD - BC = 14$, S_{ABCD} — ?



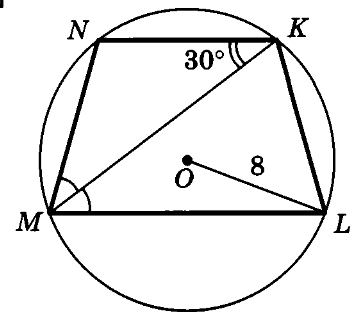
52 $ML \parallel NK$, $ML - NK = 6$, S_{MNKL} — ?



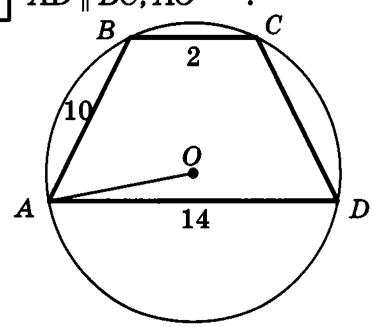
53 $CD : AD : AB = 2 : 6 : 7$, $P_{ABCD} = 54$, AB, BC, CD, AD — ?



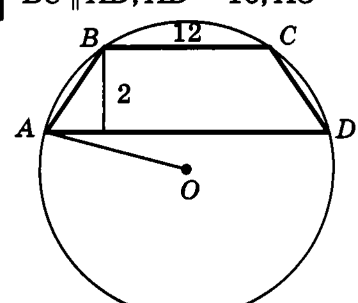
54* $ML \parallel NK$, S_{MNKL} — ?



55 $AD \parallel BC$, AO — ?

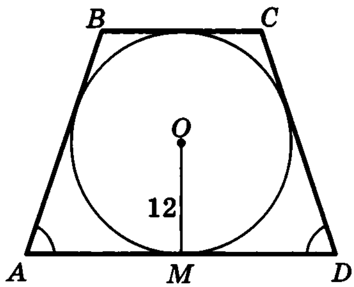


56 $BC \parallel AD$, $AD = 16$, AO — ?

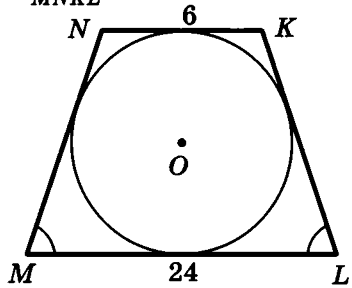


Продолжение табл. 22

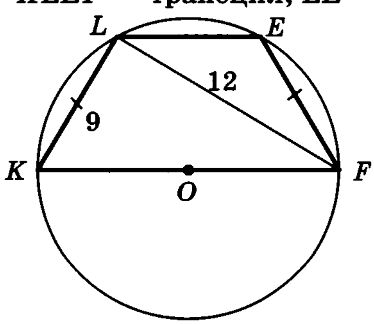
57 $P_{ABCD} = 100$, S_{ABCD} — ?



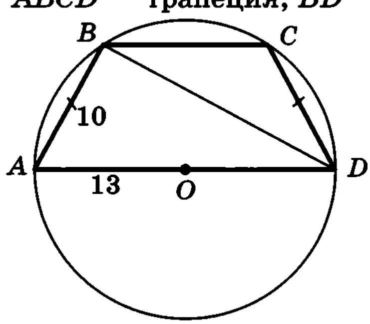
58 $MNKL$ — трапеция, S_{MNKL} — ?



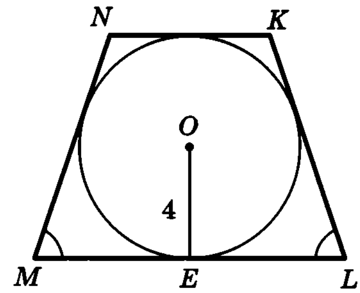
59 $KLEF$ — трапеция, LE — ?



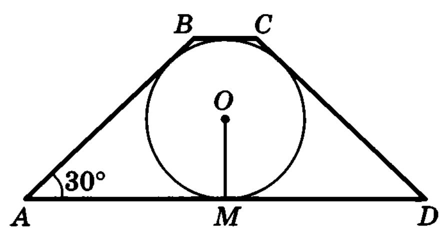
60 $ABCD$ — трапеция, BD — ?



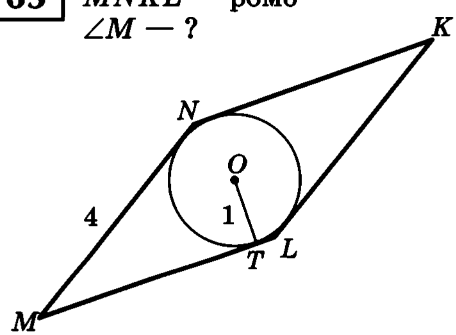
61 $S_{MNKL} = 80$, P_{MNKL} — ?



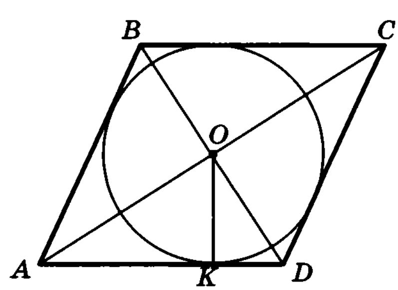
62 $AB = BC$, $S_{ABCD} = 72$, OM — ?



63 $MNKL$ — ромб $\angle M$ — ?

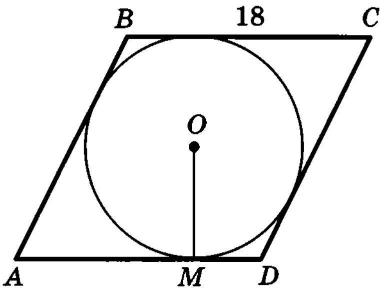


64 $ABCD$ — ромб, $AC = 40$, $BD = 30$, OK — ?

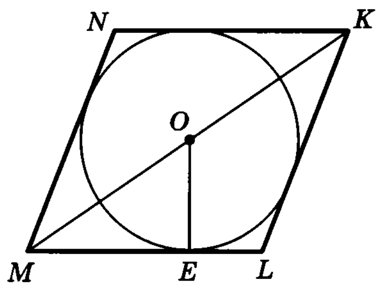


Окончание табл. 22

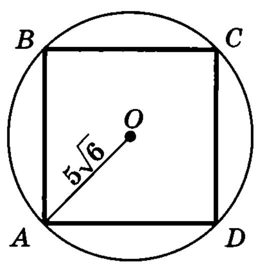
65 $AB = CD$, $BC = AD$, S_{ABCD} — ?



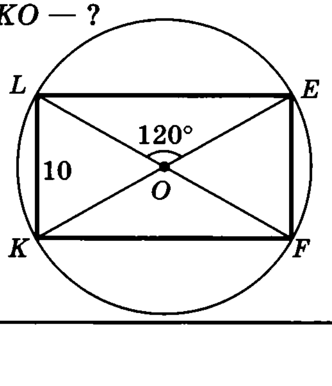
66 $MNKL$ — ромб, $MK = 32$, $P_{MNKL} = 80$, OE — ?



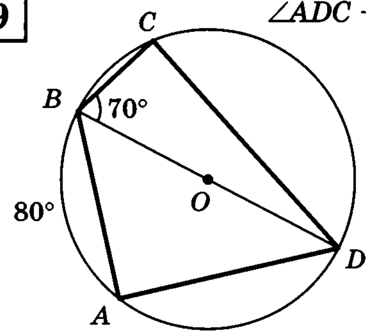
67 $ABCD$ — ромб, S_{ABCD} — ?



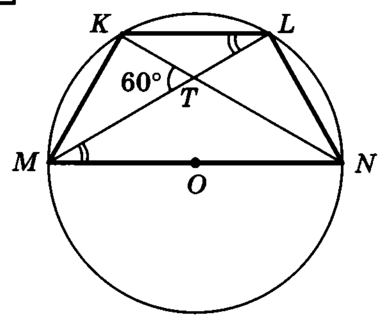
68 $KLEF$ — прямоугольник, KO — ?



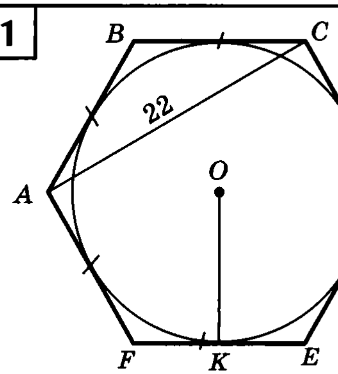
69 $\angle ADC$ — ?



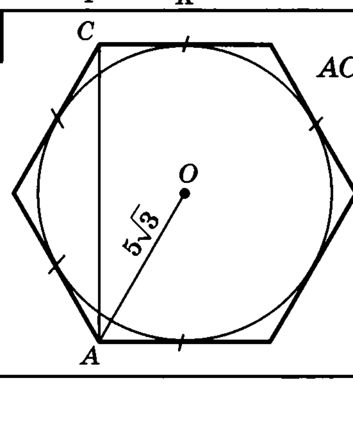
70 $\angle MNL$ — ?



71 OK — ?



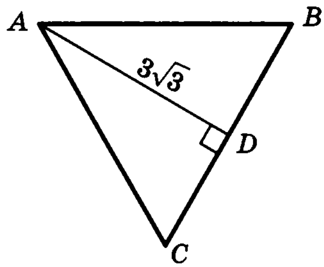
72 AC — ?



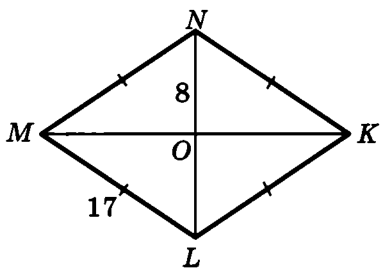
ВЕКТОРЫ

Таблица 23

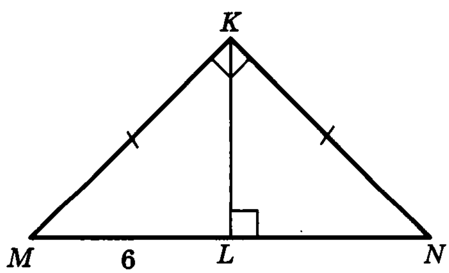
1 ΔABC — равносторонний. Найдите $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}|$.



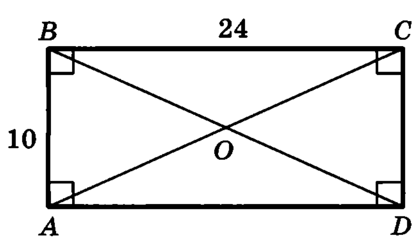
2 Найдите $|\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{NM}|$



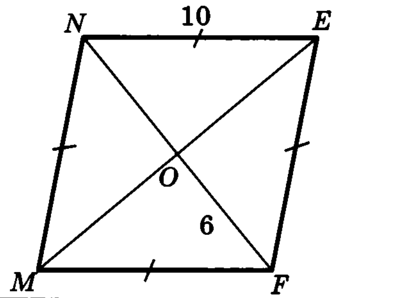
3 Найдите $|\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{ML}|$



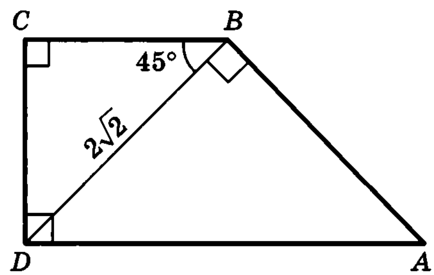
4 Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OD}|$



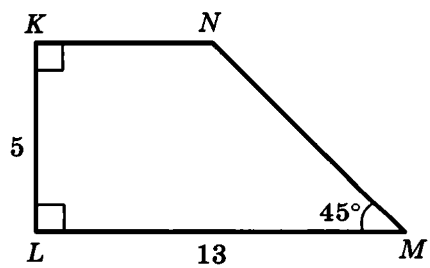
5 Найдите $|\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NE}-\overrightarrow{ON}|$



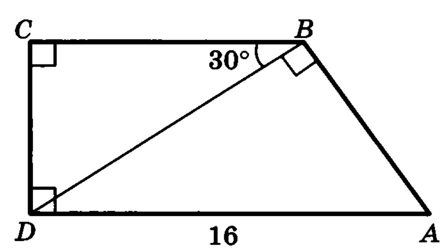
6 Найдите $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}|$



7 Найдите $|\overrightarrow{KM}|$, $|\overrightarrow{NM}|$, $|\overrightarrow{LN}|$

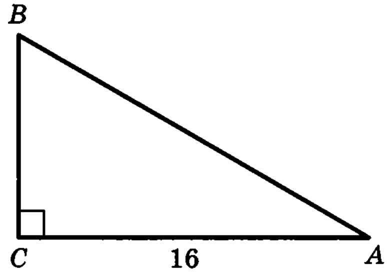


8 Найдите $|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$

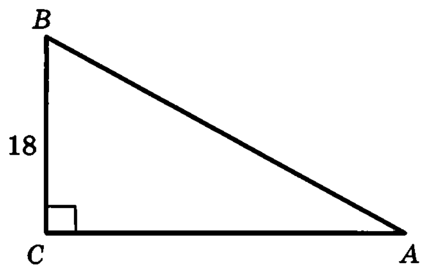


Продолжение табл. 23

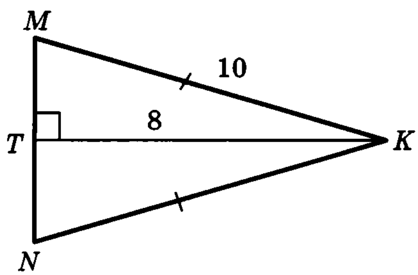
9 $\vec{p}=|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{CB}|-|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{p}|$ — ?



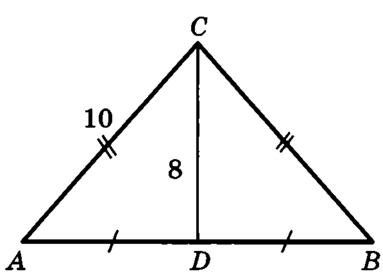
10 $\vec{k}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$, $|\vec{k}|$ — ?



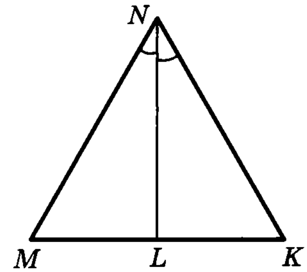
11 Найдите $|\overrightarrow{TK}-\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{KM}|$



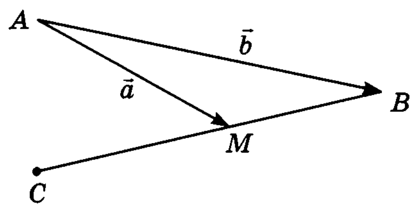
12 Найдите $|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}|$



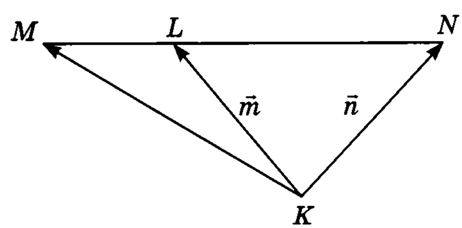
13 ΔMNK — равносторонний. Найдите $|\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{ML}|$



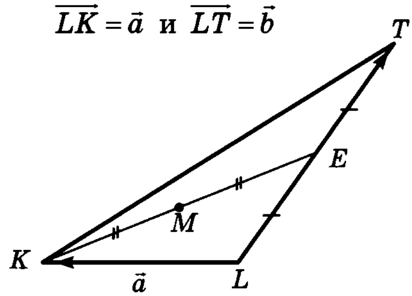
14 $CM : MB = 3 : 2$.
Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$



15 $ML : LN = 2 : 5$.
Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через $\vec{m}=\overrightarrow{KL}$ и $\vec{n}=\overrightarrow{KN}$

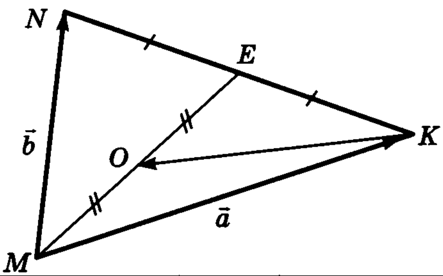


16 Выразите вектор $\overrightarrow{LM}$ через $\overrightarrow{LK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{LT}=\vec{b}$

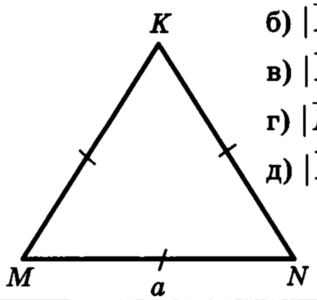


Продолжение табл. 23

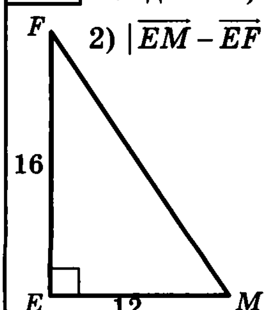
17 Выразите вектор $\overrightarrow{KO}$ через $\overrightarrow{MK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$



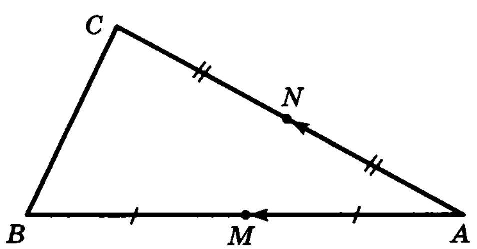
18 Найдите: а) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MN}|$, б) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}|$, в) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{NK}|$, г) $|\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KN}|$, д) $|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MN}|$



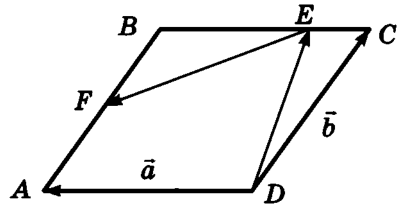
19 Найдите: 1) $|\overrightarrow{EM}|-|\overrightarrow{EF}|$, 2) $|\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{EF}|$, 3) $|\overrightarrow{EM}|+|\overrightarrow{EF}|$, 4) $|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EF}|$, 5) $|\overrightarrow{ME}|+|\overrightarrow{EF}|$, 6) $|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EF}|$, 7) $|\overrightarrow{ME}|-|\overrightarrow{EF}|$, 8) $|\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{EF}|$



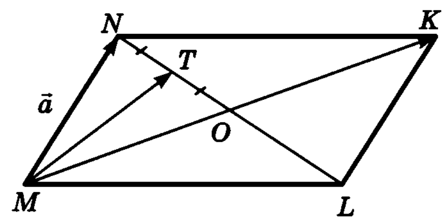
20 $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ — ?



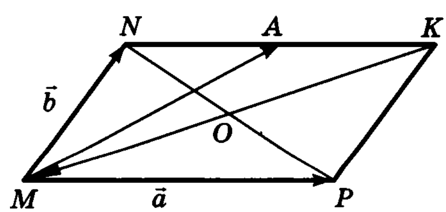
21 $ABCD$ — ромб, $CE=\frac{1}{5}BE$. Выразите векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$



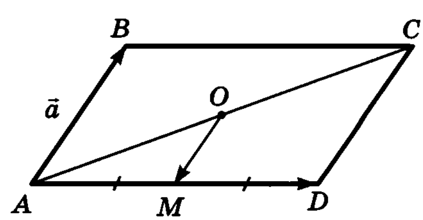
22 $MNKL$ — параллелограмм. Выразите вектор $\overrightarrow{MT}$ через $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MK}=\vec{b}$



23 $MNKP$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MA}$ через векторы $\overrightarrow{MP}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$



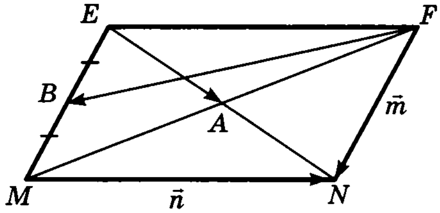
24 $ABCD$ — параллелограмм. $AO:OC=2:1$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$



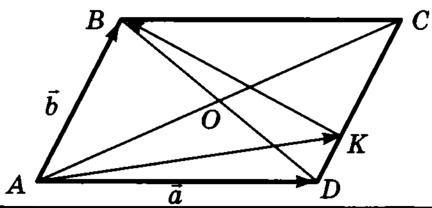
Продолжение табл. 23

25 $MEFN$ — параллелограмм.

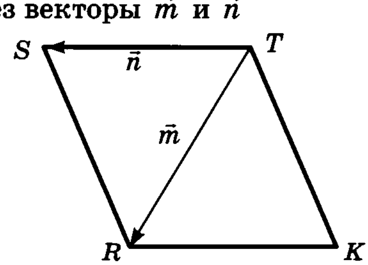
Выразите векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{FB}$ через векторы $\overrightarrow{FN} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$



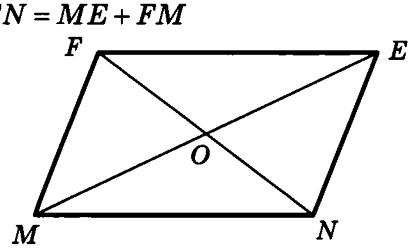
26 $ABCD$ — параллелограмм. $DK : KC = 1 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$



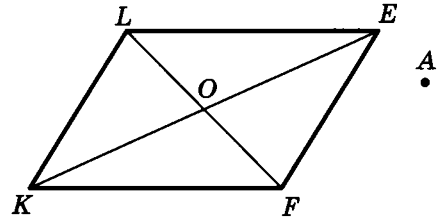
27 $RSTK$ — параллелограмм. Выразите векторы $\overrightarrow{RK}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{SR}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$



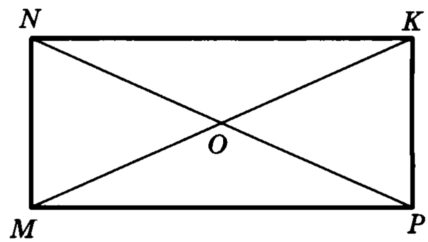
28 $MFEN$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FM}$



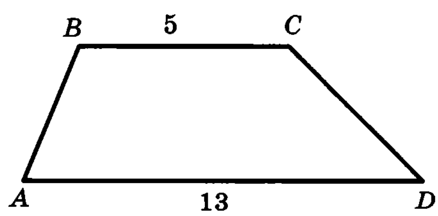
29 Докажите, что $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AO}$, где A — любая точка плоскости



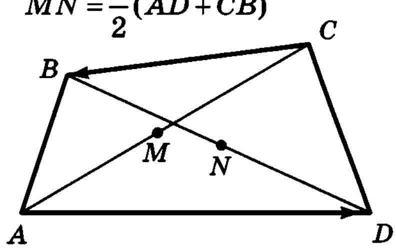
30 Докажите, что $|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PK}|$



31 $ABCD$ — трапеция. $\vec{a} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. Найдите $|\vec{a}|$

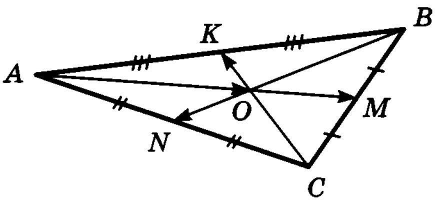


32 M — середина AC, N — середина BD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$

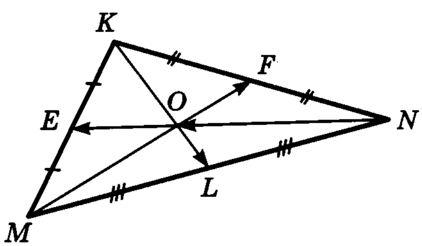


Окончание табл. 23

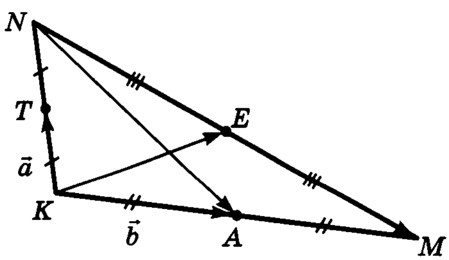
33 $|\overrightarrow{AM}| = a$. Найдите $|5\overrightarrow{AO} - 7\overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OK} + 4\overrightarrow{ON}|$



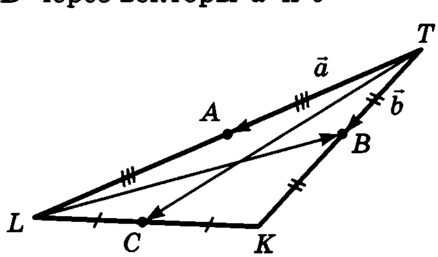
34 $|\overrightarrow{NE}| = b$. Найдите $|4\overrightarrow{NO} - 7\overrightarrow{OE} + 3\overrightarrow{OF} + 3\overrightarrow{OL}|$



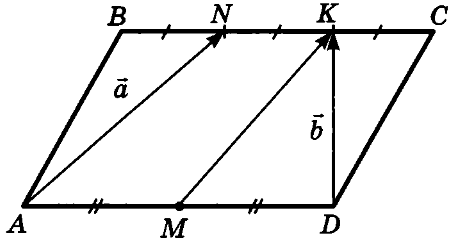
35 Выразите векторы $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NF}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$



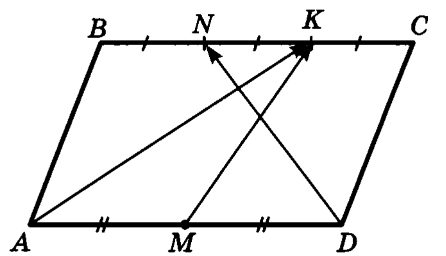
36 Выразите векторы $\overrightarrow{TC}$, $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LB}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$



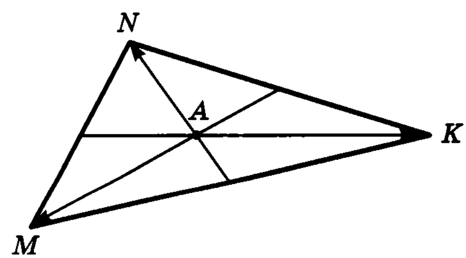
37 Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AN} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DK} = \vec{b}$



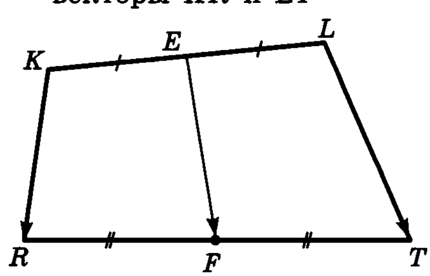
38 Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DN} = \vec{b}$



39 Докажите, что $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$



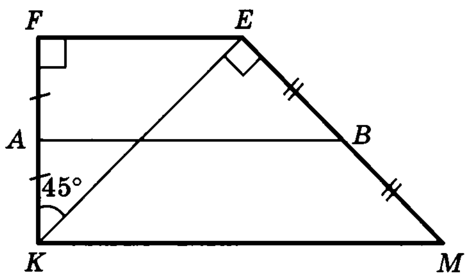
40 Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{KR}$ и $\overrightarrow{LT}$



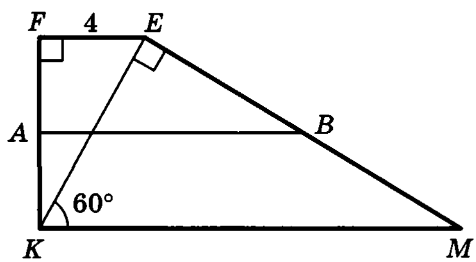
ТРАПЕЦИЯ. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Таблица 24

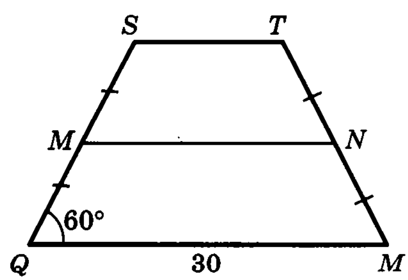
1 $FK = 4$, AB — ?



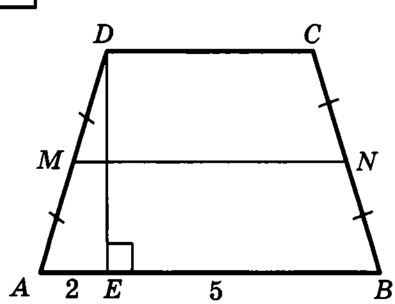
2 AB — ?



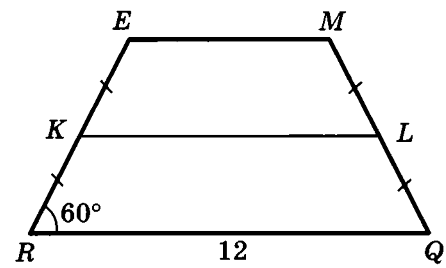
3 $SQ = TR = 20$, ST, MN — ?



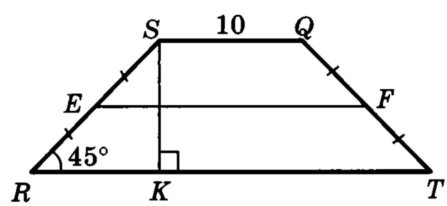
4 MN, DC — ?



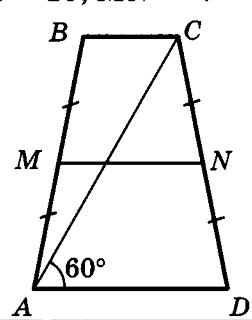
5 $RE = EM = MQ$, KL — ?



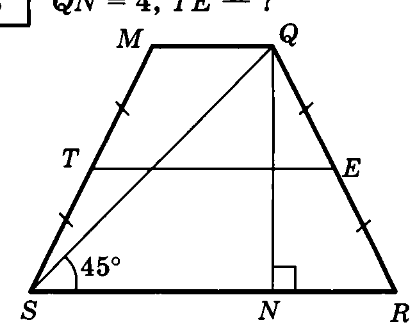
6 $SK = 8$, RT, EF — ?



7 $AC = 16$, MN — ?

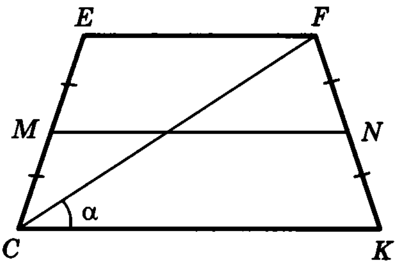


8 $QN = 4$, TE — ?

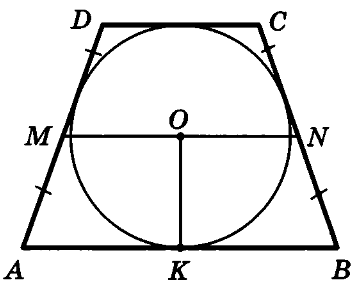


Продолжение табл. 24

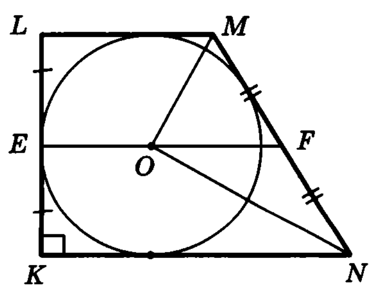
9 $MN = 4$, $S_{CEFK} = 8$, $\operatorname{tg} \alpha$ — ?



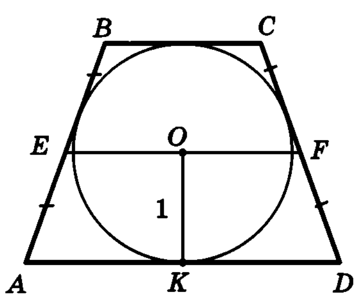
10 $MN = 68$, $AB - DC = 64$, OK — ?



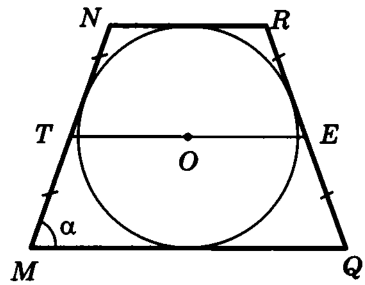
11 $OM = 6$, $ON = 8$, EF — ?



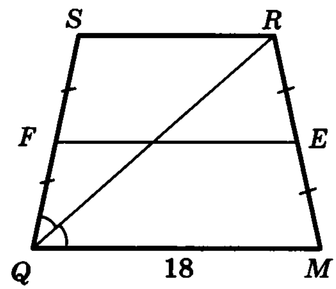
12 $AD = 2BC$, EF — ?



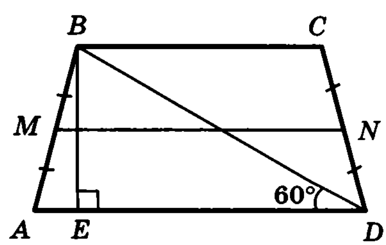
13 $S_{MNRQ} = 20$, $\sin \alpha = 0{,}8$, TE — ?



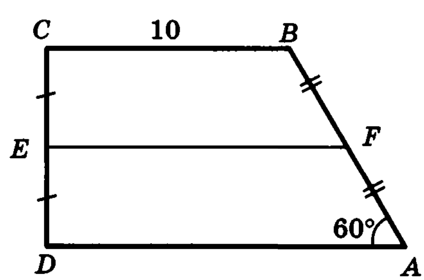
14 $P_{QSRM} = 48$, FE — ?



15 $BE = 4$, MN — ?

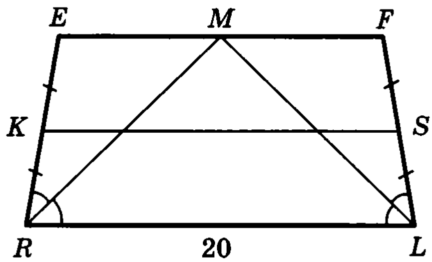


16 $AB = 8$, EF — ?

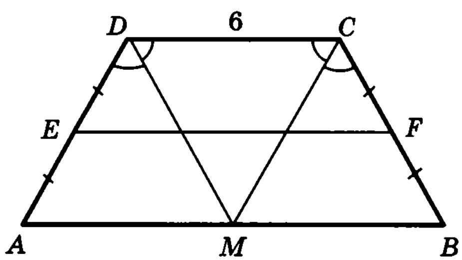


Окончание табл. 24

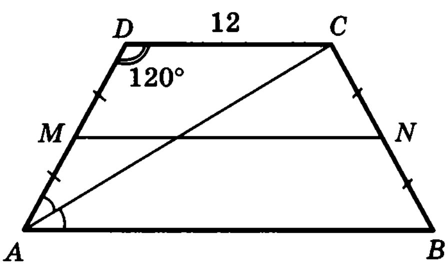
17 $ER = 9$, KS — ?



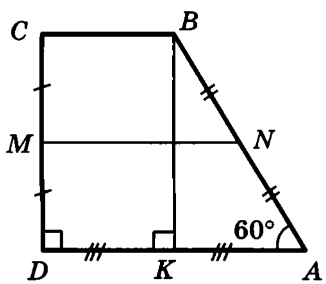
18 $AD = 8$, EF — ?



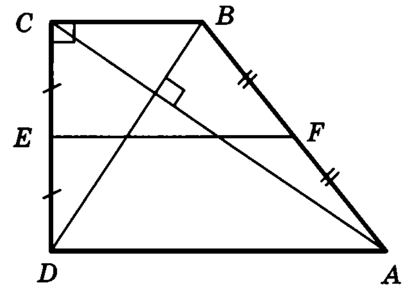
19 MN — ?



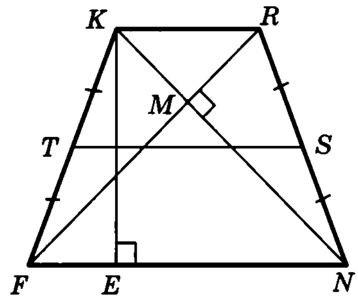
20 $AB = 10$, MN — ?



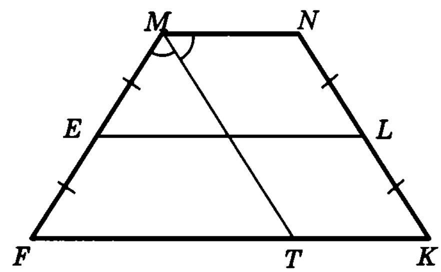
21* $BC : CD = 1 : 2$, $EF = 20$, BC — ?



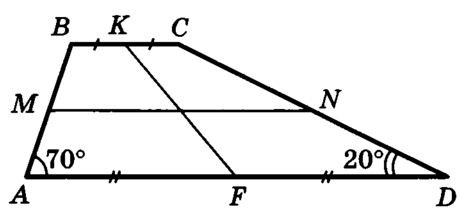
22 $KE = 10$, TS — ?



23 $P_{FMNK} = 71{,}8$, $EL = 21{,}4$, $MT \parallel NK$, MN — ?



24* $KF = 2$, $MN = 4$ — средняя линия, BC, AD — ?



Раздел III

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

К таблице 1

9. Так как $AMCN$ — параллелограмм (по условию), то $AM = CN$, $MC = AN$ и $\angle AMC = \angle ANC$ (по свойству). Тогда $\angle AMD = \angle CNB$ как смежные соответственно углам $\angle AMC$ и $\angle ANC$. Кроме того, $DM = BN$ (по условию), значит $\Delta AMD = \Delta CNB$ (по двум сторонам и углу между ними). Выходит, что $AD = BC$ и $AB = CD$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм (по признаку), что и требовалось доказать.

12. По условию задачи $AECF$ — параллелограмм, тогда $AE = CF$, $AF = EC$, $\angle E = \angle F$ (по свойству). Если $EC = AF$, то $BC = AD$. Заметим, что $\Delta AEB = \Delta CDF$ (по стороне и прилежащим к ней углам). Значит, $AB = CD$, следовательно, $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма), что и требовалось доказать.

15. Так как $MBND$ — параллелограмм (по условию), то $BM = DN$, $BN = DM$ и $\angle BMN = \angle DNM$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BM, DN и секущей MN). Тогда $\angle AMB = \angle CND$ как углы смежные соответственно углам $\angle BMN$ и $\angle DNM$. Выходит, что $\Delta AMB = \Delta CND$ (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников выходит, что $AB = CD$. Аналогично доказывается, что $BC = AD$ (из равенства ΔBCN и ΔAMD). Значит, $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

К таблице 2

4. В ΔABC BO — медиана ($AO = OC$) и высота ($AC \perp BO$), значит, ΔABC — равнобедренный (по свойству), тогда $AB = BC$, т. е. $ABCD$ — ромб (по определению). По условию $\angle D = 120°$, тогда $\angle ABO = \angle CBO = 60°$ (по свойству ромба).

Значит, в ΔAOB $\angle OAB = 90° - 60° = 30° \Rightarrow BO = \frac{1}{2}AB$, тогда $AB = 2 \cdot BO = 20$.

Следовательно, $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 80$.

Ответ: 80.

7. В параллелограмме $BMNC$ $\angle C = \angle M = 90°$, тогда $\angle B = \angle N = 90°$ и так как $BC = CN$, то $BMNC$ — квадрат. Поскольку $\angle BON = 120°$, то $\angle AON = 180° - 120° = 60°$, тогда $\angle A = 90° - 60° = 30°$.

По условию $AB = 24$, значит, $BC = \frac{1}{2}AB = 12$.

Следовательно, $P_{BMNC} = 4 \cdot BC = 48$.

Ответ: 48.

14. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 3x$. Но $\angle M + \angle MNK = 180°$ (как сумма односторонних углов), где $\angle M = 60°$ (по условию). Тогда получим уравнение $x + 3x + 60 = 180$, или $4x = 120$, откуда $x = 30$. Значит, $\angle 1 = 30°$, тогда $\angle 2 = 30° \cdot 3 = 90°$, т. е. ΔMNL — прямоугольный. Но $\angle 2 = \angle NLK = 90°$ как накрест лежащие при параллельных прямых MN, KL и секущей NL. Значит, $KL = \frac{1}{2}NK = 13$.

Тогда $P_{MNKL} = 2 \cdot (NK + KL) = 39 \cdot 2 = 78$.

Ответ: 78.

15. Пусть $KL = 12x$, тогда $KR = 7x$. Так как KE — биссектриса, то $KR = RE = 7x$ (биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. Доказать самостоятельно).

По условию $P_2 - P_1 = 10$. Но $P_1 = KR + RE + KE = 7x + 7x + KE = 14x + KE$, $P_2 = KL + LT + TE + KE = 12x + 7x + (RT - RE) + KE = 19x + (12x - 7x) + KE = 24x + KE$. Значит, $24x + KE - (14x + KE) = 10$, или $10x = 10$, $x = 1$. Следовательно, $KR = 7x = 7$, $KL = 12x = 12$. Тогда $P_{RKLT} = 2 \cdot (12 + 7) = 38$.

Ответ: 38.

К таблице 3

4. По условию $\angle NFE = 60°$, тогда $\angle MNF = 60°$ как накрест лежащие при параллельных прямых FE, MN и секущей FN. Но $\angle KNF = 40°$ (по условию), тогда $\angle KFN = 90° - 40° = 50°$.

Значит, $\angle MFE = 50° + 60° = 110° \Rightarrow \angle MNE = 110°$ (по свойству параллелограмма), $\angle E = \angle M = 180° - 110° = 70°$ (сумма односторонних углов равна 180°).

Ответ: $\angle M = \angle E = 70°$, $\angle MFE = \angle MNE = 110°$.

8. $\angle KLN = \angle MNL = 60°$ как накрест лежащие при параллельных прямых LK, MN и секущей LN. По условию $ME = EN$, значит, LE — медиана

ΔMLN. Кроме того, LE — высота (по условию). Следовательно, $\Delta MEL = \Delta NEL$ (по двум катетам), тогда $ML = NL$, т. е. ΔLMN — равнобедренный с основанием MN. Значит, $\angle M = \angle MNL = 60°$ (по свойству) и $\angle M = \angle K = 60°$, тогда $\angle MLK = \angle MNK = 180° - 60° = 120°$ (как сумма односторонних углов).

Ответ: $\angle M = \angle K = 60°$, $\angle MLK = \angle MNK = 120°$.

11. Так как $\angle MNQ = 85°$, то $\angle MNL = 180° - 85° = 95°$ (по свойству смежных углов).

Аналогично находим $\angle LON = 180° - 110° = 70°$.

В ΔLON $\angle OLN = 180° - (95° + 70°) = 15°$.

По условию $LT \perp MQ$, тогда $\angle Q = 90° - 15° = 75°$.

Значит, $\angle Q = \angle K = 75°$, $\angle KLQ = \angle KMQ = 105°$.

Ответ: $\angle K = \angle Q = 75°$, $\angle KLQ = \angle KMQ = 105°$.

14. Так как в параллелограмме $BC = CD$ (по условию), то $ABCD$ — ромб. По свойству ромба $AC \perp BD$, значит, ΔAOB — прямоугольный (O — точка пересечения диагоналей). По свойству прямоугольного треугольника имеем: $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Но $\angle 1 - \angle 2 = 30°$ (по условию). Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 = 90°, \\ \angle 1 - \angle 2 = 30°. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим $2 \cdot \angle 1 = 120°$, откуда $\angle 1 = 120° : 2 = 60°$, тогда $\angle 2 = 90° - 60° = 30°$.

Но диагонали ромба являются биссектрисами его углов, значит, $\angle A = \angle C = 30° \cdot 2 = 60°$, $\angle B = \angle D = 60° \cdot 2 = 120°$.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

16. Так как $KL = LM$ (по условию), то параллелограмм $KLMN$ — ромб (по определению). KT — биссектриса $\angle MKN$. По условию $\angle KTM = 120°$. Пусть $\angle MKT = \angle TKN = x$, тогда $\angle KMN = 2x$. В ΔMKT имеем: $x + 2x + 120 = 180$, $3x = 60$, $x = 20$. Значит, $\angle MKT = \angle TKN = 20°$, тогда $\angle MKN = 40°$. Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то $\angle LKN = \angle LMN = 80°$, тогда $\angle KLM = \angle KNM = 180° - 80° = 100°$.

Ответ: 80°, 80°, 100°, 100°.

К таблице 4

5. Пусть $MN = x$, $RK = y$, тогда $x - y = 3$. Так как $\angle MRK = 135°$, то $\angle MRN = 180° - 135° = 45°$. По условию $\angle L = 90° \Rightarrow \angle N = 90°$ (по свойству параллелограмма), тогда $\angle K = \angle NML = 180° - 90° = 90°$. Значит, $MNKL$ — прямоугольник.

В ΔMNR $\angle NRM = 45° \Rightarrow \angle NMR = 45°$, т. е. $MN = NR = x$. Так как $P = 48$, то имеем $2(MN + NK) = 48$, или $MN + NK = 24$, или $x + x + y = 24$, $2x + y = 24$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 24, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $3x = 27$, $x = 9$, т. е. $MN = KL = 9$, тогда $NK = x + y$, где $y = x - 3 = 6$, $NK = 9 + 6 = 15$.

Ответ: $MN = KL = 9$, $ML = NK = 15$.

8. По условию AL и DK — биссектрисы, тогда $AB = BL$ и $CD = CK$ (биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник).

Так как $BL = CK$, то $BK = LC = x$, $BL = CK = x + 6$, $AB = CD = x + 6$. По условию $P = 48$, тогда $2 \cdot (AB + BC) = 48$, или $AB + BC = 24$, или $x + 6 + x + 6 + x = 24$, $3x = 12$, $x = 4$.

Значит, $AB = CD = x + 6 = 10$, $BC = AD = 2x + 6 = 14$.

Ответ: $AB = CD = 10$, $BC = AD = 14$.

К таблице 5

6. Так как $OE = OM$, то треугольник OEM — равнобедренный, где $\angle OEM = \angle OME$.

По условию $\angle KOM = 60°$ — внешний угол ΔOEM, значит, $\angle OEM = \angle OME = 30°$. В ΔOEF $\angle OFE = 90°$, $\angle FOE = \angle KOM = 60°$ как вертикальные, тогда $\Delta FOE = \Delta KOM$ по гипотенузе и острому углу. Значит, $FE = KM$, т. е. $FEMK$ — равнобедренная трапеция.

Так как $\angle FME = 30°$, $\angle EFM = 90°$, то $\angle FEM = \angle KME = 90° - 30° = 60°$, $\angle EFK = \angle FKM = 180° - 60° = 120°$.

Ответ: $\angle FEM = \angle KME = 60°$, $\angle EFK = \angle FKM = 120°$.

8. По условию $NK = KE = MN$, значит, ΔNKE — равнобедренный, трапеция $MNKE$ — равнобедренная. Пусть $\angle KNE = \angle KEN = x$. Так как $\angle KNE = \angle MEN$ как накрест лежащие при параллельных прямых NK, ME и секущей NE, то $\angle MEN = x$, тогда $\angle M = 2x$.

В ΔMNE $\angle MNE = 75°$. Получим уравнение: $x + 2x + 75 = 180$, $3x = 105$, $x = 35$, тогда $\angle M = \angle MEK = 70°$, $\angle MNK = \angle K = 180° - 70° = 110°$.

Ответ: $\angle M = \angle MEK = 70°$, $\angle MNK = \angle K = 110°$.

12. Так как $AB = CD$, то $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Кроме того, $AB = BC$, значит, ΔABC — равнобедренный с основанием AC. Аналогично ΔACD — равнобедренный с основанием CD.

Пусть $\angle BAC = \angle ACB = x$, $\angle ADC = \angle ACD = y$. Кроме того, $\angle ACB = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC, AD и секущей AC.

В ΔACD имеем $\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180°$, или $x + y + y = 180$, $x + 2y = 180$.

Аналогично из ΔABC получим:

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$, где $\angle B = \angle BCD = x + y$. Значит, $x + y + x + x = 180$, или $3x + y = 180$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 180, \\ 3x + y = 180, \end{cases}$$

откуда $x + 2y = 3x + y$, или $y = 2x$, тогда получим уравнение $3x + 2x = 180$, $5x = 180$, $x = 36$.

Следовательно, $\angle BAD = \angle D = 2x = 72°$, тогда $\angle B = \angle BCD = 180° - 72° = 108°$.

Ответ: $\angle BAD = \angle D = 72°$, $\angle B = \angle BCD = 108°$.

16. Пусть $\angle M = 5x$, тогда $\angle MKR = 4x$. Так как $\angle M + \angle MKR = 180°$, то получим уравнение: $5x + 4x = 180$, $9x = 180$, $x = 20$.

Значит, $\angle M = 5x = 100°$, $\angle MKR = 4x = 80°$.

По условию SK — биссектриса, тогда $\angle SKR = \angle SKM = 80° : 2 = 40°$. Кроме того, по условию $\angle RSK = 90°$, значит, $\angle R = 90° - 40° = 50°$, $\angle RSM = 180° - 50° = 130°$.

Ответ: $\angle R = 50°$, $\angle RSM = 130°$, $\angle M = 100°$, $\angle MKR = 80°$.

22. В ΔACD известно, что $\angle D = 90°$ и $\angle CAD = 30° \Rightarrow \angle ACD = 90° - 30° = 60°$.

В ΔCOD $\angle COD = 30°$ и $\angle OCD = 60° \Rightarrow \angle CDO = 30°$.

Аналогично, из ΔAOD имеем $\angle ADO = 90° - 30° = 60°$. Значит, $\angle ADC = 60° + 30° = 90°$, т. е. $ABCD$ — прямоугольная трапеция. Так как $\angle CDO = 30°$ и $\angle BCD = 90°$, то $\angle CBD = 90° - 30° = 60°$. По условию $\angle ABD = 80°$, тогда $\angle ABC = 80° + 60° = 140° \Rightarrow \angle BAD = 180° - 140° = 40°$.

Ответ: $\angle ADC = \angle BCD = 90°$, $\angle BAD = 40°$, $\angle ABC = 140°$.

24. Так как $ABCD$ — трапеция и $\angle D = 90°$, то $\angle DAB = 90°$. По условию $\angle DAE = 45°$, тогда $\angle BAE = 90° - 45° = 45°$. Кроме того, $\angle AMC = 145° \Rightarrow \angle AMB = 180° - 145° = 35°$, тогда $\angle B = 180° - (45° + 35°) = 100°$. Значит, $\angle C = 180° - 100° = 80°$.

Ответ: $\angle D = \angle DAB = 90°$, $\angle B = 100°$, $\angle BCD = 80°$.

К таблице 6

4. Проведем высоту CE трапеции $ABCD$. Поскольку трапеция равнобедренная, то $AM = DE = 5$. Кроме того, по условию задачи $AM = BC = 5$,

$AB = CD = 10$. Значит $P_{ABCD} = AD + BC + 2AB = (5 + 5 + 5) + 5 + 2 \cdot 10 = 15 + 5 + 20 = 40$.

Ответ: 40.

6. По условию $ABCD$ — равнобедренная трапеция и $AC \perp BD$, тогда $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (доказать самостоятельно).

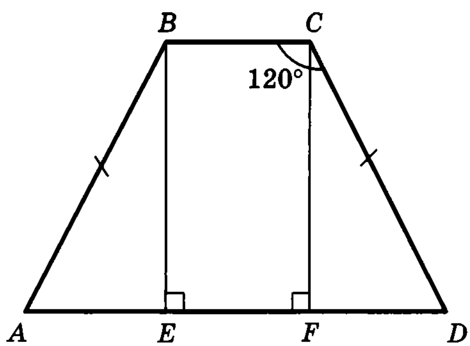
Так как $AB = CD = 26$ и $EF = 24$, то $AD + BC = 2EF = 48$, тогда $P_{ABCD} = 48 + 26 + 26 = 100$.

Ответ: 100.

Указание. Показать, что $BE = OE$ и $AF = OF$.

8. Проведем высоты BE и CF равнобедренной трапеции $ABCD$.

По условию $\angle BCD = 120°$, тогда $\angle FCD = 120° - 90° = 30°$, значит, в ΔCFD имеем $FD = \frac{1}{2}CD$.



Пусть $BC = x$, тогда $AB = 2x$, $FD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = x$, значит, $AE = FD = x$, $EF = BC = x$. Так как по условию задачи $AD = 15$, то получим

$P = 2AB + BC + AD = 2 \cdot 2x + x + 15 = 5x + 15$.

С другой стороны, $AD = AE + EF + FD = x + x + x = 3x$, тогда $3x = 15$, откуда $x = 5$. Значит, $P = 5 \cdot 5 + 15 = 40$.

Ответ: 40.

К таблице 7

5. Пусть $AB = x$, $BC = CM = y$. По условию $BM - AB = 20$, или $y + y - x = 20$, $2y - x = 20$.

Так как $P_{ABCD} = 56$, то $2(x + y) = 56$, или $x + y = 28$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ 2y - x = 20. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $3y = 48$, $y = 16$, тогда $x = 28 - 16 = 12$. Следовательно, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = x \cdot y = 12 \cdot 16 = 192$.

Ответ: 192.

11. Так как $ABCD$ — прямоугольник, $AB = BM$, то $ABMN$ — квадрат, $MCDN$ — прямоугольник.

По условию $P_1 : P_2 = 9 : 8$, $P_1 + P_2 = 68$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{9}{8}, \\ P_1 + P_2 = 68; \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{9}{8}P_2, \\ \dfrac{9}{8}P_2 + P_2 = 68; \end{cases} \quad \begin{matrix} \dfrac{17}{8}P_2 = 68, \\ P_2 = 68 \cdot \dfrac{8}{17} = 4 \cdot 8 = 32. \end{matrix}$$

Так как $P_2 = 32$, то $P_1 = 68 - 32 = 36$.

Если $P_1 = 36$, то $AB = BM = 36 : 4 = 9$, $P_2 = 2 \cdot (MC + CD) = 32$, $MC + CD = 16$.

Но $CD = AB = 9$, тогда $MC = 16 - 9 = 7$.

Значит, $BC = BM + MC = 9 + 7 = 16$, следовательно, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 16 = 144$.

Ответ: 144.

15. Прямоугольник $MCDN$ — ромб ($MC = CD$), а ромб с прямым углом — квадрат.

Так как $P = 36$, то $MC = CD = 36 : 4 = 9$.

По условию $P_{ABCD} = 50$, или $2 \cdot (AB + BC) = 50$, $AB + BC = 25$, где $AB = CD = 9$, тогда $BC = 25 - 9 = 16$.

Следовательно, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 16 = 144$.

Ответ: 144.

19. Пусть $AL = x$, $AE = y$. Так как $P_1 = 26$, то получим $2 \cdot (3 + x) = 26$, $3 + x = 13$, $x = 10$. Значит, $AL = BK = 10$. По условию $LD = 6$, тогда $AD = 10 + 6 = 16$. Кроме того, $P_2 = 22$, или $2 \cdot (6 + y) = 22$, $6 + y = 11$, $y = 5$, т. е. $AE = 5$, $AB = AE + BE = 5 + 3 = 8$. Следовательно, $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 16 \cdot 8 = 128$.

Ответ: 128.

24. $ABCD$ — прямоугольник (по условию), тогда $\Delta BEM = \Delta AEF = \Delta MCN = \Delta FDN$ (по двум катетам). Значит, $EMNF$ — ромб (по определению). Проведем диагонали EN и MF, тогда $EN \perp MF$ (по свойству ромба). Диагонали разбивают ромб на 8 равных треугольников. Если 216 составляет 6 равных треугольников, то 1 треугольник составляет площадь, равную $216 : 6 = 36$, тогда площадь прямоугольника будет равна $36 \cdot 8 = 288$ (кв. ед.).

Ответ: 288.

К таблице 8

4. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AD = x$, $AB = y$. По условию задачи периметр $P = 50$, тогда получим $2(x + y) = 50$, или $x + y = 25$. Тогда $S = AD \cdot BE = CD \cdot BF$, или $8x = 12y$, или $2x = 3y$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ 2x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 25 - x, \\ 2x = 3(25 - x). \end{cases}$$

$2x = 75 - 3x$, $5x = 75$, $x = 15$, тогда $S = AD \cdot BE = 15 \cdot 8 = 120$.

Ответ: 120.

9. Пусть $AB = x$, $BC = y$, тогда $x - y = 8$. По условию $AM = 14$, $AN = 21$, где AM и AN — высоты параллелограмма.

$S_{ABCD} = DC \cdot AM = BC \cdot AN$, или $14x = 21y$, или $2x = 3y$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ 2x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 8, \\ 2x = 3(x - 8). \end{cases}$$

$2x = 3x - 24$, откуда $x = 24$, тогда $S_{ABCD} = 14x = 24 \cdot 14 = 336$.

Ответ: 336.

15. Заметим, что $\angle AMB = \angle CBM = 90°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD, BC и секущей BM. По условию задачи $\angle MBN = 30° \Rightarrow \angle CBN = 90° - 30° = 60°$, тогда $\angle C = 90° - 60° = 30°$.

В ΔCBN $BN = \frac{1}{2}BC = 9$, $CD = AB = 20$. Значит, $S_{ABCD} = CD \cdot BN = 20 \cdot 9 = 180$.

Ответ: 180.

19. Так как $AB = BC$, то параллелограмм $ABCD$ является ромбом. Тогда $AC \perp BD$ по свойству ромба. Следовательно, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

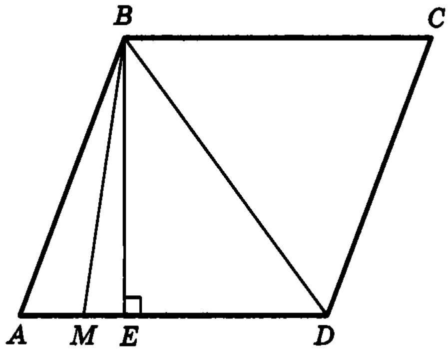
Пусть $AC = 7x$, тогда $BD = 4x$. По условию задачи $AC + BD = 33$, или $7x + 4x = 33$, $11x = 33$, $x = 3$. Значит, $AC = 7x = 21$, $BD = 4x = 12$.

Учитывая, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, получим $S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = 126$.

Ответ: 126.

22. Пусть $AM = x$, тогда $MD = 3x$, значит, $AD = AM + MD = 4x$. Проведем высоту BE параллелограмма.

По условию задачи $S_{\Delta ABM} = 12$, или $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BE$, где BE — высота параллелограмма и ΔABM.



Значит, $\frac{1}{2}x \cdot BE = 12$, или $x \cdot BE = 24$.

$S_{ABCD} = AD \cdot BE = 4x \cdot BE = 4 \cdot (x \cdot BE) = 4 \cdot 24 = 96$.

Ответ: 96.

24. Так как $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб (по определению). По условию $S_{\Delta AKD} = 32$, $AK : KC = 4 : 1$. У ΔADK и ΔDKC высоты равны, тогда площади относятся как основания, т. е. $S_{\Delta ADK} : S_{\Delta DKC} = 4 : 1$, или $32 : S_{\Delta DKC} = 4 : 1$, откуда $S_{\Delta DKC} = 8$. Тогда $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta AKD} + S_{\Delta DKC} = 32 + 8 = 40$. Значит, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ADC} = 80$.

Ответ: 80.

К таблице 9

7. Известно, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Так как $CK = 18$, то $AB = 36$. В ΔCKB $CK = KB = 18$, $\angle CKB = 120°$ (по условию) $\Rightarrow \angle B = (180° - 120°) : 2 = 30°$, тогда $AC = \frac{1}{2}AB = 18$.

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 30 = 270$.

Ответ: 270.

12. Заметим, что $\angle A$ — общий для ΔABC и ΔAMK. Известно, что если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы (см. п. 52 «Геометрия 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.).

Следовательно, $\frac{S_{\Delta AKM}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AK}{AB \cdot AC}$.

По условию задачи $S_{\Delta AKM} = 13$, $AM = 6$, $AK = 8$, $AB = 6 + 10 = 16$, $AC = 8 + 10 = 18$, тогда получим $\frac{13}{S_{\Delta ABC}} = \frac{6 \cdot 8}{16 \cdot 18}$, или $\frac{13}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{6}$, откуда $S_{\Delta ABC} = 13 \cdot 6 = 78$.

Ответ: 78.

14. Так как $AE \parallel BD$, то $ABDE$ — трапеция. Заметим, что $S_{\Delta EBD} = S_{\Delta ABD}$, так как у них BD — общее основание и высоты, проведенные к BD, равны. Кроме того, ΔBCD является общей частью для ΔEBD и ΔABD.

Значит, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEC}$. Но $S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} CF \cdot DE$, где $CF = 4$ — высота, $DE = 9$ (по условию).

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$.

Ответ: 18.

16. В ΔABC $\angle A = 180° - 150° = 30° \Rightarrow BD = \frac{1}{2} AB = 12$. Так как $\angle C = 75°$, $\angle A = 30°$, то $\angle ABC = 180° - (75° + 30°) = 75° \Rightarrow AB = AC = 24$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = 144$.

Ответ: 144.

21. В ΔAMN и ΔABC $\angle A$ — общий, тогда $\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$ (см. № 12).

По условию задачи $AB = AN$ и $AC = 3AM$, $S_{\Delta AMN} = 36$, следовательно, $\frac{36}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AN \cdot 3AM} = \frac{1}{3}$, откуда $S_{\Delta ABC} = 36 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 108.

23. По условию $KC \parallel BD$ и $AK = KB$, тогда $AC = CD$ (по теореме Фалеса). Значит, $AD = 2AC$, $AB = 2AK$.

Следовательно, $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AKD}} = \frac{AB \cdot AC}{AK \cdot AD} = \frac{2AK \cdot AC}{AK \cdot 2AC} = 1$,

т. е. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AKD} = 32$.

Ответ: 32.

К таблице 10

7. Пусть $AB = BC = CD = x$. По условию $ABCD$ — равнобедренная трапеция, где $AD = 130 - 3x$. Но $AK = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{AK + 40 - x}{2}$, или $2AK = AK + 40 - x$, $AK = 40 - x$.

Так как $AD = 130 - 3x$ и $AD = AK + 40$, то $AK + 40 = 130 - 3x$, или $AK = 90 - 3x$.

Следовательно, $90 - 3x = 40 - x$, или $2x = 50$, $x = 25$, т. е. $AB = BC = CD = 25$, $AK = 40 - x = 15$.

Из ΔABK найдем высоту BK трапеции:

$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$, $AD = 55$.

Значит, $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot BK = \dfrac{1}{2}(55 + 25) \cdot 20 = 800$.

Ответ: 800.

11. Пусть $AD = 4x$, $BC = 3x$. По условию задачи $S_{\Delta ABC} = 30$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot h$, где h — высота трапеции.

Значит, $\dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot h = 30$, откуда $x \cdot h = 20$.

В ΔACD $AD = 4x$, тогда $S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2}AD \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 4x \cdot h = 2xh$. Так как $xh = 20$, то получим $S_{\Delta ACD} = 2 \cdot 20 = 40$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = 30 + 40 = 70$.

Ответ: 70.

16. По условию задачи $AB = CD$ и $AC \perp BD$, тогда $ABCD$ — равнобедренная трапеция, значит, $AC = BD$ (по свойству равнобедренной трапеции), ΔAOD — равнобедренный и прямоугольный, тогда $\angle OAD = \angle ODA = 45°$.

Аналогично, $\angle OBC = \angle OCB = 45°$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BM$.

Через точку пересечения диагоналей проведем высоту KE трапеции, где K — середина BC, E — середина AD. Но $BM = KE = \dfrac{1}{2}(BC + AD)$ (доказать самостоятельно).

Пусть $BC = 2x$, $BK = KC = x$, $BM = KE = 10$, $OK = KB = x$, $OE = AE = ED = 10 - x$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{(10-x+10-x)+(x+x)}{2} \cdot 10 = 10 \cdot 10 = 100.$

Ответ: 100.

20. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 3x$. Проведем высоту KM трапеции. По условию задачи $S_{\Delta AKD} = 60$, или $\frac{1}{2}AD \cdot KM = 60$, или $\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot h = 60$, где $h = KM$. Значит, $xh = 40$.

Следовательно, $S_{ABCD} = S_{\Delta ABK} + S_{\Delta AKD} + S_{\Delta CKD} = \frac{1}{2}BK \cdot h + \frac{1}{2}KC \cdot h + 60 = \frac{1}{2}h \cdot (BK + KC) + 60 = \frac{1}{2}h \cdot BC + 60 = \frac{1}{2}xh + 60$. Но $xh = 40$, тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 40 + 60 = 80$.

Ответ: 80.

23. Через точку пересечения диагоналей AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ проведем высоту MN, где M — середина BC, N — середина AD. Предварительно докажем, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь $S = h^2$ и $h = \frac{1}{2}(a + b)$, где h — высота трапеции, a и b — основания.

Так как по условию $AB = CD$ и $AC \perp BD$, то $AD = 2 \cdot ON$ и $BC = 2 \cdot OM$, тогда $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot MN = (ON + OM) \cdot MN = MN \cdot MN = (MN)^2 = h^2$. В нашем случае $AD + BC = 18$, или $2 \cdot ON + 2 \cdot OM = 18$, или $ON + OM = 9$, т. е. $h = 9$. Значит, $S_{ABCD} = h^2 = 81$.

Ответ: 81.

29. По условию задачи $S_{\Delta BOC} = 4$, $S_{\Delta AOD} = 25$. Заметим, что $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ (доказать самостоятельно). Тогда $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOD} : S_{\Delta COD}$, откуда $S^2_{\Delta AOB} = S^2_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD} = 100$, тогда $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = 10$, значит, $S_{ABCD} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} + 2S_{\Delta AOB} = 4 + 25 + 2 \cdot 10 = 49$.

Ответ: 49.

32*. Проведем высоту CF трапеции $ABCD$, где $BE = CF$ (как высоты трапеции), $AB = CD$ (по условию задачи). Тогда $BC = EF$ и $AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(AD - EF)$. Но $AD = 5BC$, значит, $AE = \frac{1}{2}(5BC - BC) = 2BC$, или $\frac{AE}{BC} = 2$.

Заметим, что $\Delta AME \sim \Delta BMC$ (по двум углам), тогда $\frac{ME}{MB} = \frac{AE}{BC} = 2$, т. е. $ME = 2MB$, тогда $BE = \frac{3}{2}ME$. Так как $S_{\Delta AME} = 16$ (по условию) и $AE = 2BC$, то $BC \cdot ME = 16$, тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE = \frac{1}{2}(5BC + BC) \cdot \frac{3}{2}ME = \frac{9}{2}BC \cdot ME = \frac{9}{2} \cdot 16 = 72$.

Ответ: 72.

К таблице 11

8. По условию задачи LT — высота ΔRKL.

В ΔLTK известно, что $LK = 12$, $\angle K = 60^\circ$, тогда $\angle KLT = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ $\Rightarrow TK = \frac{1}{2}LK = 6$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Из ΔLTK по теореме Пифагора имеем $LT^2 = LK^2 - TK^2$, или $LT = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$.

Но $RT = LT$ (по условию), тогда из ΔRTL находим: $x^2 = 2LT^2$, откуда $x = LT\sqrt{2} = \sqrt{108} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{108 \cdot 2} = \sqrt{36 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

13. Пусть $MT = y$, тогда $TN = 8 - y$.

По условию задачи KT — высота ΔMKN.

Из ΔMKT имеем $x^2 + y^2 = 100$, а из ΔKTN получим $x^2 + (8 - y)^2 = (2\sqrt{17})^2 = 68$.

Следовательно, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x^2 + (8 - y)^2 = 68. \end{cases}$$

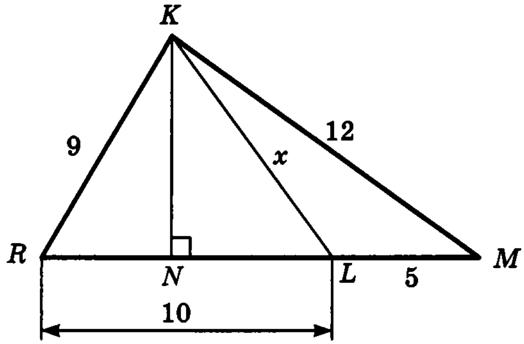
Вычтем из I уравнения II: $y^2 - (8 - y)^2 = 32$, или $y^2 - 64 + 16y - y^2 = 32$, или $16y = 96$, откуда $y = 96 : 16 = 6$.

Так как $x^2 + y^2 = 100$, то $x^2 = 100 - 36$, $x^2 = 64$, откуда $x = 8$.

Ответ: 8.

16*. По условию задачи $RK = 9$, $KM = 12$, $RM = 10 + 5 = 15$.

Заметим, что $15^2 = 9^2 + 12^2$, значит, ΔRKM — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора). Проведем высоту KN, тогда $S_{\Delta RKM} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot KN$, откуда находим $KN = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{3 \cdot 12}{5} = \frac{36}{5}$.



Из ΔKRN $RN^2 = 9^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2 = \left(9 - \frac{36}{5}\right)\left(9 + \frac{36}{5}\right) = \frac{9}{5}\cdot\frac{81}{5}$, откуда

$RN = \frac{3\cdot 9}{5} = \frac{27}{5}$, тогда $NL = 10 - \frac{27}{5} = \frac{23}{5}$. Из ΔKNL по теореме Пифагора имеем $x^2 = KN^2 + NL^2$, откуда $x = \sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{23}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296+529}{25}} =$
$= \sqrt{\frac{1825}{25}} = \sqrt{73}.$

Ответ: $\sqrt{73}$.

22. Пусть $AD = 7y$, тогда $DC = 18y$. Из ΔADB имеем $x^2 + (7y)^2 = 25^2$, или $x^2 + 49y^2 = 625$.

Из ΔBDC получим $x^2 + (18y)^2 = 30^2$, или $x^2 + 324y^2 = 900$.

Следовательно, $\begin{cases} x^2 + 49y^2 = 625, \\ x^2 + 324y^2 = 900. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения системы первое: $324y^2 - 49y^2 = 275$, или $275y^2 = 275$, $y^2 = 1$, $y = 1$ (так как $y>0$). Если $y = 1$, то $x^2 = 625 - 49 =$ $= 576$, $x = 24$.

Ответ: 24.

24*. По условию задачи $\angle A = 30°$, $\angle AMB = 90°$, тогда $BM = \frac{1}{2}AB =$ $= 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$. Кроме того, $\angle C = 75°$ (по условию $\angle C = \angle ABC$), $\angle ABC =$ $= 180° - (30° + 75°) = 75°$, т. е. ΔABC — равнобедренный, где $BC = x$ — основание.

Пусть $MC = y$, тогда $AM = AC - y$. Из ΔAMB имеем $AM^2 = AB^2 - BM^2$, или $AM^2 = 32(\sqrt{3}+1)^2 - 8(\sqrt{3}+1)^2$, $AM^2 = 24(\sqrt{3}+1)^2$, откуда

$AM = 2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$. $MC = y = AC - AM = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - 2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1) =$ $= 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})$.

Из ΔBCM находим $x^2 = BM^2 + MC^2$, или

$x^2 = 8(\sqrt{3}+1)^2 + 8(\sqrt{3}+1)^2(2-\sqrt{3})^2 = 8(\sqrt{3}+1)^2(1+(2-\sqrt{3}))^2$, откуда

$x = 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{4(2-\sqrt{3})} =$

$= 4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2} = 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 4\cdot(3-1) = 4\cdot 2 = 8.$

Ответ: 8.

27. 1) Расстояние от точки O до KN — длина перпендикуляра OF.

2) $S_{\Delta KMN} = S_{\Delta KON} + S_{\Delta KOM} + S_{\Delta MON}$.

$S_{\Delta KOM} = \frac{1}{2}KM\cdot OE = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 6 = 39$, $S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}MN\cdot OT = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 2 = 15$.

3) Площадь ΔMKN найдем по формуле Герона:

$S_{\Delta MKN} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a = KN = 14$, $b = MN = 15$, $c = MK = 13$.

Значит, $p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(14+15+13) = 21$, $p - a = 21 - 14 = 7$, $p - b = 21 - 15 = 6$, $p - c = 21 - 13 = 8$.

Тогда $S_{\Delta MKN} = \sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8} = \sqrt{21\cdot 21\cdot 2\cdot 8} = 21\cdot 4 = 84$.

4) $S_{\Delta KON} = S_{\Delta MKN} - (S_{\Delta KOM} + S_{\Delta MON}) = 84 - (15 + 39) = 84 - 54 = 30$.

Но $S_{\Delta KON} = \frac{1}{2}KN\cdot OF$, или $\frac{1}{2}\cdot 14\cdot x = 30$, откуда $7x = 30$, $x = \frac{30}{7}$.

Ответ: $\frac{30}{7}$.

32*. Пусть $MT = a$, $TN = b$. По условию задачи $S_{\Delta KMN} = 210$, или $\frac{1}{2}(a+b)x = 210$, $(a+b)x = 420$. Из ΔKMT $x^2 + a^2 = 17^2 = 289$. Аналогично из ΔKTN $x^2 + b^2 = 25^2 = 625$. Вычитая из второго уравнения первое, имеем $b^2 - a^2 = 336$.

Но $a+b = \frac{420}{x}$, тогда $(b-a)(b+a) = 336$, или $\frac{420}{x}\cdot(b-a) = 336$, откуда $b - a = \frac{336x}{420} = \frac{4x}{5}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b = \dfrac{420}{x}, \\ b-a = \dfrac{4x}{5}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе: $2a=\frac{420}{x}-\frac{4x}{5}$, откуда $a=\frac{210}{x}-\frac{2x}{5}$.

Так как $x^2+a^2=289$, то получим $x^2+\left(\frac{210}{x}-\frac{2x}{5}\right)^2=289$.

После упрощений имеем уравнение $\frac{210^2}{x^2}+\frac{29}{25}x^2-\frac{2285}{5}=0$.

Пусть $x^2=k$, где $k>0$, тогда получим уравнение $29k^2-11\,425k+1\,102\,500=0$, $D=11\,425^2-4\cdot 29\cdot 1\,102\,500=130\,530\,625-127\,890\,000=2\,640\,625=1625^2>0$, $k_{1,2}=\frac{11\,425\pm 1625}{2\cdot 29}$, $k_1=\frac{6525}{29}=225$, $k_2=\frac{4900}{29}$.

Следовательно, имеем две возможности:

1) $x^2=225$, $x=15$; 2) $x^2=\frac{4900}{29}$, $x=\frac{70}{\sqrt{29}}$.

Ответ: 1) $x=15$; 2) $x=\frac{70}{\sqrt{29}}$.

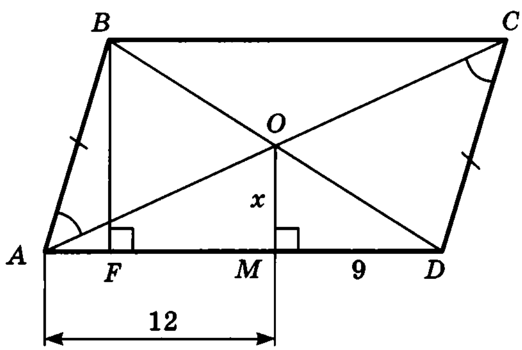
40. Так как $LK=KT$, то прямоугольник $RLKT$ — квадрат. Пусть $LK=y$, тогда $LM=y-x$. Из ΔMLK имеем: $y^2+(y-x)^2=25^2$. Из ΔRLK получим $y^2+y^2=(20\sqrt{2})^2$, или $2y^2=400\cdot 2$, $y^2=400$, $y=20$.

Следовательно, $20^2+(20-x)^2=25^2$, или $(20-x)^2=225$, $20-x=\pm 15$, откуда $x_1=5$, $x_2=35$ (не подходит, так как $x<y$). Значит, $MR=x=5$.

Ответ: 5.

44. Так как $AB=CD$ и $\angle BAC=\angle ACD$, то $AB\parallel CD$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

По условию задачи $S_{ABCD}=252$. С другой стороны, $S_{ABCD}=AD\cdot BF$, где BF — высота, $AD=21$. Значит, $21\cdot BF=252$, откуда $BF=12$.



Так как O — середина BD, то OM — средняя линия ΔBFD.

Значит, $OM = x = \frac{1}{2}BF = 6$ (по теореме Фалеса).

Ответ: 6.

48. Пусть $AB = a$, $AD = b$. Так как $S = 120$, то получим $8 \cdot b = 120$, откуда $b = 15$. По условию задачи периметр параллелограмма $P = 50$, или $2 \cdot (a + b) = 50$, $a + b = 25$, откуда $a = AB = CD = 25 - 15 = 10$.

Если CD — основание, то $BF = x$ — высота параллелограмма, тогда $a \cdot x = 120$, где $a = 10$, значит, $x = 120 : 10 = 12$.

Ответ: 12.

56. В параллелограмме $MNEF$ периметр $P = 42$, площадь $S = 96$. Пусть $MF = a$, $MN = b$, тогда $P = 2 \cdot (a + b) = 42$, или $a + b = 21$.

Заметим, что $S = MF \cdot 2OK = MN \cdot 2OL$, где $OK = x$, значит, $2ax = 2b \cdot 6 = 96$, откуда $b = 96 : 12 = 8$, $ax = 48$.

Так как $a + b = 21$ и $b = 8$, то $a = 13$, тогда $OK = x = \frac{48}{a} = \frac{48}{13}$.

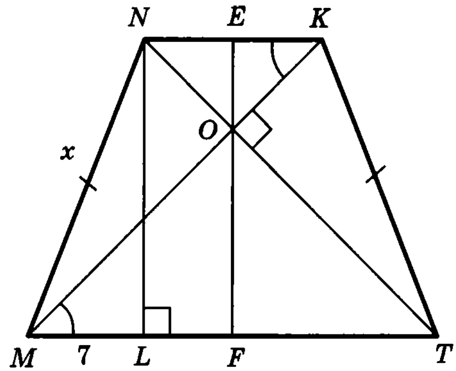
Ответ: $\frac{48}{13}$.

62. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $BC = AE = 6$. Так как $\angle A = \angle ABE$ (по условию), то $AE = BE = 6$, тогда $AB^2 = 6^2 + 6^2$, откуда $AB = 6\sqrt{2}$. Но $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$, или $2 \cdot 6 = AD - 6$, откуда $AD = 18$, тогда $ED = 18 - 6 = 12$. В ΔBED $BE = 6$, $ED = 12$, $\angle BED = 90°$. Значит, $BD = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$. $S_{\Delta BED} = \frac{1}{2}BE \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$. По условию задачи $BK = KD$, т. е. EK — медиана ΔBED, значит, $S_{\Delta BEK} = S_{\Delta KED}$ (у них основания $BK = KD$ и высота EM — общая). Следовательно, $S_{\Delta BEK} = \frac{1}{2}S_{\Delta BED} = 18$. Так как $BK = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{5}$, то из ΔBEK получим: $\frac{1}{2}BK \cdot ME = 18$, или $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot x = 18$, откуда $x = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

68. Так как $\angle KMT = \angle MKN$, то $MT \parallel NK$. Кроме того, $MN = KT = x$ (по условию). Значит, $MNKT$ — равнобедренная трапеция.

Через точку пересечения диагоналей проведем высоту EF трапеции. Так как $MK \perp NT$, то ΔNOK и ΔMOT — равнобедренные и прямоугольные, тогда $OE = \frac{1}{2}NK$ и $OF = \frac{1}{2}MT$, значит, $EF = OE + OF = \frac{1}{2}(MT + NK) = NL$.

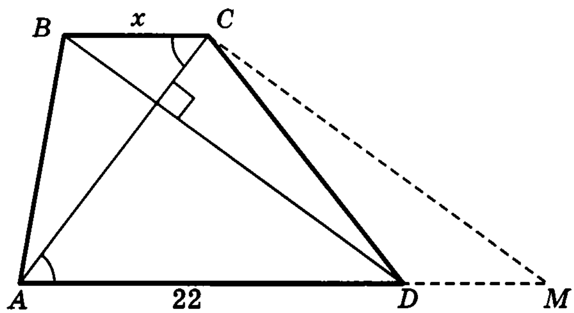


Так как $S_{MNKT} = 576$, то $S_{MNKT} = \frac{1}{2}(MT + NK) \cdot NL = 576$, или $NL^2 = 576$.

Из ΔMNL имеем $x^2 = ML^2 + NL^2$, или $x^2 = 49 + 576 = 625$, откуда $x = 25$.

Ответ: 25.

69*. Из точки C проведем прямую параллельно BD до пересечения в точке M. Так как $AC \perp BD$ (по условию) и $CM \parallel BD$, то $AC \perp CM$. Значит,

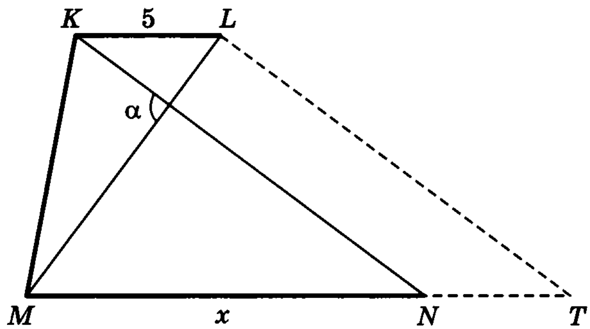


ΔACM — прямоугольный, $BD = CM = 21$, $BC = DM = x$. По теореме Пифагора имеем $AM^2 = AC^2 + CM^2$, или $AM^2 = 20^2 + 21^2$, $AM^2 = 841$, откуда $AM = 29$. Но $AM = AD + DM = AD + BC = 22 + x = 29$, откуда $x = 7$.

Ответ: 7.

71*. Известно, что если d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника, α — угол между ними, то $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \alpha$ (см., например, № 529 «Геометрия 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.).

По условию задачи $ML = 9$, $KN = 12$ и $S = 54$, тогда получим: $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 54$, или $\sin \alpha = 1$, откуда $\alpha = 90°$, т. е. $ML \perp KN$.



Из точки L проведем прямую, параллельную KN, до пересечения с продолжением MN в точке T. Тогда $KLTN$ — параллелограмм (по определению) и $KL = NT = 5$. Так как $ML \perp KN$ (по доказанному) и $KN \parallel LT$ (по построению), то ΔMLT — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), т. е. $ML^2 + LT^2 = MT^2$, или $9^2 + 12^2 = (x + 5)^2$, или $(x + 5)^2 = 225$ и, так как $x + 5 > 0$, то $x + 5 = 15$, откуда $x = 10$.

Ответ: 10.

Замечание 1. Поскольку нами была применена формула $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \alpha$, доказательство которой основано, в свою очередь, на применении формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, где a и b — стороны, α — угол между ними, то эта задача может быть рассмотрена позднее, при повторении.

Замечание 2. Задача может быть решена иначе, например предварительно доказав, что $S_{MKLN} = S_{\Delta MLT}$.

72*. *Указание.* Провести высоту BE, обозначив $AE = y$, где $y = \frac{1}{2}(16 - x)$.

Для нахождения $BC = x$ составить систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(16 - x), \\ y^2 + h^2 = 10^2, \qquad \text{где } h = BE. \\ (16 + x)h = 160, \end{cases}$$

Решение системы сводится к решению уравнения

$$x^4 - 912x^2 - 12\,800x + 65\,536 = 0.$$

Далее доказать, что $x = 4$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 4.

К таблице 12

7. Пусть $MT = TE = y$, тогда $\dfrac{S_{\Delta MNE}}{S_{\Delta MKT}} = \dfrac{ME \cdot MN}{MK \cdot MT}$ (см. п. 52 (окончание), «Геометрия 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.).

Значит, $\dfrac{x}{8} = \dfrac{9 \cdot 2y}{3 \cdot y}$, или $\dfrac{x}{8} = 6$, откуда $x = 6 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

12. Так как $\angle BDC = \angle BCD$ (по условию), то ΔBDC — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда $BD = BC = 8$. Кроме того, BD — биссектриса угла ABC, тогда $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{BC}$, или $\dfrac{10}{15} = \dfrac{x}{8}$, откуда $x = \dfrac{10 \cdot 8}{15} = \dfrac{2 \cdot 8}{3} = \dfrac{16}{3}$. Значит, $DC = \dfrac{16}{3}$.

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

15. По условию задачи $EF \parallel MK$, значит, $MEFK$ — трапеция (по определению). Тогда $\Delta NEF \sim \Delta MNK$ (по двум углам), так как $\angle NEF = \angle NMK$ как накрест лежащие при параллельных прямых EF, MK и секущей MN, $\angle N$ — общий.

Следовательно, $\dfrac{S_{\Delta MNK}}{S_{\Delta NEF}} = k^2$, где k — коэффициент подобия.

Но $NE : MN = 1 : 3$, т. е. $k = 3$. Кроме того, $S_{\Delta MNK} = 54$, $S_{MEFK} = x$, тогда $\dfrac{54}{S_{\Delta NEF}} = 9$, откуда $S_{\Delta NEF} = 6$.

Следовательно, $x = S_{MEFK} = S_{\Delta MNK} - S_{\Delta NEF} = 54 - 6 = 48$.
Ответ: 48.

20. Пусть $AC = a$, $AM = MN = b$, $BC = c$. Так как $AM = MN$ (по условию), то ΔAMN — равнобедренный, тогда $\angle NAM = \angle ANM$.

Но $MN \perp BC$ и $AC \perp BC$, значит, $AC \parallel MN$, тогда $\angle CAN = \angle MNA$, т. е. AN — биссектриса $\angle A$, следовательно, $\dfrac{CN}{NB} = \dfrac{AC}{AB}$, или $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{4}{5}$.

Заметим, что $\Delta MNB \sim \Delta ABC$ как прямоугольные, имеющие общий острый угол B.

Имеем: $\dfrac{b+c}{8+10} = \dfrac{c}{10}$, или $\dfrac{b+c}{9} = \dfrac{c}{5}$.

Кроме того, из ΔMBN получим $c^2 - b^2 = 100$.

Решая систему $\begin{cases} \dfrac{b+c}{9} = \dfrac{c}{5}, \\ c^2 - b^2 = 100, \end{cases}$ находим $c = \dfrac{50}{3}$, $b = \dfrac{40}{3}$.

Так как $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{4}{5}$, то $a = \dfrac{4(b+c)}{5} = \dfrac{4 \cdot \left(\dfrac{40}{3} + \dfrac{50}{3}\right)}{5} = \dfrac{4 \cdot 30}{5} = 24$.

Значит, $P_{\Delta ABC} = x = a + b + c + 18 = 24 + \dfrac{40}{3} + \dfrac{50}{3} + 18 = 24 + 30 + 18 = 72$.

Ответ: 72.

24. В прямоугольном ΔABC $AB = 30$, $BC = 18$, $\angle C = 90°$, тогда $AC^2 = AB^2 - BC^2$, или $AC = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{900 - 324} = \sqrt{576} = 24$.

По условию задачи BD — биссектриса $\angle ABC$, тогда $\dfrac{x}{y} = \dfrac{18}{30}$, или $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}$, и так как $x + y = 24$, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 24, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 24 - x, \\ 5x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 24 - x, \\ 5x = 3 \cdot (24 - x). \end{cases}$$

$5x = 72 - 3x$, $8x = 72$, $x = 9$, тогда $y = 15$.
Итак, $CD = x = 9$, $AD = y = 15$.
Ответ: $x = 9$, $y = 15$.

К таблице 13

5. Заметим, что $\Delta BMN \sim \Delta ABC$ (по I признаку), так как $\angle B$ — общий и $\angle MNB = \angle A$ (по условию), тогда $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BM}{BN}$, или $\dfrac{24}{12+x} = \dfrac{12}{8}$, или $\dfrac{2}{12+x} = \dfrac{1}{8}$, $12 + x = 16$, откуда $x = 4$, т. е. $AM = 4$.

Ответ: 4.

12. Пусть $KE = y$, тогда $ER = 4y$, $KR = 5y$. По условию $\angle KEF = \angle KRL$, $\angle K$ — общий, значит, $\Delta KEF \sim \Delta KRL$ (по двум углам).

Следовательно, $\dfrac{KE}{KR} = \dfrac{P_{\Delta KEF}}{P_{\Delta KRL}}$, или $\dfrac{y}{5y} = \dfrac{x}{25}$, или $\dfrac{1}{5} = \dfrac{x}{25}$, откуда $x = 5$.

Ответ: 5.

15. 1) По условию KM — биссектриса ΔRKL, тогда $\frac{KR}{RM}=\frac{KL}{ML}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{KR}{KL}=\frac{RM}{ML}=\frac{4}{3}$ (по условию).

2) Заметим, что $\Delta RKL \sim \Delta KNF$ (по двум углам), тогда $\frac{KF}{KR}=\frac{KN}{KL}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{KF}{KN}=\frac{KR}{KL}=\frac{4}{3}$.

Значит, $x = KF : KN = 4 : 3$.

Ответ: 4 : 3.

23. По условию $RKLM$ — ромб.

Заметим, что $\Delta OTK \sim \Delta ROT$ как прямоугольные, имеющие равные острые углы: $\angle TOK = \angle TRO \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{OT}{RT}=\frac{TK}{OT} \Rightarrow OT^2 = RT \cdot TK = 15 \cdot 5 =$ $= 75$, откуда $OT=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$.

Из ΔOTK по теореме Пифагора имеем $y^2 = OT^2 + TK^2$, или $y^2 = 75 +$ $+ 25 = 100$, $y = 10$.

Из ΔROK, где $RK = 15 + 5 = 20$, $OK = y = 10$, находим $x^2 = 20^2 - 10^2 =$ $= 300$, $x=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$.

Ответ: $x=10\sqrt{3}$, $y = 10$.

26. Так как $\angle KLR = \angle LRM$ (по условию), то $KL \parallel RM$ (по признаку параллельности прямых). Кроме того, $\angle KOL = \angle ROM$ как вертикальные. Значит, $\Delta KOL \sim \Delta ROM$ (по двум углам), тогда $\frac{KO}{OM}=\frac{OL}{OR}=\frac{KL}{RM}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Значит, $k=\frac{1}{3}$, где k — коэффициент подобия, тогда $\frac{S_{\Delta KOL}}{S_{\Delta ROM}}=k^2=\frac{1}{9}$.

По условию $S_{\Delta ROM} = 45$, следовательно, $S_{\Delta KOL} = x = 45 \cdot \frac{1}{9} = 5$.

Ответ: 5.

31. Так как $TN \perp EF$ и $KM \perp EF$, то $TN \parallel KM$ (две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны). Значит, $KTNM$ — трапеция, тогда $\Delta TON \sim \Delta KOM$ ($\angle OTN = \angle OMK$ как накрест лежащие при параллельных прямых TN, KM и секущей TM и $\angle TON = \angle KOM$ как вертикальные) по двум углам.

Значит, $\frac{x}{y}=\frac{TN}{KM}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$. По условию задачи $x + y = 20$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3},\\ x+y=20;\end{cases}\quad \begin{cases}3x=2y,\\ y=20-x;\end{cases}\quad \begin{cases}3x=2(20-x),\\ y=20-x.\end{cases}$$

$3x = 40 - 2x$, $5x = 40$, $x = 8$, $y = 20 - 8 = 12$.

Ответ: $x = 8$, $y = 12$.

К таблице 14

8. $\Delta ABN \sim \Delta AMC$ (по I признаку подобия), так как $\angle A$ — общий и $\angle ANB = \angle AMC = 90°$ (по условию). Аналогично $\Delta BOM \sim \Delta ONC$ (по I признаку).

16. $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по I признаку подобия), так как $\angle OCB = \angle OAD$ (по условию) и $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные.

К таблице 15

4. Так как F, N и E — середины соответственно сторон ML, KL и MK, то $MF = FL = 16$, $KN = NL = 6$, $ME = EK = 12$.

Значит, EF — средняя линия ΔMKL, тогда $EF = \dfrac{1}{2}KL = 6$. Аналогично, $FN = \dfrac{1}{2}MK = 12$ и $EN = \dfrac{1}{2}ML = 16$. Значит, $P_{\Delta EFN} = x = EF + FN + EN = 6 + 12 + 16 = 34$.

Ответ: 34.

8. По условию $BD \perp AC$ и $AD = DC$, значит, $\Delta ABD = \Delta BCD$ по двум катетам, тогда $AB = BC$, т. е. ΔABC — равнобедренный.

Но $AC = BC$ (по условию), тогда $AC = BC = AB = 20$. Значит, ΔABC — равносторонний.

$DC = \dfrac{1}{2}AC = 10$. Так как N — середина BC, то M — середина BD, т. е. MN — средняя линия ΔBDC, тогда $MN = \dfrac{1}{2}DC = 5$.

Из ΔBMN, где $BN = \dfrac{1}{2}BC = 10$, найдем $BM = x$.

$x^2 = 10^2 - 5^2$, $x^2 = 75$, $x = \sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, учитывая, что $\angle C =$ $= \angle MNB = 60°$, тогда $\operatorname{tg} 60° = \frac{x}{MN}$ и т. д. (или $\sin 60° = \frac{x}{BN}$).

12. Так как $\angle BCA = \angle CAD$ (по условию), то $AD \parallel BC$, т. е. $ABCD$ — трапеция. Кроме того, E — середина AB и F — середина CD, значит, EF — средняя линия трапеции, тогда $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(15 + 6) = \frac{21}{2}$.

По теореме Фалеса, M — середина AC, N — середина BD, значит, $EM = \frac{1}{2}BC = 3$ и $NE = \frac{1}{2}BC = 3$ (EM и NF — средние линии ΔABC и ΔDBC).

Следовательно, $MN = x = EF - (EM + NF) = \frac{21}{2} - (3 + 3) = 10{,}5 - 6 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

15. По условию задачи $ABCD$ — параллелограмм и M — середина CD. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD, значит, K — точка пересечения медиан BM и OC.

Следовательно, $BL = LC = 9 \Rightarrow BC = AD = 18$. Проведем высоту BE параллелограмма. Так как $\angle A = 60°$ (по условию), то $\angle ABE = 30°$, тогда $AE = \frac{1}{2}AB = 6$. Значит, $BE = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$.

Следовательно, $S_{ABCD} = x = AD \cdot BE = 18 \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$.

Ответ: $108\sqrt{3}$.

Замечание 1. Высоту BE можно найти из ΔABE так: $\sin 60° = \frac{BE}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = 12 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Замечание 2. $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$. Но эта формула изучается позднее, в 9 классе (см. задачу № 1021, «Геометрия 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.).

К таблице 16

3*. В ΔMNL NK — биссектриса, $\angle NKL = \angle MKN = 90°$. Значит, $\Delta MNK = \Delta NLK$ (по двум катетам), тогда $MN = NL$, т. е. ΔMNL — равнобедренный. Пусть $MT = 4x$, тогда $TN = 9x$, $MK = KL = y$, $NK = z$.

По условию $ML + NK = 14$, $2y + z = 14$. Кроме того, $MN = MT + TN =$ $= 13x$.

Из ΔMKN по теореме Пифагора имеем: $(13x)^2 = y^2 + z^2$, или $169x^2 = y^2 + z^2$.

$\Delta MKN \sim \Delta TMK$ (как прямоугольные, имеющие равные острые углы: $\angle MKT = \angle MNK$).

Имеем: $\frac{MT}{MK} = \frac{MK}{MN}$, или $\frac{4x}{y} = \frac{y}{13x}$, $y^2 = 52x^2$. Так как $169x^2 = y^2 + z^2$, $2y + z = 14$, то $z = 14 - 2y$, $z^2 = 169x^2 - y^2$, или $(14 - 2y)^2 = 169x^2 - y^2$, откуда получим $169x^2 - 5y^2 + 56y = 196$. Но $y^2 = 52x^2$, тогда $169x^2 - 260x^2 + 56y = 196$, или $91x^2 - 56y + 196 = 0$, $x^2 = \frac{y^2}{52}$, тогда $91 \cdot \frac{y^2}{52} - 56y + 196 = 0$.

Упростив полученное уравнение, получим $7y^2 - 224y + 784 = 0$, или $y^2 - 32y + 112 = 0$, откуда $y_1 = 28$, $y_2 = 4$.

1) Если $y = 28$, то $x^2 = \frac{28^2}{52} = \frac{196}{13}$, $x = \frac{14}{\sqrt{13}}$. $z = 14 - 2y = 14 - 56 = -42 < 0$ (не имеет смысла).

2) Если $y = 4$, то $x^2 = \frac{4^2}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$, $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $z = 14 - 8 = 6$.

Следовательно, $MN = 13x = \frac{26}{\sqrt{13}} = \frac{26\sqrt{13}}{13} = 2\sqrt{13}$, $MK = y = 4$, $NK = z = 6$.

Из ΔMTK $TK = \sqrt{y^2 - 16x^2} = \sqrt{16\left(1 - \frac{4}{13}\right)} = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $MN = 2\sqrt{13}$, $MK = 4$, $NK = 6$, $TK = \frac{12}{\sqrt{13}}$, $MT = \frac{8}{\sqrt{13}}$, $TN = \frac{18}{\sqrt{13}}$.

8. По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем: $KE^2 = ME \cdot EN$, или $(x + 5) \cdot x = 36$, $x^2 + 5x - 36 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -9$ (не имеет смысла, так как $x > 0$).

Если $x = 4$, то $EN = 4$, $ME = 4 + 5 = 9$.

Из ΔMEK $MK = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

Аналогично из ΔKEN $KN = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Ответ: $MK = 3\sqrt{13}$, $KN = 2\sqrt{13}$, $MN = 13$, $ME = 9$, $EN = 4$.

12. Пусть в ромбе $MFET$ $MK = x$, $KF = y$, $KN = h$, $MN = a$, $FN = b$. По условию задачи $S_{\Delta MKN} = 27$, или $\frac{1}{2}xh = 27$, откуда $xh = 54$. Так как

$KN = h \perp MF$, то из прямоугольного ΔMNF по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем $h^2 = xy$.

Заметим, что $\Delta MKN \sim \Delta MNF$ (как прямоугольные, имеющие общий угол NMF), тогда получим $\frac{a}{b} = \frac{x}{h}$ и, так как $ME : FT = 3 : 2$ (по условию задачи), то $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, тогда $\frac{x}{h} = \frac{3}{2}$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xh = 54, \\ \frac{x}{h} = \frac{3}{2}, \\ h^2 = xy, \end{cases} \quad \text{или } xh \cdot \frac{x}{h} = 54 \cdot \frac{3}{2} = 81,\ x^2 = 81,\ x = 9,$$

тогда $h = 54 : x = 6$, $y = \frac{h^2}{x} = \frac{36}{9} = 4$.

Следовательно, $MN = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

Ответ: $MK = 9$, $KN = 6$, $MN = 3\sqrt{13}$.

16. Так как NM — биссектриса угла ENT, то $MT = MK$. Тогда $MK = FM$, значит, EM — биссектриса $\angle FEN$. Следовательно, $\angle MEN + \angle MNE = 90°$, т. е. ΔEMN — прямоугольный, MK — высота, проведенная к гипотенузе, тогда $MK^2 = EK \cdot KN$, или $MK = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$. Из ΔMKN $MN = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

Ответ: $MK = 6$, $MN = 3\sqrt{13}$.

К таблице 17

5. Так как $\angle K = 90°$ и $\angle KMN = \angle KNM$, то ΔMKN — равнобедренный и прямоугольный, где $MN = 36$. Пусть $MK = KN = y$, тогда $y^2 + y^2 = 36^2$, или $2y^2 = 36^2$, $y\sqrt{2} = 36$, откуда $y = \frac{36}{\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$. В ΔMKL $\angle K = 90°$, $\angle KLM = 60°$, тогда $KL = MK \cdot \operatorname{ctg} 60°$, $KL = y \cdot \operatorname{ctg} 60° = 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{6}$.

Значит, $x = KN - KL = y - 6\sqrt{6} = 18\sqrt{2} - 6\sqrt{6} = 6\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$.

Ответ: $6\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$.

9. В ΔKTL $\angle T = 90°$, $\angle K = 30°$ (по условию), тогда $TL = \frac{1}{2}KL \Rightarrow KL = 2 \cdot TL = 18$.

Но $KN = NL$, значит, ΔKNL — равнобедренный, тогда высота NM, проведенная к основанию KL, является медианой, т. е. $KM = ML = \frac{1}{2}KL = 9$. Из ΔKMN, где $\angle K = 30°$, $KM = 9$, имеем $\text{tg } 30° = \frac{x}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9 \cdot \text{tg } 30° = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

12. По условию задачи $\angle TLM = 120°$, тогда $\angle KLT = 180° - 120° = 60°$. Так как ΔKTL — прямоугольный, то $\angle K = 90° - 60° = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow TL = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}x$.

Но $KL + TL = 18$ (по условию), значит, $x + \frac{1}{2}x = 18$, $2x + x = 36$,

$3x = 36$, $x = 12$.

Ответ: 12.

14. Так как F — середина KN и E — середина MK, то MF и EN — медианы ΔMKN, тогда $ON = 2EO = 10$, $EN = 15$. Кроме того $ME = EK = 9$. По условию $\angle K = 90°$, тогда из ΔEKN имеем $KN^2 = EN^2 - EK^2$, или $KN = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

Следовательно, $MN^2 = x^2 = MK^2 + KN^2$, или $x^2 = 18^2 + 12^2$, $x^2 = 468$, откуда $x = \sqrt{468} = \sqrt{36 \cdot 13} = 6\sqrt{13}$.

Ответ: $6\sqrt{13}$.

16. По условию задачи RE и LF — медианы ΔRLT, где $\angle RLT = 90°$, $OE = 2\sqrt{2}$, тогда $RO = 2 \cdot OE = 4\sqrt{2}$. В ΔRLE $\angle L = 90°$, $OL \perp RE \Rightarrow$

$\Rightarrow OL = \sqrt{RO \cdot OE} = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$.

Известно, что медианы треугольника делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины, тогда $OF = \frac{1}{2}OL = 2$.

Поскольку F — середина RT и $\angle RLT = 90°$, то $LF = \frac{1}{2}RT$. Значит,

$RT = 2LF = 2 \cdot (LO + OF) = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

20. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (по свойству), O — середина диагоналей, $OC = OD$. Так как $\angle COD = 60°$ и $OC = OD$, то $\angle OCD = \angle ODC = (180° - 60°) : 2 = 60°$, т. е. ΔOCD — равносторонний.

По условию AM — биссектриса $\angle BAD$, тогда $AB = BM = y$ (биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник). Так как $AM = 12$, то из ΔABM получим $y^2 + y^2 = 12^2$, или $2y^2 = 12^2$, $\sqrt{2}y = 12$, $y = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Значит, $AB = BM = 6\sqrt{2}$, $BD = 2BO = 2AB = 12\sqrt{2}$.

Из ΔABC, где $\angle B = 90°$, $AB = 6\sqrt{2}$, $AC = BD = 12\sqrt{2}$, имеем $BC^2 = AC^2 - AB^2$, или $BC^2 = (12\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{2})^2$, $BC^2 = (12\sqrt{2} - 6\sqrt{2})(12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2} = 6 \cdot 2 \cdot 18 = 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36 \cdot 6$, откуда $BC = 6\sqrt{6}$.

Но $BC = BM + MC$, откуда $MC = x = BC - BM = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Ответ: $6\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$.

24. Через точку пересечения диагоналей ML и KN трапеции $MKLN$ проведем высоту TL. Пусть $OT = x$, $KT = y$. По условию задачи $KN \perp ML$, $KL = 5$, $MN = 4 + 9 = 13$. Проведем высоту KE трапеции. Заметим, что $\Delta KEN \sim \Delta OLN$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол KNE). Значит, $\frac{KE}{EN} = \frac{OL}{LN}$, или $\frac{FE}{EN} = \frac{OL}{LN}$, где $FE = x + 6$, $EN = y + 9$, тогда получим $\frac{x+6}{y+9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Кроме того, из прямоугольного ΔKOL имеем $OT^2 = KT \cdot TL$, где $OT = x$, $KT = y$, $TL = y - 5$. Значит, $x^2 = y(5 - y)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+6}{y+9} = \frac{2}{3}, \\ x^2 = y(5-y); \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 18 = 2y + 18, \\ x^2 = y(5-y); \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2y, \\ x^2 = y(5-y). \end{cases}$$

$y = \frac{3}{2}x$, тогда $x^2 = \frac{3}{2}x \cdot \left(5 - \frac{3}{2}x\right)$, или $4x^2 = 30x - 9x^2$, $13x^2 = 30x$, $x \neq 0$, откуда находим $x = \frac{30}{13}$.

Ответ: $\frac{30}{13}$.

К таблице 18

3. Так как $BC = 8$, $AC = 8\sqrt{3}$, $\angle ACB = 90°$, то по теореме Пифагора имеем $AB = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = \sqrt{8^2(1+3)} = \sqrt{8^2 \cdot 4} = 8 \cdot 2 = 16$.

По условию M — середина AB, значит, CM — медиана ΔABC, тогда $CM = \frac{1}{2}AB = 8$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине).

Из ΔABC $\sin\alpha=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{8\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{8\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\sqrt{3}$.

Ответ: $CM=8$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$.

8. Заметим, что $S_{\Delta KMN}=\dfrac{1}{2}NK\cdot MF=\dfrac{1}{2}MN\cdot KE$, или $NK\cdot MF=$ $=MN\cdot KE$, откуда $\dfrac{MF}{KE}=\dfrac{MN}{NK}$.

В ΔOFK $\angle FOK=75°$, $\angle OFK=90° \Rightarrow \angle OKF=15°$.

В ΔNEK, где $\angle NEK=90°$, $\angle NKE=15° \Rightarrow \angle N=75°$.

$\cos 75°=\dfrac{NF}{MN}=\dfrac{NE}{NK}=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{NK}=\dfrac{MN}{2NK}$, откуда $\dfrac{MN}{NK}=2\cos 75°$.

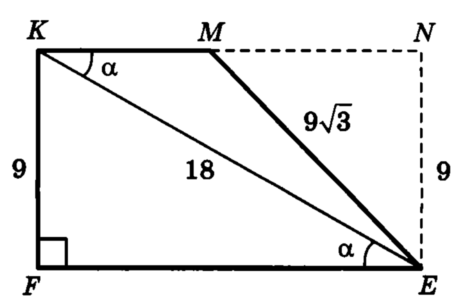
Но $\dfrac{MN}{NK}=\dfrac{MF}{KE}$, значит, $\dfrac{MF}{KE}=2\cos 75°$. Но $\cos 75°=\cos(45°+30°)=$ $=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

Следовательно, $\dfrac{MF}{KE}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Замечание. Применение формулы $\cos(\alpha+\beta)$ необязательно, так как эта формула применяется в основном в 10 классе.

13. Так как $FKME$ — трапеция, то $\angle MKE=\angle KEF=\alpha$, тогда из ΔKFE, где $\angle F=90°$, $KF=9$, $KE=18$ имеем $\sin\alpha=\dfrac{KF}{KE}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$, $FE=\sqrt{18^2-9^2}=$ $=\sqrt{324-81}=\sqrt{243}=\sqrt{81\cdot 3}=9\sqrt{3}$.



Значит, $\cos\alpha = \dfrac{FE}{KE} = \dfrac{9\sqrt{3}}{18} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{9\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 18$.

Достроим трепецию до прямоугольника $FKNE$.

Из ΔMNE $MN = \sqrt{(9\sqrt{3})^2 - 9^2} = \sqrt{9^2(3-1)} = 9\sqrt{2}$, тогда $KM = KN - MN = FE - MN = 9\sqrt{3} - 9\sqrt{2} = 9(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Ответ: $9(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

15. Так как $MN = 13$, $KN = 5$, $MK = 12$, то $13^2 = 5^2 + 12^2$, значит, ΔMKN — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), где $\angle MKN = 90°$. По условию задачи $\angle LTK = 90°$. Так как $LK \perp MK$ и $MK \perp KN$, то $\angle KLT = \angle MKN = \alpha$. Из ΔMKN $\sin\alpha = \dfrac{MK}{MN} = \dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{KN}{MN} = \dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MK}{KN} = \dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{12}$.

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{12}$.

К таблице 19

3. По условию $OM = MN$. Кроме того, $OM = ON$ как радиусы. Значит, ΔOMN — равносторонний, тогда $\angle OMN = \angle ONM = \angle MON = 60°$.

Но $OM \perp MA$ и $ON \perp AN$ (по свойству касательных), тогда $\angle AMN = \angle ANM = 30°$.

Следовательно, $\angle MAN = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

Ответ: 120°.

7. Пусть $OM = OB = x$ (радиусы окружности). По условию $AO = 13$, тогда $AB = 13 - x$. Так как ΔACO — прямоугольный и CB — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, то $BC^2 = AB \cdot BO$, или $(13 - x)\cdot x = 36$, $x^2 - 13x + 36 = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, т. е. $OM = 4$ или $OM = 9$. Но $AB > BO$, значит, $OM = 4$.

Ответ: 4.

11. Заметим, что радиус окружности OE, проведенный в точку касания E касательной LM, является высотой ΔLOM, тогда имеем $OE^2 = LE \cdot EM$ (по свойству перпендикуляра). Но $KL = LE$ и $TM = ME$ (по свойству касательных), значит, $OE^2 = KL \cdot TM$, откуда $OE = \sqrt{9\cdot 6} = 3 \cdot 4 = 12$, тогда $KT = 2 \cdot OE = 24$.

Ответ: 24.

16. Пусть T — точка касания касательной EF к окружности, тогда $ME = ET$ и $NF = FT$. По условию $P_{\Delta AEF} = 36$, или $AE + AF + EF = 36$, где $EF = ET + TF = ME + NF$, тогда $AE + AF + ME + NF = (AE + ME) + (AF + NF) = AM + AN = 36$.

Но $AM = AN$ (по свойству касательных), тогда $AM = AN = 36 : 2 = 18$.

Ответ: $AM = AN = 18$.

К таблице 20

7. По условию $\smile RK = 120°$, тогда $\angle ROK = 120°$. Так как $OR = OK$ (как радиусы) и $OL \perp RK$, то ΔROK — равнобедренный, высота OL, проведенная к основанию, является биссектрисой, тогда $\angle ROL = 60° \Rightarrow \angle ORL = 30°$. Значит, $OL = x = \frac{1}{2}RO = 6$.

Ответ: 6.

11. Докажем, что $\angle MAN = \frac{1}{2}(\smile MN - \smile KL)$. Соединим точки M и L, тогда $\angle MLN$ — внешний угол ΔAML, значит, $\angle MLN = \angle A + \angle AML$, откуда $\angle A = \angle MLN - \angle AML = \frac{1}{2}\smile MN - \frac{1}{2}\smile KL = \frac{1}{2}(\smile MN - \smile KL)$, что и требовалось доказать.

Тогда $\angle A = x = \frac{1}{2}(130° - 16°) = 57°$.

Ответ: 57°.

18. AM — диаметр окружности, тогда $OM \perp MK$ (по свойству касательной). Значит, ΔAMK — прямоугольный. По условию $AL = LK$, тогда ML — медиана. Известно, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы (по свойству прямоугольного треугольника), значит, $AL = ML$ и $AL \perp ML$ ($\angle ALM = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр).

Следовательно, $\angle A = x = \angle AML = \angle K = 45°$.

Ответ: 45°.

24. По условию $\angle B = 27°$, тогда $\smile CD = 27° \cdot 2 = 54°$. Но $\smile AC = 30°$, $\smile ACD = 30° + 54° = 84°$.

Так как AB — диаметр окружности, то $\angle ADB = 180° \Rightarrow \smile DB = 180° - 84° = 96° \Rightarrow \angle BCD = \frac{1}{2}\smile DB = 48°$.

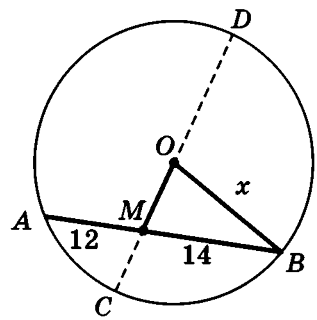
Ответ: 48°.

26. Пусть $\cup AC = 8a$, тогда $\cup BC = 15a$. По условию $\cup AB = 130°$. Имеем: $\cup BC + \cup AC + \cup AB = 360°$, или $15a + 8a + 130° = 360°$, $23a = 230$, $a = 10$.

Тогда $\cup AC = 8a = 80°$, значит, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = 40°$.

Ответ: 40°.

33. *Указание.* Учесть, что $ON = KN$, где $\angle MKB = \angle AKN = 75°$.
Ответ: 75°.



39. Продолжим OM до пересечения с окружностью в точках D и C. Получим диаметр CD, где $CO = OD = OB = x$. По теореме о пересекающихся хордах, имеем: $CM \cdot MD = AM \cdot MB$.

Но $CM = x - 11$, $MD = x + 11$, тогда получим $(x - 11)(x + 11) = 12 \cdot 14$, или $x^2 - 121 = 168$, $x^2 = 289$, $x = 17$.

Значит, $OB = x = 17$.

Ответ: 17.

К таблице 21

8*. I способ

Пусть $OE = x$, $OT = y$, тогда $KE = 3x = 18$, откуда $x = 6$. Значит, $OK = 2x = 12$, $MT = 3y = 15$, $y = 5$, $MO = 2y = 10$ (по условию KE и MT — медианы ΔMKL, а медианы в точке пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от соответствующей вершины).

Из ΔMOK $MK = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. Так как ΔMOK — прямоугольный и LP — медиана (P — середина MK), то OP — медиана ΔMOK, т. е. $MP = KP = OP = \sqrt{61}$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы). Значит, $OL = 2 \cdot OP = 2\sqrt{61}$.

Ответ: $2\sqrt{61}$.

II способ

Известно, что, если a, b, c — стороны треугольника и m_c — медиана, проведенная к стороне c, то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

Пусть LP — медиана, проведенная к стороне MK, тогда
$LP = \frac{1}{2}\sqrt{2(ML^2 + KL^2) - MK^2}$.

Пусть $OE = x$, $OT = y$, тогда $KE = 3x = 18$, т. е. $x = 6$, $2x = OE = 12$, $MT = 3y = 15$, $y = 5$, $2y = MO = 10$. Из ΔKOT $KT = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $MK = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$, $ME = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.

Значит, $KL = 2KT = 26$, $ML = 2ME = 4\sqrt{34}$.

Следовательно, $LP = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(16\cdot 34 + 26^2) - 4\cdot 61} = \frac{1}{2}\sqrt{244\cdot 9} = 3\sqrt{61}$, откуда $OL = 2\sqrt{61}$.

Ответ: $2\sqrt{61}$.

III способ

Указание. Достроить ΔKML до параллелограмма, для чего из точки K провести прямую параллельно ML и из точки M провести прямую параллельно KL. Точку пересечения обозначить через B.

Далее использовать формулу: $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$, где a и b — стороны параллелограмма, d_1 и d_2 — диагонали.

12. ON и OM — серединные перпендикуляры к сторонам RL и RK соответственно. Тогда $OR = OL = OK = 6$.

Так как $\angle OKL = 60°$ и $OK = OL$, то ΔOKL — равнобедренный, тогда $\angle OLK = 60°$. Выходит, что $\angle KOL = 180° - (60° + 60°) = 60°$, т. е. ΔKOL — равносторонний, тогда $S_{\Delta KOL} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a = OK = OL = KL = 6$.

Значит, $S_{\Delta KOL} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Ответ: $9\sqrt{3}$.

16. По условию задачи O — точка пересечения высот ΔABC. Заметим, что $\Delta AOK \sim \Delta ONC$ как прямоугольные, имеющие равные углы: $\angle AOK = \angle CON$ (как вертикальные, $\angle AKO = \angle CNO = 90°$). Значит, $\Delta AOK \sim \Delta ONC$ (по двум углам). Тогда $\frac{OK}{AO} = \frac{ON}{OC}$, откуда $OK = \frac{AO\cdot ON}{OC}$, где $AO = 20$, $ON = 7$.

Из ΔONC найдем $OC = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

Следовательно, $OK = \frac{20\cdot 7}{25} = \frac{28}{5} = 5{,}6$.

Ответ: 5,6.

19. По условию задачи O — точка пересечения биссектрис. Так как точка O равноудалена от сторон ΔMEF (O — центр вписанной окружности), то $OK = OL = ON = r$, $OL \perp FE$, тогда из ΔEOL, где $\angle OEL = \frac{1}{2}\angle MEF = 30°$, $EO = 8$, находим $OL = \frac{1}{2}OE = 4$.

Ответ: 4.

24. Так как $AB = BC$, то ΔABC — равнобедренный, где высота BD является медианой. Тогда $AD = DC = 5$, $BC = AB = 13$. Из ΔADB $BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Заметим, что N — точка пересечения медиан, тогда $BN : ND = 2 : 1$. Так как $BD = 12$, то $BN = 8$, $ND = 4$. Из ΔCDN $CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$.

$NE = \frac{1}{2}CN = \frac{\sqrt{41}}{2}$, тогда $CE = CN + NE = \sqrt{41} + \frac{\sqrt{41}}{2} = \frac{3\sqrt{41}}{2}$. Высоту CK ΔABC найдем, сравнивая $S_{\Delta ABC}$. С одной стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CK$. Значит, $AC \cdot BD = AB \cdot CK$, откуда $CK = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{10 \cdot 12}{13} = \frac{120}{13}$.

Из ΔCKE находим $KE = \sqrt{CE^2 - CK^2} = \sqrt{\frac{369}{4} - \frac{14\,400}{169}} = \frac{\sqrt{4761}}{2 \cdot 13} = \frac{69}{26}$.

Тогда $AK = AE - KE = \frac{13}{2} - \frac{69}{26} = \frac{100}{26} = \frac{50}{13}$.

Заметим, что $\Delta ACK \sim \Delta CDN$ как прямоугольные, имеющие общий острый угол ACK.

Значит, $\frac{CK}{AK} = \frac{CD}{DM}$, откуда $DM = \frac{AK \cdot CD}{CK} = \frac{50 \cdot 5 \cdot 13}{13 \cdot 120} = \frac{25}{12}$. Следовательно, $MN = DN - DM = 4 - \frac{25}{12} = \frac{23}{12}$.

Ответ: $\frac{23}{12}$.

К таблице 22

8. Проведем высоту CK на основание AB, тогда в равнобедренном ΔACB высота CK является медианой, т. е. $AK = BK = 24$. $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK = 24CK$. С другой стороны, $S_{\Delta ACB} = \frac{abc}{4R}$, где $a = AC$, $b = BC$, $c = AB$, $R = AO = 25$, тогда имеем $24CK = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{4 \cdot 25} = \frac{AC \cdot BC \cdot 12}{25}$.

Пусть $CK = h$, $AC = BC = x$, тогда $24h = \frac{12x^2}{25}$, или $x^2 = 50h$.

Из ΔACE $x^2 = h^2 + 24^2$, тогда получим $h^2 + 576 = 50h$, или $h^2 - 50h + 576 = 0$, откуда находим $h_1 = 18$, $h_2 = 32$.

Значит, $x^2 = 50 \cdot 18 = 900$, откуда $x = 30$, или $x^2 = 50 \cdot 32 = 25 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2$, $x = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$.

Следовательно, $AC = x = 30$, или $AC = 40$.

Ответ: 30 или 40.

16. Так как $MK = 4$, $KE = 2$ и $\angle MEK = 90°$, то $KE = \frac{1}{2}MK \Rightarrow \angle KME = 30°$, тогда $\cup KN = 60°$. Значит, $\angle KON = 60°$. Но $OK = ON$ как радиусы, тогда $\angle OKN = \angle ONK = 60°$, т. е. ΔKON — равносторонний, следовательно, $ON = 6$.

Ответ: 6.

20. OK — радиус вписанной окружности, тогда O — точка пересечения биссектрис. Соединим центр окружности с точкой A. По свойству биссектрисы угла треугольника имеем $\frac{AM}{AK} = \frac{OM}{OK}$, где $\frac{OM}{OK} = \frac{12}{5}$ (по условию) и $AM = BM = 30$, тогда $\frac{30}{AK} = \frac{12}{5}$, откуда $AK = \frac{30 \cdot 5}{12} = \frac{25}{2}$.

Значит, $AB = 2AK = 25$.

Ответ: 25.

24. Заметим, что отрезки касательных, проведенных к окружности из точки вне ее, равны (по свойству касательных).

Пусть $BM = BK = x$, $CN = CM = y$, $AN = AK = z$. По условию $AB = 10$, $BC = 20$, $AC = 24$, тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + z = 10, \\ x + y = 20, \\ y + z = 24, \end{cases}$$

или, складывая уравнения системы, имеем

$2(x + y + x) = 54$, $x + y + z = 27$.

Так как $y + z = 24$, то $x + 24 = 27$, $x = 3$.

Итак, $BM = x = 3$.

Ответ: 3.

29. $AO = BO = CO = R$ — радиус описанной окружности. По условию $AC = BC$, значит, ΔABC — равнобедренный с основанием AB. CD — высота, а значит, медиана и биссектриса. Точка O — центр описанной окружности — лежит на биссектрисе, медиане, высоте, а значит, серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

Так как $CD = 12$, $CO = R \Rightarrow OD = 12 - R$.

Из ΔAOD $AO^2 = AD^2 + OD^2$, или $R^2 = 81 + (12 - R)^2$, $R^2 = 81 + 144 - 24R + R^2$, $24R = 225$, $R = \frac{225}{24} = \frac{75}{8}$. $AO = R = \frac{75}{8}$.

Ответ: $\frac{75}{8}$.

40. I способ

В равнобедренном ΔMKN $KM = KN = 10$ (по условию), OT — радиус вписанной окружности, тогда $OT \perp MN$. Проведем высоту KT.

В ΔMTK $\cos\angle M = \dfrac{MT}{MK} = 0{,}6$, значит, $MT = 10 \cdot 0{,}6 = 6$, тогда $MN = 12$. По теореме Пифагора найдем KT из ΔMKT: $KT = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$.

$S_{\Delta MKN} = \frac{1}{2}MN \cdot KT$, а, с другой стороны, $S_{\Delta MKN} = p \cdot r = \frac{1}{2}(MK + KN + MN) \cdot OT$, тогда получим $12 \cdot 8 = (10 + 10 + 12) \cdot OT$, или $32 \cdot OT = 12 \cdot 8$, откуда $OT = \frac{12 \cdot 8}{32} = \frac{3 \cdot 8}{8} = 3$.

Ответ: 3.

II способ

Пусть E — точка касания окружности и касательной MK. Заметим, что $\Delta MTK \sim \Delta OEK$ (как прямоугольные, имеющие общий острый $\angle MKT$). Из подобия имеем $\dfrac{MT}{KT} = \dfrac{OE}{EK}$, где $MT = 6$, $KT = 8$ (см. I способ).

Кроме того, $EK = 10 - ME = 10 - MT = 4$, значит, $OE = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3$. Но $OE = OT = 3$.

Ответ: 3.

45. Так как $\angle M = \angle N$, то $MEFN$ — равнобедренная трапеция. По свойству описанного четырехугольника имеем $2ME = EF + MN$. Поскольку O — центр вписанной окружности и OT — радиус, то KL — средняя линия трапеции, тогда $EF + MN = 2KL = 16$. Значит, $2ME = 16$, $ME = 8$. Следовательно, $S_{MEFN} = \frac{1}{2}(MN + EF) \cdot 2OT = 8 \cdot 2 \cdot 5 = 80$.

Ответ: 80.

49. Проведем высоту BE трапеции $ABCD$, где $AB = CD$. По свойству описанного четырехугольника имеем $AD + BC = 2AB$.

Так как $\angle A = 30°$, то в ΔABE $BE = 2 \cdot OM = 12$, тогда $AB = 2BE = 24$. Значит, $AD + BC = 48$.

Ответ: 48.

54. Проведем высоты NE и KF на основание ML. Так как $ML \parallel NK$, то $MNKL$ — трапеция (равнобедренная). По условию MK — биссектриса. Заметим, что $\angle KML = \angle MKN = 30°$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых ML, NK и секущей MK). Тогда $\angle NMK = \angle MKN = 30°$, т. е. ΔMNK — равнобедренный.

Пусть $NK = 2x$, $ML = 2y$, $MN = NK = 2x$.

Из ΔMNE $ME = \frac{1}{2}MN = x$, $NE = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$.

Из ΔMKF $MK = 2 \cdot KF = 2 \cdot NE = 2x\sqrt{3}$.

$S_{\Delta MKL} = \frac{1}{2}ML \cdot KF = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = \sqrt{3}xy$.

С другой стороны, $S_{\Delta MKL} = \dfrac{MK \cdot KL \cdot ML}{4 \cdot OL}$, или $S_{\Delta MKL} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, значит, $\sqrt{3}xy = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, откуда $x = 4$. Следовательно, $S_{MNKL} = \frac{1}{2}(ML + NK) \cdot NE = (x + y) \cdot \sqrt{3}x$. Но $ML = 2ME + EF = 2ME + NK = 4x$, или $2y = 4x$, $y = 2x = 8$.

Значит, $S_{MNKL} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

59. Пусть $LE = x$. Проведем высоту LT. Так как трапеция равнобедренная ($LK = EF$), то $KT = \frac{1}{2}(KF - LE)$. Но KF — диаметр окружности, тогда $\angle KLF = 90°$, тогда $KF = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

Значит, $KT = \frac{1}{2}(15 - LE) = \frac{1}{2}(15 - x)$.

Пусть $KT = y$, $2y = 15 - x$, или $x + 2y = 15$.

Из ΔKLT $LT^2 = 81 - y^2$, из ΔLTF $LT^2 = 12^2 - (x + y)^2$.

Значит, $81 - y^2 = 144 - (x + y)^2$, или $81 - y^2 = 144 - x^2 - 2xy - y^2$, откуда $x^2 + 2xy = 63$, или $x(x + 2y) = 63$. Но $x + 2y = 15$, тогда получим $15x = 63$, откуда $x = \dfrac{63}{15} = \dfrac{21}{5} == 4{,}2$, т. е. $LE = 4{,}2$.

Ответ: 4,2.

66. По условию $MNKL$ — ромб. Пусть $ML = x$, тогда $P_{MNKL} = 4x = 80$, откуда $x = 20$. Так как $MK = 32$, то $MO = \frac{1}{2}MK = 16$.

Из ΔMOE $MO^2 = ME^2 + OE^2$, или $ME^2 + OE^2 = 256$.

Так как $MK \perp NL$ (по свойству ромба), то ΔMOL — прямоугольный, и так как $OE \perp ML$, то $MO^2 = ML \cdot ME$, или $16^2 = 20 \cdot ME$, откуда $ME = \dfrac{64}{5}$.

Значит, $\left(\dfrac{64}{5}\right)^2 + OE^2 = 16^2$, или $OE^2 = \left(16 - \dfrac{64}{5}\right)\left(16 + \dfrac{64}{5}\right)$, или $OE^2 = \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{144}{5}$, откуда $OE = \dfrac{4 \cdot 12}{5} = \dfrac{48}{5} = 9{,}6$.

Ответ: 9,6.

72. $\angle A = 180° \cdot (6 - 2) : 6 = 120°$ — угол правильного шестиугольника, AO — биссектриса угла A, т. е. $\angle OAM = 60°$, где M — точка касания с окружностью. Из ΔAOM $OM = AO \cdot \sin 60° = 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Но $OM = \dfrac{1}{2}AC$, т. е. $AC = 2 \cdot OM = 15$.

Ответ: 15.

К таблице 23

2. $|\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{NO} - \overrightarrow{NM}| = |(\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}) + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{KL}| =$

$= |(\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NO}) + \overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LO}| = |\overrightarrow{KO}|$.

По условию $ML = 17$, $KN = ML = 17$, $ON = 8$.

Из ΔNOK $KO = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$.

Значит, $|\overrightarrow{KO}| = KO = 15$.

Ответ: 15.

6. $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}|$.

По условию $ABCD$ — прямоугольная трапеция, где $BD = 2\sqrt{2}$, $\angle CBD = 45°$ и $\angle ABD = 90°$. Проведем высоту BE к основанию AD. Заметим, что $\angle CBD = \angle ADB = 45°$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC, AD и секущей BD.

Тогда $\angle A = 45°$, т. е. ΔABD — равнобедренный и $AB = BD$. Кроме того, $CD = BE$ (как высоты трапеции) и $CD \parallel BE$.

Значит, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{EA}|$.

Из ΔDBA, где $\angle ABD = 90°$, $AB = BD = 2\sqrt{2}$, имеем $AD^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$, $AD = 4$, тогда $AE = 2$, значит, $|\overrightarrow{EA}| = 2$.

Ответ: 2.

14. Пусть $CM = 3x$, $MB = 2x$, $CB = 5x$.

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$, откуда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\vec{b}-5\vec{x}$.

Аналогично $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$, или $\overrightarrow{AC}+3\vec{x}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-3\vec{x}$.

Значит, $\vec{a}-3\vec{x}=\vec{b}-5\vec{x}$, или $2\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, тогда

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b} = \frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

23. Так как $MNKP$ — параллелограмм, то точка O — середина диагоналей PN и MK. Тогда $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP})$ (см. п. 84, задача 1, «Геометрия. 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.), или $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Значит, $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. Аналогично, $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MK})$.

Но $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\vec{b}+\vec{a}$ (по правилу параллелограмма), тогда $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{b}+\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

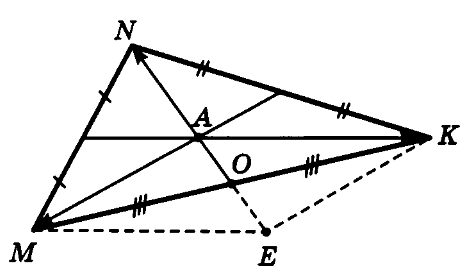
32. Так как M — середина AC, то $AM = MC$; аналогично $BN = ND$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$, что и требовалось доказать.

39. Достроим ΔMAK до параллелограмма $MAKE$. Так как NO — медиана ΔMNK, то $NA : AO = 2 : 1$, где A — точка пересечения медиан. Но $AO =$



$= OE$ (по свойству параллелограмма), значит, $AE = NA$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK}$. Но $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AN}$, тогда $-\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK}$, откуда $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = 0$.

К таблице 24

8. Пусть $NR = x$, $MQ = y$. Так как в ΔSQN $\angle QSN = 45°$ и $QN \perp SR$, то $\angle SQN = 45° \Rightarrow SN = QN = x + y = 4$. Значит, $TE = \frac{1}{2}(SR + MQ) = \frac{1}{2}(2x + y + y) = x + y = 4$.

Ответ: 4.

12. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ $BC = x$, тогда $AD = 2x$, $EF = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{3x}{2}$.

Пусть BT — высота трапеции, тогда $AT = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(2x - x) = \frac{1}{2}x$, $BT = 2 \cdot OK = 2$.

По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = 2AB$, или $3x = 2AB$, $AB = \frac{3}{2}x$.

Из ΔABT $AB^2 = BT^2 + AT^2$, или $\frac{9}{4}x^2 = 4 + \frac{1}{4}x^2$, $9x^2 = 16 + x^2$, $8x^2 = 16$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$. Значит, $EF = \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

21. Пусть $BC = x$, $CD = 2x$, $AD = y$.

EF — средняя линия трапеции $ABCD$, тогда $\frac{x+y}{2} = 20$, или $x + y = 40$.

Из ΔADC, где $\angle ADC = 90°$, имеем $AC = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

Проведем высоту BM, тогда из ΔDMB $DB = \sqrt{BM^2 + DM^2}$, где $BM = CD = 2x$, $DM = x$, тогда $DB = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$.

Так как $AC \perp BD$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ (см. № 478 «Геометрия. 7–9 класс», Л.С. Атанасян и др.).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5}.$$

С другой стороны, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$, тогда $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+y^2} \cdot x\sqrt{5} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$, или $\sqrt{5(4x^2+y^2)} = 2(x+y)$. Но $x + y = 40$, тогда получим $\sqrt{5(4x^2+y^2)} = 80$, или $4x^2 + y^2 = 1280$.

Имеем систему уравнений:

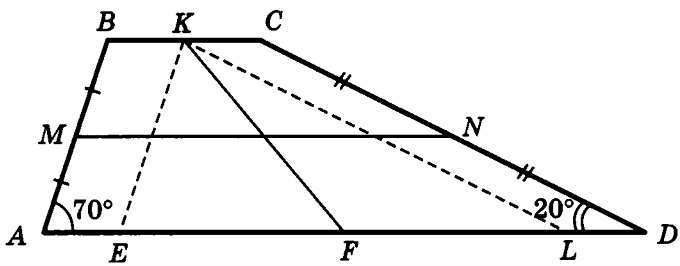
$$\begin{cases} 4x^2+y^2=1280, \\ x+y=40; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+(40-x)^2=1280, \\ y=40-x. \end{cases}$$

$4x^2 + 1600 - 80x + x^2 = 1280$, или $5x^2 - 80x + 320 = 0$, или $x^2 - 16x + 64 = 0$, $(x - 8)^2 = 0$, $x - 8 = 0$, $x = 8$.

Значит, $BC = x = 8$.

Ответ: 8.

24. Предварительно докажем, что если в трапеции сумма углов при основании равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.



Доказательство.

Пусть точки K и F — середины оснований AD и BC. Пусть $AD = 2x$ и $BC = 2y$. Проведем $KE \parallel AB$ и $KL \parallel CD$. Заметим, что $\angle KEF = \angle A = 70°$ и $\angle KLF = \angle D = 20°$, тогда $\angle EKL = 90°$, т. е. ΔEKL — прямоугольный и KF — медиана ΔEKL и, значит, $KE = KF = FL = \frac{1}{2}EL = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

Следовательно, $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$, или $x - y = 2$.

Кроме того, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$, или $x + y = 4$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=6, \\ 2y=2. \end{cases}$$

Итак, $AD = 2x = 6$, $BC = 2y = 2$.

Ответ: $AD = 6$, $BC = 2$.

ОТВЕТЫ

Таблица 2

1. 58. **2.** 44. **3.** 72. **4.** 80. **5.** 30. **6.** 40. **7.** 48. **8.** 48. **9.** 60. **10.** 72. **11.** 42. **12.** 30. **13.** 40. **14.** 78. **15.** 38. **16.** 60.

Таблица 3

1. $\angle BAE = \angle EAD = 37°$, $\angle BAD = \angle C = 74°$, $\angle B = \angle D = 106°$. **2.** $\angle M = \angle K = 75°$, $\angle MNK = \angle MLK = 105°$, $\angle MNF = 15°$. **3.** $\angle K = \angle E = 75°$, $\angle KLE = \angle KFE = 105°$, $\angle KLF = \angle LFE = 30°$, $\angle TFL = 60°$, $\angle FLE = 75°$. **4.** $\angle M = \angle E = 70°$, $\angle MFE = \angle MNE = 110°$, $\angle MFN = \angle FNE = 50°$. **5.** $\angle S = \angle K = 70°$, $\angle SRK = \angle SLK = 110°$, $\angle SLM = 20°$, $\angle LRK = \angle SRL = 55°$, $\angle RLK = 55°$. **6.** $\angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90°$, $\angle ABD = \angle ADB = \angle CBD = \angle BDC = 45°$, $\angle BOM = \angle DON = 45°$, $\angle BON = 120°$, $\angle ANM = \angle CMN = 105°$. **7.** $\angle K = \angle M = 70°$, $\angle KLM = \angle MNK = 110°$, $\angle KLE = \angle MLF = 20°$. **8.** $\angle M = \angle K = 60°$, $\angle MLK = \angle MNK = 120°$, $\angle MLE = \angle NLE = 30°$, $\angle MNL = \angle KNL = 60°$. **9.** $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle ABC = \angle D = 120°$, $\angle ABM = 30°$, $\angle BMD = \angle CBM = 90°$. **10.** $\angle R = \angle K = 65°$, $\angle RSK = \angle RLK = 115°$, $\angle RSL = \angle SLK = 50°$, $\angle MSL = 40°$. **11.** $\angle K = \angle Q = 75°$, $\angle KLQ = \angle KMQ = 105°$, $\angle KMN = \angle MNQ = 85°$, $\angle QLT = 15°$, $\angle QMN = 20°$, $\angle NOT = 110°$. **12.** $\angle A = \angle C = 65°$, $\angle ABC = \angle ADC = 115°$, $\angle ABM = 30°$, $\angle BON = \angle MOD = 60°$, $\angle MON = 120°$, $\angle MDO = 25°$, $\angle OMD = 95°$. **13.** $\angle SRM = \angle STM = 36°$, $\angle RST = \angle RMT = 144°$, $\angle SRT = \angle TRM = \angle STR = \angle MTR = 18°$, $\angle RSM = \angle TSM = \angle RMS = \angle TMS = 72°$. **14.** $\angle BAD = \angle BCD = 60°$, $\angle ABC = \angle ADC = 120°$, $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA = 30°$, $\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB = 60°$. **15.** $\angle R = \angle N = 50°$, $\angle RMN = \angle RKN = 130°$, $\angle RMT = \angle NML = 40°$, $\angle TML = 50°$. **16.** $\angle L = \angle N = \angle 100°$, $= \angle LKN = \angle LMN = 80°$, $\angle MKT = \angle NKT = 20°$, $\angle KLN = \angle MLN = \angle KNL = \angle MNL = 50°$, $\angle LKM = \angle MKN = \angle LMK = \angle NMK = 40°$, $\angle KTN = 60°$.

Таблица 4

1. $AD = BC = 10$, $AB = CD = 14$. **2.** $MN = EF = 10$, $MF = NE = 14$. **3.** $QR = LM = 10$, $QL = RM = 14$. **4.** $AB = CD = 8$, $AD = BC = 16$. **5.** $MN = KL = 9$, $NK = ML = 15$. **6.** $AB = CD = 9$, $AD = BC = 15$. **7.** $LK = MN = 8$, $LM = KN = 16$. **8.** $AB = CD = 10$, $AD = BC = 14$.

Таблица 5

1. $\angle BAD = 60°$, $\angle B = 120°$, $\angle BCD = 120°$, $\angle D = 60°$. **2.** $\angle S = \angle SKL = 125°$, $\angle SRL = \angle L = 55°$. **3.** $\angle KLM = \angle LMN = 120°$, $\angle LKN = 60°$. **4.** $\angle EKL = 125°$, $\angle EFL = 90°$, $\angle L = 55°$. **5.** $\angle M = 60°$, $\angle MNS = 120°$, $\angle MKS = 90°$. **6.** $\angle EFK = \angle FKM = 120°$, $\angle FEM = \angle EMK = 60°$. **7.** $\angle R = \angle RST = 90°$, $\angle T = 45°$, $\angle RQT = 135°$. **8.** $\angle M = \angle KEM = 70°$, $\angle MNK = \angle NKE = 110°$. **9.** $\angle DAB = 90°$, $\angle DCB = 135°$. **10.** $\angle MNK = 105°$, $\angle L = 50°$, $\angle K = 130°$. **11.** $\angle R = 50°$, $\angle K = 70°$. **12.** $\angle BAD = \angle D = 72°$, $\angle ABC = \angle BCD = 108°$. **13.** $\angle K = \angle KLN = 140°$, $\angle KMN = \angle N = 40°$. **14.** $\angle A = \angle ADC = 60°$, $\angle ABC = \angle C = 120°$. **15.** $\angle K = 50°$, $\angle KLM = 130°$, $\angle MNK = 80°$. **16.** $\angle R = 50°$, $\angle RSM = 130°$, $\angle M = 100°$, $\angle MKR = 80°$. **17.** $\angle A = \angle D = 70°$, $\angle B = \angle C = 110°$. **18.** $\angle M = \angle N = 60°$, $\angle MKL = \angle KLN = 120°$. **19.** $\angle DAB = 75°$, $\angle ABC = 80°$, $\angle ADC = 105°$, $\angle BCD = 100°$. **20.** $\angle RKL = 105°$, $\angle KLM = 100°$, $\angle KRM = 75°$, $\angle LMR = 80°$. **21.** $\angle FER = 60°$, $\angle KFE = 70°$, $\angle KRE = 120°$. **22.** $\angle BCD = 90°$, $\angle ABC = 140°$, $\angle BAD = 40°$. **23.** $\angle RMN = \angle SNM = 70°$, $\angle MRS = \angle RSN = 110°$. **24.** $\angle DAB = 90°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 80°$.

Таблица 6

1. 60. **2.** 37. **3.** 80. **4.** 40. **5.** 120. **6.** 100. **7.** 70. **8.** 40.

Таблица 7

1. 360. **2.** 336. **3.** 289. **4.** 64. **5.** 192. **6.** 256. **7.** 36. **8.** 70. **9.** 144. **10.** 144. **11.** 144. **12.** 144. **13.** 144. **14.** 144. **15.** 144. **16.** 49. **17.** 24. **18.** 60. **19.** 128. **20.** 72. **21.** 128. **22.** 288. **23.** 64. **24.** 288.

Таблица 8

1. 324. **2.** 64. **3.** 90. **4.** 120. **5.** 308. **6.** $32\sqrt{3}$. **7.** $50\sqrt{3}$. **8.** 108. **9.** 336. **10.** 252. **11.** 384. **12.** 80. **13.** $32\sqrt{2}$. **14.** 162. **15.** 180. **16.** $108\sqrt{3}$. **17.** 50. **18.** 72. **19.** 126. **20.** 63. **21.** 84. **22.** 96. **23.** 144. **24.** 80.

Таблица 9

1. 49. **2.** $81\sqrt{3}/4$. **3.** $63\sqrt{3}/2$. **4.** 80. **5.** 50. **6.** 144. **7.** 270. **8.** 56. **9.** 320. **10.** 416. **11.** 63. **12.** 78. **13.** 45. **14.** 18. **15.** 60. **16.** 144. **17.** 28. **18.** 64. **19.** 52. **20.** 78. **21.** 108. **22.** 225. **23.** 32. **24.** 56.

Таблица 10

1. 72. **2.** 378. **3.** 108. **4.** 80. **5.** 800. **6.** 800. **7.** 800. **8.** 800. **9.** 220. **10.** 72. **11.** 70. **12.** 63. **13.** 216. **14.** $147\sqrt{3}$. **15.** $147\sqrt{3}$. **16.** 100. **17.** 221. **18.** 135. **19.** 216. **20.** 80. **21.** 338. **22.** 81. **23.** 81. **24.** 80. **25.** 135. **26.** 420. **27.** 80. **28.** 96. **29.** 49. **30.** 360. **31.** 96. **32.** 72.

Таблица 11

1. 168/25. **2.** $8\sqrt{21}/5$. **3.** 120/17. **4.** $8\sqrt{3}$. **5.** 420/37. **6.** 12,5. **7.** $\sqrt{89}$. **8.** $6\sqrt{6}$. **9.** $2\sqrt{17}$. **10.** 5. **11.** 12. **12.** 4,8. **13.** 8. **14.** 7,4. **15.** $13\sqrt{2}/12$. **16.** $\sqrt{73}$. **17.** 9. **18.** $16/\sqrt{3}$. **19.** 720/41. **20.** 20. **21.** 18. **22.** 24. **23.** 74. **24.** 8. **25.** 12. **26.** $5\sqrt{2}$. **27.** 30/7. **28.** 26. **29.** 10. **30.** 10,5. **31.** 84. **32.** 1) 15; 2) $70/\sqrt{29}$. **33.** 5. **34.** 24. **35.** 25. **36.** 36. **37.** 14. **38.** 17. **39.** 18. **40.** 5. **41.** 27. **42.** $6\sqrt{7}$. **43.** 5. **44.** 6. **45.** 15. **46.** $5\sqrt{3}$. **47.** 10. **48.** 12. **49.** 4. **50.** 10. **51.** $10\sqrt{3}$. **52.** 8. **53.** 30. **54.** $4\sqrt{37}$. **55.** 4. **56.** 48/13. **57.** 25. **58.** 6. **59.** 25. **60.** $3\sqrt{41}$. **61.** 12. **62.** $24/\sqrt{5}$. **63.** 17. **64.** 10. **65.** 8. **66.** 10. **67.** 8. **68.** 25. **69.** 7. **70.** 10. **71.** 10. **72.** 4.

Таблица 12

1. $x = 27$, $y = 21$, $z = 24$. **2.** $x = 5$. **3.** $x = 100$. **4.** $x = 54$, $y = 24$. **5.** $x = 256$, $y = 100$. **6.** $x = 13{,}125$. **7.** $x = 48$. **8.** $x = 15$. **9.** $x = 7{,}5$. **10.** $x = 10{,}8$. **11.** $x = 80/7$, $y = 60/7$. **12.** $x = 16/3$. **13.** $x = 54$, $y = 48$. **14.** $x = 45$. **15.** $x = 48$. **16.** $x = 64$. **17.** $x = 14$, $y = 21$. **18.** $x = 5$, $y = 7$. **19.** $x = 60$. **20.** $x = 72$. **21.** $x = 7$. **22.** $x = 31{,}2$. **23.** $x = 18$. **24.** $x = 9$, $y = 15$.

Таблица 13

1. $x = 15$, $y = 10$. **2.** $x = 13$, $y = 36$. **3.** $x = 8$, $y = 14$. **4.** $x = 4$, $y = 8$. **5.** $x = 4$. **6.** $x = 4$. **7.** $x = 40$, $y = 38$. **8.** $x = 8$. **9.** $x = 20/\sqrt{6}$, $y = 2\sqrt{6}$. **10.** $x = 12$, $y = 6$. **11.** $x = 6$, $y = 8$. **12.** $x = 5$. **13.** $x = 6$, $y = 4$. **14.** $x = 2 : 3$. **15.** $x = 4 : 3$. **16.** $x = 48$. **17.** $x = 20$, $y = 16$. **18.** $x = 6$, $y = 3$. **19.** $x = 20$, $y = 14$. **20.** $x = 2 : 3$. **21.** $x = 4 : 9$. **22.** $x = 16$, $y = 4\sqrt{3}$. **23.** $x = 10\sqrt{3}$, $y = 10$. **24.** $x = 20$, $y = 14$. **25.** $x = 16$. **26.** $x = 5$. **27.** $x = 2 : 3$. **28.** $x = 12$, $y = 8$. **29.** $x = 1{,}2$, $y = 3{,}6$. **30.** $x = 4$, $y = 6$. **31.** $x = 8$, $y = 12$. **32.** $x = 6$, $y = 18$.

Таблица 15

1. $x = 7$. **2.** $x = 18$. **3.** $x = 32$. **4.** $x = 34$. **5.** $x = 11$. **6.** $x = 14(1+\sqrt{2})$. **7.** $x = 20$. **8.** $5\sqrt{3}$. **9.** $x = 44$. **10.** $x = 6$. **11.** $x = 10$. **12.** $x = 4{,}5$. **13.** $x = 11$. **14.** $x = 15$. **15.** $x = 108\sqrt{3}$. **16.** $x = 160$.

Таблица 16

1. $MN = 17$, $KL = 120/17$, $KT = 8{,}5$, $ML = 64/17$, $LT = 161/34$, $TN = 8{,}5$. **2.** $KN = 10$, $KM = 24$, $NL = 50/13$, $LM = 288/13$, $KL = 120/13$. **3.** $MN = 2\sqrt{13}$, $MK = 4$, $NK = 6$, $MT = 8/\sqrt{13}$, $TK = 12/\sqrt{13}$, $TN = 18/\sqrt{13}$. **4.** $MK = 40$, $KN = 30$, $MN = 50$, $ML = 32$, $LN = 18$, $KL = 24$. **5.** $MK = 5\sqrt{61}$, $MN = 61$, $KN = 6\sqrt{61}$, $KE = 30$, $ME = 25$, $EN = 36$. **6.** $KT = 60/13$, $MT = 144/13$, $TN = 25/13$. **7.** $MK = 15$, $KN = 20$, $MN = 25$, $KT = 12$, $NT = 16$. **8.** $MK = 3\sqrt{13}$, $KN = 2\sqrt{13}$, $MN = 13$, $ME = 9$, $EN = 4$. **9.** $MN = 13$, $NK = 5$, $MT = 25/13$, $NT = 144/13$, $TL = 1728/169$, $NL = 720/169$, $LK = 125/169$. **10.** $MK = 8$, $MN = 16$, $KN = 8\sqrt{3}$, $KE = 4\sqrt{3}$. **11.** $MK = 6$, $MR = 3{,}6$, $KN = 8$, $KR = 4{,}8$. **12.** $MK = 9$, $MN = 3\sqrt{13}$, $KN = 6$. **13.** $MN = 5\sqrt{3}$, $MK = 3\sqrt{3}$, $NK = 4\sqrt{3}$. **14.** $KN = 81/5\sqrt{34}$, $KM = 75/\sqrt{34}$, $MN = 4329/25$. **15.** $KM = 45/\sqrt{34}$, $NK = 27/\sqrt{34}$. **16.** $MK = 6$, $MN = 3\sqrt{13}$.

Таблица 17

1. $x = 5(1+\sqrt{3})$. **2.** $x = 8$. **3.** $x = 14\sqrt{3}$. **4.** $x = 5\sqrt{3}$. **5.** $x = 6\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$. **6.** $x = 10\sqrt{6}$. **7.** $x = 4\sqrt{3}$. **8.** $x = 8$. **9.** $x = 3\sqrt{3}$. **10.** $x = 4(1+\sqrt{3})$. **11.** $x = 28(2-\sqrt{3})$. **12.** $x = 12$. **13.** $x = 6\sqrt{3}$. **14.** $x = 6\sqrt{13}$. **15.** $x = 4\sqrt{43}/3$. **16.** $x = 12$. **17.** $x = 16\sqrt{2}$. **18.** $x = 2{,}5$. **19.** $x = 8$. **20.** $x = 6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **21.** $x = 3(5+\sqrt{3})$. **22.** $x = 20$. **23.** $x = 3 : 2$. **24.** $x = 30/13$.

Таблица 18

1. $BC = 15$, $BD = 9$, $CD = 12$, $\sin\alpha = 3/5$, $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$. **2.** $MK = 369/40$, $ML = 81/40$, $\sin\alpha = 40/41$, $\cos\alpha = 9/41$, $\operatorname{tg}\alpha = 40/9$. **3.** $CM = 8$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. **4.** $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos\alpha = 1/2$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. **5.** $\sin\alpha = \sqrt{65}/9$, $\cos\alpha = 4/9$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{65}/4$, $\operatorname{ctg}\alpha = 4/\sqrt{65}$.

6. $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{24}{7}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{7}{24}$. **7.** $KN = 25$, $KR=20\sqrt{5}$, $TM = 10$, $TK=10\sqrt{5}$, $\sin\alpha=1/\sqrt{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1/2$. **8.** $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/2$. **9.** $AB = 20$, $BD=20\sqrt{3}$, $\sin\alpha=\sqrt{3}/2$, $\cos\alpha = 1/2$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=1/\sqrt{3}$. **10.** $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 4/3$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3/4$. **11.** $AD=\frac{1}{2}(8+13\sqrt{3})$, $CD=6{,}5$, $\sin\alpha=1/2$, $\cos\alpha=\sqrt{3}/2$, $\mathrm{tg}\,\alpha=1/\sqrt{3}$. **12.** $LK=16$, $\sin\alpha=\sqrt{3}/2$, $\cos\alpha = 1/2$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=1/\sqrt{3}$. **13.** $\sin\alpha = 1/2$, $\mathrm{tg}\,\alpha=1/\sqrt{3}$, $KM=9(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **14.** $AB=3\sqrt{10}$, $AD = 12$, $\sin\alpha=2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. **15.** $\sin\alpha = 12/13$, $\cos\alpha = 5/13$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 12/5$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5/12$. **16.** $\sin\alpha=5/\sqrt{34}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 5/3$.

Таблица 19

1. 30°. **2.** 150°. **3.** 120°. **4.** 60°. **5.** 120°. **6.** $MT = 15$, $LT = 9$. **7.** 4. **8.** 11. **9.** $AB = 12$, $CD = 16$. **10.** 2. **11.** 24. **12.** $MK = 24$, $NT = 24$. **13.** 42. **14.** 12,5. **15.** 16. **16.** $AM = AN = 18$.

Таблица 20

1. 45°. **2.** 30°. **3.** 140°. **4.** 120°. **5.** 6. **6.** $9\sqrt{2}$. **7.** 6. **8.** 4. **9.** 100°. **10.** $12\sqrt{2}$. **11.** 57°. **12.** 20°. **13.** 25°. **14.** 65°. **15.** 60°. **16.** 130°. **17.** 35°. **18.** 45°. **19.** 9. **20.** 15. **21.** 16. **22.** 1. **23.** 15. **24.** 48°. **25.** 50°. **26.** 40°. **27.** 80°. **28.** 110°. **29.** 50°. **30.** 125°. **31.** 50°. **32.** 80°. **33.** 75°. **34.** 10. **35.** 10. **36.** 18. **37.** 12. **38.** 6. **39.** 17. **40.** 5.

Таблица 21

1. 17°. **2.** 32°. **3.** 170°. **4.** 7. **5.** $6\sqrt{3}$. **6.** 20°. **7.** 24. **8.** $2\sqrt{61}$. **9.** 120°. **10.** 130°. **11.** 67,5. **12.** $9\sqrt{3}$. **13.** $5\sqrt{2}$. **14.** 28. **15.** 15. **16.** 5,6. **17.** 130°. **18.** 20°. **19.** 4. **20.** 10. **21.** 21. **22.** 2 : 3. **23.** 2/3. **24.** 23/12.

Таблица 22

1. 12,5. **2.** 86. **3.** 72. **4.** 36. **5.** 7,2. **6.** 6. **7.** $20(\sqrt{3}+1)$. **8.** 30 или 40. **9.** 128. **10.** $16\sqrt{3}$. **11.** 13. **12.** 10. **13.** 216. **14.** 25/6. **15.** 65/8. **16.** 6. **17.** 20/3. **18.** 16. **19.** 28. **20.** 25. **21.** 96. **22.** $3\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)$. **23.** $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. **24.** 3. **25.** 6. **26.** 96. **27.** 30. **28.** 108. **29.** 75/8. **30.** $16\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **31.** $12\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **32.** 5. **33.** 25. **34.** 25. **35.** 48. **36.** 15. **37.** 6. **38.** 12.

39. 18/29. **40.** 3. **41.** 18. **42.** 6. **43.** $144\sqrt{2}$. **44.** 3. **45.** 80. **46.** $5\sqrt{3}$. **47.** 384. **48.** 15. **49.** 48. **50.** 36. **51.** 168. **52.** 20. **53.** $AB = 21$, $BC = 9$, $CD = 6$, $AD = 18$. **54.** $48\sqrt{3}$. **55.** $5\sqrt{2}$. **56.** 10. **57.** 600. **58.** 180. **59.** 4,2. **60.** 24. **61.** 40. **62.** 3. **63.** 30°. **64.** 12. **65.** 288. **66.** 9,6. **67.** 300. **68.** 10. **69.** 60°. **70.** 60°. **71.** 11. **72.** 15.

Таблица 23

1. 6. **2.** 15. **3.** 6. **4.** 13. **5.** 8. **6.** 2. **7.** $\sqrt{194}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{89}$. **8.** $8\sqrt{3}$. **9.** 32. **10.** 36. **11.** 12. **12.** 12. **13.** 6. **14.** $\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$. **15.** $\frac{7}{5}\vec{m}-\frac{2}{5}\vec{n}$. **16.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **17.** $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **18.** а) $a\sqrt{3}$; б) a; в) $a\sqrt{3}$; г) a; д) a. **19.** 1) −4; 2) 20; 3) 28; 4) 20; 5) 28; 6) 20; 7) −4; 8) 20. **20.** $\overrightarrow{BM}=-\vec{m}$, $\overrightarrow{NC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{MN}=-\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{BN}=-2\vec{m}+\vec{n}$. **21.** $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{6}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **22.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **23.** $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$. **24.** $-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$. **25.** $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\vec{m}-\vec{n}$. **26.** $\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{KB}=-\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$. **27.** $\overrightarrow{RK}=-\vec{n}$, $\overrightarrow{KT}=-\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{SR}=\vec{m}-\vec{n}$. **31.** 3. **33.** $\frac{1}{3}a$. **34.** $\frac{2}{3}b$. **35.** $\overrightarrow{KE}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{NM}=2\vec{b}-2\vec{a}$, $\overrightarrow{NF}=\vec{b}-2\vec{a}$. **36.** $\overrightarrow{TC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{LK}=2\vec{b}-2\vec{a}$, $\overrightarrow{LB}=\vec{b}-2\vec{a}$. **37.** $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **38.** $\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$. **40.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{KR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{LT}$.

Таблица 24

1. 6. **2.** 10. **3.** $ST = 10$, $MN = 20$. **4.** $MN = 5$, $DC = 3$. **5.** $KL = 9$. **6.** $RT = 26$, $EF = 18$. **7.** 8. **8.** 4. **9.** 0,5. **10.** 30. **11.** 9,8. **12.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **13.** 5. **14.** 14. **15.** $4\sqrt{3}$. **16.** 12. **17.** 19. **18.** 12. **19.** 18. **20.** 7,5. **21.** 8. **22.** 10. **23.** 14,15. **24.** $BC = 2$, $AD = 6$.

СОДЕРЖАНИЕ

EAC

0+

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ

8 класс

Профильный уровень

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,9. Тираж 3500 экз.
Заказ № 4613.

ООО «Феникс»
344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

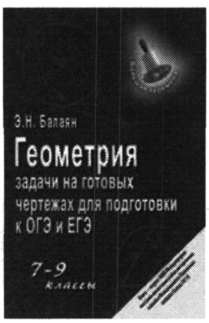
Изготовлено в России. Дата изготовления 06.2018.

Изготовитель: АО «Первая Образцовая типография»
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, Россия, Ульяновская обл.,
г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

Вышли в свет

Э. Н. Балаян

Геометрия.
Задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. 7–9 классы



Предлагаемое вниманию читателя пособие содержит более 1000 разноуровневых задач и упражнений по основным темам программы геометрии (планиметрии) 7–9 классов, скомпонованных в 3 комплекта по готовым чертежам. 7 класс содержит 12 таблиц, 8 класс — 25, 9 — 12 таблиц.

Эти упражнения дают возможность учителю в течение минимума времени решить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами. К наиболее трудным задачам приведены решения и указания.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, студентам — будущим учителям, учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также выпускникам для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ.